



Universidade de Vigo

Trabajo Fin de Máster

---

# Comparación de metodologías para el modelado espacial: caso de estudio en el ámbito de la gestión pesquera

---

Sara Raposeiras Mariño

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2025-2026



## Propuesta de Trabajo Fin de Máster

<p><b>Título en galego:</b> Comparación de metodoloxías para o modelado espacial: caso de estudo no ámbito da xestión pesqueira</p>
<p><b>Título en español:</b> Comparación de metodoloxías para el modelado espacial: caso de estudio en el ámbito de la gestión pesquera</p>
<p><b>English title:</b> Comparison of methodologies for spatial modeling: a case study in fisheries management</p>
<p><b>Modalidad:</b> Modalidad B</p>
<p><b>Autor/a:</b> Sara Raposeiras Mariño, Universidade de Santiago de Compostela</p>
<p><b>Director/a:</b> Javier Roca Pardiñas, Universidade de Vigo</p>
<p><b>Tutor/a:</b> Marta Cousido-Rocha, Instituto Español de Oceanografía (IEO-CSIC); Santiago Cerviño, Instituto Español de Oceanografía (IEO-CSIC)</p>
<p><b>Breve resumen del trabajo:</b></p> <p>En este trabajo se estudia el comportamiento de modelos de regresión con componentes espaciales en el predictor ajustados mediante INLA en escenarios donde existe dependencia espacial, para evaluar cómo la inclusión de diferentes efectos espaciales en el modelo afecta a su capacidad predictiva.</p>
<p><b>Recomendaciones:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Interés por el modelado espacial.</li> <li>■ Curiosidad por la estadística bayesiana y frecuentista: Motivación para comprender los principios fundamentales de ambos enfoques.</li> <li>■ Dominio de R.</li> </ul>
<p><b>Otras observaciones:</b></p>



Don Javier Roca Pardiñas, catedrático de la Universidade de Vigo, doña Marta Cousido-Rocha, M3 del Instituto Español de Oceanografía (IEO-CSIC), y don Santiago Cerviño, investigador científico del Instituto Español de Oceanografía (IEO-CSIC), informan que el Trabajo Fin de Máster titulado

**Comparación de metodologías para el modelado espacial: caso de estudio en el ámbito de la gestión pesquera**

fue realizado bajo su dirección por doña Sara Raposeiras Mariño para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, dan su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

sí                       no

autorizan a la publicación de la memoria en el repositorio de acceso público asociado al Máster en Técnicas Estadísticas.

En Vigo, a 3 de Junio de 2026.

El director:

La tutora:

Don Javier Roca Pardiñas

Doña Marta Cousido-Rocha

El tutor:

La autora:



Don Santiago Cerviño

Doña Sara Raposeiras Mariño

---

**Declaración responsable.** Para dar cumplimiento a la Ley 3/2022, de 24 de febrero, de convivencia universitaria, referente al plagio en el Trabajo Fin de Máster (Artículo 11, [Disposición 2978 del BOE núm. 48 de 2022](#)), **el/la autor/a declara** que el Trabajo Fin de Máster presentado es un documento original en el que se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones relativas al uso de material de apoyo desarrollado por otros/as autores/as:

- Todas las fuentes usadas para la elaboración de este trabajo han sido citadas convenientemente (libros, artículos, apuntes de profesorado, páginas web, programas, . . .)
- Cualquier contenido copiado o traducido textualmente se ha puesto entre comillas, citando su procedencia.
- Se ha hecho constar explícitamente cuando un capítulo, sección, demostración, . . . sea una adaptación casi literal de alguna fuente existente.

Y, acepta que, si se demostrara lo contrario, se le apliquen las medidas disciplinarias que correspondan.



# Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias al equipo del Instituto Español de Oceanografía de Vigo por permitirme realizar este trabajo con ellos y por haberme acogido tan bien. En especial, a mis tutores, Santiago Cerviño y Marta Cousido, por la enorme ayuda prestada, sin la que habría sido imposible sacar este trabajo adelante.

También me gustaría agradecer a la Coordinación del Máster en Técnicas Estadísticas por facilitarme la oportunidad de llevar a cabo este proyecto, y a Javier Roca por dirigirlo.

Por último, agradecer a mis amigas, por acompañarme y apoyarme durante todos estos meses, y a mi familia, cuyo esfuerzo me ha permitido vivir esta experiencia.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>Prefacio</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción y motivación del problema</b>	<b>1</b>
1.1. Instituto Español de Oceanografía	1
1.2. Importancia de los recursos pesqueros	2
1.3. Importancia del modelado espacial	2
1.4. Uso de INLA	3
1.5. Problema de estudio	4
<b>2. Metodología</b>	<b>7</b>
2.1. Dependencia y pseudorreplicación	7
2.2. Enfoque bayesiano	11
2.3. Metodología INLA	13
2.3.1. Integrated Nested Laplace Approximation	13
2.3.2. Correlación de Matérn	14
2.3.3. Aproximación SPDE	15
2.4. Diseño del estudio de simulación	17
2.4.1. Dominio espacial	18
2.4.2. Generación de los campos espaciales	18
2.4.3. Muestreo	21
2.4.4. Modelos INLA	22
2.4.5. Monte Carlo	24
2.5. Medidas de evaluación	24
2.5.1. Medidas de ajuste del modelo	26
2.5.2. Medidas de error	27
2.5.3. Resumen Monte Carlo de las medidas	28
<b>3. Resultados</b>	<b>31</b>
3.1. Escenarios con una única fuente de dependencia espacial	31
3.1.1. Escenario con sólo efecto espacial residual	32
3.1.2. Escenario con sólo efecto espacial de la covariable	34
3.2. Escenario con doble componente espacial	37
3.2.1. Modelo INLA correctamente especificado	37
3.2.2. Modelo INLA sin efecto espacial residual	40
3.2.3. Modelo INLA sin coeficiente espacialmente variable	43
3.2.4. Modelo INLA con efecto RW2 en la covariable	44
3.2.5. Conclusiones	47
3.3. Efecto del tipo de muestreo	49
3.4. Efecto del tamaño muestral	52

3.5. Efecto del error aleatorio independiente . . . . .	54
3.6. Efecto de la correlación entre componentes espaciales . . . . .	57
<b>4. Conclusiones</b>	<b>63</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Resumen

## Resumen en español

En el ámbito de la gestión de recursos pesqueros, el modelado espacial es una herramienta fundamental que permite describir y comprender el comportamiento espacial de una especie, por ejemplo, proporcionando mapas de presencia y/o abundancia. La estructura espacial presente en este tipo de datos requiere el uso de metodologías que incorporen adecuadamente dicha dependencia. Entre las diversas técnicas para el ajuste de modelos de regresión espacial, una de las más usadas es el modelado bayesiano mediante INLA (*Integrated Nested Laplace Approximation*), que permite incorporar de forma explícita la estructura de dependencia espacial dentro del modelo, añadiendo una complejidad extra respecto a las metodologías tradicionales. La forma en la que se especifica esta dependencia espacial puede afectar significativamente al comportamiento y la capacidad predictiva de estos modelos. En el presente trabajo analizaremos el comportamiento de modelos de regresión espaciales ajustados mediante INLA a través de un estudio de simulación en el que consideraremos distintos escenarios con diferentes estructuras espaciales, con el fin de comprender mejor cómo se comportan ante distintas configuraciones espaciales y especificaciones del modelo. En particular, estudiaremos cómo afecta la forma en la que se especifica la dependencia espacial a la capacidad predictiva de los modelos y a su capacidad para recuperar la estructura subyacente de los datos, todo ello con el objetivo de derivar conclusiones que sean de utilidad cuando estos modelos se emplean en la práctica en el contexto de la evaluación y gestión sostenible de recursos pesqueros.

## English abstract

In the field of fisheries resource management, spatial modelling is a fundamental tool that enables the description and understanding of the spatial behaviour of a species, for example by providing maps of presence and/or abundance. The spatial structure present in this type of data requires the use of methodologies capable of adequately accounting for this spatial dependence. Among the various techniques for fitting spatial regression models, one of the most widely used is Bayesian modelling using INLA (*Integrated Nested Laplace Approximation*), which allows the spatial dependency structure to be explicitly incorporated into the model, adding an extra layer of complexity compared to traditional methodologies. The way in which this spatial dependency is specified can significantly affect the behaviour and predictive performance of these models. In this paper, we will analyse the behaviour of spatial regression models fitted using INLA through a simulation study in which we will consider different scenarios with varying spatial structures, to better understand their response to different spatial configurations and model specifications. In particular, we will examine how the way in which spatial dependence is specified affects the predictive performance of the models and their ability to capture the underlying structure of the data, with the aim of drawing conclusions that are useful when these models are applied in practice in the context of the assessment and sustainable management of fishery resources.



# Prefacio

El presente trabajo ha sido desarrollado en el marco de mis prácticas del Máster en Técnicas Estadísticas, realizadas en el Instituto Español de Oceanografía (IEO-CSIC), dentro del grupo de investigación METMAR, centrado en el desarrollo de metodología para la evaluación y la gestión de los recursos marinos vivos.

En el ámbito de la gestión de recursos pesqueros es habitual trabajar con datos que presentan una clara estructura espacial, lo que hace necesario utilizar metodologías que incorporen adecuadamente la dependencia espacial presente en las observaciones. En este contexto, el modelado espacial constituye una herramienta fundamental, pues permite describir y comprender el comportamiento espacial de una especie de interés, por ejemplo, proporcionando mapas de presencia y/o abundancia de la especie en diferentes áreas geográficas, como los obtenidos en [11], [15] o [20]. Gracias a su flexibilidad y a su eficiencia computacional, una de las metodologías más utilizadas actualmente para ajustar este tipo de modelos es INLA (*Integrated Nested Laplace Approximation*), propuesta por Rue et al. en [21], que mediante un enfoque bayesiano permite incorporar explícitamente la estructura de dependencia espacial dentro del modelo.

Así, en este trabajo llevaremos a cabo un análisis del comportamiento de los modelos de regresión espaciales ajustados mediante INLA, con el objetivo de obtener conclusiones que sean de utilidad en la implementación práctica de este tipo de modelos en el contexto de la evaluación y la gestión sostenible de los recursos pesqueros. En particular, estudiaremos cómo afecta la forma en la que se incorpora la dependencia espacial dentro del predictor tanto a la capacidad predictiva del modelo como a la interpretación del efecto que las diferentes componentes espaciales consideradas tienen sobre la variable respuesta. Para ello, realizaremos un estudio de simulación en el que consideraremos distintos escenarios donde la variable respuesta se deriva del efecto de diferentes componentes espaciales, y sobre estos datos ajustaremos distintos modelos INLA correcta e incorrectamente especificados. El uso de simulaciones nos permite tener el control sobre los efectos que influyen en la realidad simulada y analizar el efecto de distintos factores sobre el comportamiento del modelo, algo difícil de conseguir cuando se trabaja con datos reales, pues en esos casos la realidad es desconocida y consecuentemente sólo podemos observar cómo cambian los resultados del modelo INLA dependiendo de su formulación, pero no podemos concluir cuál tiene un funcionamiento más adecuado.

Con este objetivo en mente, estructuramos el trabajo en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 presentamos el problema de estudio y justificamos su relevancia, haciendo hincapié en la importancia del modelado espacial en el ámbito de la gestión pesquera y en las ventajas de la metodología INLA. El Capítulo 2 contiene la metodología del estudio. En él introducimos los conceptos estadísticos necesarios para comprender el funcionamiento de esta metodología, presentando conceptos como el enfoque bayesiano, la correlación de Matérn o la aproximación SPDE (*Stochastic Partial Differential Equation*) propuesta por Lindgren et al. en [17], y posteriormente describimos el estudio de simulación llevado a cabo, detallando los distintos escenarios espaciales considerados. Por su parte, el Capítulo 3 estará dedicado al análisis del comportamiento de los modelos ajustados en los distintos escenarios de simulación planteados. Estudiaremos los efectos de considerar diferentes especificaciones del predictor

espacial y de realizar distintas variaciones en el diseño de simulación, analizando cómo estas afectan tanto a la capacidad predictiva del modelo como a la estimación de los diferentes efectos espaciales considerados en el predictor de la respuesta. Por último, utilizaremos el Capítulo 4 para presentar las conclusiones que se derivan del estudio.

# Capítulo 1

## Introducción y motivación del problema

### 1.1. Instituto Español de Oceanografía

El presente trabajo ha sido llevado a cabo bajo la coordinación del Instituto Español de Oceanografía (IEO), un Centro Nacional del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) que depende del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades. Se trata de un Organismo Público de Investigación (OPI) dedicado a las ciencias del mar, especialmente en lo relacionado con el conocimiento científico de los océanos, la sostenibilidad de los recursos pesqueros y el medio ambiente marino.

El IEO cuenta con una sede central situada en Madrid y con nueve centros oceanográficos costeros localizados en diversos puntos de España, entre ellos Vigo, donde se ha realizado este trabajo, y también A Coruña, Baleares, Cádiz, Canarias, Gijón, Málaga, Murcia y Santander. También cuenta con cinco plantas de experimentación de cultivos marinos, 12 estaciones mareográficas, una estación receptora de imágenes de satélites y una flota compuesta por cinco buques oceanográficos.

Las funciones básicas del IEO incluyen la investigación científica en oceanografía y ciencias del mar y el estudio multidisciplinar del mar; el asesoramiento a la Administración General del Estado en su política pesquera y marina en general; la representación de España en las organizaciones internacionales de pesquerías y ciencias marinas; la promoción de la cooperación en investigación marina a escala regional, nacional e internacional; y la formación de investigadores marinos y la difusión de los conocimientos oceanográficos [10].

Dentro de las diversas áreas de investigación del IEO, este trabajo se enmarca dentro del área de pesquerías, cuyo objetivo es conocer el estado de conservación de los stocks<sup>1</sup> de peces, moluscos y crustáceos de interés para las flotas españolas, con el fin de proporcionar asesoramiento científico a las administraciones responsables de la gestión sostenible de los recursos pesqueros. En particular, el trabajo se ha realizado en colaboración con miembros del grupo de investigación METMAR (Métodos en Ecología y evaluación de recursos marinos vivos), centrado en el desarrollo de metodología para la evaluación<sup>2</sup> y la gestión de los recursos marinos vivos.

---

<sup>1</sup>Un stock pesquero es una población de peces de la misma especie que se considera una unidad para su estudio y gestión.

<sup>2</sup>La evaluación de recursos pesqueros es una especialidad cuyo objetivo principal es asesorar sobre la explotación óptima de los recursos acuáticos vivos para la gestión sostenible. Hillborn y Walters (1992) define la evaluación de recursos pesqueros como la utilización de cálculos matemáticos y estadísticos para hacer predicciones cuantitativas sobre las respuestas de las poblaciones de peces (stocks) a alternativas de gestión [6].

## 1.2. Importancia de los recursos pesqueros

La pesca es una actividad de gran importancia en todo el mundo, no sólo a nivel económico, sino también a nivel social y ecológico. Según la FAO (Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura), la pesca produce más de 100 millones de toneladas de pescado y productos pesqueros al año y representa una fuente esencial de proteínas animales para una gran parte de la población mundial, especialmente en los países más pobres. Además, supone el medio de vida de 200 millones de personas alrededor del mundo, sobre todo en áreas costeras, donde tiene también una gran importancia cultural e identitaria [2].

Desde un punto de vista ecológico, las poblaciones de peces representan una parte esencial de los ecosistemas marinos. Así, en las últimas décadas, la intensificación de la actividad pesquera y el aumento de la demanda han derivado en la sobreexplotación de los recursos pesqueros y, consecuentemente, en la degradación de hábitats marinos y en la pérdida de biodiversidad. Esta situación expone la necesidad de implantar medidas que garanticen la conservación de los ecosistemas marinos y la disponibilidad de estos recursos a largo plazo, es decir, de avanzar hacia un desarrollo sostenible, concepto que la FAO define como:

*«La ordenación y conservación de la base de recursos naturales y la orientación del cambio tecnológico e institucional de forma que garantice la satisfacción continua de las necesidades humanas para las generaciones actual y futuras. Este desarrollo sostenible conserva la tierra, el agua, las plantas y los recursos genéticos (animales), no degrada el medio ambiente, y es tecnológicamente apropiado, económicamente viable y socialmente aceptable»* (Consejo de la FAO, 1988) [2].

De esta manera, la pesca sostenible es aquella basada en la explotación de los recursos pesqueros de forma que puedan mantener su capacidad de regeneración, es decir, sin llegar a niveles que pongan en riesgo su viabilidad futura, encontrando un equilibrio entre el beneficio social y el económico.

Para llevar este objetivo a cabo es necesario contar con herramientas que permitan evaluar el estado de los recursos para poder tomar decisiones sobre qué medidas hay que implementar para su gestión sostenible: la fijación de límites de captura (cantidad máxima que puede pescarse), el establecimiento de vedas en determinadas áreas para proteger la reproducción, o la regulación de tallas mínimas, entre otras. En este contexto son imprescindibles los modelos de evaluación de stocks, los cuales integran los datos procedentes de la actividad pesquera con modelos matemáticos de dinámica poblacional permitiendo estimar cuantitativamente variables clave como la biomasa o la mortalidad por pesca. Los modelos de evaluación de stocks permiten estudiar las poblaciones de recursos pesqueros y predecir cómo se comportarán frente a diferentes niveles de explotación, para poder tomar decisiones fundamentadas sobre su gestión [1]. De este modo, constituyen un vínculo esencial entre el conocimiento científico y la gestión pesquera, que juega un papel clave a la hora de adoptar medidas enfocadas a la sostenibilidad.

## 1.3. Importancia del modelado espacial

Los datos pesqueros presentan una clara componente espacial. Las condiciones ambientales del océano como la temperatura, la profundidad o el tipo de fondo cambian según la localización, lo que hace que las especies no se distribuyan de forma aleatoria, sino que se concentren en ciertas zonas. Además, la propia actividad pesquera también se centra en áreas concretas. Como consecuencia, las observaciones cercanas tienden a ser más similares entre sí que las lejanas, por lo que no deben considerarse independientes. En concreto, variables como la presencia o ausencia de una especie en una

localización, así como su abundancia, están fuertemente influidas por factores geográficos y ambientales, hasta el punto en el que ignorar esta autocorrelación espacial puede resultar en que las conclusiones de nuestro análisis sean erróneas [15].

Una de las principales fuentes de información de entrada en los modelos de evaluación de stocks son los índices de biomasa [1]. Un índice de biomasa es una serie temporal que proporciona una medida relativa de la abundancia de una población en el tiempo, generalmente derivada de campañas científicas o datos de pesca comercial. Entre ellos cabe destacar la captura por unidad de esfuerzo (CPUE), que constituye una de las medidas indirectas de abundancia más utilizadas [13]. Estos índices se utilizan dentro de los modelos de evaluación como indicadores de la evolución del tamaño del stock y constituyen una pieza clave para estimar su estado y dinámica. Sin embargo, la construcción de estos índices no está exenta de complejidad, ya que las observaciones en las que se basan presentan una marcada estructura espacial. En particular, la distribución de las especies y el esfuerzo de muestreo no son homogéneos en el espacio, lo que puede introducir sesgos si no se tiene en cuenta dicha estructura. Por este motivo, se emplean modelos espaciales en el proceso de estandarización de los índices de biomasa [11], con el objetivo de aislar el efecto de la abundancia del de otros factores, como cambios en el esfuerzo pesquero o en la eficiencia de la flota, corregir posibles efectos espacio-temporales y obtener series más representativas de la abundancia real del stock [3].

El modelado espacial no se utiliza solo en la estandarización de índices de biomasa, también presenta múltiples aplicaciones en el ámbito pesquero, entre las que podemos destacar la predicción de la distribución espacial de las especies, tanto en términos de presencia o ausencia como de abundancia. Los modelos espaciales generan mapas predictivos que integran la información procedente de datos pesqueros, como capturas, con variables ambientales que condicionan la distribución de las especies [15], generando conocimiento que sirve de apoyo en la toma de decisiones en el ámbito de la gestión pesquera. Por ejemplo, en el caso de mapas de abundancia de reclutamiento<sup>3</sup>, estos permiten identificar zonas de concentración de individuos juveniles, lo que resulta clave para la gestión pesquera, ya que posibilita el establecimiento de medidas de protección espacial o temporal, como vedas destinadas a reducir la captura de ejemplares inmaduros.

## 1.4. Uso de INLA

En el contexto del modelado espacial aplicado a datos pesqueros, es habitual emplear un enfoque bayesiano. Dentro de este marco, resulta especialmente relevante la metodología *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA), que permite realizar inferencia bayesiana de forma eficiente en modelos latentes gaussianos, es decir, modelos en los que la variabilidad observada se explica mediante una combinación de covariables (efectos fijos) y un componente no observado (habitualmente un campo aleatorio con estructura espacial y/o temporal), ambos integrados en un predictor lineal y en los que dicho componente latente se asume con distribución gaussiana. Este enfoque abarca desde modelos lineales generalizados hasta modelos espaciales y espacio-temporales.

Además, para modelar la dependencia espacial presente en el componente latente, INLA emplea ecuaciones diferenciales parciales estocásticas (SPDE, *Stochastic Partial Differential Equation*), que proporcionan una forma eficiente de representar este campo espacial mediante una ecuación estocástica que, en la práctica, se aproxima sobre una malla discreta dentro del marco de INLA. Esta metodología permite trabajar con diversos tipos de datos espaciales, dotando a INLA de una gran flexibilidad [16].

---

<sup>3</sup>El reclutamiento se refiere al número de individuos de una cohorte que alcanza la edad o tamaño de entrada a la pesquería y pasa a formar parte del stock explotable.

Otro aspecto importante de INLA es que evita el uso de métodos de simulación como MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*), de forma que permite obtener resultados de manera computacionalmente más eficiente, lo que facilita su aplicación en problemas con un gran volumen de datos. Además, su implementación resulta sencilla a través del paquete R-INLA [16].

En el contexto pesquero, INLA ha sido utilizado en aplicaciones mencionadas anteriormente, como la modelización de la distribución de especies o la estandarización de índices de biomasa. Pueden encontrarse numerosos ejemplos en la literatura, como [15], donde se utiliza un modelo bayesiano jerárquico espacial basado en INLA para predecir la presencia/ausencia de la caballa Mediterránea. A su vez, en [11] se usa INLA para ajustar modelos bayesianos jerárquicos espacio-temporales para estandarizar los datos de CPUE de la sardina europea, incorporando explícitamente la estructura espacio-temporal de los datos y variables medioambientales relacionadas con la actividad pesquera. Asimismo, en [12] se emplean modelos bayesianos ajustados mediante INLA para analizar la distribución espacio-temporal de los reclutas de merluza europea en el norte de la Península Ibérica. Del mismo modo, en [20] se utilizan modelos espacio-temporales bayesianos basados en INLA para identificar áreas persistentes de biomasa de lenguado común en aguas del norte ibérico.

## 1.5. Problema de estudio

Por los motivos descritos anteriormente, este trabajo se centra en la metodología INLA. Como se ha comentado, INLA se basa en modelos latentes gaussianos, en los que la variabilidad observada se explica mediante un predictor que incluye covariables y un campo latente no observado. Este campo latente representa la estructura espacial (y eventualmente temporal) del fenómeno de interés, capturando la dependencia entre observaciones cercanas en el espacio, y constituye la componente que habitualmente se interpreta como la estructura espacial no explicada por las covariables.

En la práctica, la inclusión de este campo en el predictor del modelo INLA permite modelar de forma explícita la dependencia espacial, de manera que las covariables recogen los efectos explicativos observados, mientras que el campo latente recoge la variación residual estructurada en el espacio. Esto puede dar lugar a que, en algunos casos, parte de la variabilidad asociada a covariables espacialmente correlacionadas se refleje en el campo latente, fenómeno conocido como *spatial confounding*, que puede afectar a la interpretación de los efectos estimados [7]. El *spatial confounding* es un problema de interés en la literatura, tratado en numerosos artículos como [7], [5] o [8]. Sin embargo, no se han encontrado muchos trabajos que estudien de forma sistemática este fenómeno en el contexto específico de modelos ajustados mediante INLA.

El objetivo de este trabajo es estudiar cómo afecta la manera en la que se incorpora al modelo la dependencia espacial a la capacidad predictiva y a la interpretación de los efectos estimados de los modelos ajustados mediante INLA. Esto se hace mediante un estudio de simulación, ya que en aplicaciones reales no se conoce la estructura espacial verdadera subyacente y, por tanto, no es posible derivar conclusiones. En particular, se pretende evaluar en qué medida el *spatial confounding* está presente bajo distintos escenarios simulados y cuál es su impacto en la capacidad predictiva del modelo y en la interpretación de los efectos de las covariables.

Asimismo, en la práctica es habitual asumir que los coeficientes asociados a las covariables son constantes en el espacio, es decir, que no dependen de la localización. Esto se hace por simplicidad, aunque habitualmente, por el tipo de variables consideradas, sí se espera que su efecto en la respuesta varíe en función de la localización. INLA permite la introducción de coeficientes espacialmente variables, por lo cual consideraremos esta formulación en nuestro estudio para analizar el funcionamiento de INLA con esta formulación más compleja, y cómo esta afecta al posible *spatial confounding*.

Finalmente, se investigará cómo estos efectos dependen de distintos factores del diseño experimental, como el tipo de muestreo, el nivel de error aleatorio no estructurado en los datos simulados y el tamaño muestral, ya que estos elementos pueden influir de manera determinante tanto en la capacidad predictiva como en la interpretabilidad del modelo, al afectar a la separación entre efectos asociados a covariables y estructura espacial.



## Capítulo 2

# Metodología

En este capítulo nos centraremos en explicar los principales conceptos y herramientas metodológicas que utilizaremos posteriormente a lo largo del trabajo. Empezaremos introduciendo los conceptos de dependencia espacial y temporal, y los problemas que supone no tenerlas en cuenta, en particular la pseudorreplicación. En segundo lugar, presentaremos los fundamentos del enfoque bayesiano. Después, introduciremos la metodología INLA, y revisaremos los principales conceptos que constituyen su base teórica. En particular, estudiaremos la correlación de Matérn, donde el efecto espacial se representa como un proceso continuo con estructura de dependencia espacial, y la formulación SPDE (*Stochastic Partial Differential Equation*), que permite representar de forma computacionalmente eficiente estos campos espaciales continuos mediante *Gaussian Markov Random Fields* (GMRF) definidos sobre una malla espacial. A continuación, describiremos el diseño del estudio de simulación llevado a cabo: cómo han sido generados los distintos escenarios espaciales, los diferentes esquemas de muestreo que hemos utilizado y las formulaciones de los modelos INLA que hemos ajustado en cada caso. Por último, terminaremos definiendo las medidas de evaluación que utilizamos para poder analizar y comparar el comportamiento de los distintos modelos ajustados a lo largo del trabajo, tanto en términos de capacidad predictiva como de estimación de la estructura espacial simulada.

### 2.1. Dependencia y pseudorreplicación

En los métodos estadísticos clásicos es muy habitual asumir que las observaciones son independientes entre sí, pues en muchos casos es una hipótesis razonable y que además simplifica considerablemente el problema de estudio. En particular, muchos modelos de regresión asumen una estructura de covarianza del tipo

$$Cov(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I,$$

donde  $Cov(\varepsilon)$  representa la matriz de covarianzas del vector de errores,  $\sigma^2$  la varianza residual e  $I$  la matriz identidad. Es decir, se asume que las observaciones no están correlacionadas entre sí. Sin embargo, cuando sí existe dependencia entre las observaciones, esta hipótesis deja de cumplirse, lo que puede afectar a la eficiencia de los estimadores y hacer incorrectos los errores estándar habituales, invalidando la inferencia clásica basada en ellos.

Como ya hemos comentado anteriormente, en el ámbito de la gestión pesquera los datos suelen presentar una clara estructura de dependencia espacial y temporal: observaciones próximas en el espacio o en el tiempo tienden a parecerse [15]. Esta característica hace que asumir la hipótesis de independencia sobre ellos no sea adecuado. En concreto, ignorar esta dependencia puede conducirnos a la pseudorreplicación, uno de los problemas más frecuentes en el análisis de datos ecológicos.

La pseudorreplicación ocurre cuando tratamos una situación en la que las observaciones son dependientes como si hubiera independencia. Algunos escenarios típicos en los que se suele dar este fenómeno son, por ejemplo, aquellos en los que se toman varias medidas sobre un mismo individuo, en los que tenemos múltiples observaciones de una misma área, clase o grupo, o en los que recogemos datos que son espacial o temporalmente próximos. El hecho de ignorar la dependencia de las observaciones provoca una sobreestimación de la información real que aportan los datos y, en consecuencia, puede dar lugar a estimaciones sesgadas y errores estándar subestimados, lo que puede derivar en que las conclusiones de nuestro análisis sean erróneas [24].

La dependencia entre observaciones puede aparecer de distintas formas. A lo largo de este trabajo nos centraremos esencialmente en la dependencia espacial, pero también es importante mencionar la dependencia temporal. Si bien en aplicaciones reales ambos tipos de dependencia suelen aparecer simultáneamente, en este estudio nos enfocaremos únicamente en la componente espacial para poder estudiar de forma aislada el efecto de las distintas especificaciones espaciales sobre el comportamiento de los modelos, evitando añadir una complejidad adicional derivada de la dependencia temporal que complique la interpretación de los resultados y la obtención de conclusiones.

La dependencia temporal aparece cuando las observaciones cercanas en el tiempo tienden a ser más similares entre sí que aquellas más alejadas temporalmente. Aparece a menudo en series temporales y, en el contexto de la gestión de recursos pesqueros, suele deberse a procesos ambientales o dinámicas poblacionales que evolucionan gradualmente con el tiempo.

Por otro lado, la dependencia espacial aparece cuando las observaciones cercanas geográficamente tienden a presentar características similares, normalmente debido a que comparten factores ambientales o biológicos a causa de su proximidad. Como ya comentamos anteriormente, algunas de las variables más relevantes en el ámbito de la gestión pesquera como los índices de biomasa, la abundancia y la presencia o ausencia de una especie suelen presentar este tipo de autocorrelación espacial.

Debido a los problemas derivados de la pseudorreplicación, es fundamental estudiar la posible presencia de autocorrelación espacial o temporal, ya sea directamente en los datos observados o en los residuos de modelos de regresión que no incorporan estructuras de dependencia espacial o temporal en su predictor. Existen para ello herramientas que nos permiten detectar y comprender la estructura de dependencia, tanto espacial como temporal.

En el caso temporal, la dependencia suele estudiarse mediante representaciones gráficas de la variable respuesta o de los residuos frente al tiempo (Figura 2.1) y mediante la función de autocorrelación (ACF), que mide la correlación entre observaciones separadas por distintos retardos temporales (Figura 2.2) [24]. La presencia de autocorrelaciones significativas para retardos pequeños puede indicar la existencia de dependencia temporal en los datos o en los residuos del modelo.

En el caso espacial, una de las herramientas más utilizadas es el variograma experimental (Figura 2.3), que representa cómo varía la semivarianza entre observaciones en función de su distancia. La semivarianza se calcula como la mitad de la media de las diferencias al cuadrado entre todos los pares de observaciones separados aproximadamente por una misma distancia. Si observaciones cercanas presentan valores similares, la semivarianza será pequeña para distancias cortas y aumentará progresivamente con la distancia, indicando la presencia de dependencia espacial. También es habitual utilizar gráficos de burbujas (*bubble plots*), que permiten visualizar espacialmente los residuos y detectar posibles patrones o agrupaciones espaciales (Figura 2.4) [24].

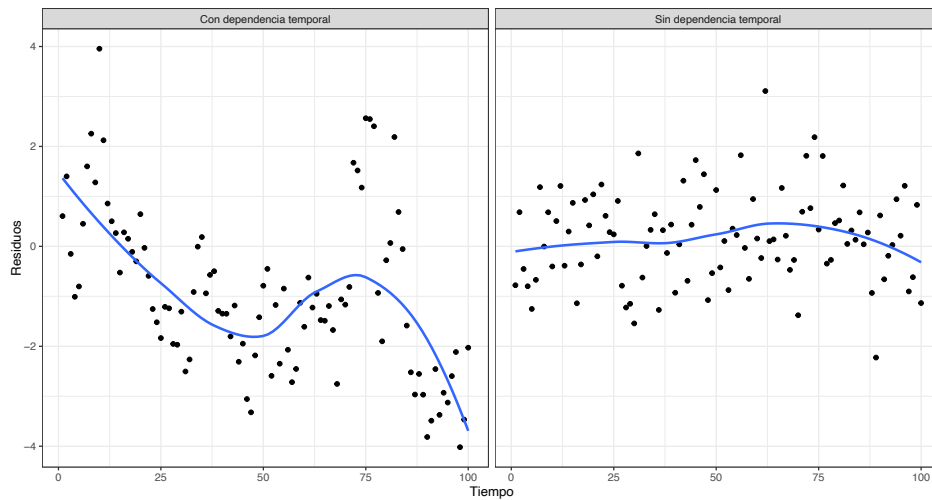


Figura 2.1: Ejemplo de representación gráfica de los residuos frente al tiempo. En la imagen de la izquierda, correspondiente a un caso en el que sí hay dependencia temporal, observamos la presencia de un claro patrón en los residuos. En la imagen de la derecha, correspondiente a un caso donde no hay dependencia temporal, los residuos aparecen distribuidos de forma aparentemente aleatoria alrededor de cero, sin mostrar una estructura temporal clara. En ambas imágenes la línea azul representa un suavizado utilizado únicamente como ayuda visual para identificar posibles tendencias temporales.

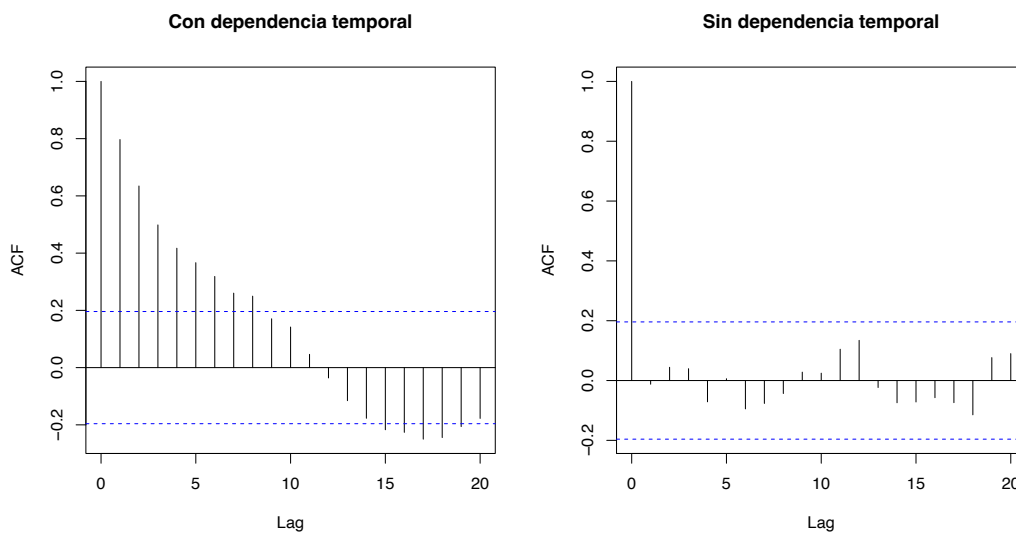


Figura 2.2: Ejemplo de función de autocorrelación (ACF). En la gráfica de la izquierda, correspondiente a un caso en el que sí hay dependencia temporal, se observa una autocorrelación positiva significativa para los primeros retardos, lo que nos indica que las observaciones próximas en el tiempo presentan una fuerte relación entre sí. En la imagen de la derecha, correspondiente a un caso donde no hay dependencia temporal, no hay ninguna autocorrelación significativa, lo que nos indica que no hay una estructura temporal en los datos.

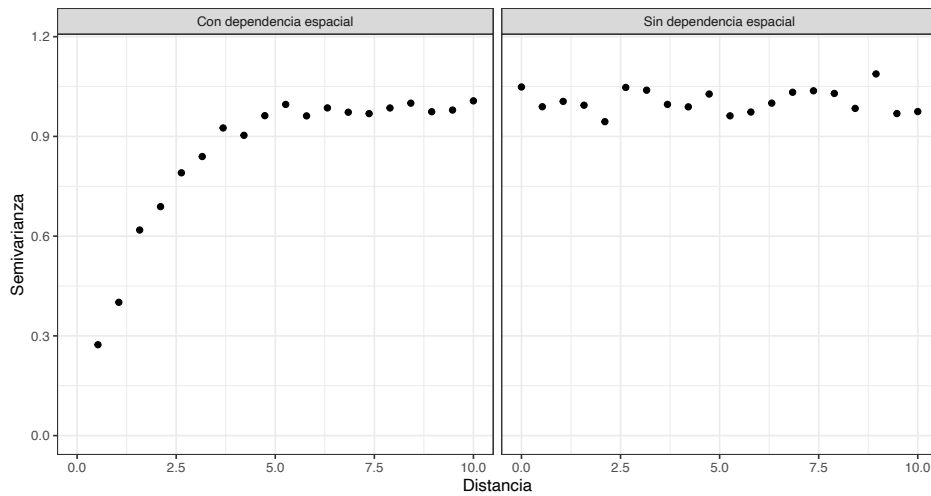


Figura 2.3: Ejemplo de variogramas experimentales. En la gráfica de la izquierda, correspondiente a un caso en el que sí hay dependencia espacial, la semivarianza aumenta con la distancia, lo que nos indica que las observaciones cercanas tienden a presentar valores más similares que observaciones alejadas. En la imagen de la derecha, correspondiente a un caso donde no hay dependencia espacial, la semivarianza permanece aproximadamente constante para todas las distancias, de lo que deducimos que no hay autocorrelación espacial.

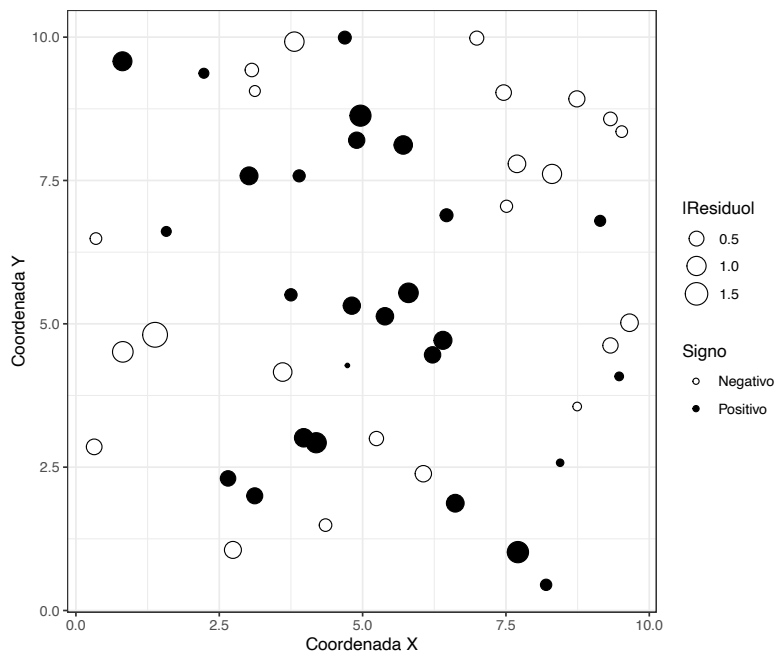


Figura 2.4: Ejemplo de diagrama de burbujas para visualizar la distribución espacial de los residuos. El tamaño de cada punto es proporcional al valor absoluto del residuo asociado a dicha localización, mientras el color del punto viene dado por el signo del residuo correspondiente: los círculos rellenos representan residuos positivos y los círculos vacíos residuos negativos. Una acumulación de puntos del mismo color o tamaño en una zona concreta nos indicaría una posible dependencia espacial.

## 2.2. Enfoque bayesiano

Como acabamos de ver, la presencia de dependencia espacial en los datos pesqueros nos exige utilizar metodologías específicas de modelado espacial que nos permitan incorporar explícitamente dicha estructura espacial. En este contexto, el enfoque bayesiano ha adquirido una gran relevancia en los últimos años gracias a su gran flexibilidad para trabajar con modelos jerárquicos complejos y con estructuras de dependencia entre observaciones [15].

Mientras que el enfoque frecuentista clásico considera los parámetros del modelo como valores fijos desconocidos, el enfoque bayesiano trata estos parámetros como variables aleatorias. En consecuencia, la incertidumbre asociada a dichos parámetros puede modelarse de forma explícita mediante distribuciones de probabilidad.

La inferencia bayesiana amplía la inferencia clásica: combina el conocimiento previo (distribución a priori) con los datos observados, proporcionando inferencias en forma de distribuciones de probabilidad sobre los parámetros, actualizadas con la nueva información aportada por las observaciones (distribución a posteriori).

La base matemática del enfoque bayesiano es el **teorema de Bayes**, que puede expresarse como

$$p(\theta | y) = \frac{p(y | \theta) \cdot p(\theta)}{p(y)},$$

donde  $p(y | \theta)$  es la **función de verosimilitud**, que mide la probabilidad de observar los datos dados los parámetros;  $p(\theta)$  es la **distribución a priori** (*prior*) de los parámetros, que refleja nuestro conocimiento previo sobre los parámetros;  $p(y)$  representa la **distribución marginal** de los datos y actúa como constante de normalización; y  $p(\theta | y)$  representa la **distribución a posteriori** (*posterior*) de los parámetros  $\theta$  dado el conjunto de datos observados  $y$ , que actualiza nuestra creencia tras observar los datos.

Así, la distribución a priori representa el conocimiento previo que tenemos sobre los parámetros antes de observar los datos. Dependiendo de la información previa disponible, podemos considerar distintos tipos de distribuciones a priori: las distribuciones a priori informativas incorporan conocimiento previo sólido sobre los parámetros y tienen mucho peso en la distribución a posteriori, mientras que las distribuciones a priori difusas o no informativas son útiles cuando no tenemos información previa específica y preferimos que los datos tengan una mayor influencia sobre la inferencia final. En la Figura 2.5 podemos apreciar claramente esta diferencia.

Una vez observados los datos, la información previa se actualiza mediante la función de verosimilitud. De este modo obtenemos la distribución a posteriori, que resume toda la información disponible sobre los parámetros tras observar los datos. A partir de esta distribución pueden obtenerse estimaciones puntuales, intervalos de credibilidad y predicciones [24].

A modo de conclusión, resumimos en el Cuadro 2.1 algunas de las principales diferencias entre el enfoque bayesiano y el enfoque frecuentista.

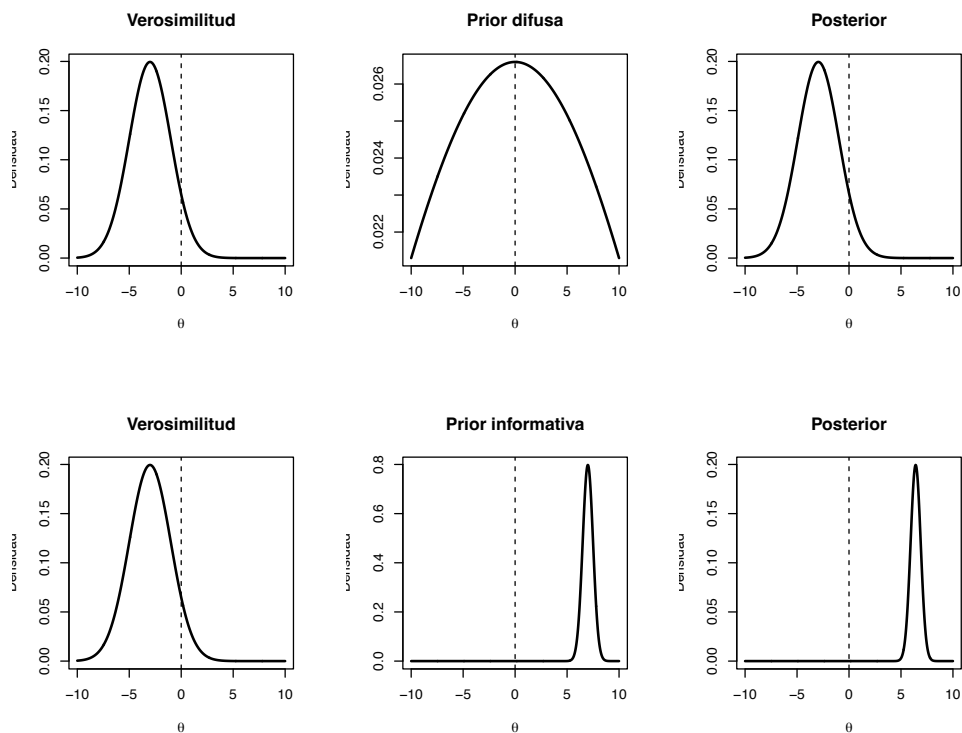


Figura 2.5: Ejemplo visual del efecto de la distribución a priori sobre la distribución a posteriori. En la primera fila, correspondiente al caso de una distribución a priori difusa, observamos que la información aportada por la distribución a priori apenas modifica la información aportada por la verosimilitud. En la segunda fila, correspondiente al caso de una distribución a priori informativa, observamos como la distribución a priori influye claramente en la distribución a posteriori.

	<b>Enfoque frecuentista</b>	<b>Enfoque bayesiano</b>
<b>Naturaleza de los parámetros</b>	Parámetros fijos desconocidos	Parámetros aleatorios
<b>Información previa</b>	No se incorpora	Se incorpora mediante distribuciones a priori
<b>Inferencia</b>	Basada únicamente en los datos	Combina datos e información previa
<b>Resultado de la inferencia</b>	Estimaciones puntuales e intervalos de confianza	Distribuciones a posteriori e intervalos de credibilidad

Cuadro 2.1: Comparación esquemática entre el enfoque frecuentista y el enfoque bayesiano.

## 2.3. Metodología INLA

A lo largo de esta sección presentaremos los principales conceptos teóricos relacionados con la metodología INLA.

Como veremos, INLA permite realizar inferencia bayesiana aproximada en modelos gaussianos latentes (LGM) [21], una familia de modelos en la que el predictor puede incluir tanto covariables observadas como efectos latentes no observables. Estos efectos latentes permiten representar estructuras de dependencia presentes en los datos, como la dependencia espacial o temporal. En el contexto del modelado espacial, dicha dependencia se incorpora habitualmente mediante un efecto espacial, que en esta sección denotaremos por  $u(s)$ , donde  $s$  representa una localización espacial. Este efecto permite modelar la similitud entre observaciones cercanas geográficamente y se representa mediante un campo gaussiano continuo con estructura de covarianza de Matérn, que describe cómo disminuye la dependencia espacial a medida que aumenta la distancia entre localizaciones [17].

Sin embargo, trabajar directamente con campos gaussianos continuos puede resultar costoso computacionalmente. Por ello, la aproximación SPDE (*Stochastic Partial Differential Equation*) permite representar estos campos mediante una aproximación discreta definida sobre una malla espacial. Esta formulación da lugar a un *Gaussian Markov Random Field* (GMRF), caracterizado por una matriz de precisión dispersa, lo que facilita la implementación eficiente de modelos espaciales complejos dentro del marco de INLA.

En las siguientes subsecciones desarrollaremos estas ideas de forma progresiva. En la Subsección 2.3.1 presentaremos la metodología INLA y su motivación como alternativa a los métodos bayesianos basados en simulación. En la Subsección 2.3.2 estudiaremos la función de correlación de Matérn y su papel en la construcción del campo espacial  $u(s)$ . Finalmente, en la Subsección 2.3.3 describiremos la aproximación SPDE y su relación con la representación discreta del campo espacial mediante GMRFs.

### 2.3.1. Integrated Nested Laplace Approximation

Como introdujimos en la Sección 2.2, el objetivo de la inferencia bayesiana es obtener la distribución a posteriori de los parámetros del modelo. Sin embargo, en muchas ocasiones, especialmente cuando trabajamos con modelos complejos, estas distribuciones a posteriori no pueden obtenerse de forma exacta, pues el proceso involucra la resolución de integrales muy difíciles de resolver de forma analítica, por lo que nos vemos obligados a recurrir al uso de aproximaciones.

El enfoque tradicional de abordar esta situación es usar métodos de simulación como **MCMC** (*Markov Chain Monte Carlo*), que aproximan estas distribuciones a posteriori mediante la generación de muchas simulaciones aleatorias. Esta forma de proceder supone un gran coste computacional, especialmente cuando tenemos un gran número de observaciones o un modelo muy complejo. Es precisamente buscando una alternativa a estos métodos tan costosos como surge INLA. Rue et al. proponen en [21] la metodología INLA como una herramienta alternativa para realizar inferencia bayesiana aproximada en modelos gaussianos latentes de forma mucho más eficiente computacionalmente. Muy simplificada, la idea es utilizar una sucesión de aproximaciones analíticas basadas en la expansión de Laplace (*Nested Laplace Approximations*) para estimar la distribución a posteriori del modelo, evitando así las simulaciones masivas de MCMC.

Además de ser más eficiente computacionalmente, al tratarse de un proceso determinista, INLA ofrece resultados reproducibles y estables, sin variabilidad aleatoria. Como ventaja adicional, para la implementación práctica de esta metodología disponemos del paquete R-INLA de R, que tiene funciones específicas que permiten, entre otras cosas, construir la malla espacial, definir el efecto espacial

asociado al modelo y obtener aproximaciones de las distribuciones marginales a posteriori tanto de los parámetros como de los efectos latentes [16].

### 2.3.2. Correlación de Matérn

Cuando queremos llevar a cabo un modelado espacial necesitamos definir cómo se relacionan las observaciones en función de la distancia que existe entre ellas. Lo normal es que observaciones cercanas presenten valores más similares que observaciones más alejadas. Para describir matemáticamente esta dependencia espacial se utilizan funciones de correlación espacial, que nos permiten construir la matriz de covarianzas asociada al efecto espacial.

Una de las funciones más utilizadas para esta tarea es la **función de correlación de Matérn**. Esta función describe cómo disminuye la correlación entre dos observaciones a medida que aumenta la distancia entre ellas. En consecuencia, dos observaciones cercanas tendrán una correlación alta y dos observaciones muy lejanas tendrán una correlación baja o prácticamente nula [24].

La función de correlación de Matérn puede escribirse como

$$\text{Cor}_{\text{Matérn}}(d) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} (\kappa d)^\nu \cdot K_\nu(\kappa d),$$

donde  $d$  representa la distancia entre dos localizaciones espaciales;  $\nu$  es un parámetro de suavidad que determina el grado de suavidad del campo espacial;  $\kappa$  es un parámetro relacionado con el rango espacial, es decir, con la velocidad a la que disminuye la correlación espacial con la distancia (valores grandes de  $\kappa$  hacen que la correlación disminuya rápidamente con la distancia, lo que provoca que la dependencia espacial sólo se dé entre puntos muy cercanos y valores pequeños de  $\kappa$  permiten extender la dependencia espacial a distancias mayores);  $K_\nu$  representa la función de Bessel modificada de segundo tipo; y  $\Gamma(\nu)$  denota la función gamma. El papel que juega cada uno de estos parámetros se entiende mejor observando la Figura 2.6.

En concreto, para  $d = 0$ , la correlación se define igual a 1, dado que una localización está perfectamente correlacionada consigo misma. Cabe destacar que la función de correlación de Matérn define la dependencia espacial exclusivamente en función de la distancia entre localizaciones, y no de los valores observados en ellas.

Como comentábamos antes, a partir de esta función de correlación podemos construir una matriz de covarianzas para los efectos espaciales y, en consecuencia, definir campos espaciales gaussianos continuos con estructura de dependencia de tipo Matérn. Para ello, la correlación entre cada par de observaciones se multiplica por la varianza del efecto espacial,  $\sigma_u^2$ , de forma que

$$\text{Cov}(u_i, u_j) = \sigma_u^2 \cdot \text{Cor}_{\text{Matérn}}(d_{ij}),$$

donde  $d_{ij}$  es la distancia entre las localizaciones  $s_i$  y  $s_j$  asociadas a los efectos  $u_i$  y  $u_j$ . Es decir, la matriz de covarianzas de los efectos espaciales es de la forma

$$\begin{pmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_u^2 \cdot \text{Cor}_{\text{Matérn}}(d_{12}) & \sigma_u^2 \cdot \text{Cor}_{\text{Matérn}}(d_{13}) & \dots \\ \sigma_u^2 \cdot \text{Cor}_{\text{Matérn}}(d_{12}) & \sigma_u^2 & \sigma_u^2 \cdot \text{Cor}_{\text{Matérn}}(d_{23}) & \dots \\ \sigma_u^2 \cdot \text{Cor}_{\text{Matérn}}(d_{13}) & \sigma_u^2 \cdot \text{Cor}_{\text{Matérn}}(d_{23}) & \sigma_u^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

de modo que observaciones próximas tendrán una covarianza alta y observaciones lejanas tendrán una covarianza baja.

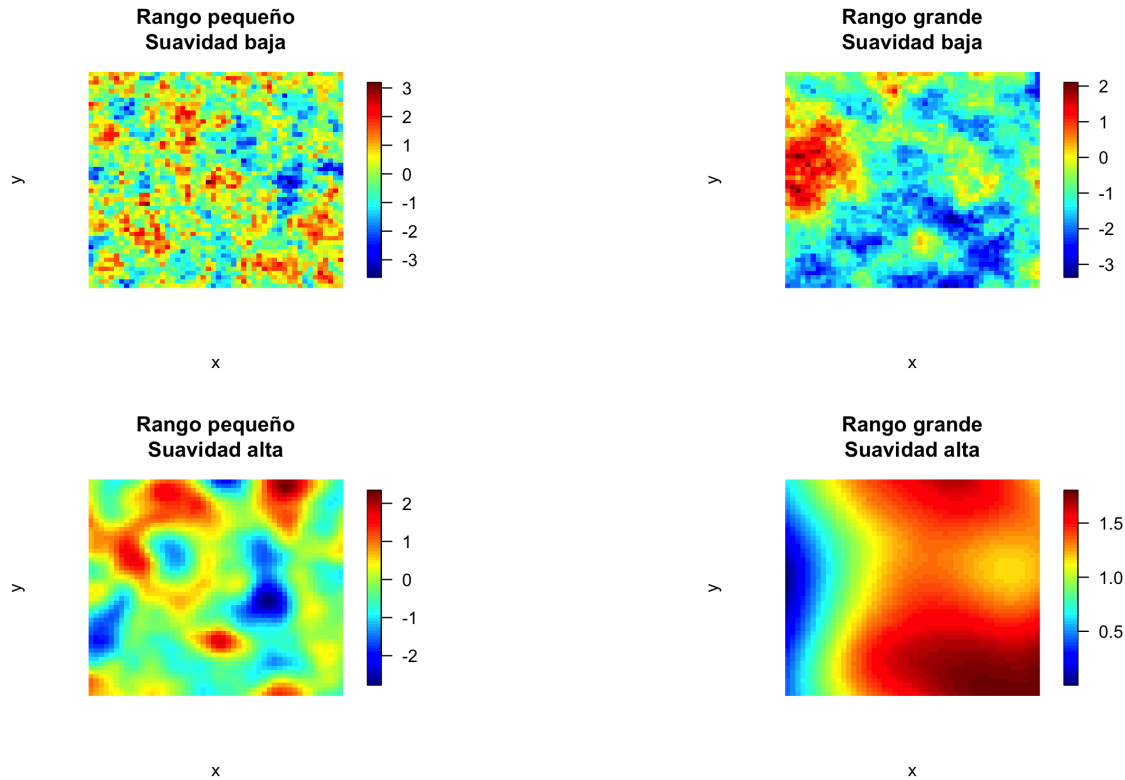


Figura 2.6: Ejemplos de campos espaciales simulados mediante una función de correlación de Matérn para diferentes valores de los parámetros de rango y suavidad. El parámetro de rango ( $\kappa$ ) controla la distancia a la que se mantiene la dependencia espacial, mientras que el parámetro de suavidad ( $\nu$ ) determina el grado de suavidad del campo espacial resultante.

### 2.3.3. Aproximación SPDE

Hemos visto que, en la teoría, la función de correlación de Matérn nos permite describir la estructura de dependencia espacial presente en las observaciones. Ahora bien, en la práctica, cuando el número de observaciones es grande, trabajar directamente con campos gaussianos espaciales continuos resulta demasiado costoso computacionalmente, ya que implica tratar con matrices de covarianzas muy densas y difíciles de manejar numéricamente [16].

Como solución a este problema, Lindgren et al. proponen en [17] una aproximación conocida como **SPDE** (*Stochastic Partial Differential Equation*), que permite representar campos gaussianos espaciales continuos con estructura de covarianza de Matérn mediante modelos mucho más eficientes computacionalmente. Es esta aproximación la que hace posible la aplicación práctica del modelado espacial mediante INLA.

La idea de la aproximación SPDE consiste en representar el campo espacial continuo con covarianza de Matérn como la solución de una ecuación diferencial estocástica parcial de la forma

$$(\kappa^2 - \Delta)^{\alpha/2}(\tau u(s)) = W(s),$$

donde  $\Delta$  es el operador laplaciano;  $\alpha$  es un parámetro que determina la suavidad del campo y que cumple que  $\alpha = \nu + d/2$ , donde  $d$  denota ahora la dimensión del espacio;  $u(s)$  representa el campo espacial gaussiano de interés;  $\tau$  es un parámetro que controla la varianza del campo espacial y  $W(s)$  es un proceso de ruido blanco gaussiano.

Ahora bien, para resolver esta SPDE en la práctica necesitamos aproximar el campo espacial continuo mediante una representación discreta. Con este fin, dividimos el dominio espacial mediante una triangulación, obteniendo una **mall**a formada por nodos conectados entre sí mediante triángulos, como se puede ver en la Figura 2.7 [16]. La idea es resolver la ecuación SPDE en los nodos de dicha malla y utilizar posteriormente los valores obtenidos para aproximar el campo espacial en cualquier otra localización del dominio.

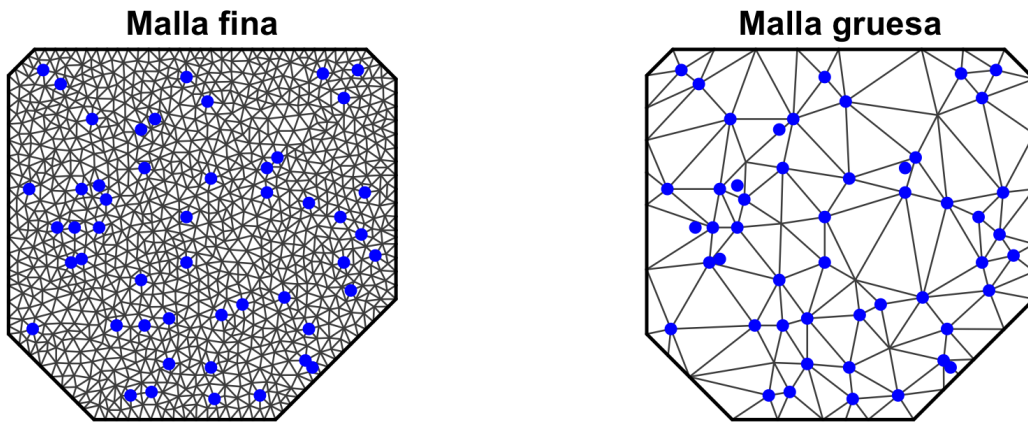


Figura 2.7: Ejemplos de triangulación para datos simulados. Los puntos azules representan las 50 localizaciones muestreadas y los vértices de los triángulos, los nodos de la malla. En la figura de la izquierda se representa un malla fina (con un gran número de nodos, concretamente 1123) y en la figura de la derecha una malla más gruesa (con un menor número de nodos, concretamente 88).

Para realizar esta aproximación, representamos el campo espacial como una combinación lineal de funciones base definidas sobre los nodos de la triangulación. En particular, aproximamos el valor del campo en un punto  $s$  como

$$u(s) \approx \sum_{k=1}^n \psi_k(s) w_k,$$

donde  $w_k$  representa el valor del campo espacial en el nodo  $k$  de la malla y  $\psi_k(s)$  son las funciones base asociadas a cada nodo que ponderan estos valores según la posición del punto  $s$ .

Estas funciones  $\psi_k(s)$  son lineales dentro de cada triángulo de la malla, toman el valor 1 en su nodo asociado y 0 en el resto de nodos. Además, para un punto  $s$ , únicamente son distintas de 0 las funciones correspondientes a los nodos del triángulo que contiene dicho punto. Así, el valor aproximado de  $u(s)$  depende solo de los nodos de la malla que forman el triángulo dentro del que se encuentra dicha localización.

De esta manera logramos aproximar el campo espacial continuo mediante un número finito de valores asociados a la malla. En consecuencia, la construcción de la malla tiene un papel muy importante en la aproximación SPDE. Las mallas más finas, es decir, aquellas con un mayor número de nodos, capturan con más precisión la estructura espacial, mientras que las mallas más gruesas reducen en mayor medida el coste computacional.

En definitiva, la aproximación SPDE nos permite representar el campo espacial gaussiano continuo mediante un **campo gaussiano markoviano** (GMRF), cuya matriz de precisión es una matriz dispersa, es decir, una matriz donde la mayoría de los elementos son ceros, lo que reduce enormemente el coste computacional al ajustar modelos espaciales complejos mediante INLA [24].

## 2.4. Diseño del estudio de simulación

Tras haber introducido en la Sección 2.3 las herramientas metodológicas necesarias para realizar un modelado espacial mediante INLA, estamos en disposición de llevar uno a cabo. Sin embargo, a lo largo de este trabajo no ajustaremos un único modelo, sino distintos modelos bajo diferentes escenarios de simulación, cuya evaluación nos ayudará a entender mejor el comportamiento de esta metodología. Con este fin, en este apartado describiremos el diseño del estudio de simulación utilizado para evaluar el comportamiento de los modelos considerados.

El objetivo es generar datos espaciales bajo escenarios controlados en los que conozcamos la estructura real que da lugar a las observaciones, para que después podamos evaluar tanto la recuperación de dicha estructura como la capacidad predictiva de los modelos. Para plantear esta simulación tomamos como referencia algunas ideas consideradas previamente en [19]. En primer lugar definimos un dominio espacial bidimensional sobre el que generamos distintos campos gaussianos con estructura de covarianza de Matérn (véase Subsección 2.4.1). A partir de estos campos simulamos diferentes componentes espaciales del predictor y planteamos varios escenarios en los que la dependencia espacial aparece asociada al efecto espacial residual, a covariables con efecto espacialmente variable o a ambas componentes simultáneamente (véase Subsección 2.4.2). Posteriormente, seleccionamos subconjuntos de localizaciones mediante distintos esquemas de muestreo (véase Subsección 2.4.3) y ajustamos diferentes formulaciones de modelos espaciales mediante INLA (véase Subsección 2.4.4), variando la forma en la que la dependencia espacial se incorpora al predictor. Finalmente, utilizamos los modelos ajustados para obtener predicciones sobre todo el dominio espacial y comparar las estimaciones obtenidas con los valores reales simulados. Todo este procedimiento se repite múltiples veces mediante un estudio Monte Carlo (véase Subsección 2.4.5).

De este modo, de forma resumida, el procedimiento a seguir puede esquematizarse en los siguientes pasos:

1. Generamos un dominio espacial bidimensional sobre el que se define el proceso generador de los datos.
2. Simulamos sobre dicho dominio las distintas componentes del predictor espacial, como los efectos espaciales residuales, coeficientes espacialmente variables y la variable respuesta asociada.
3. Extraemos una muestra de localizaciones del dominio completo.

4. A partir de la muestra seleccionada, ajustamos diferentes modelos mediante INLA.
5. Utilizamos los modelos ajustados para obtener predicciones sobre todo el dominio espacial y evaluamos tanto su capacidad predictiva como su capacidad para estimar las distintas componentes del predictor verdadero.

### 2.4.1. Dominio espacial

El dominio espacial considerado está formado por una malla de puntos sobre el cuadrado  $[0, 100] \times [0, 100]$ , formada por 101 puntos en cada dirección, lo que da lugar a un total de  $n = 101^2$  localizaciones espaciales, cada una de las cuales se representa mediante sus coordenadas:

$$s_i = (\text{lon}_i, \text{lat}_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Sobre este dominio generamos los valores reales de las distintas componentes espaciales y de la variable respuesta. Este conjunto de puntos representa el dominio espacial completo, mientras que después los modelos los ajustamos utilizando sólo una muestra de estas localizaciones.

### 2.4.2. Generación de los campos espaciales

Para simular las estructuras espaciales generamos campos aleatorios gaussianos con matriz de covarianzas con estructura de Matérn. En la Sección 2.3 utilizamos  $u(s)$  como forma genérica para denotar un efecto espacial latente, sin embargo, como en esta parte del trabajo distinguiremos varias componentes espaciales en el proceso generador de los datos, utilizaremos  $\alpha(s)$  para denotar el efecto espacial residual y  $\beta(s)$  para denotar el coeficiente espacialmente variable asociado a la covariable.

En primer lugar, simulamos un campo espacial gaussiano con estructura de covarianza de Matérn,  $\beta(s)$ , que representa el efecto de la covariable en cada localización  $s$ . Este campo se genera utilizando un parámetro de rango  $\theta = 10$  y un parámetro de suavidad  $\nu = 1,2$ , y posteriormente se multiplica por un factor de escala igual a 0,5. Este campo representa un coeficiente espacialmente variable, de forma que el efecto de la covariable no es constante en todo el dominio espacial, sino que cambia suavemente en el espacio.

Después, generamos la covariable asociada a dicho coeficiente  $\beta(s)$ ,  $X(s)$ , como la suma de una tendencia espacial determinista y un término de ruido independiente. La componente determinista se construye a partir de las coordenadas espaciales, mediante la estandarización de la suma de la longitud y la latitud,

$$X_{\text{det}}(s) = \text{scale}(\text{lon}(s) + \text{lat}(s)),$$

mientras que el término aleatorio se genera como

$$X_{\text{noise}}(s) \sim N(0, 0,5^2).$$

Por tanto, la covariable simulada viene dada por

$$X(s) = X_{\text{det}}(s) + X_{\text{noise}}(s).$$

A partir de estos dos elementos definimos el efecto espacial asociado a la covariable como

$$\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s).$$

Esta componente representa la parte de la respuesta explicada por una covariable cuyo efecto cambia espacialmente.

Además, simulamos un segundo campo espacial gaussiano,  $\alpha(s)$ , también con matriz de covarianzas con estructura de Matérn. En este caso, se genera utilizando un parámetro de rango  $\theta = 15$  y un parámetro de suavidad  $\nu = 0,8$ . Este campo representa un efecto espacial aditivo que no está explicado por la covariable, de modo que actúa como una componente espacial residual del modelo.

A continuación, para que las dos fuentes de dependencia espacial tengan magnitudes comparables, reescalamos el campo  $\beta(s)$  de forma que la varianza del efecto  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  coincida con la varianza del efecto espacial residual  $\alpha(s)$ . Así evitamos que una de las dos componentes espaciales domine sobre la otra. Representamos gráficamente todos los campos simulados en la Figura 2.8.

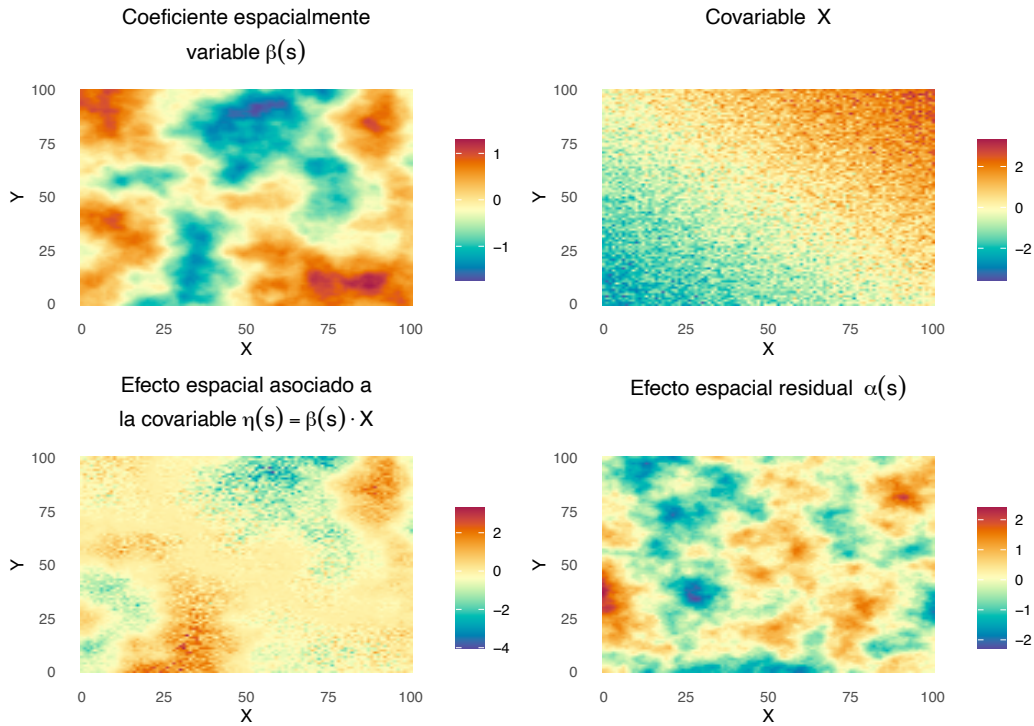


Figura 2.8: Representación gráfica de las componentes espaciales simuladas en el estudio: coeficiente espacialmente variable  $\beta(s)$  (arriba a la izquierda), covariable espacial  $X(s)$  (arriba a la derecha), efecto espacial asociado a la covariable  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  (abajo a la izquierda) y efecto espacial residual  $\alpha(s)$  (abajo a la derecha).

Por último, añadimos un término de error independiente que recoge la variabilidad no explicada no estructurada espacialmente,

$$\varepsilon(s) \sim N(0, \sigma^2),$$

donde, en la simulación principal consideramos  $\sigma = 0,3$ , aunque posteriormente analizaremos también cómo afecta al comportamiento de los modelos considerar niveles mayores.

A partir de estos tres elementos construimos la variable respuesta simulada. Con el objetivo de estudiar cómo se comportan los modelos cuando la dependencia espacial aparece en diferentes componentes del proceso generador de los datos consideramos tres escenarios distintos:

- **Escenario 1:** La dependencia espacial aparece únicamente a través del efecto espacial residual. En este caso, generamos la variable respuesta como la suma del efecto espacial residual y el error independiente:

$$y(s) = \alpha(s) + \varepsilon(s).$$

Este escenario nos permite evaluar si el modelo es capaz de recuperar la estructura espacial residual cuando esta es el único efecto que determina la respuesta en la realidad simulada.

- **Escenario 2:** La dependencia espacial aparece únicamente a través de la covariable cuyo efecto es espacialmente dependiente. En este escenario, generamos la respuesta como la suma del efecto espacial asociado a la covariable y el error independiente:

$$y(s) = \eta(s) + \varepsilon(s) = \beta(s) \cdot X(s) + \varepsilon(s).$$

Este escenario nos permite evaluar si el modelo es capaz de capturar la estructura espacial del efecto de la covariable cuando esta es la única componente considerada en el predictor.

- **Escenario 3:** La dependencia espacial proviene simultáneamente de ambas fuentes de dependencia. Nos permite estudiar si los modelos ajustados son capaces de distinguir entre la parte de la dependencia espacial asociada a la covariable y la parte de la dependencia espacial residual no explicada por ella. En este caso, generamos la variable respuesta como:

$$y(s) = \eta(s) + \alpha(s) + \varepsilon(s) = \beta(s) \cdot X(s) + \alpha(s) + \varepsilon(s). \quad (2.1)$$

En la Figura 2.9 representamos gráficamente la variable respuesta generada en cada uno de los tres escenarios anteriores.

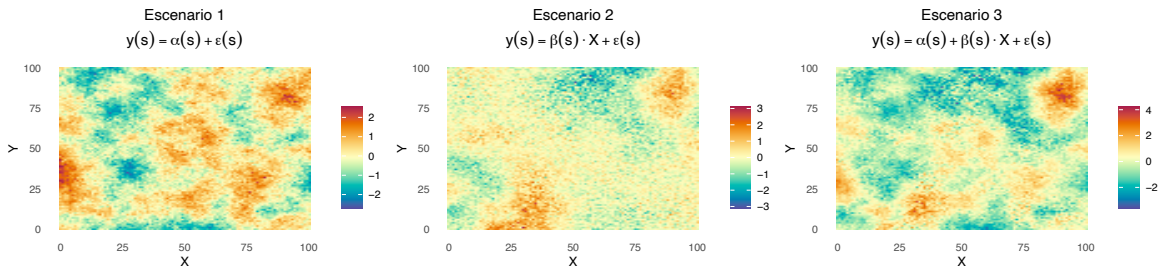


Figura 2.9: Representación gráfica de la variable respuesta simulada en los tres primeros escenarios de simulación. En el Escenario 1 (izquierda) la dependencia espacial aparece únicamente a través del efecto espacial residual  $\alpha(s)$ , en el Escenario 2 (centro) aparece únicamente a través de la covariable con efecto espacialmente variable  $\beta(s) \cdot X(s)$ ; y en el Escenario 3 (derecha) ambas componentes espaciales aparecen simultáneamente.

Finalmente, para cerrar este estudio, consideramos un último escenario adicional. Este escenario se trata de una variante del ya mencionado Escenario 3, en la que las dos fuentes de dependencia espacial no son independientes entre sí. En la práctica, es muy habitual que las covariables espaciales observadas compartan parte de su estructura espacial con los procesos no observados que componen lo que llamamos efecto espacial residual, lo que puede dificultar la identificación de ambas componentes y dar lugar a fenómenos de *spatial confounding*. Con el objetivo de reproducir esta situación consideramos el siguiente escenario:

- **Escenario 4:** La dependencia espacial proviene simultáneamente de ambas fuentes, pero estas no son independientes, sino que comparten parte de su estructura espacial. En este caso, generamos la variable respuesta como:

$$y(s) = \eta(s) + \alpha_2(s) + \varepsilon(s) = \beta(s) \cdot X(s) + \alpha_2(s) + \varepsilon(s),$$

donde ahora el efecto espacial residual,  $\alpha_2(s)$ , se construye a partir del campo  $\alpha(s)$  que utilizamos como componente espacial residual en los tres escenarios previos como

$$\alpha_2(s) = \rho \cdot \eta(s) + (1 - \rho) \cdot \alpha(s),$$

donde  $\rho$  es una constante que controla el grado de alineamiento espacial entre ambas fuentes de dependencia espacial. Así,  $\alpha_2(s)$  conserva una parte espacial independiente, dada por el campo  $\alpha(s)$ , pero incorpora también una componente alineada con la estructura de dependencia espacial asociada a la covariable,  $\eta(s)$ . Consideraremos distintos valores de  $\rho$ , en concreto  $\rho = 0,4$  y  $\rho = 0,7$ , para analizar el efecto de distintos niveles de dependencia espacial entre las dos componentes espaciales del predictor.

En la Figura 2.10 representamos gráficamente la variable respuesta generada para este último escenario.

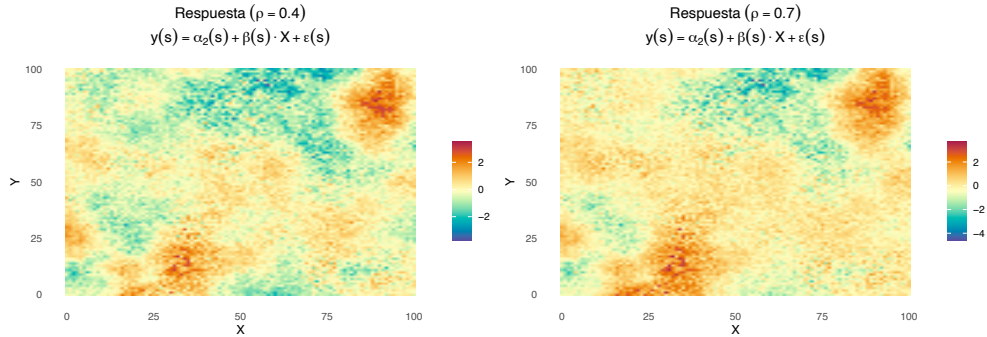


Figura 2.10: Representación gráfica de la variable respuesta simulada en el Escenario 4. En la gráfica de la izquierda se representa la respuesta generada tomando  $\rho = 0,4$ , mientras que en la gráfica de la derecha se representa la respuesta obtenida con  $\rho = 0,7$ .

### 2.4.3. Muestreo

Una vez generados los valores de los efectos del predictor y de la variable respuesta en el dominio espacial completo, el siguiente paso es seleccionar las localizaciones que utilizaremos para ajustar los modelos, pues estos no se ajustan utilizando todos los puntos del dominio, sino usando solo una muestra de localizaciones: se selecciona un subconjunto de puntos del dominio espacial y se construye el conjunto de datos observado a partir de todos los valores simulados anteriormente en dichas localizaciones. En la configuración principal del estudio consideramos un tamaño muestral de  $n_{\text{samples}} = 500$ , aunque posteriormente analizaremos también el efecto de considerar tamaños muestrales mayores y menores.

A lo largo de nuestro estudio se consideran dos tipos de muestreo. Inicialmente planteamos un muestreo aleatorio simple, es decir, un muestreo en el que todas las localizaciones del dominio tienen

la misma probabilidad de ser seleccionadas. En este caso, seleccionamos sin reemplazamiento un subconjunto de  $n_{\text{samples}}$  localizaciones de entre las  $n$  localizaciones totales del dominio.

Posteriormente estudiamos también el efecto que tiene considerar en su lugar un muestreo preferencial, es decir, un muestreo dependiente del proceso espacial subyacente en el que las localizaciones con valores más altos de la variable respuesta tienen mayor probabilidad de ser seleccionadas.

Para construir estas probabilidades de selección, definimos en primer lugar una transformación positiva de la respuesta simulada,

$$B(s) = y(s) - \text{mín}(y) + \varepsilon_0,$$

donde  $\varepsilon_0$  es una constante pequeña positiva utilizada para evitar probabilidades nulas. A partir de esta transformación, definimos la probabilidad de selección de cada localización como

$$p(s_i) = \frac{B(s_i)^\gamma}{\sum_{j=1}^n B(s_j)^\gamma}, \quad (2.2)$$

donde  $\gamma \geq 0$  controla la intensidad del muestreo preferencial. Cuando  $\gamma = 0$ , todas las localizaciones tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas y recuperamos el muestreo aleatorio simple. A medida que  $\gamma$  aumenta, las localizaciones con valores altos de la respuesta tienen una probabilidad progresivamente mayor de ser observadas.

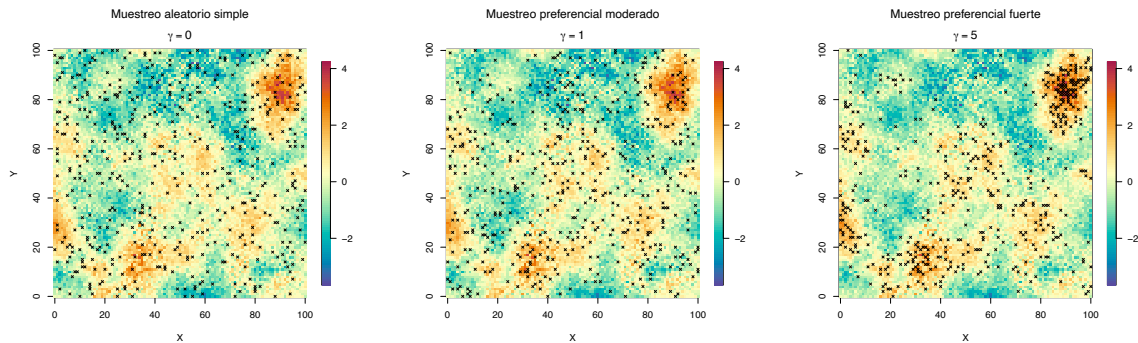


Figura 2.11: Ejemplo de localizaciones seleccionadas bajo distintos esquemas de muestreo utilizando como referencia una realización simulada de la variable respuesta correspondiente al Escenario 3. La figura de la izquierda muestra un muestreo aleatorio simple ( $\gamma = 0$ ), mientras que las otras dos muestran un muestreo preferencial, la del centro con  $\gamma = 1$  y la de la derecha con  $\gamma = 5$ .

#### 2.4.4. Modelos INLA

Por último, una vez realizado el muestreo, para cada escenario de simulación ajustamos distintos modelos espaciales mediante INLA, con el objetivo de estudiar cómo afecta la especificación de la componente espacial al comportamiento predictivo del modelo y a su capacidad para estimar correctamente la estructura espacial presente en los datos simulados.

En todos los modelos considerados, los efectos espaciales se incorporan mediante la aproximación SPDE descrita en la Subsección 2.3.3, construyendo para ello previamente una malla triangular sobre las localizaciones muestreadas. En concreto, la triangulación utilizada se obtiene fijando los parámetros `max.edge = c(5,12)` y `cutoff = 0.5`. El parámetro `max.edge` controla el tamaño máximo permitido

para los triángulos de la malla, permitiendo una discretización más fina en la región donde se concentran las observaciones y más gruesa en las zonas exteriores. Por otro lado, `cutoff` fija una distancia mínima entre nodos cercanos para evitar una acumulación excesiva de triángulos pequeños. De este modo, con esta selección buscamos un equilibrio entre la precisión en la representación espacial y el coste computacional.

La representación espacial mediante SPDE depende de distintos hiperparámetros asociados al campo espacial, entre ellos el rango espacial y la variabilidad del efecto. En el contexto bayesiano, estos hiperparámetros deben especificarse mediante distribuciones a priori que, como comentamos en la Sección 2.2, permiten incorporar información previa sobre los parámetros del modelo. Para ello utilizamos *penalised complexity priors* (PC priors), las cuales son una elección habitual en INLA, ya que introducen distribuciones a priori difusas que penalizan formulaciones espaciales excesivamente complejas, favoreciendo modelos más simples siempre que los datos no aporten evidencia suficiente en sentido contrario.

En el caso del efecto espacial residual, las *priors* del rango espacial y de la desviación típica se definen tomando como referencia los valores utilizados en la simulación del campo  $\alpha(s)$ . En particular, consideramos `prior.range = c(15,0.05)`, lo que implica que la probabilidad a priori de que el rango espacial sea menor que 15 es igual a 0,05, y `prior.sigma = c(sd(alpha),0.05)`, lo que implica que la probabilidad a priori de que la desviación típica exceda el valor observado en el campo simulado es también de 0,05. De forma análoga y con interpretaciones idénticas, para el coeficiente espacialmente variable  $\beta(s)$ , utilizamos `prior.range = c(10,0.05)`, y `prior.sigma = c(sd(beta),0.05)`.

Toda esta estructura espacial se implementa en la práctica dentro del marco de INLA siguiendo la formulación habitual utilizada en modelos con coeficientes espacialmente variables, basada en la idea presentada en [14].

Una vez visto cómo incorporamos la componente espacial al ajuste mediante INLA, pasamos a describir qué modelos concretos consideramos en cada escenario de simulación. En los Escenarios 1 y 2 ajustamos únicamente el modelo INLA cuyo predictor contiene los mismo efectos que el predictor de la respuesta considerado en los datos simulados. Así, cuando la dependencia espacial aparece únicamente a través del efecto espacial residual (Escenario 1) consideramos un modelo sólo con este efecto en el predictor, mientras que cuando la dependencia espacial aparece únicamente a través de la covariable (Escenario 2), consideramos un modelo que sólo incorpora el efecto de la covariable a través de coeficientes espacialmente dependientes.

Estos escenarios “simples” nos sirven para analizar si, en estas situaciones en las que no hay posibilidad de *confounding* entre los dos efectos, el modelo INLA consigue dar un buen resultado. Además son escenarios donde simulamos y ajustamos exactamente la misma forma del predictor, lo que nos permite evaluar el comportamiento de la metodología INLA bajo condiciones especialmente favorables y comprobar si el modelo es capaz de estimar correctamente la estructura espacial simulada cuando la especificación del predictor es correcta.

Por otro lado, en el Escenario 3, en el que la respuesta se simula como la suma del efecto efecto espacial residual más el efecto de la covariable considerando que el coeficiente asociado a su efecto depende del espacio, analizamos qué resultados se derivan del ajuste de modelos INLA con diferentes predictores: un modelo que incluye únicamente un efecto espacial independiente de la covariable, un modelo que incorpora únicamente una covariable con efecto espacialmente variable, un modelo que combina ambas componentes y una variante simplificada en la que el efecto de la covariable se asume constante en todo el dominio espacial. Esta última formulación nos permite estudiar las consecuencias de ignorar la variabilidad espacial presente en el efecto de la covariable y analizar hasta qué punto el efecto espacial residual puede absorber dicha estructura no modelada explícitamente.

Finalmente, en el Escenario 4, en el que las dos fuentes de dependencia espacial están correlacionadas, consideramos de nuevo únicamente el modelo correctamente especificado, es decir, aquel cuyo predictor contiene los mismo efectos que el predictor de la respuesta simulada. Este escenario nos sirve para analizar la capacidad del modelo para distinguir entre el efecto espacial residual y el efecto espacial asociado a la covariable cuando estos no son independientes.

Tras el ajuste, utilizamos los modelos para obtener predicciones proyectadas sobre todo el dominio espacial y comparamos los valores estimados con los valores reales simulados. Esta comparación se lleva a cabo a través de una serie de medidas que se detallan en la Sección 2.5.

### 2.4.5. Monte Carlo

Todo el procedimiento descrito anteriormente se repite múltiples veces de forma independiente mediante un estudio de simulación Monte Carlo. En concreto, para cada escenario considerado y para cada modelo ajustado se realizan 100 repeticiones independientes. Así, en cada una de las repeticiones Monte Carlo, se selecciona una nueva muestra de localizaciones sobre el mismo dominio espacial simulado y, a partir de dicha muestra, se ajustan nuevamente los modelos espaciales mediante INLA y se obtienen predicciones sobre todo el dominio.

Finalmente, las distintas medidas de ajuste y capacidad predictiva calculadas en cada repetición se resumen mediante sus medias y desviaciones típicas para poder comparar el comportamiento de los distintos modelos considerados. De esta manera, el uso de Monte Carlo nos permite evaluar el comportamiento medio de los modelos y reducir la influencia de resultados particulares asociados a una única simulación concreta.

A modo de recapitulación, en la Figura 2.12 resumimos de forma esquemática las principales etapas del procedimiento de simulación, ajuste y evaluación del funcionamiento de los modelos seguido a lo largo de este trabajo.

## 2.5. Medidas de evaluación

Para terminar con la metodología, en esta sección definimos formalmente todas las medidas de evaluación usadas a lo largo de este estudio para analizar y comparar el comportamiento de los distintos modelos ajustados.

Para evaluar el comportamiento de los modelos consideramos dos tipos de medidas: medidas de ajuste y medidas de error predictivo. Las **medidas de ajuste** nos permiten comparar la calidad del ajuste teniendo en cuenta la complejidad del modelo. Dentro de este grupo consideramos el DIC (*Deviance Information Criterion*) [22] y el WAIC (*Widely Applicable Information Criterion*) [23].

Por otra parte, las **medidas de error** nos permiten evaluar tanto la capacidad predictiva del modelo como su capacidad de estimar correctamente cada uno de los efectos espaciales considerados en el predictor, a través de la comparación entre los valores reales simulados y los valores estimados por el modelo. Dentro de este grupo consideramos distintas medidas como el RMSE (*Root Mean Squared Error*), el NRMSE (*Normalized Root Mean Squared Error*), el MAE (*Mean Absolute Error*) y las correlaciones de Pearson y Spearman [9].

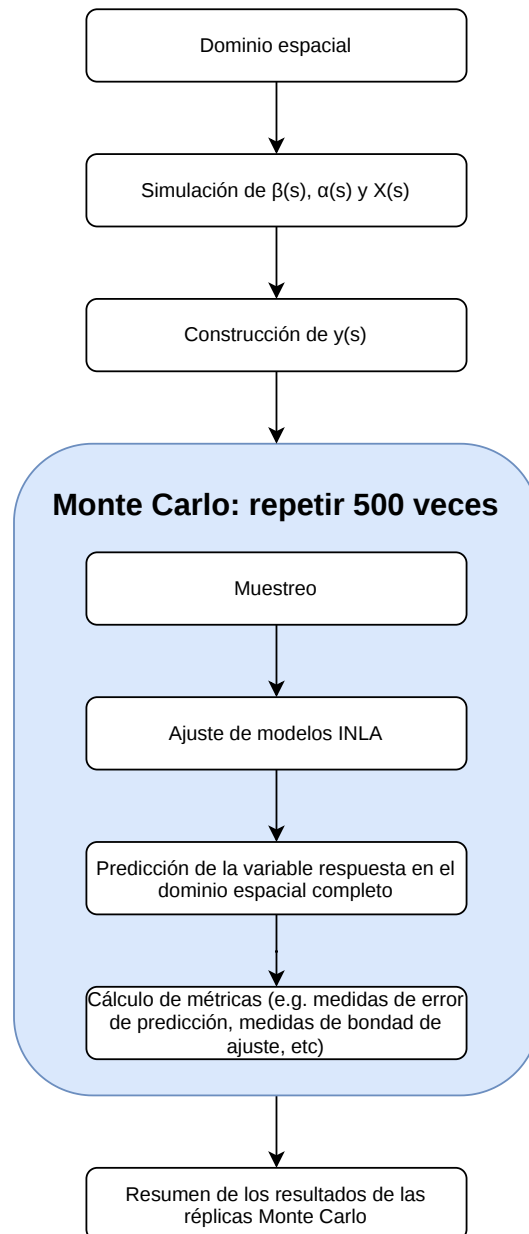


Figura 2.12: Esquema general del proceso de simulación, ajuste y evaluación de modelos utilizado.

Como estamos trabajando en un contexto de simulación, conocemos los valores reales tanto de la variable respuesta como de las distintas componentes espaciales generadas, lo que nos permite comparar directamente las estimaciones obtenidas con los valores simulados verdaderos (“realidad”).

Nótese que, tal y como introdujimos en la Sección 2.4.5, este estudio se realiza mediante un procedimiento Monte Carlo y, en consecuencia, cada una de estas medidas se calcula en cada una de las repeticiones de la simulación. Posteriormente, resumimos los resultados obtenidos para cada una de estas medidas mediante su media y su desviación típica.

Además de estas medidas numéricas, a lo largo del trabajo utilizaremos también representaciones gráficas de los campos espaciales simulados y estimados como herramienta complementaria de evaluación. La inspección visual de los mapas nos permite analizar de forma cualitativa hasta qué punto los distintos modelos son capaces de recuperar la estructura espacial presente en los datos. A su vez nos sirven para identificar patrones espaciales no capturados adecuadamente y comparar visualmente las diferencias entre las distintas especificaciones consideradas.

### 2.5.1. Medidas de ajuste del modelo

Como ya comentamos, para comparar la calidad del ajuste de los distintos modelos utilizamos dos criterios bayesianos muy usados en la literatura: el DIC (*Deviance Information Criterion*) y el WAIC (*Widely Applicable Information Criterion*). Ambos criterios combinan información sobre la calidad del ajuste del modelo y su complejidad, penalizando modelos innecesariamente complejos para evitar el sobreajuste.

Por su parte, el **DIC** se define a partir de la *deviance* del modelo,

$$D(\theta) = -2 \log p(y | \theta),$$

donde  $p(y | \theta)$  representa la verosimilitud del modelo. A partir de esta medida, el DIC puede expresarse como

$$DIC = \overline{D(\theta)} + p_D,$$

donde  $\overline{D(\theta)}$  denota la *deviance* posterior media, que representa la bondad de ajuste promedio del modelo, y  $p_D$  denota el número efectivo de parámetros del modelo, que actúa como medida de su complejidad. Este último puede calcularse como

$$p_D = \overline{D(\bar{\theta})} - D(\bar{\theta}),$$

donde  $D(\bar{\theta})$  representa la *deviance* evaluada en la media posterior de los parámetros. Esta formulación refleja cómo el DIC busca un equilibrio entre una buena capacidad de ajuste y una complejidad razonable del modelo [22].

Por otra parte, el **WAIC** es un criterio basado en la capacidad predictiva del modelo que utiliza toda la distribución a posteriori. De forma simplificada, puede expresarse como

$$WAIC = -2 (lppd - p_{WAIC}),$$

donde  $lppd$  representa la densidad predictiva logarítmica puntual y  $p_{WAIC}$  la complejidad efectiva del modelo [4]. Así, al igual que el DIC, incorpora una penalización asociada a la complejidad del modelo. Por tanto, ambos criterios favorecen modelos con buena capacidad explicativa pero evitando complejidad innecesaria.

Aunque ambos criterios suelen proporcionar resultados similares, el WAIC suele considerarse una medida más plenamente bayesiana, ya que utiliza toda la distribución a posteriori para evaluar la capacidad predictiva del modelo.

En este trabajo utilizamos ambas medidas para comparar el comportamiento de los distintos modelos ajustados en cada escenario de simulación. En general, valores menores de DIC y WAIC indican un mejor equilibrio entre ajuste y complejidad, por lo que se prefieren modelos con menor valor de estas medidas.

### 2.5.2. Medidas de error

Para evaluar la calidad de las predicciones obtenidas por los distintos modelos utilizamos varias medidas que comparan los valores estimados sobre todo el dominio espacial con los valores reales simulados. En esta sección definiremos formalmente cada una de estas medidas.

Sea  $z = (z_1, \dots, z_n)$  el vector de valores reales y sea  $\hat{z} = (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n)$  el vector de valores estimados. Nótese que dependiendo del caso,  $z$  puede representar la variable respuesta simulada, el efecto espacial residual o el campo espacial que representa el efecto de la covariable simulada.

En primer lugar, consideramos la raíz del error cuadrático medio o **RMSE** (*Root Mean Squared Error*), definida como

$$RMSE(z, \hat{z}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{z}_i - z_i)^2}.$$

El RMSE cuantifica la magnitud media del error cometido por el modelo y penaliza especialmente los errores grandes, ya que las diferencias entre valores reales y estimados se elevan al cuadrado antes de promediarse. Por tanto, valores menores de RMSE indican una mayor precisión en las estimaciones [9].

Como el RMSE depende de la escala de la variable considerada, también utilizamos el RMSE normalizado o **NRMSE**, que definimos como

$$NRMSE(z, \hat{z}) = \frac{RMSE(z, \hat{z})}{s_z},$$

donde

$$s_z = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}$$

representa la desviación típica muestral de los valores reales y  $\bar{z} = 1/n \sum_{i=1}^n z_i$  su media muestral. Esta normalización nos permite comparar errores obtenidos para distintas componentes presentes en el predictor del modelo, aunque estas se encuentren en escalas diferentes.

Además, utilizamos también el error absoluto medio o **MAE** (*Mean Absolute Error*), definido como

$$MAE(z, \hat{z}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{z}_i - z_i|.$$

A diferencia del RMSE, el MAE no eleva los errores al cuadrado, por lo que resulta menos sensible a valores extremos. Al igual que ocurre con el RMSE, valores menores de MAE indican un mejor comportamiento predictivo del modelo [9].

Como añadido a estas medidas de error, consideramos también medidas de asociación entre los valores reales y los valores estimados. En concreto, utilizamos la correlación de Pearson y la correlación

de Spearman. En primer lugar, la **correlación de Pearson** mide el grado de asociación lineal entre ambos vectores y viene dada por

$$\text{Corr}_p(z, \hat{z}) = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})(\hat{z}_i - \bar{\hat{z}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{z}_i - \bar{\hat{z}})^2}},$$

donde  $\bar{\hat{z}} = 1/n \sum_{i=1}^n \hat{z}_i$ . Valores cercanos a 1 indican una fuerte asociación lineal positiva entre los valores reales y estimados, mientras que valores cercanos a 0 indican ausencia de asociación lineal.

Por último, la **correlación de Spearman** mide la asociación monótona entre los valores reales y estimados. Se calcula como la correlación de Pearson aplicada a los rangos de ambas variables. Si  $R(z_i)$  y  $R(\hat{z}_i)$  representan los rangos de  $z_i$  y  $\hat{z}_i$ , respectivamente, entonces

$$\text{Corr}_s(z, \hat{z}) = \frac{\sum_{i=1}^n (R(z_i) - \overline{R(z)})(R(\hat{z}_i) - \overline{R(\hat{z})})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R(z_i) - \overline{R(z)})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (R(\hat{z}_i) - \overline{R(\hat{z})})^2}}.$$

Esta medida resulta muy útil en nuestro contexto porque nos permite evaluar si el modelo preserva correctamente el orden relativo de los valores simulados, incluso cuando la relación entre valores reales y estimados no es estrictamente lineal.

### 2.5.3. Resumen Monte Carlo de las medidas

En cada repetición Monte Carlo calculamos todas las medidas anteriores para cada uno de los modelos ajustados y para cada una de las variables y componentes espaciales evaluadas. Si denotamos por  $M_r$  el valor de una determinada medida en la repetición  $r$ , con  $r = 1, \dots, R$ , entonces resumimos el comportamiento medio de dicha medida mediante

$$\bar{M} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R M_r,$$

y su variabilidad mediante la desviación típica muestral

$$s_M = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (M_r - \bar{M})^2}.$$

De este modo, la media Monte Carlo proporciona una medida resumen del comportamiento promedio del modelo, mientras que la desviación típica permite evaluar la estabilidad de dicho comportamiento entre las distintas repeticiones.

A modo de resumen, el Cuadro 2.2 recoge las principales medidas utilizadas a lo largo del trabajo y su interpretación general en el contexto de este estudio.

Medida	Interpretación	Mejor valor
RMSE	Error cuadrático medio entre valores reales y estimados. Penaliza especialmente errores grandes.	Bajo
NRMSE	RMSE normalizado respecto a la desviación típica de los valores reales. Permite comparar errores sin depender de la escala.	Bajo
MAE	Error absoluto medio entre valores reales y estimados. Menos sensible a valores extremos que el RMSE.	Bajo
$\text{Corr}_p$	Correlación lineal de Pearson entre valores reales y estimados.	Alto (próximo a 1)
$\text{Corr}_s$	Correlación de Spearman entre rangos de valores reales y estimados.	Alto (próximo a 1)
DIC	Criterio bayesiano que busca el equilibrio entre el ajuste y la complejidad del modelo.	Bajo
WAIC	Criterio bayesiano basado en la capacidad predictiva y la complejidad efectiva.	Bajo

Cuadro 2.2: Resumen de las medidas de evaluación utilizadas a lo largo de este trabajo.

Recapitulando, las medidas de ajuste, DIC y WAIC, nos sirven para comparar el comportamiento global de los modelos ajustados, mientras que las medidas de error y correlación nos sirven para evaluar la capacidad predictiva y la capacidad de recuperación de la estructura espacial simulada. En particular, valores bajos de RMSE, NRMSE y MAE, junto con valores altos de correlación de Pearson y Spearman, indican un mejor comportamiento del modelo.



# Capítulo 3

## Resultados

Dedicaremos este capítulo a presentar los resultados obtenidos en el estudio de simulación descrito en la Sección 2.4 del capítulo anterior. Como venimos comentando hasta ahora, nuestro objetivo principal es analizar el comportamiento de distintos modelos de regresión con componentes espaciales en el predictor ajustados mediante INLA, bajo diferentes escenarios de simulación donde existe dependencia espacial y distintas configuraciones del diseño experimental.

Con este fin, comenzaremos estudiando los escenarios más simples (Escenario 1 y Escenario 2 definidos en la Sección 2.4.2), en los que la dependencia espacial aparece únicamente a través de una de las componentes del predictor (véase Sección 3.1). Estos primeros casos nos permitirán evaluar la capacidad de los modelos para estimar adecuadamente cada componente espacial de forma aislada.

Después, analizaremos el escenario combinado (Escenario 3 definido en la Sección 2.4.2), en el que la dependencia espacial aparece simultáneamente a través del efecto espacial residual y de una covariable con coeficiente espacialmente variable (véase Sección 3.2). Compararemos distintas especificaciones del predictor, con el objetivo de estudiar posibles fenómenos de *spatial confounding* y de evaluar cómo afecta una especificación incorrecta a la capacidad predictiva del modelo y a la manera en la que estima las distintas componentes espaciales simuladas.

En la Sección 3.2 estudiaremos los modelos bajo el diseño de simulación presentado en las Secciones 2.4.2 y 2.4.3: considerando un muestreo aleatorio simple con tamaño muestral  $n = 500$  y  $\sigma = 0,3$  en la distribución normal que genera el término  $\varepsilon(s)$  en la ecuación (2.1). Después, terminaremos analizando cómo cambia el comportamiento del modelo al modificar distintos elementos del diseño experimental, como el esquema de muestreo (véase Sección 3.3), el tamaño muestral (véase Sección 3.4), la desviación típica asociada al término de error aleatorio no estructurado  $\varepsilon(s)$  (véase Sección 3.5) o la incorporación de correlación entre los campos espaciales simulados (Escenario 4 definido en la Sección 2.4.2, véase Sección 3.6).

### 3.1. Escenarios con una única fuente de dependencia espacial

En esta sección analizaremos los dos escenarios más simples considerados en el estudio de simulación: aquellos en los que la dependencia espacial aparece a través de una única componente del predictor. En concreto, estudiaremos por separado el caso en el que la estructura espacial proviene exclusivamente del efecto espacial residual (véase Subsección 3.1.1) y el caso en el que la dependencia espacial aparece únicamente asociada a la covariable con coeficiente espacialmente variable (véase Subsección 3.1.2).

Como ya adelantamos, el objetivo de estos primeros escenarios es analizar si los modelos ajustados mediante INLA son capaces de estimar correctamente cada una de estas fuentes de dependencia espacial cuando aparecen de forma aislada, antes de considerar situaciones más complejas en las que ambas componentes espaciales aparecen simultáneamente.

### 3.1.1. Escenario con sólo efecto espacial residual

En primer lugar consideramos el escenario en el que la dependencia espacial aparece únicamente a través del efecto espacial residual  $\alpha(s)$ . En consecuencia, la variable respuesta simulada viene dada por

$$y(s) = \alpha(s) + \varepsilon(s), \quad (3.1)$$

donde  $\varepsilon(s)$  representa el término de error independiente que recoge la variabilidad no explicada no estructurada espacialmente.

Como comentamos en la Sección 2.4.4, en este escenario ajustamos únicamente el modelo cuya especificación coincide con la utilizada en el proceso generador de los datos, es decir, un modelo INLA que incorpora exclusivamente un efecto espacial residual en el predictor. Esto nos permite analizar de forma aislada la capacidad del modelo para estimar correctamente la estructura espacial residual simulada. Además, también podemos evaluar la calidad de las predicciones obtenidas cuando la especificación del modelo es correcta.

Para analizar el comportamiento de este modelo, comenzaremos estudiando las medidas de evaluación que introdujimos en la Sección 2.5. Los valores obtenidos se resumen en el Cuadro 3.1. Nótese que, al tratarse de un estudio Monte Carlo, las medidas recogidas corresponden a las medias y desviaciones típicas obtenidas a partir de las distintas repeticiones de la simulación, y no a resultados puntuales asociados a una única realización concreta, tal y como comentábamos en la Sección 2.5.3.

Componente	<b>RMSE</b>	<b>NRMSE</b>	<b>MAE</b>	<b>Pearson</b>	<b>Spearman</b>
Respuesta $y(s)$	0.422 (0.006)	0.560 (0.008)	0.334 (0.005)	0.829 (0.005)	0.818 (0.007)
Efecto residual $\alpha(s)$	0.308 (0.010)	0.447 (0.014)	0.242 (0.008)	0.899 (0.006)	0.892 (0.007)

Medida de ajuste	Valor
<b>DIC</b>	449.624 (51.365)
<b>WAIC</b>	440.833 (55.850)

Cuadro 3.1: Resumen Monte Carlo de las medidas de evaluación obtenidas para el modelo INLA ajustado en el escenario de simulación en el que la dependencia espacial se debe únicamente a un efecto espacial residual no explicado por la covariable. En cada celda se muestra la media Monte Carlo de la medida correspondiente y a su lado, entre paréntesis, la desviación típica asociada.

Los resultados obtenidos nos indican que el modelo consigue estimar razonablemente bien tanto la variable respuesta como el efecto espacial residual simulado. En particular, si nos fijamos en las medidas de error, obtenemos valores relativamente bajos del RMSE, el NRMSE y el MAE y correlaciones

elevadas tanto de Pearson como de Spearman, especialmente en el caso del efecto espacial residual  $\alpha(s)$ . Por ejemplo, para  $\alpha(s)$  obtenemos una correlación de Pearson media de 0,899 y un RMSE medio de 0,308, que es un valor relativamente pequeño en relación al rango de valores que toma la variable, que se mueve aproximadamente entre  $-2,2$  y  $2,4$ .

Observamos además que los resultados obtenidos para la respuesta  $y(s)$  son muy similares, aunque siempre ligeramente peores, que los correspondientes al efecto espacial residual. Esto era esperable en este escenario, pues como vemos en la ecuación (3.1), la respuesta simulada difiere del campo residual  $\alpha(s)$  únicamente en el término de error independiente  $\varepsilon(s)$ . Por tanto, las diferencias observadas entre ambas componentes se deben a la presencia de dicho ruido adicional.

Por otro lado, atendiendo a las medidas globales de ajuste, DIC y WAIC presentan valores medios similares (de entorno a 440) y una variabilidad moderada entre repeticiones. Aunque en realidad estas medidas son de mayor utilidad en contextos de comparación entre modelos, los resultados obtenidos nos sugieren un comportamiento estable del modelo.

La mencionada buena capacidad para estimar el efecto espacial residual puede apreciarse visualmente en la Figura 3.1. En ella observamos que la estimación media obtenida mediante INLA reproduce los principales patrones espaciales presentes en el campo simulado, identificando tanto las zonas con valores altos como las regiones con valores bajos del efecto espacial. Sin embargo, se aprecia un ligero sobresuavizado en la estructura espacial estimada respecto al campo original, especialmente en las variaciones más locales o de pequeña escala. Parte de este suavizado puede deberse también a que la figura del campo estimado corresponde a la media obtenida a partir de múltiples repeticiones Monte Carlo, lo que tiende a atenuar variaciones espaciales más locales o irregulares presentes en realizaciones concretas.

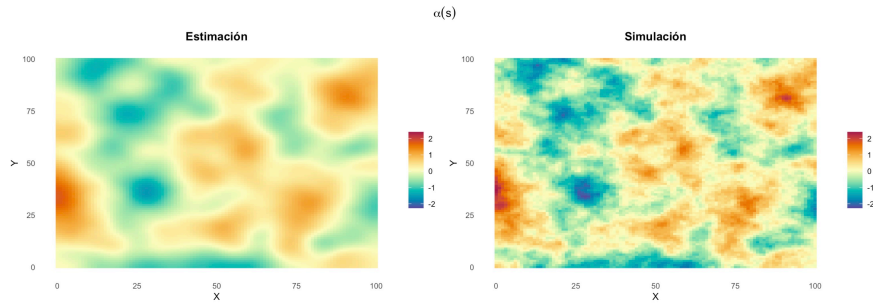


Figura 3.1: Comparación entre el efecto espacial residual simulado  $\alpha(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. A la izquierda se representa la estimación media del efecto espacial residual y a la derecha el campo espacial simulado.

En la Figura 3.2 encontramos una representación análoga para la variable respuesta. También en este caso observamos una buena capacidad predictiva del modelo, que reproduce adecuadamente la estructura espacial general de la respuesta simulada. Nuevamente, la estimación aparece más suavizada que el campo original. Este fenómeno resulta incluso más evidente que en el caso del efecto espacial residual, especialmente en aquellas zonas donde el término de error independiente introduce variaciones más locales. Una vez más, esto es coherente con la forma en la que se ha generado la respuesta en este escenario (véase la ecuación (3.1)). En la misma Figura 3.2 observamos una representación gráfica de los errores medios de predicción cometidos. Vemos que dichos errores no se distribuyen de manera completamente aleatoria en el espacio, sino que presentan cierta estructura espacial. Este comportamiento

era esperable, ya que la dependencia espacial induce errores correlacionados espacialmente, haciendo que las discrepancias locales se extiendan por regiones cercanas, dando lugar a zonas de sobreestimación y zonas de infraestimación.

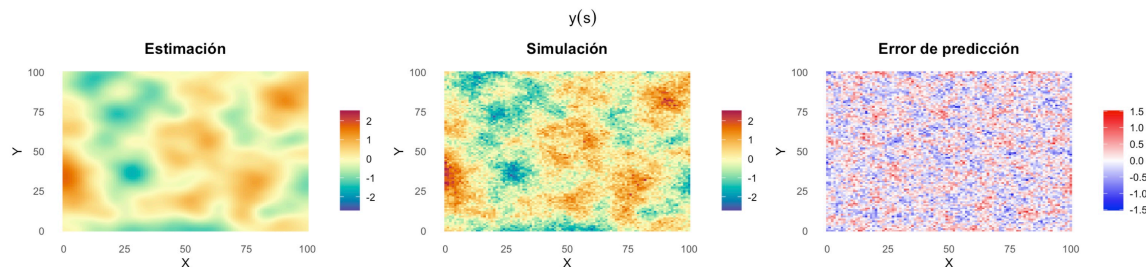


Figura 3.2: Comparación entre la variable respuesta simulada  $y(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. De izquierda a derecha se representan la estimación media de la respuesta, la respuesta simulada, y el correspondiente error medio de predicción, calculado como la diferencia media entre los valores estimados y los valores reales simulados.

### 3.1.2. Escenario con sólo efecto espacial de la covariable

Consideramos ahora el escenario en el que la dependencia espacial aparece únicamente a través del efecto de la covariable, es decir, mediante un coeficiente espacialmente variable  $\beta(s)$ . En este caso, la respuesta simulada viene dada por

$$y(s) = \beta(s) \cdot X(s) + \varepsilon(s) = \eta(s) + \varepsilon(s). \quad (3.2)$$

Tal y como se indicó en la Sección 2.4.4, para este escenario ajustamos exclusivamente el modelo INLA que sólo incorpora el efecto de la covariable a través de coeficientes espacialmente dependientes. En consecuencia, la especificación del modelo ajustado vuelve a coincidir con la utilizada en el proceso de simulación. Como ya comentamos en la Sección 2.4.4, esto nos permite estudiar de forma aislada la capacidad del modelo para estimar correctamente tanto el coeficiente espacial  $\beta(s)$  como el efecto combinado  $\eta(s)$ , y también evaluar su capacidad de predicción ante una correcta especificación.

En el Cuadro 3.2 se resumen las principales medidas de evaluación obtenidas a lo largo de las distintas repeticiones Monte Carlo.

Observamos nuevamente un buen comportamiento general del modelo, con errores relativamente bajos y correlaciones elevadas en las tres componentes consideradas. En particular, destaca la capacidad del modelo para estimar correctamente tanto el coeficiente espacialmente variable  $\beta(s)$  como el efecto combinado  $\eta(s)$ . En el caso de  $\beta(s)$ , por ejemplo, obtenemos correlaciones muy elevadas (ambos valores superan 0,93) y valores bastante reducidos de las todas las medidas de error en relación al rango de valores de  $\beta(s)$ . En el caso de  $\eta(s)$  los resultados son incluso más favorables (véase Cuadro 3.2).

Si nos fijamos en la respuesta  $y(s)$ , observamos que, al igual que pasaba en el modelo anterior, sus resultados son ligeramente peores que los obtenidos para las otras dos componentes. Una vez más, esto viene explicado por la forma en la que se simula esta variable (véase la ecuación (3.2)), que carga con el efecto de un ruido aleatorio adicional. Por otra parte, vemos que el valor obtenido para el NRMSE medio (0,567) es casi idéntico al que obteníamos para el modelo de la Sección 3.1.1 (0,560), lo que

indica que el rendimiento de ambos modelos es similar.

A su vez, las medidas globales de ajuste, DIC y WAIC presentan valores medios similares (de entorno a 325) y una variabilidad moderada entre repeticiones que nuevamente nos sugiere un comportamiento estable del modelo.

Componente	RMSE	NRMSE	MAE	Pearson	Spearman
Respuesta $y(s)$	0.349 (0.004)	0.567 (0.007)	0.275 (0.003)	0.824 (0.005)	0.753 (0.006)
Coefficiente $\beta(s)$	0.179 (0.011)	0.370 (0.023)	0.140 (0.008)	0.931 (0.008)	0.934 (0.009)
Efecto covariable $\eta(s)$	0.173 (0.009)	0.325 (0.017)	0.116 (0.006)	0.947 (0.006)	0.930 (0.009)

Medida de ajuste	Valor
<b>DIC</b>	327.133 (32.628)
<b>WAIC</b>	324.633 (32.403)

Cuadro 3.2: Resumen Monte Carlo de las medidas de evaluación obtenidas para el modelo INLA ajustado en el escenario de simulación en el que la estructura espacial incluye únicamente un efecto espacial explicado por la covariable. En cada celda se muestra la media Monte Carlo de la medida correspondiente y a su lado, entre paréntesis, la desviación típica asociada.

En la Figura 3.3 representamos el campo espacial correspondiente al coeficiente  $\beta(s)$  junto a la estimación que el modelo proporciona para él. Puede observarse que la estimación media obtenida mediante INLA reproduce correctamente la estructura espacial global presente en el campo simulado, identificando bastante bien las principales regiones con valores positivos y negativos. Nuevamente aparece un cierto suavizado respecto al campo original, especialmente en zonas donde la variabilidad espacial es más local o irregular, como ocurre en la zona central.

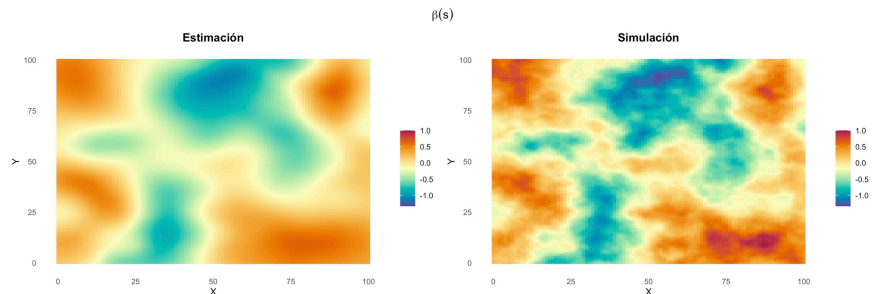


Figura 3.3: Comparación entre el coeficiente espacialmente variable simulado  $\beta(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. A la izquierda se representa la estimación media del efecto espacial asociado a la covariable y a la derecha el campo espacial simulado.

De igual manera, en la Figura 3.4 mostramos los resultados correspondientes al efecto combinado  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$ . En este caso la estimación es incluso más precisa que para el propio coeficiente  $\beta(s)$ , como ya intuíamos viendo las medidas numéricas del Cuadro 3.2. Esto nos dice que, incluso aunque el modelo no estime perfectamente todas las variaciones locales presentes en  $\beta(s)$ , sí consigue capturar bien el efecto espacial que la covariable tiene sobre la respuesta. En general, visualmente observamos que el modelo reproduce muy bien la estructura espacial.

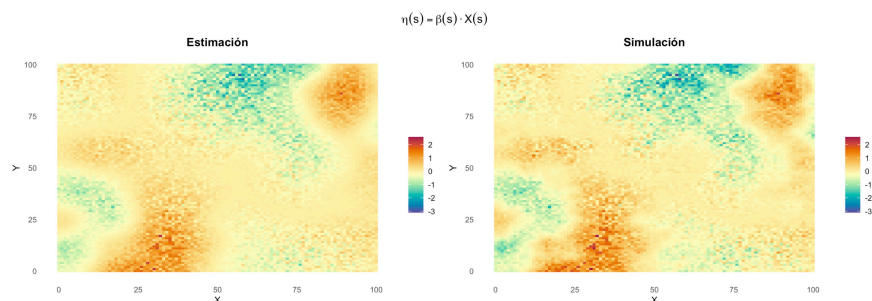


Figura 3.4: Comparación entre el efecto espacial de la covariable simulado  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. A la izquierda se representa la estimación media del efecto  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  y a la derecha el campo espacial simulado.

Por último, en la Figura 3.5 representamos los resultados obtenidos para la variable respuesta. De nuevo observamos una buena capacidad predictiva del modelo, ya que reproduce adecuadamente la estructura espacial de la respuesta simulada. En este caso, el efecto del término de error independiente  $\varepsilon(s)$  introduce pequeñas variaciones locales adicionales que no se reflejan bien en la estimación media, dando lugar una vez más a una sobresuavización de la estimación.

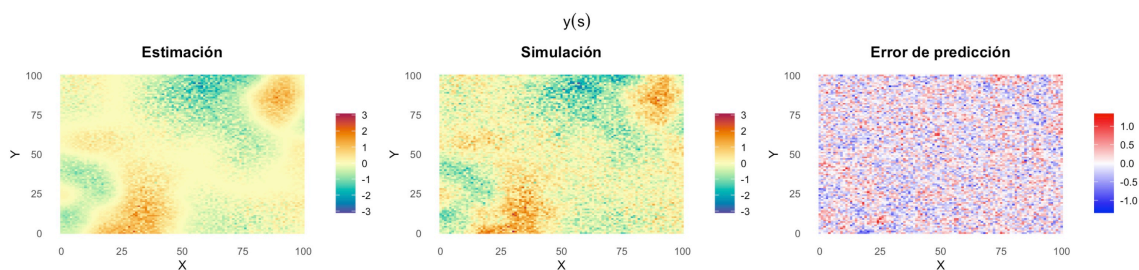


Figura 3.5: Comparación entre la variable respuesta simulada  $y(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. De izquierda a derecha se representan la estimación media de la respuesta, la respuesta simulada, y el correspondiente error medio de predicción, calculado como la diferencia media entre los valores estimados y los valores reales simulados.

En la Figura 3.5 representamos también el mapa de los errores medios de predicción. En él podemos observar, salvo alguna zona concreta, un patrón bastante local e irregular, lo que resulta coherente con el buen comportamiento observado en el modelo. Cabe destacar que el aspecto más homogéneo de este mapa respecto al de la Figura 3.2 está influenciado por la propia construcción del efecto  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$ , ya que la covariable  $X(s)$  incorpora una componente de ruido independiente que introduce una mayor variabilidad local.

## 3.2. Escenario con doble componente espacial

En esta sección consideramos un escenario de simulación algo más complejo: aquel en el que la dependencia espacial aparece simultáneamente a través de un efecto espacial residual,  $\alpha(s)$ , y de un coeficiente espacialmente variable asociado a la covariable,  $\beta(s)$ . En este caso, la respuesta simulada viene dada por

$$y(s) = \alpha(s) + \beta(s) \cdot X(s) + \varepsilon(s) = \alpha(s) + \eta(s) + \varepsilon(s). \quad (3.3)$$

A diferencia de los escenarios anteriores, donde cada fuente de dependencia espacial podía analizarse de forma aislada, en este caso ambos tipos de dependencia aparecen simultáneamente, lo que provoca que las dos componentes puedan explicar parcialmente una misma estructura espacial presente en los datos. Aprovecharemos esta situación para analizar cómo afecta la especificación del modelo a su rendimiento. Estudiaremos qué sucede si no especificamos bien el predictor, en concreto, analizaremos si la componente que incluimos en el predictor absorbe el efecto correspondiente a la componente que omitimos.

Con este objetivo, ajustaremos cuatro modelos INLA con cuatro formulaciones diferentes del predictor. En concreto, en primer lugar consideraremos el modelo correctamente especificado, es decir, el que incorpora simultáneamente un efecto espacial residual y un coeficiente espacialmente variable asociado a la covariable (véase Subsección 3.2.1). Este modelo nos permite analizar si, bajo una especificación correcta, el modelo es capaz de separar correctamente el efecto de las dos fuentes de dependencia espacial. Dado que en este escenario ambas componentes espaciales se generan de forma independiente, cabe esperar que la separación de los efectos resulte más sencilla que en el Escenario 4, donde ambas estructuras espaciales están correlacionadas (véase Sección 3.6).

En segundo lugar, consideraremos un modelo que incorpora únicamente el coeficiente espacialmente variable asociado a la covariable (véase Subsección 3.2.2). Este modelo nos permite estudiar qué ocurre cuando la estructura espacial no explicada por la covariable no se introduce explícitamente en el predictor y, en particular, si dicha estructura es absorbida por el efecto espacial asociado a la covariable.

En tercer lugar, ajustaremos un modelo que incluye únicamente un efecto espacial residual (véase Subsección 3.2.3). Este modelo nos permite analizar si el campo residual es capaz de recoger no solo la variabilidad espacial residual, sino también la estructura que en realidad procede de la covariable con coeficiente espacialmente variable.

Por último, consideraremos una especificación alternativa en la que el modelo incorpora ambas fuentes de dependencia, pero en el caso de la covariable, lo hace mediante un efecto suave tipo *random walk* (véase Subsección 3.2.4). Esta formulación nos permite estudiar qué ocurre cuando se ignora la naturaleza espacial del coeficiente  $\beta(s)$ , lo cual resulta de gran interés porque esta mala especificación es muy frecuente en la práctica.

### 3.2.1. Modelo INLA correctamente especificado

En esta sección estudiaremos el comportamiento del modelo correctamente especificado, es decir, aquel que incorpora simultáneamente un efecto espacial residual y un coeficiente espacialmente variable asociado a la covariable. La formulación de este modelo coincide exactamente con el mecanismo generador de los datos, por lo que se trata del escenario más favorable de los que consideramos a lo largo de esta sección. Este análisis nos servirá para comprender hasta qué punto el modelo consigue separar correctamente las dos fuentes de dependencia espacial cuando aparecen simultáneamente dentro del predictor.

Componente	RMSE	NRMSE	MAE	Pearson	Spearman
Respuesta $y(s)$	0.464 (0.008)	0.461 (0.008)	0.364 (0.006)	0.888 (0.004)	0.874 (0.005)
Efecto residual $\alpha(s)$	0.387 (0.021)	0.561 (0.030)	0.300 (0.015)	0.835 (0.019)	0.831 (0.018)
Coefficiente $\beta(s)$	0.289 (0.021)	0.461 (0.033)	0.228 (0.016)	0.891 (0.017)	0.893 (0.018)
Efecto covariable $\eta(s)$	0.315 (0.026)	0.457 (0.038)	0.204 (0.015)	0.893 (0.019)	0.869 (0.026)

Medida de ajuste	Valor
<b>DIC</b>	461.334 (63.066)
<b>WAIC</b>	434.638 (69.949)

Cuadro 3.3: Resumen Monte Carlo de las medidas de evaluación obtenidas para el modelo INLA correctamente especificado ajustado en el escenario de simulación en el que la dependencia espacial aparece simultáneamente a través de un efecto espacial residual y de un coeficiente espacialmente variable asociado a la covariable. En cada celda se muestra la media Monte Carlo de la medida correspondiente y, entre paréntesis, la desviación típica asociada.

Comenzamos analizando los resultados numéricos obtenidos para las principales medidas de evaluación, que se resumen en el Cuadro 3.3. Los valores recogidos indican que, incluso en este escenario más complejo, el modelo presenta una buena capacidad predictiva, pues para la respuesta obtenemos valores relativamente bajos de las medidas de error y correlaciones bastante altas.

Por otro lado, si analizamos por separado las distintas componentes espaciales, observamos que la estimación de  $\alpha(s)$  y  $\beta(s)$  es algo peor que en los escenarios en los que aparecían de forma aislada. En el Cuadro 3.3 vemos que las medidas de error (RMSE, NRMSE, MAE) asociadas a estas componentes aumentan respecto a las obtenidas en los modelos de la Sección 3.1, mientras que sus correlaciones de Pearson y Spearman disminuyen. Por ejemplo, para el efecto residual  $\alpha(s)$  obtenemos una correlación de Pearson media de 0,835, claramente inferior a la obtenida en la Subsección 3.1.1. A su vez, para el coeficiente  $\beta(s)$ , el NRMSE aumenta desde el 0,370 obtenido en la Subsección 3.1.2 hasta un 0,461.

Con todo, la diferencia más notable respecto a los escenarios simples anteriores es que, en este caso, las componentes espaciales individuales se estiman peor que la propia respuesta. En las Subsecciones 3.1.1 y 3.1.2 observábamos justamente lo contrario: tanto el efecto espacial residual como el efecto espacial asociado a la covariable se estimaban mejor que la respuesta  $y(s)$ , algo esperable debido a la presencia del término de error independiente  $\varepsilon(s)$ . Sin embargo, en este escenario completo observamos que, aunque  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$  siguen estimándose relativamente bien, los resultados empeoran respecto a los escenarios simples, mientras que, por su parte, la capacidad predictiva sobre  $y(s)$  sigue siendo muy buena (véanse las correlaciones de Pearson y Spearman recogidas en los Cuadros 3.1, 3.2 y 3.3). Esto nos sugiere que el modelo encuentra ciertas dificultades para distinguir completamente qué parte de la estructura espacial corresponde a cada componente, lo que podría interpretarse como un ligero fenómeno de *spatial confounding*, aunque muy leve.

Recapitulando, del Cuadro 3.3 deducimos que el modelo consigue reproducir razonablemente bien la estructura espacial presente en los datos simulados.

Para complementar estas conclusiones, estudiaremos ahora las representaciones gráficas de las distintas componentes espaciales estimadas. En primer lugar, en la Figura 3.6 representamos el efecto espacial residual simulado junto con la estimación media obtenida mediante INLA. Aunque el modelo consigue reproducir razonablemente bien la estructura espacial global del campo residual, observamos un mayor nivel de suavizado y unas discrepancias más marcadas que las observadas en el escenario simple de la Subsección 3.1.1. Podemos observar zonas donde el modelo tiende a sobreestimar sistemáticamente el efecto residual (zona central de la parte más baja de la gráfica) y otras donde ocurre lo contrario (esquina superior derecha y esquina inferior izquierda). Como comentábamos antes, esto puede indicar una ligera confusión entre ambas componentes espaciales, aunque no muy notoria.

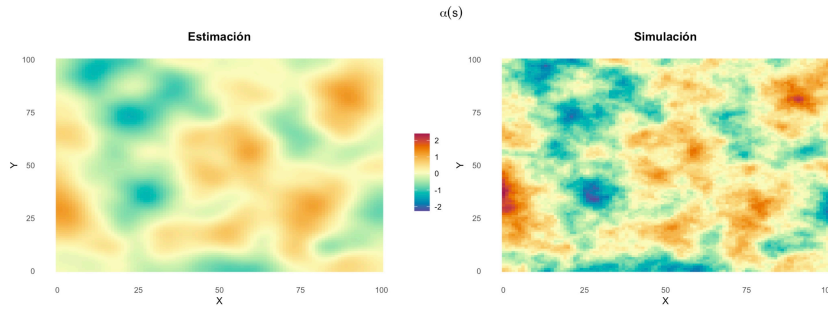


Figura 3.6: Comparación entre el efecto espacial residual simulado  $\alpha(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. A la izquierda se representa la estimación media del efecto espacial residual y a la derecha el campo espacial simulado.

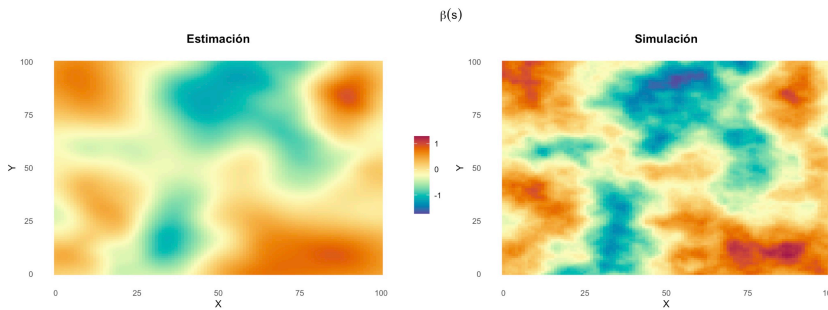


Figura 3.7: Comparación entre el coeficiente espacialmente variable simulado  $\beta(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. A la izquierda se representa la estimación media del efecto espacial asociado a la covariable y a la derecha el campo espacial simulado.

Análogamente, la Figura 3.7 muestra los resultados obtenidos para el coeficiente espacialmente variable  $\beta(s)$ . La idea aquí es la misma: el modelo estima relativamente bien la estructura espacial global, pero se aprecia un claro sobresuavizado y un patrón espacial en los errores cometidos en la estimación. Al contrario que en la Figura 3.6, en este caso vemos que en la esquina superior derecha el modelo tiende a sobreestimar ligeramente el efecto espacial asociado a la covariable. Idénticas conclusiones se pueden extraer de la Figura 3.8, en la que representamos el efecto combinado  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$ .

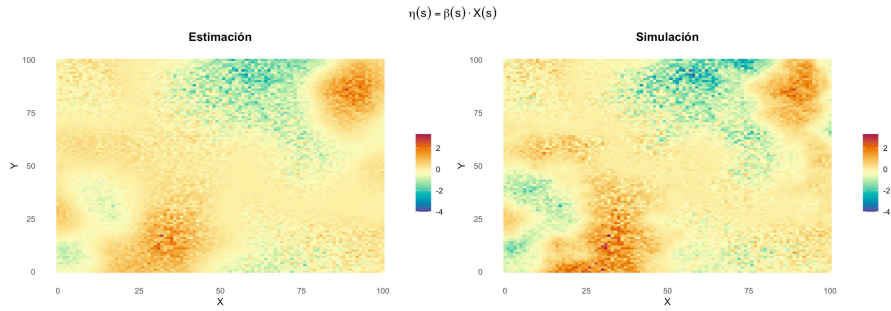


Figura 3.8: Comparación entre el efecto espacial de la covariable simulado  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. A la izquierda se representa la estimación media del efecto  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  y a la derecha el campo espacial simulado.

Finalmente, en la Figura 3.9 representamos los resultados correspondientes a la variable respuesta. En ella verificamos que, a pesar de las discrepancias observadas anteriormente en cada una de las componentes espaciales, el modelo mantiene una muy buena capacidad predictiva sobre  $y(s)$ .

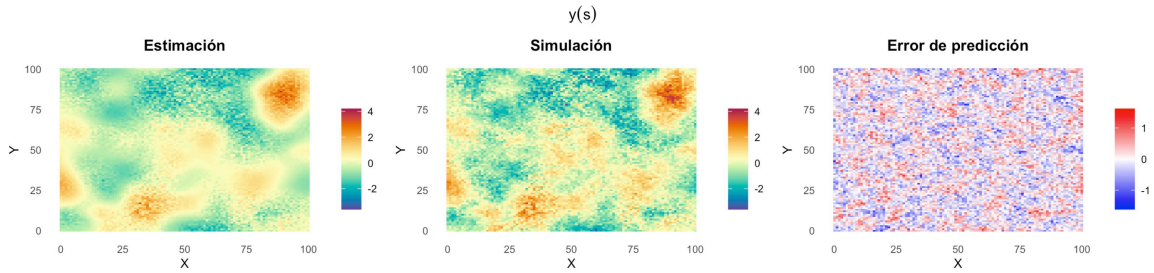


Figura 3.9: Comparación entre la variable respuesta simulada  $y(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. De izquierda a derecha se representan la estimación media de la respuesta, la respuesta simulada, y el correspondiente error medio de predicción, calculado como la diferencia media entre los valores estimados y los valores reales simulados.

### 3.2.2. Modelo INLA sin efecto espacial residual

Una vez hemos analizado el comportamiento del modelo correctamente especificado, podemos estudiar cómo afectan a su rendimiento distintas variaciones en la formulación del predictor espacial, en términos tanto de su capacidad predictiva como de su capacidad para estimar las componentes espaciales simuladas. Con este objetivo, en esta sección analizamos el comportamiento del modelo que incorpora únicamente un coeficiente espacialmente variable asociado a la covariable, omitiendo completamente el efecto espacial residual. Este análisis nos ayudará a comprender qué ocurre cuando toda la estructura espacial presente en los datos debe ser explicada exclusivamente a través del efecto de la covariable.

De igual manera que en los modelos considerados anteriormente, empezamos atendiendo a las medidas de evaluación del modelo descritas en la Sección 2.5. Los resultados obtenidos para este modelo se recogen en el Cuadro 3.4.

Componente	RMSE	NRMSE	MAE	Pearson	Spearman
Respuesta $y(s)$	0.632 (0.008)	0.628 (0.008)	0.499 (0.007)	0.780 (0.006)	0.719 (0.009)
Coefficiente $\beta(s)$	0.454 (0.027)	0.725 (0.043)	0.362 (0.022)	0.745 (0.027)	0.740 (0.029)
Efecto covariable $\eta(s)$	0.485 (0.024)	0.704 (0.035)	0.320 (0.016)	0.776 (0.019)	0.731 (0.025)

Medida de ajuste	Valor
<b>DIC</b>	996.984 (35.693)
<b>WAIC</b>	972.617 (36.326)

Cuadro 3.4: Resumen Monte Carlo de las medidas de evaluación obtenidas para el modelo INLA que incorpora únicamente un coeficiente espacialmente variable asociado a la covariable, omitiendo el efecto espacial residual. En cada celda se muestra la media Monte Carlo de la medida correspondiente y, entre paréntesis, la desviación típica asociada.

Tal y como cabía esperar, los resultados obtenidos muestran un empeoramiento muy notable respecto al modelo correctamente especificado de la Subsección 3.2.1. Para todas las componentes se ve cómo todas las medidas de error aumentan considerablemente y las correlaciones disminuyen de forma clara. Por ejemplo, el NRMSE de la respuesta pasa de 0,461 a 0,628, mientras que su correlación de Pearson desciende desde 0,888 hasta 0,780. Este empeoramiento es incluso más notable en el caso del coeficiente espacial  $\beta(s)$ , donde las diferencias con los valores obtenidos en el modelo correctamente especificado son aún mayores. Por ejemplo, el NRMSE medio de  $\beta(s)$  aumenta desde 0,461 hasta 0,725. Esto nos indica que el modelo encuentra dificultades importantes a la hora de estimar la estructura espacial asociada al efecto de la covariable, lo que es lógico teniendo en cuenta la incorrecta especificación del modelo.

Las medidas globales de ajuste confirman los problemas del modelo. Tanto el DIC (996,984) como el WAIC (972,617) aumentan muchísimo respecto al modelo completo, llegando a duplicarse. Esto indica que la eliminación del efecto espacial residual provoca un empeoramiento considerable de la capacidad explicativa del modelo.

Estas conclusiones se reflejan claramente en las representaciones espaciales de las Figuras 3.10, 3.11 y 3.12. Concretamente, en las Figuras 3.10 y 3.11 vemos que, aunque el modelo todavía consigue capturar algunos de los patrones espaciales dominantes, las estimaciones aparecen mucho más deformadas que en el modelo correctamente especificado. Esto nos indica que el modelo no consigue reproducir correctamente esta componente espacial. En particular, podemos apreciar por ejemplo que en la esquina superior derecha se produce una considerable sobreestimación tanto del coeficiente espacial  $\beta(s)$  como del efecto combinado  $\eta(s)$ . La explicación de este mal rendimiento está en la mala especificación del modelo, que provoca que el coeficiente espacialmente variable esté absorbiendo el efecto del campo espacial residual simulado pero no modelado explícitamente dentro del predictor.

A su vez, en la Figura 3.12 observamos como este deterioro se traslada también a la predicción de la respuesta. Obtenemos una estimación tan suavizada que imposibilita la identificación de algunas de las regiones de valores altos y bajos de  $y(s)$ . Esto implica que la omisión del efecto espacial residual no solo dificulta la estimación del efecto de la covariable, sino que empeora la capacidad predictiva del modelo.

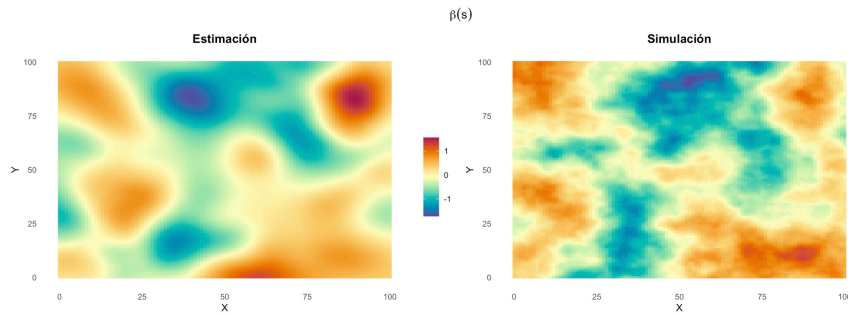


Figura 3.10: Comparación entre el coeficiente espacialmente variable simulado  $\beta(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. A la izquierda se representa la estimación media del efecto espacial asociado a la covariable y a la derecha el campo espacial simulado.

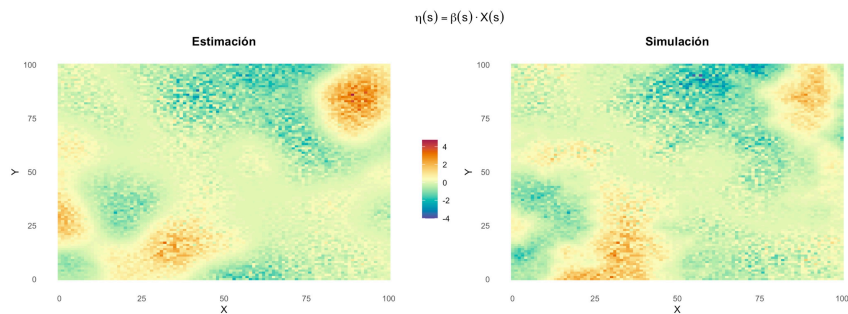


Figura 3.11: Comparación entre el efecto espacial de la covariable simulado  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. A la izquierda se representa la estimación media del efecto  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  y a la derecha el campo espacial simulado.

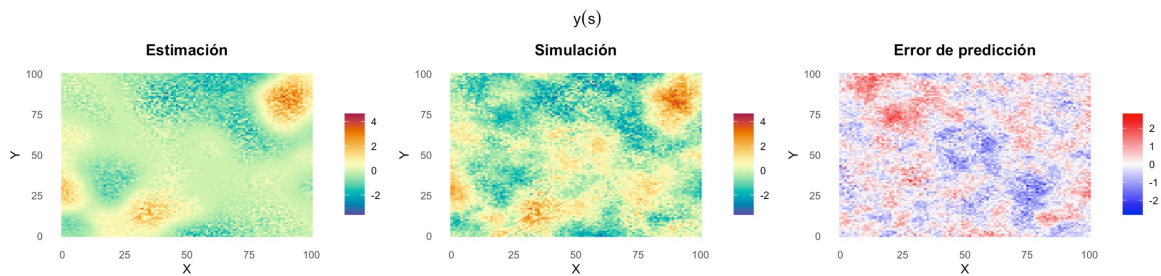


Figura 3.12: Comparación entre la variable respuesta simulada  $y(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. De izquierda a derecha se representan la estimación media de la respuesta, la respuesta simulada, y el correspondiente error medio de predicción, calculado como la diferencia media entre los valores estimados y los valores reales simulados.

### 3.2.3. Modelo INLA sin coeficiente espacialmente variable

Seguimos con este análisis estudiando ahora el comportamiento del modelo INLA que incorpora únicamente un efecto espacial residual, omitiendo por completo el coeficiente espacialmente variable asociado a la covariable. Complementariamente al caso de la Subsección 3.2.2, este análisis nos permitirá comprender qué ocurre cuando toda la estructura espacial presente en los datos debe ser explicada exclusivamente mediante un campo espacial residual.

Componente	RMSE	NRMSE	MAE	Pearson	Spearman
Respuesta $y(s)$	0.564 (0.008)	0.561 (0.008)	0.438 (0.006)	0.829 (0.005)	0.821 (0.005)
Efecto residual $\alpha(s)$	0.655 (0.028)	0.950 (0.041)	0.497 (0.020)	0.637 (0.021)	0.640 (0.020)

Medida de ajuste	Valor
<b>DIC</b>	773.522 (45.474)
<b>WAIC</b>	770.255 (47.926)

Cuadro 3.5: Resumen Monte Carlo de las medidas de evaluación obtenidas para el modelo INLA que incorpora únicamente un efecto espacial residual, omitiendo el coeficiente espacialmente variable asociado a la covariable. En cada celda se muestra la media Monte Carlo de la medida correspondiente  $y$ , entre paréntesis, la desviación típica asociada.

Una vez más, partimos de las medidas de evaluación del modelo recogidas en el Cuadro 3.5. Al igual que pasaba en la Subsección 3.2.2, los resultados son peores que los obtenidos con el modelo correctamente especificado. En particular, atendiendo a los resultados para el campo residual  $\alpha(s)$ , tenemos un NRMSE próximo a 1 (0,950) y correlaciones tanto de Pearson (0,637) como de Spearman (0,640) considerablemente más bajas que las observadas en el modelo correctamente especificado.

No obstante, hay una diferencia llamativa respecto al caso anterior: aunque el efecto espacial residual  $\alpha(s)$  se estima bastante mal, obteniendo incluso peores resultados que los de  $\beta(s)$  en la Subsección 3.2.2, la capacidad de predicción de la respuesta se conserva mejor. En concreto, este caso el NRMSE de  $y(s)$  es 0,561 (frente al 0,628 anterior) y su correlación de Pearson es 0,829 (frente al 0,780 anterior). Es decir, aunque el modelo presenta dificultades importantes para estimar correctamente la componente espacial residual, su capacidad predictiva sobre la respuesta, si bien es peor que la del modelo correctamente especificado, es mejor a la del modelo que omitía el efecto espacial residual. Esto es señal de que el campo residual es capaz de absorber la estructura espacial de la covariable presente en los datos, incluso si el predictor está incorrectamente especificado.

Por su parte, las medidas de ajuste también reflejan este comportamiento intermedio. Tanto el DIC (773,522) como el WAIC (770,255) empeoran respecto al modelo correctamente especificado (461,334 y 434,638, respectivamente), pero son mucho menores que los obtenidos para el modelo de la Subsección 3.2.2 (996,984 y 972,617, respectivamente). Esto apoya la idea de que la flexibilidad del campo residual le permite absorber la estructura espacial que no modelamos explícitamente.

Estas conclusiones pueden apreciarse visualmente en las Figuras 3.13 y 3.14. Por un lado, en la Figura 3.13 observamos que el campo residual estimado no solo aparece más suavizado que el simulado, sino que además reproduce estructuras espaciales que en realidad no existen en el campo original. Por

ejemplo, en la zona inferior izquierda aparece una región con valores altos del efecto residual estimado que no se corresponde con la simulación. Esto refuerza la idea de que el campo residual está absorbiendo parte de la estructura espacial asociada realmente al coeficiente espacialmente variable omitido del predictor.

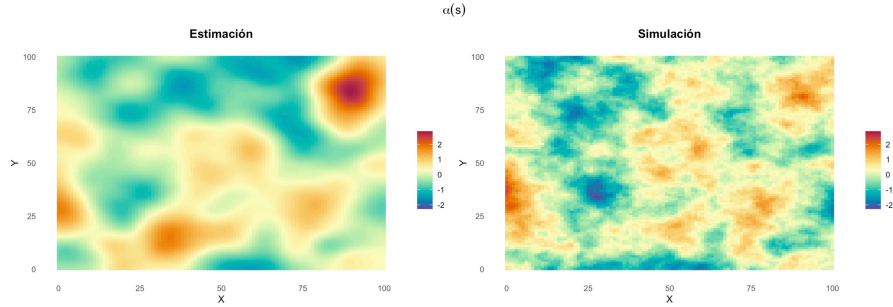


Figura 3.13: Comparación entre el efecto espacial residual simulado  $\alpha(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. A la izquierda se representa la estimación media del efecto espacial residual y a la derecha el campo espacial simulado.

A su vez, viendo la Figura 3.14 confirmamos la idea de que el modelo mantiene una capacidad predictiva relativamente buena. Aunque la estimación aparece más suavizada que la respuesta simulada, la estructura espacial general se reproduce correctamente. Además, el mapa de errores nos muestra que, aunque todavía presentan una identificable estructura espacial, los errores de predicción se distribuyen de forma más difusa que los del modelo ajustado en la Subsección 3.2.2.

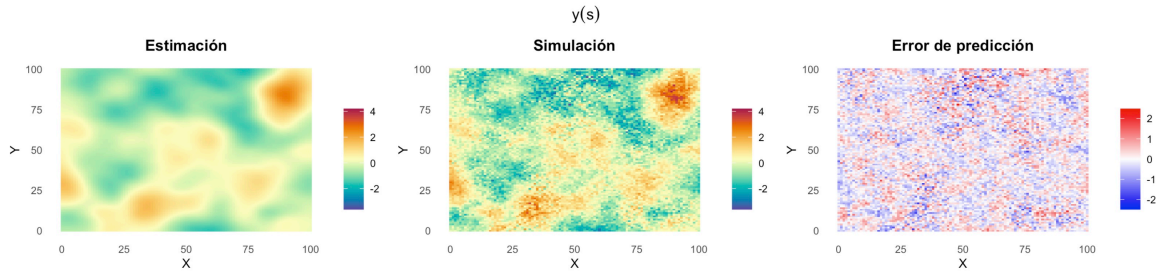


Figura 3.14: Comparación entre la variable respuesta simulada  $y(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. De izquierda a derecha se representan la estimación media de la respuesta, la respuesta simulada, y el correspondiente error medio de predicción, calculado como la diferencia media entre los valores estimados y los valores reales simulados.

### 3.2.4. Modelo INLA con efecto RW2 en la covariable

Cerramos esta sección considerando un último modelo INLA con una especificación alternativa que incorpora simultáneamente un efecto espacial residual y un efecto asociado a la covariable, pero sustituyendo el coeficiente espacialmente variable  $\beta(s)$  por un efecto suave modelado mediante un *random walk* de orden 2 (RW2). El objetivo es analizar qué ocurre cuando el modelo sí que incorpora un efecto flexible para la covariable, pero ignora su naturaleza espacial.

Más detalladamente, modelaremos el efecto asociado a la covariable mediante un efecto suave tipo RW2 construido a partir de una discretización de la covariable  $X(s)$  en  $n_x = 10$  grupos. De esta manera, conseguimos que el modelo describa el efecto de la covariable mediante una función suave de  $X(s)$ , ignorando deliberadamente su naturaleza espacial.

Para entender mejor la limitación que supone esta formulación representamos en la Figura 3.15 el efecto estimado mediante el RW2 en función de la covariable  $X(s)$ . En ella podemos observar cómo para un mismo valor de la covariable  $X(s)$ , el efecto espacial real asociado a ella puede tomar valores muy distintos. Por ejemplo, tenemos que tomando un valor de la covariable próximo a  $X(s) = 2$ , su efecto asociado  $\eta(s)$  puede tomar casi cualquier valor en el intervalo  $(-3, 2)$ . Esta variabilidad se debe a la naturaleza espacial del coeficiente  $\beta(s)$ . También observamos cómo el modelo RW2 es incapaz de representar esa variabilidad del efecto de la covariable al estar limitado a imponer una relación funcional suave entre  $X(s)$  y su efecto sobre la respuesta.

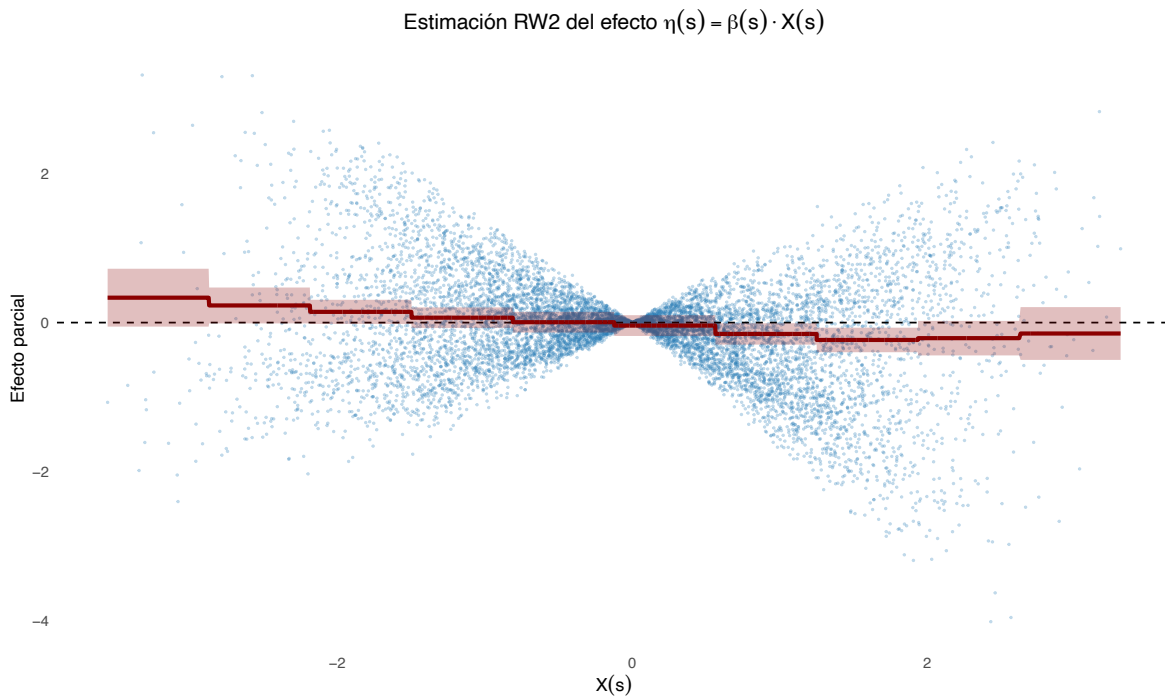


Figura 3.15: Representación del efecto espacial  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  en función de la covariable  $X(s)$ . Los puntos azules representan los valores reales simulados del efecto espacial asociado a la covariable, mientras que la línea roja representa el efecto RW2 estimado mediante INLA. Adicionalmente, la banda sombreada representa el intervalo de credibilidad del 95% asociado a dicha estimación. La figura corresponde a una única realización del estudio de simulación, no a una media Monte Carlo, y se incluye únicamente con fines ilustrativos.

Esta simplificación de la estructura del efecto de la covariable puede tener consecuencias importantes en la práctica, pues puede llevarnos a concluir erróneamente que la covariable no tiene un efecto relevante sobre la respuesta, cuando lo que pasa es que dicho efecto no está correctamente especificado. De hecho, en la Figura 3.15 observamos que el intervalo de credibilidad asociado al efecto RW2 contiene el valor cero en prácticamente todo el rango de la covariable, lo que indica que el modelo tiende a considerarlo irrelevante. Esto refuerza la idea de que el modelo no consigue detectar la contribución real de la componente espacial asociada a la covariable.

Una vez entendido el modelo que estamos ajustando, podemos pasar al análisis de los valores de las medidas de evaluación, que se recogen en el Cuadro 3.6.

Los resultados obtenidos indican que este modelo presenta un comportamiento muy similar al observado para el modelo ajustado en la Subsección 3.2.3, que solo incorporaba un efecto espacial residual y omitía por completo el efecto de la covariable. Esta similitud sugiere que el efecto RW2 apenas está aportando información relevante al predictor, lo que no resulta sorprendente tras ver la Figura 3.15, donde podemos observar que la estimación de este efecto se aproxima considerablemente a una función constante igual a cero.

Componente	RMSE	NRMSE	MAE	Pearson	Spearman
Respuesta $y(s)$	0.559 (0.008)	0.556 (0.008)	0.434 (0.005)	0.832 (0.005)	0.822 (0.006)
Efecto residual $\alpha(s)$	0.646 (0.025)	0.937 (0.037)	0.493 (0.018)	0.651 (0.019)	0.651 (0.020)

Medida de ajuste	Valor
<b>DIC</b>	753.843 (45.930)
<b>WAIC</b>	750.263 (48.741)

Cuadro 3.6: Resumen Monte Carlo de las medidas de evaluación obtenidas para el modelo INLA que incorpora simultáneamente un efecto espacial residual y un efecto suave tipo RW2 para la covariable. En cada celda se muestra la media Monte Carlo de la medida correspondiente y, entre paréntesis, la desviación típica asociada.

Las mismas conclusiones se sacan a partir de las gráficas de las Figuras 3.16 y 3.17, que son prácticamente idénticas a sus análogas de la Subsección 3.2.3, las Figuras 3.13 y 3.14, respectivamente.

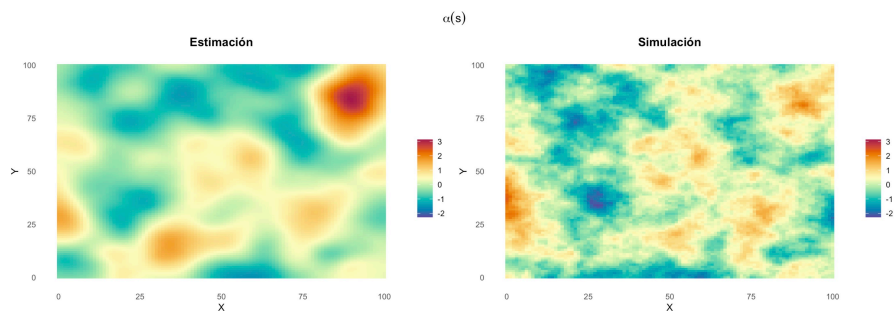


Figura 3.16: Comparación entre el efecto espacial residual simulado  $\alpha(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. A la izquierda se representa la estimación media del efecto espacial residual y a la derecha el campo espacial simulado.

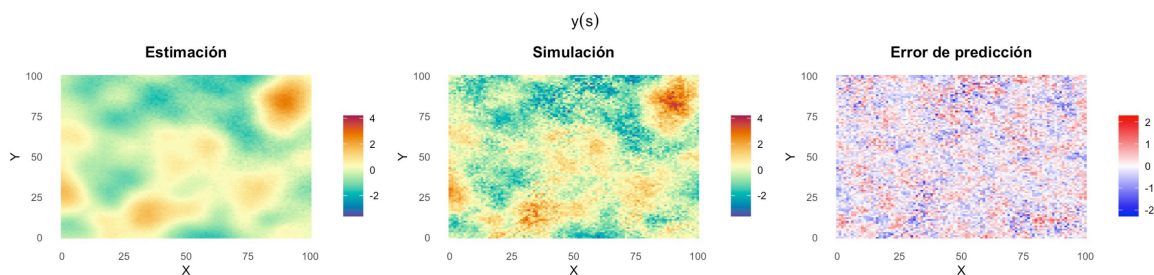


Figura 3.17: Comparación entre la variable respuesta simulada  $y(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo. De izquierda a derecha se representan la estimación media de la respuesta, la respuesta simulada, y el correspondiente error medio de predicción, calculado como la diferencia media entre los valores estimados y los valores reales simulados.

### 3.2.5. Conclusiones

Para terminar, utilizaremos esta sección para hacer una breve recapitulación de los resultados obtenidos a lo largo de las Subsecciones 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4, que resumimos numéricamente en el Cuadro 3.7. Antes de entrar en detalles, podemos decir que, en términos generales, la conclusión principal de la Sección 3.2 es que la manera en la que se especifica la estructura espacial en el predictor tiene un gran impacto en la capacidad predictiva del modelo.

En primer lugar, el modelo correctamente especificado (Subsección 3.2.1) es el que presenta un mejor comportamiento global. A pesar de que parece que pueda presentar un leve *spatial confounding*, estima razonablemente bien las dos componentes espaciales y presenta una muy buena capacidad predictiva.

Cuando eliminamos el efecto espacial residual del predictor (Subsección 3.2.2), el comportamiento del modelo empeora considerablemente. El coeficiente espacialmente variable asociado a la covariable intenta absorber la estructura espacial asociada al campo residual, aunque no consigue hacerlo completamente porque su formulación no es lo suficientemente flexible. Esto provoca que empeoren tanto la estimación del efecto espacial asociado a la covariable como la predicción de la respuesta.

Al contrario, cuando eliminamos el coeficiente espacialmente variable y nos quedamos sólo con un efecto espacial residual (Subsección 3.2.3), la estimación del campo espacial residual empeora mucho pero la capacidad de predicción del modelo sigue siendo relativamente buena. Esta diferencia nos indica que la flexibilidad del efecto espacial residual le permite absorber gran parte de la estructura espacial presente en los datos, incluso la parte que procede de la covariable.

Por último, el modelo que incorpora un efecto suave tipo RW2 para la covariable (Subsección 3.2.4) presenta unos resultados muy parecidos a los obtenidos en la Subsección 3.2.3, ya que esta estimación no consigue reflejar correctamente la estructura espacial de los datos.

En conjunto, los resultados obtenidos muestran que la capacidad predictiva por sí sola no es suficiente para evaluar el comportamiento de este tipo de modelos espaciales, pues hemos visto que una buena capacidad predictiva no implica necesariamente que el modelo esté bien especificado. Por ejemplo, hemos visto que si ignoramos la covariable, el campo espacial residual por sí sólo consigue predecir bien la respuesta.

Medida	Escenarios simples		Escenario completo			
	Solo $\alpha(s)$	Solo $\beta(s)$	Modelo completo	Sin $\alpha(s)$	Sin $\beta(s)$	RW2 para $X(s)$
RMSE <sub>y</sub>	0.422	0.349	0.464	0.632	0.564	0.559
NRMSE <sub>y</sub>	0.560	0.567	0.461	0.628	0.561	0.556
MAE <sub>y</sub>	0.334	0.275	0.364	0.499	0.438	0.434
Pearson <sub>y</sub>	0.829	0.824	0.888	0.780	0.829	0.832
Spearman <sub>y</sub>	0.818	0.753	0.874	0.719	0.821	0.822
RMSE <sub>α</sub>	0.308	–	0.387	–	0.655	0.646
NRMSE <sub>α</sub>	0.447	–	0.561	–	0.950	0.937
MAE <sub>α</sub>	0.242	–	0.300	–	0.497	0.493
Pearson <sub>α</sub>	0.899	–	0.835	–	0.637	0.651
Spearman <sub>α</sub>	0.892	–	0.831	–	0.640	0.651
RMSE <sub>β</sub>	–	0.179	0.289	0.454	–	–
NRMSE <sub>β</sub>	–	0.370	0.461	0.725	–	–
MAE <sub>β</sub>	–	0.140	0.228	0.362	–	–
Pearson <sub>β</sub>	–	0.931	0.891	0.745	–	–
Spearman <sub>β</sub>	–	0.934	0.893	0.740	–	–
RMSE <sub>η</sub>	–	0.173	0.315	0.485	–	–
NRMSE <sub>η</sub>	–	0.325	0.457	0.704	–	–
MAE <sub>η</sub>	–	0.116	0.204	0.320	–	–
Pearson <sub>η</sub>	–	0.947	0.893	0.776	–	–
Spearman <sub>η</sub>	–	0.930	0.869	0.731	–	–
DIC	449.624	327.133	461.334	996.984	773.522	753.843
WAIC	440.833	324.633	434.638	972.617	770.255	750.263

Cuadro 3.7: Comparación de las medidas de evaluación obtenidas para los seis modelos ajustados bajo la configuración base del estudio de simulación. Se incluyen los dos escenarios simples y las cuatro especificaciones consideradas en el escenario completo. El valor de cada medida se corresponde con su media Monte Carlo.

### 3.3. Efecto del tipo de muestreo

A partir de aquí, en las secciones restantes de este capítulo, nos dedicaremos a analizar cómo valores alternativos de ciertos parámetros, así como definiciones alternativas de algunos de los procesos considerados en el estudio de simulación, influyen en el comportamiento de los modelos espaciales ajustados mediante INLA.

A diferencia de las secciones anteriores, donde analizábamos el comportamiento de distintas formulaciones del predictor del modelo INLA considerando tanto casos en los que la estructura del predictor coincidía con la realidad simulada como situaciones de mala especificación, a partir de ahora nos centraremos exclusivamente en el modelo correctamente especificado del Escenario 3 (véase Sección 3.2.1). De este modo, el objetivo pasa a ser estudiar cómo distintas modificaciones introducidas en el proceso de simulación afectan al comportamiento del modelo cuando la estructura del predictor lineal coincide con la realidad generadora de los datos. El análisis se realiza bajo el modelo correctamente especificado con el fin de centrar la atención en los efectos asociados al diseño de simulación, sin que los resultados se vean condicionados por escenarios de mala especificación del predictor ya estudiados en la Sección 3.2.

En esta sección se analiza el efecto de modificar el esquema de muestreo utilizado para seleccionar las observaciones. Hasta el momento habíamos considerado un muestreo aleatorio simple. En esta sección, tal y como introdujimos en la Sección 2.4.3, contemplaremos distintos esquemas de muestreo preferencial, en los que las localizaciones con valores más altos de la variable respuesta presentan una mayor probabilidad de ser seleccionadas. En concreto, se estudian dos escenarios: un muestreo preferencial moderado ( $\gamma = 1$ ) y un muestreo preferencial fuerte ( $\gamma = 5$ ), donde  $\gamma$  es el parámetro que controla la intensidad del mecanismo de muestreo preferencial definido en la ecuación (2.2).

El objetivo de este análisis es estudiar hasta qué punto un esquema de muestreo preferencial, que induce una mayor probabilidad de observación en localizaciones con valores elevados de la variable respuesta, puede afectar a la capacidad predictiva del modelo cuando su formulación no aborda este fenómeno. Cabe mencionar que existen formulaciones específicamente diseñadas para modelizar situaciones de muestreo preferencial, como los modelos basados en *marked point processes* [3], pero el estudio de este tipo de modelos queda fuera del alcance de este trabajo.

Para facilitar la comparación entre los distintos esquemas de muestreo, en esta sección mostraremos únicamente una medida representativa de error (NRMSE) y una medida de asociación (correlación de Pearson) para la variable respuesta y las componentes del predictor  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$ . Dichas medidas se resumen en el Cuadro 3.8. El resto de métricas de evaluación se omiten por brevedad, al no aportar información adicional respecto a las conclusiones obtenidas, pero pueden consultarse en [https://github.com/sararaposeiras/modelado\\_espacial\\_INLA](https://github.com/sararaposeiras/modelado_espacial_INLA).

En primer lugar, observamos que el muestreo preferencial moderado (caso  $\gamma = 1$ ) no supone una modificación muy notable en los resultados respecto a los obtenidos bajo muestreo aleatorio simple. Es cierto que todas las medidas empeoran ligeramente, pero las diferencias son relativamente pequeñas. Esto era esperable viendo la distribución espacial de las observaciones muestreadas en la Figura 2.11, donde veíamos que el esquema de muestreo generado para  $\gamma = 1$  aún selecciona bastantes localizaciones con valores bajos del campo.

Sin embargo, cuando aumentamos la intensidad del mecanismo de muestreo preferencial hasta  $\gamma = 5$ , sí que observamos un claro deterioro del comportamiento del modelo. En este caso, tanto la variable respuesta, como  $\alpha(s)$  y  $\beta(s)$ , presentan un aumento considerable en las medidas de error de estimación y una apreciable disminución de las correlaciones. Este empeoramiento se aprecia especialmente en el caso de la respuesta  $y(s)$ , cuyo NRMSE aumenta desde 0,461 hasta 0,715. Esto también se

corresponde con lo que se intuye viendo la Figura 2.11, donde el esquema de muestreo generado para  $\gamma = 5$  no proporciona información sobre el campo en localizaciones con valores bajos del mismo.

Por su parte, atendiendo a las medidas globales de ajuste, resulta llamativo el hecho de que, a pesar del empeoramiento de las demás medidas de evaluación, el DIC y WAIC disminuyen ligeramente conforme aumenta la intensidad del muestreo preferencial. Esto se debe a que estas medidas evalúan únicamente el ajuste del modelo a las observaciones muestreadas, por lo que no tienen en cuenta que, en el caso del muestreo preferencial, dichas observaciones ya no constituyen una muestra representativa del dominio espacial completo.

	Muestreo aleatorio	Muestreo preferencial	
	$\gamma = 0$	$\gamma = 1$	$\gamma = 5$
NRMSE <sub>y</sub>	0.461 (0.008)	0.481 (0.013)	0.715 (0.048)
NRMSE <sub><math>\alpha</math></sub>	0.561 (0.030)	0.570 (0.031)	0.659 (0.035)
NRMSE <sub><math>\beta</math></sub>	0.461 (0.033)	0.480 (0.035)	0.612 (0.068)
NRMSE <sub><math>\eta</math></sub>	0.457 (0.038)	0.469 (0.040)	0.592 (0.072)
Pearson <sub>y</sub>	0.888 (0.004)	0.882 (0.006)	0.827 (0.018)
Pearson <sub><math>\alpha</math></sub>	0.835 (0.019)	0.828 (0.021)	0.763 (0.032)
Pearson <sub><math>\beta</math></sub>	0.891 (0.017)	0.884 (0.017)	0.813 (0.048)
Pearson <sub><math>\eta</math></sub>	0.893 (0.019)	0.890 (0.018)	0.843 (0.041)
DIC	461.334 (63.066)	444.440 (69.795)	433.590 (48.779)
WAIC	434.638 (69.949)	417.872 (77.556)	417.385 (52.632)

Cuadro 3.8: Comparación de las principales medidas de evaluación obtenidas bajo distintos esquemas de muestreo para el modelo correctamente especificado del Escenario 3. En cada celda se muestra la media Monte Carlo de la medida correspondiente y, entre paréntesis, su desviación típica.

A su vez, las representaciones gráficas de la Figura 3.18 nos permiten confirmar las conclusiones que obtuvimos a partir de las medidas numéricas del Cuadro 3.8. Aunque, por brevedad, sólo mostramos la gráfica correspondiente a la variable respuesta, gráficas análogas para  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$ , con interpretaciones equivalentes, pueden consultarse en [https://github.com/sararaposeiras/modelado\\_espacial\\_INLA](https://github.com/sararaposeiras/modelado_espacial_INLA).

En el caso del muestreo preferencial moderado ( $\gamma = 1$ ), observamos que la estimación de la respuesta obtenida reproduce razonablemente bien la estructura espacial general de la respuesta simulada. Aún así, el mapa de errores medios de predicción obtenido es ligeramente peor al que obteníamos en el caso de muestreo aleatorio simple (véase Figura 3.9), pues muestra una mayor concentración de errores positivos (zonas rojas), especialmente en zonas donde la variable respuesta simulada toma va-

lores bajos. Esto nos sugiere que el uso de este esquema de muestreo provoca una cierta tendencia a la sobreestimación.

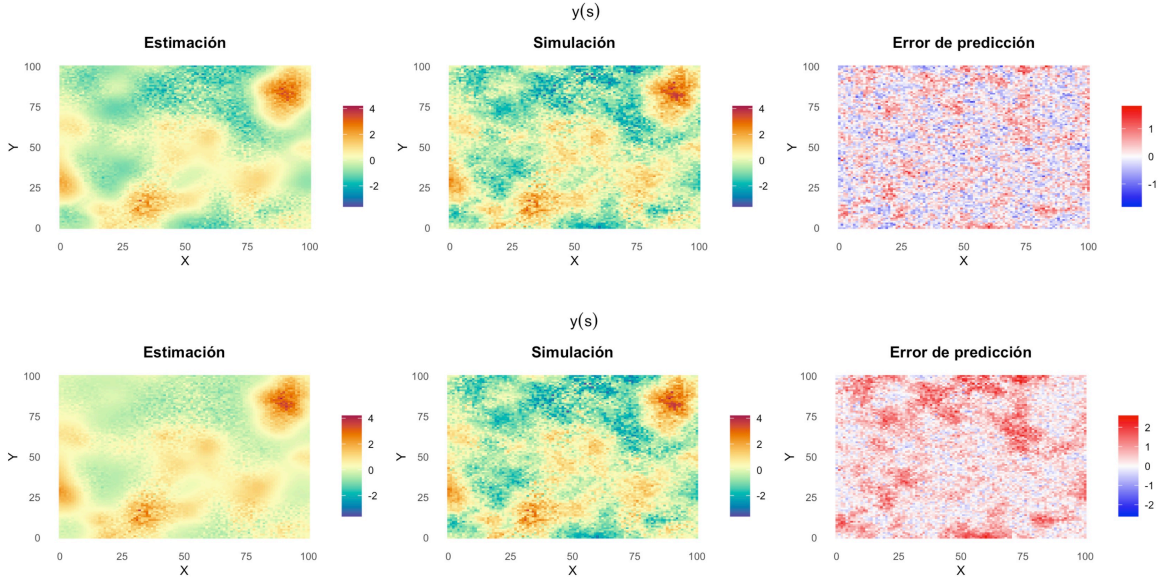


Figura 3.18: Comparación entre la variable respuesta simulada  $y(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo bajo distintos esquemas de muestreo preferencial. Las gráficas de arriba se corresponden con el caso de muestreo preferencial moderado ( $\gamma = 1$ ) y las de abajo con el caso de muestreo preferencial fuerte ( $\gamma = 5$ ). En cada fila se representan, de izquierda a derecha, la estimación media de la respuesta, la respuesta simulada, y el correspondiente error medio de predicción, calculado como la diferencia media entre los valores estimados y los valores reales simulados.

A su vez, en el caso del muestreo preferencial fuerte ( $\gamma = 5$ ), observamos diferencias importantes respecto al modelo de la Sección 3.2.1. En concreto, destaca el hecho de que el mapa de errores medios de predicción muestra una muy clara predominancia de errores positivos en todo el dominio espacial. Como comentábamos en el caso de  $\gamma = 1$ , esto nos indica que el modelo tiende a sobreestimar sistemáticamente la respuesta, lo que es coherente con la forma en la que se construye el mecanismo de muestreo preferencial: como las probabilidades de selección dependen del valor de la respuesta simulada, las observaciones tienden a concentrarse en regiones donde  $y(s)$  toma valores altos, mientras que las zonas con valores bajos quedan notablemente infrarepresentadas (véase Figura 2.11). Esto implica que el modelo dispone de escasa información sobre estas últimas regiones y de una proporción descompensada de información en las primeras, lo que favorece la aparición del sesgo observado.

En resumen, los resultados obtenidos en esta sección sugieren que el modelo ajustado mediante INLA es relativamente robusto frente a niveles moderados de muestreo preferencial, mientras que una intensidad elevada del mecanismo de muestreo puede deteriorar de forma apreciable su capacidad predictiva.

### 3.4. Efecto del tamaño muestral

Seguimos con este análisis del comportamiento de los modelos espaciales ajustados mediante INLA frente a distintas modificaciones del estudio de simulación estudiando cómo afecta el tamaño muestral,  $n_{\text{samples}}$ , al comportamiento del modelo correctamente especificado del Escenario 3 (véase Sección 3.2.1). Tal y como se indicó en la Sección 2.4.3, el tamaño muestral de referencia utilizado hasta ahora es de  $n_{\text{samples}} = 500$ . A partir de este valor, analizaremos cómo varían los resultados al incrementar o reducir el tamaño de la muestra, manteniendo fijos el resto de componentes del diseño de simulación. En concreto, analizaremos tanto situaciones con tamaños muestrales muy reducidos ( $n_{\text{samples}} = 10, 50, 100$ ) como escenarios intermedios ( $n_{\text{samples}} = 200, 300, 400$ ) y un caso con un tamaño muestral considerablemente mayor ( $n_{\text{samples}} = 1000$ ). El objetivo es analizar hasta qué punto la cantidad de información espacial disponible condiciona tanto la capacidad predictiva del modelo como su capacidad para estimar correctamente las distintas componentes espaciales,  $\alpha(s)$  y  $\beta(s)$ , presentes en el predictor.

Como ya hicimos en la Sección 3.3, para facilitar la comparación entre los distintos esquemas de muestreo, en esta sección mostraremos únicamente una medida representativa de error (NRMSE) y una medida de asociación (correlación de Pearson) para la variable respuesta y las componentes del predictor  $\alpha(s)$  y  $\beta(s)$ . Dichas medidas se resumen en el Cuadro 3.9. Sin embargo, al contrario que en la Sección 3.3, ahora no incluimos las medidas globales de ajuste, ya que el DIC y el WAIC no resultan directamente informativos para la comparación entre escenarios con distinto tamaño muestral. Todas las métricas que no incluimos en este documento pueden consultarse en [https://github.com/sararaposeiras/modelado\\_espacial\\_INLA](https://github.com/sararaposeiras/modelado_espacial_INLA) y conducen a las mismas conclusiones.

	Tamaño muestral							
	10	50	100	200	300	400	500	1000
NRMSE <sub>y</sub>	1.023 (0.087)	0.806 (0.060)	0.683 (0.034)	0.573 (0.020)	0.519 (0.013)	0.486 (0.010)	0.461 (0.008)	0.405 (0.005)
NRMSE <sub><math>\alpha</math></sub>	1.027 (0.079)	0.909 (0.050)	0.823 (0.043)	0.710 (0.040)	0.647 (0.039)	0.598 (0.035)	0.561 (0.030)	0.467 (0.020)
NRMSE <sub><math>\beta</math></sub>	1.012 (0.114)	0.853 (0.073)	0.737 (0.057)	0.615 (0.057)	0.546 (0.045)	0.499 (0.039)	0.461 (0.033)	0.367 (0.022)
NRMSE <sub><math>\eta</math></sub>	0.990 (0.090)	0.834 (0.083)	0.720 (0.061)	0.607 (0.058)	0.542 (0.054)	0.495 (0.047)	0.457 (0.038)	0.365 (0.029)
Pearson <sub>y</sub>	0.283 (0.124)	0.604 (0.077)	0.735 (0.032)	0.821 (0.014)	0.856 (0.008)	0.875 (0.006)	0.888 (0.004)	0.915 (0.002)
Pearson <sub><math>\alpha</math></sub>	0.198 (0.116)	0.450 (0.075)	0.581 (0.056)	0.710 (0.040)	0.769 (0.033)	0.808 (0.025)	0.835 (0.019)	0.891 (0.010)
Pearson <sub><math>\beta</math></sub>	0.274 (0.188)	0.577 (0.101)	0.701 (0.061)	0.798 (0.040)	0.845 (0.029)	0.871 (0.022)	0.891 (0.017)	0.932 (0.009)
Pearson <sub><math>\eta</math></sub>	0.304 (0.189)	0.608 (0.097)	0.722 (0.053)	0.806 (0.039)	0.848 (0.032)	0.874 (0.025)	0.893 (0.019)	0.932 (0.012)

Cuadro 3.9: Comparación de las principales medidas de evaluación obtenidas para distintos tamaños muestrales bajo el modelo correctamente especificado del Escenario 3. En cada celda se muestra la media Monte Carlo de la medida correspondiente y, entre paréntesis, su desviación típica.

En primer lugar, podemos observar que el uso de tamaños muestrales muy pequeños da lugar a un deterioro muy importante del comportamiento del modelo. En el caso extremo de  $n_{\text{samples}} = 10$ , vemos que todas las componentes presentan correlaciones muy bajas y valores del NRMSE próximos a 1 (e incluso ligeramente superiores en algunos casos), lo que nos indica que el rendimiento del modelo es muy pobre. Deducimos por lo tanto que, cuando la información espacial disponible es tan limitada, el modelo es incapaz de recuperar correctamente la estructura espacial presente en los datos.

Tal y como cabría esperar, a medida que aumentamos el tamaño muestral, observamos una mejora progresiva en todas las medidas de evaluación. Este comportamiento resulta especialmente evidente entre  $n_{\text{samples}} = 50$  y  $n_{\text{samples}} = 300$ , donde tanto las medidas de error como las correlaciones mejoran muy notoriamente. Por ejemplo, la correlación de Pearson asociada a la respuesta  $y(s)$  aumenta desde 0,604 para  $n_{\text{samples}} = 50$  hasta 0,856 para  $n_{\text{samples}} = 300$ , mientras que el NRMSE disminuye desde 0,806 hasta 0,519. A partir de tamaños muestrales más grandes, las mejoras pasan a ser mucho menos pronunciadas. Por ejemplo, a pesar de que aumentar el tamaño muestral desde  $n_{\text{samples}} = 500$  hasta  $n_{\text{samples}} = 1000$  sigue mejorando todas las medidas de evaluación, las diferencias obtenidas son bastante pequeñas en comparación con las mejoras observadas para tamaños muestrales más pequeños, especialmente considerando el incremento del coste computacional asociado a este aumento.

Cabe destacar también que la respuesta y las distintas componentes espaciales individuales,  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$ , no se ven afectadas de la misma manera por las reducciones en el tamaño muestral. En concreto, el efecto espacial residual  $\alpha(s)$  parece ser más sensible que las demás componentes a este tipo de cambios. Por ejemplo, en el Cuadro 3.9 vemos que para  $n_{\text{samples}} = 1000$ , todas las correlaciones toman valores cercanos a 0,9. No obstante, al reducir el tamaño muestral, la correlación asociada a  $\alpha(s)$  disminuye más rápidamente que las demás. Por ejemplo, en el Cuadro 3.9 vemos que para  $n_{\text{samples}} = 50$ , la correlación de Pearson de  $y(s)$  es de 0,604, mientras la del efecto residual  $\alpha(s)$  toma un valor de 0,450. Por el contrario, las componentes  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$  mantienen un comportamiento más parecido al de la propia respuesta. Esto indica que la predicción de la variable respuesta y la estimación del coeficiente espacial asociado a la covariable son algo más robustas frente a tamaños muestrales reducidos que la estimación del campo espacial residual.

Las representaciones gráficas de la Figura 3.19, junto con la de la Figura 3.9 ( $n_{\text{samples}} = 500$ ) de la Sección 3.2.1, nos permiten apreciar visualmente el comportamiento del modelo ante los cambios de tamaño muestral descritos anteriormente. En este documento incluimos únicamente las representaciones gráficas correspondientes a la variable respuesta,  $y(s)$ , de una selección representativa de los tamaños muestrales considerados a lo largo de esta sección. Las representaciones gráficas completas asociadas a todos los tamaños muestrales considerados en esta sección, incluyendo también las correspondientes a las componentes espaciales  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$  pueden consultarse en [https://github.com/sararaposeiras/modelado\\_espacial\\_INLA](https://github.com/sararaposeiras/modelado_espacial_INLA).

En primer lugar, para el caso de  $n_{\text{samples}} = 10$ , observamos que la estimación media presenta un sobresuavizado extremo en el que es casi imposible apreciar ningún tipo de estructura espacial. Además, el mapa de errores medios de predicción muestra regiones espaciales muy amplias con errores sistemáticos y de gran magnitud. Todo esto nos indica que el modelo es incapaz de reproducir correctamente la estructura espacial de la respuesta simulada a causa de la falta de información espacial disponible.

En el caso intermedio de  $n_{\text{samples}} = 100$ , observamos que el modelo ya consigue proporcionar una aproximación visible de la estructura espacial global de la respuesta. Aun así, todavía se aprecian discrepancias importantes y un nivel de suavizado superior al observado en el caso base, con  $n_{\text{samples}} = 500$  (véase Figura 3.9). A su vez, el mapa de errores medios de predicción sigue mostrando una marcada estructura espacial, aunque estos errores presentan una menor magnitud que los del caso  $n_{\text{samples}} = 10$ .

Por último, para  $n_{\text{samples}} = 1000$ , observamos que la estimación mejora ligeramente respecto al caso base (véase Figura 3.9). Sin embargo, las diferencias que conseguimos apreciar visualmente entre los dos casos son bastante pequeñas, especialmente en comparación con las que vemos al pasar de  $n_{\text{samples}} = 10$  a  $n_{\text{samples}} = 100$ , lo que resulta coherente con las conclusiones obtenidas previamente a partir de las medidas numéricas del Cuadro 3.9.

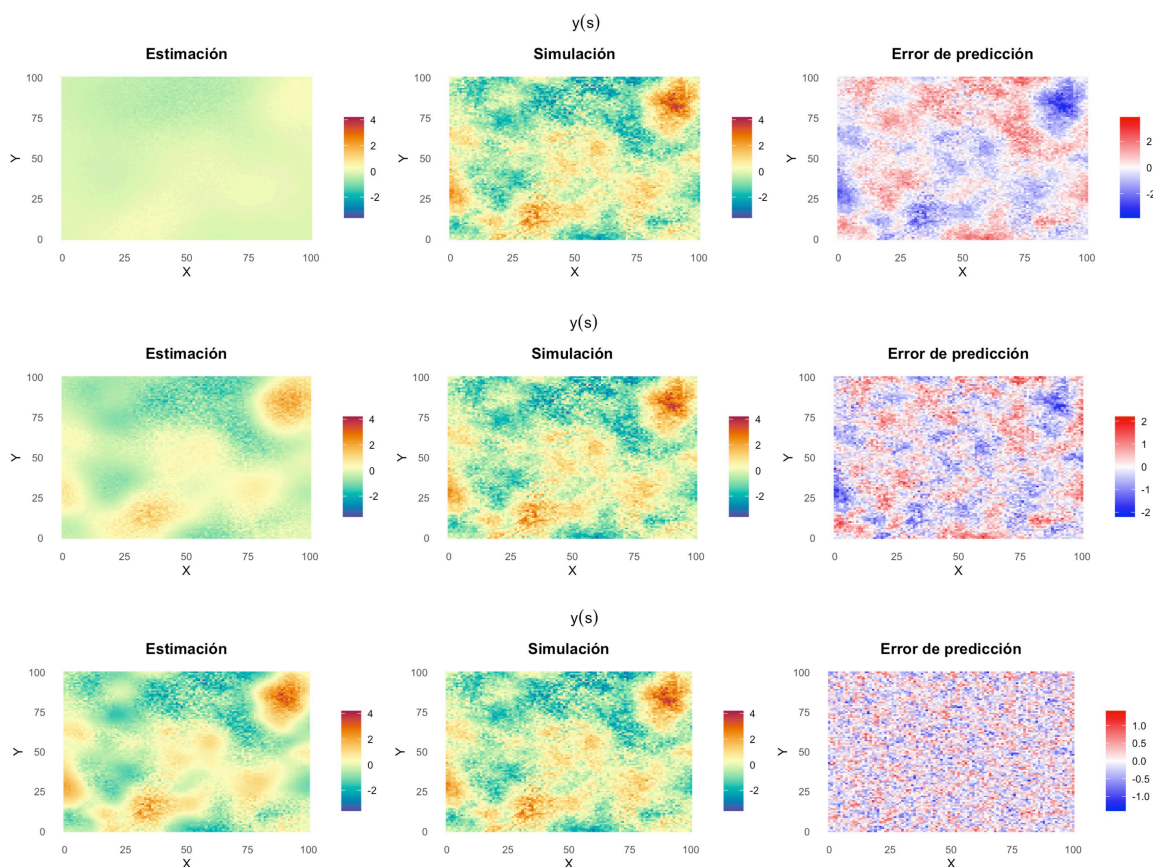


Figura 3.19: Comparación entre la respuesta simulada  $y(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo bajo distintos tamaños muestrales. Las gráficas de arriba se corresponden con el caso de un tamaño muestral de 10, las del centro con un tamaño muestral de 100 y las de abajo con un tamaño muestral de 1000. En cada fila se representan, de izquierda a derecha, la estimación media de la respuesta, la respuesta simulada, y el correspondiente error medio de predicción, calculado como la diferencia media entre los valores estimados y los valores reales simulados.

De esta manera, los resultados obtenidos a lo largo de esta sección indican que el tamaño muestral tiene un gran impacto sobre el comportamiento del modelo, especialmente cuando el número de observaciones disponibles es pequeño. Después, a partir de tamaños muestrales moderadamente grandes, este impacto se reduce considerablemente.

### 3.5. Efecto del error aleatorio independiente

En esta sección nos centraremos en estudiar el efecto del término de error espacialmente independiente,  $\varepsilon(s)$ , en el comportamiento de los modelos espaciales ajustados mediante INLA. Tal y como describimos en la Sección 2.4.2, en el escenario base considerado en la Sección 3.2.1 se generaba dicho error a partir de una distribución normal de media cero y desviación típica  $\sigma = 0,3$ . Ahora analizaremos cómo cambian los resultados al modificar la variabilidad de este término de error, es decir, al utilizar otros valores de  $\sigma$ . En concreto, consideraremos un caso con un nivel de ruido aleatorio muy

pequeño ( $\sigma = 0,1$ ) y otro con un nivel de ruido considerablemente mayor al del modelo de la Sección 3.2.1 ( $\sigma = 0,75$ ). El objetivo es analizar el impacto de la variabilidad no estructurada espacialmente sobre el rendimiento del modelo.

Como ya hicimos en las Secciones 3.3 y 3.4, para facilitar la comparación entre los distintos escenarios, en este documento mostraremos únicamente una medida representativa de error (NRMSE) y una medida de asociación (correlación de Pearson) para la respuesta  $y(s)$  y para cada una de las componentes espaciales  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$ , mientras que las demás métricas se omiten por brevedad, al no aportar información adicional respecto a las conclusiones obtenidas. Todas ellas pueden consultarse en [https://github.com/sararaposeiras/modelado\\_espacial\\_INLA](https://github.com/sararaposeiras/modelado_espacial_INLA). De este modo, resumimos en el Cuadro 3.10 las principales medidas de evaluación obtenidas para los tres escenarios considerados.

	Desviación típica del error iid		
	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,3$	$\sigma = 0,75$
NRMSE <sub>y</sub>	0.334 (0.009)	0.461 (0.008)	0.725 (0.008)
NRMSE <sub><math>\alpha</math></sub>	0.486 (0.025)	0.561 (0.030)	0.710 (0.038)
NRMSE <sub><math>\beta</math></sub>	0.391 (0.025)	0.461 (0.033)	0.607 (0.043)
NRMSE <sub><math>\eta</math></sub>	0.394 (0.034)	0.457 (0.038)	0.587 (0.047)
Pearson <sub>y</sub>	0.943 (0.003)	0.888 (0.004)	0.690 (0.008)
Pearson <sub><math>\alpha</math></sub>	0.881 (0.013)	0.835 (0.019)	0.714 (0.037)
Pearson <sub><math>\beta</math></sub>	0.922 (0.010)	0.891 (0.017)	0.806 (0.033)
Pearson <sub><math>\eta</math></sub>	0.921 (0.014)	0.893 (0.019)	0.819 (0.032)

Cuadro 3.10: Comparación de las principales medidas de evaluación obtenidas para distintos valores de la desviación típica del término de error aleatorio independiente bajo el modelo correctamente especificado del Escenario 3. En cada celda se muestra la media Monte Carlo de la medida correspondiente y, entre paréntesis, su desviación típica.

En primer lugar, como cabría esperar, observamos que reducir la variabilidad del término de error aleatorio independiente mejora el comportamiento general del modelo. En el caso de  $\sigma = 0,1$ , tanto la respuesta como las componentes  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$  presentan menores errores de estimación y correlaciones más elevadas que en el escenario base  $\sigma = 0,3$ . Análogamente, observamos que aumentar el nivel de ruido de la variable respuesta supone un claro deterioro de los resultados obtenidos para todas las medidas de evaluación. En particular, cuando aumentamos el valor de  $\sigma$  hasta 0,75 provocamos un notable aumento en los NRMSE tanto de  $y(s)$  como de  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$ , a la vez que una reducción general en sus correlaciones de Pearson.

Tanto la mejoría asociada a la reducción de  $\sigma$  como el empeoramiento asociado a su aumento parecen ser especialmente notables en la variable respuesta,  $y(s)$ . Esto resulta coherente con la estructura de la simulación que presentamos en la Sección 2.4.2, pues las variaciones del término de error indepen-

diente  $\varepsilon(s)$  sólo afectan directamente a la simulación de esta componente, mientras que las estructuras espaciales subyacentes ( $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$ ) permanecen inalteradas. En cualquier caso, es importante puntualizar que aunque el término de error no modifique directamente a las componentes  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$ , un aumento de la variabilidad no estructurada sí que dificulta indirectamente su estimación, tal y como muestran los resultados del Cuadro 3.10.

Confirmamos estas conclusiones a través de las representaciones gráficas de la Figura 3.20, que junto con la Figura 3.9, correspondiente al escenario base ( $\sigma = 0,3$ ), permiten apreciar visualmente el comportamiento del modelo ante estas variaciones. Igual que en las Secciones 3.3 y 3.4, en este documento sólo incluimos las representaciones gráficas correspondientes a la variable respuesta  $y(s)$  pero en [https://github.com/sararaposeiras/modelado\\_espacial\\_INLA](https://github.com/sararaposeiras/modelado_espacial_INLA) se pueden consultar las versiones equivalentes para las componentes  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$ , de las que se obtienen conclusiones análogas.

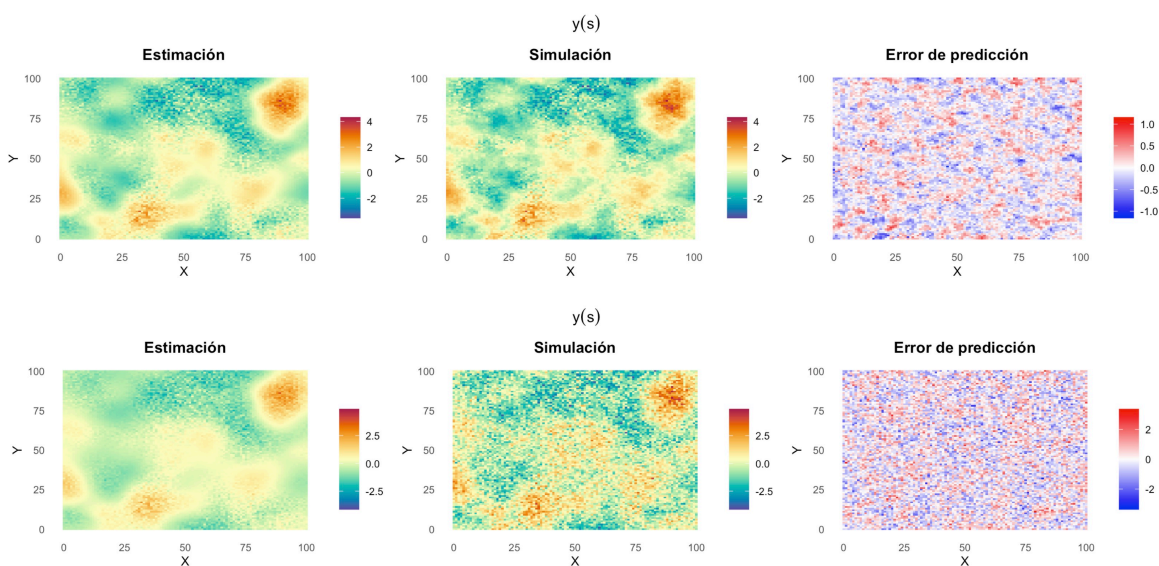


Figura 3.20: Comparación entre la respuesta simulada  $y(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo para distintos valores de la desviación típica del término de error aleatorio independiente. Las tres gráficas de arriba se corresponden con el caso  $\sigma = 0,1$  y las de abajo con el caso  $\sigma = 0,75$ . En cada fila se representan, de izquierda a derecha, la estimación media de la respuesta, la respuesta simulada, y el correspondiente error medio de predicción, calculado como la diferencia media entre los valores estimados y los valores reales simulados.

En primer lugar observamos que la respuesta simulada en el caso de  $\sigma = 0,1$  presenta una estructura espacial bastante más suave que en el caso de  $\sigma = 0,75$  y que el modelo consigue reproducirla adecuadamente. En este caso no es tan claro el fenómeno de sobresuavizado que se podía ver en algunas zonas de la Figura 3.9 y tanto la magnitud como la distribución espacial de los errores medios de predicción son razonables. En el caso de  $\sigma = 0,75$ , la gran variabilidad local presente en la respuesta simulada acentúa ligeramente la sobresuavización de la estimación obtenida mediante INLA. Aún así, el modelo aún consigue reproducir la estructura espacial de la respuesta razonablemente bien.

A diferencia de lo que ocurría en las Secciones 3.3 y 3.4, los cambios observados aquí son relativamente moderados, especialmente entre los casos  $\sigma = 0,1$  y  $\sigma = 0,3$ . Esto sugiere que, si bien un aumento suficientemente grande del valor de  $\sigma$  puede llegar a perjudicar a su rendimiento, el modelo ajustado

mediante INLA presenta cierta robustez frente a niveles moderados de variabilidad no estructurada espacialmente.

### 3.6. Efecto de la correlación entre componentes espaciales

Terminamos este capítulo estudiando cómo afecta al comportamiento del modelo espacial ajustado mediante INLA la presencia de correlación entre los distintos efectos espaciales presentes en el predictor.

Como ya comentamos en la Sección 2.4.2, en la práctica es habitual que el efecto espacial residual y las covariables espaciales observadas no sean independientes, ya que el efecto residual recoge la influencia de distintos fenómenos no observados que, en muchos casos, tienen relación con las covariables incluidas explícitamente en el modelo. Con el objetivo de comprender mejor el comportamiento de INLA en este tipo de contextos, en esta sección consideramos un escenario en el que los dos efectos espaciales del predictor no son independientes (Escenario 4 de la Sección 2.4.2). En concreto, forzaremos artificialmente distintos niveles de dependencia entre ambos efectos, regulados por el parámetro  $\rho \in [0, 1]$ . Consideraremos un caso de dependencia moderada ( $\rho = 0,4$ ) y otro de dependencia fuerte ( $\rho = 0,7$ ).

Este tipo de situaciones está ligado al fenómeno de *spatial confounding*, pues, cuando las distintas componentes espaciales del predictor comparten estructuras espaciales similares, dificulta que el modelo pueda identificar correctamente la estructura espacial de cada una de ellas. En consecuencia, en este tipo de escenarios es habitual observar dificultades para separar correctamente las distintas componentes espaciales del predictor en el proceso de estimación, aunque es posible que el modelo mantenga una capacidad predictiva adecuada sobre la variable respuesta.

Una vez más, por simplificar la comparación entre los distintos escenarios considerados, volveremos a mostrar únicamente una medida representativa de error (NRMSE) y una medida de asociación (correlación de Pearson) para la respuesta  $y(s)$  y para cada una de las componentes espaciales  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$ . Las restantes medidas de evaluación llevan a conclusiones análogas y pueden consultarse en [https://github.com/sararaposeiras/modelado\\_espacial\\_INLA](https://github.com/sararaposeiras/modelado_espacial_INLA). Los resultados obtenidos para cada uno de los tres escenarios de simulación considerados se recogen en el Cuadro 3.11.

En primer lugar, observamos que la estimación de la respuesta global,  $y(s)$ , no parece verse afectada por la presencia de dependencia entre las componentes espaciales del predictor. Sin embargo, la estimación de  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$  cambia notablemente en función del valor de  $\rho$ . El cambio más destacable aparece en la estimación del efecto espacial residual. Mientras que en el escenario base ( $\rho = 0$ ) la correlación de Pearson de  $\alpha(s)$  era de 0,835, al aumentar el valor de  $\rho$  esta disminuye considerablemente, hasta alcanzar el valor de 0,367 para  $\rho = 0,7$ . A su vez, el valor de su NRMSE aumenta desde 0,561 para  $\rho = 0$  hasta casi 1 (0,948) en el caso de  $\rho = 0,7$ . Por otro lado, la estimación de las componentes  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$  no experimenta un deterioro tan acusado. Si bien sus NRMSE aumentan notablemente al aumentar el valor de  $\rho$ , sus correlaciones de Pearson mantienen niveles cercanos a 1. Esto parece indicar que el modelo sigue captando razonablemente bien el patrón espacial de dicha componente, aunque probablemente no consiga estimar adecuadamente la intensidad de sus efectos, lo que explicaría el aumento del NRMSE al incrementarse el valor de  $\rho$ , mientras que la correlación se mantiene elevada. Este comportamiento resulta coherente con el *spatial confounding* esperado en este tipo de escenarios.

Estas conclusiones se aprecian también visualmente cuando representamos gráficamente las estimaciones que proporciona el modelo INLA. A continuación mostramos dichas gráficas para los efectos  $\alpha(s)$  y  $\beta(s)$ , para el efecto combinado  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  y para la variable respuesta  $y(s)$ .

	Campos independientes	Campos correlacionados	
	$\rho = 0$	$\rho = 0,4$	$\rho = 0,7$
NRMSE <sub>y</sub>	0.461 (0.008)	0.489 (0.009)	0.447 (0.010)
NRMSE <sub><math>\alpha</math></sub>	0.561 (0.030)	0.705 (0.038)	0.948 (0.029)
NRMSE <sub><math>\beta</math></sub>	0.461 (0.033)	0.586 (0.050)	0.888 (0.058)
NRMSE <sub><math>\eta</math></sub>	0.457 (0.038)	0.573 (0.051)	0.869 (0.050)
Pearson <sub>y</sub>	0.888 (0.004)	0.873 (0.005)	0.895 (0.005)
Pearson <sub><math>\alpha</math></sub>	0.835 (0.019)	0.728 (0.038)	0.367 (0.090)
Pearson <sub><math>\beta</math></sub>	0.891 (0.017)	0.909 (0.012)	0.938 (0.008)
Pearson <sub><math>\eta</math></sub>	0.893 (0.019)	0.916 (0.013)	0.948 (0.007)

Cuadro 3.11: Comparación de las principales medidas de evaluación obtenidas para distintos niveles de dependencia espacial entre el efecto residual y el efecto espacial asociado a la covariable. En cada celda se muestra la media Monte Carlo de la medida correspondiente y, entre paréntesis, su desviación típica.

En primer lugar, analizamos las representaciones gráficas correspondientes al caso de dependencia moderada ( $\rho = 0,4$ ), que se encuentran en la Figura 3.21. Comparándolas con las obtenidas en el escenario base ( $\rho = 0$ ) de la Sección 3.2.1 (véanse Figuras 3.6 y 3.7), observamos que la presencia de esta dependencia entre los efectos espaciales del predictor dificulta que el modelo consiga estimarlos correctamente.

En concreto, vemos que la estimación de  $\beta(s)$  presenta valores más altos en valor absoluto que en las estimaciones previas, lo que se refleja visualmente en una mayor intensidad de los colores del mapa asociado a la estimación de dicha componente. En consecuencia, la estimación del efecto combinado  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  presenta una estructura espacial más fuerte, incorporando parte de la variabilidad espacial que en la realidad simulada correspondía al efecto espacial residual  $\alpha(s)$ . Este comportamiento se aprecia claramente al comparar las gráficas de  $\eta(s)$  y  $\alpha(s)$ , en las que se aprecia cómo la estructura espacial compartida por ambas componentes en la simulación aparece sobrerrepresentada en la estimación de  $\eta(s)$  y pierde intensidad en la estimación del efecto espacial residual  $\alpha(s)$ .

A pesar de ello, vemos que en este caso la estimación del efecto residual  $\alpha(s)$  aún sigue captando parcialmente la estructura espacial no explicada por la covariable. Aunque se aprecia un sobresuavizado bastante fuerte, todavía conseguimos identificar relativamente bien las regiones en las que el efecto residual toma valores positivos o negativos. Es decir, si tuviéramos que extraer conclusiones observando únicamente los mapas de estimación, sobreestimaríamos la importancia de la covariable en la explicación de la variabilidad espacial observada, pero seguiríamos identificando de forma aproximada las regiones en las que existe estructura espacial residual no explicada por la covariable. Por tanto, en este escenario de dependencia moderada, el principal problema no es la pérdida completa

de la estructura espacial residual, sino la dificultad para identificar correctamente qué parte de esa estructura corresponde a cada componente espacial del predictor.

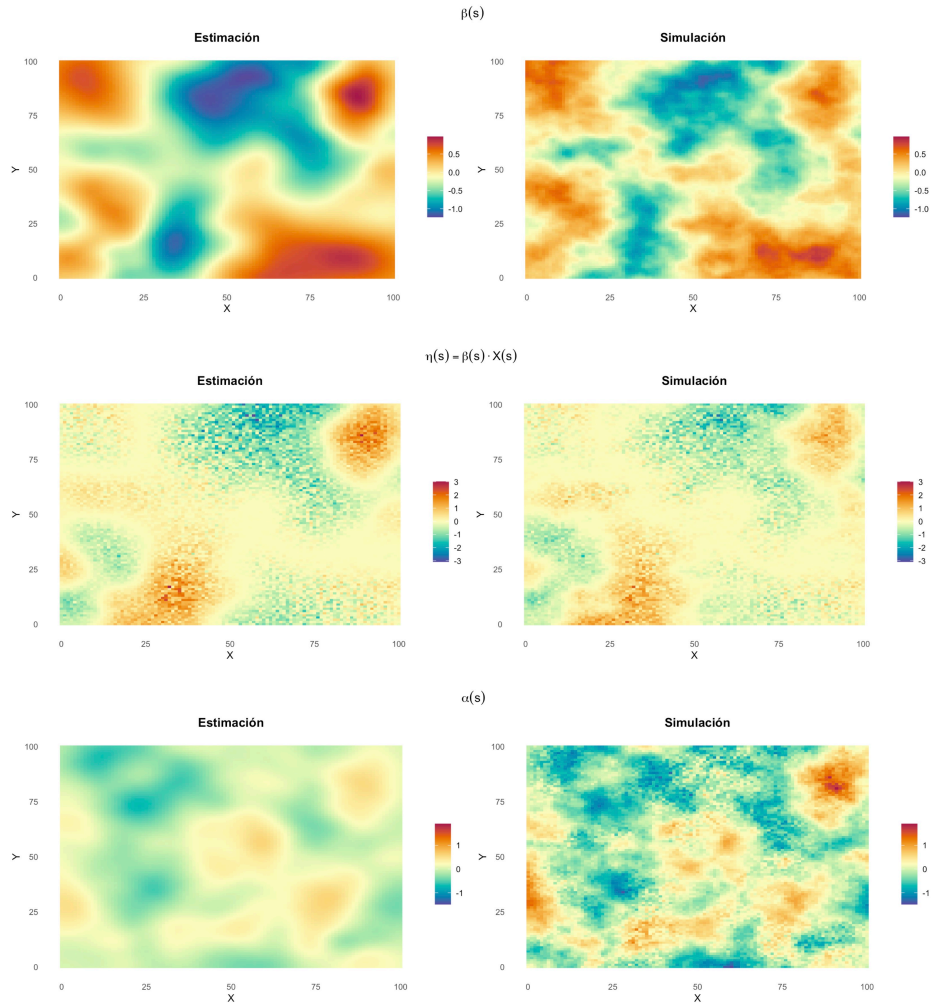


Figura 3.21: Comparación entre los campos espaciales simulados y las estimaciones medias obtenidas mediante INLA a partir de 100 repeticiones de Monte Carlo para el caso de dependencia moderada ( $\rho = 0,4$ ). En cada fila se representan la estimación media obtenida mediante INLA (izquierda) y el campo espacial simulado (derecha). Las gráficas de arriba se corresponden con los resultados obtenidos para el coeficiente espacialmente variable  $\beta(s)$ , las del medio con los del efecto combinado  $\eta(s)$  y las de abajo con los del efecto espacial residual  $\alpha(s)$ .

Estas dificultades en la estimación del efecto residual  $\alpha(s)$  se vuelven mucho más evidentes cuando aumentamos la intensidad de la dependencia espacial hasta  $\rho = 0,7$ , como se observa en la Figura 3.22. En este caso, la estimación obtenida para el efecto espacial residual presenta un deterioro claro respecto al escenario base (véase Figura 3.6). El modelo proporciona una estimación excesivamente suavizada en la que ya no se consigue apreciar la estructura espacial simulada. Por el contrario, la estimación de  $\beta(s)$  presenta nuevamente valores demasiado altos en valor absoluto, provocando que el efecto combinado  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  incorpore gran parte de la estructura espacial que en realidad corresponde al

efecto residual  $\alpha(s)$ . Esto se aprecia claramente en las gráficas de  $\eta(s)$ , donde la estructura espacial compartida entre ambas componentes aparece fuertemente sobrerrepresentada. Al contrario que en el escenario anterior ( $\rho = 0,4$ ), en este caso, si observáramos únicamente las estimaciones obtenidas, concluiríamos erróneamente que la covariable explica prácticamente toda la estructura espacial presente en los datos y que apenas existe variabilidad residual no explicada.

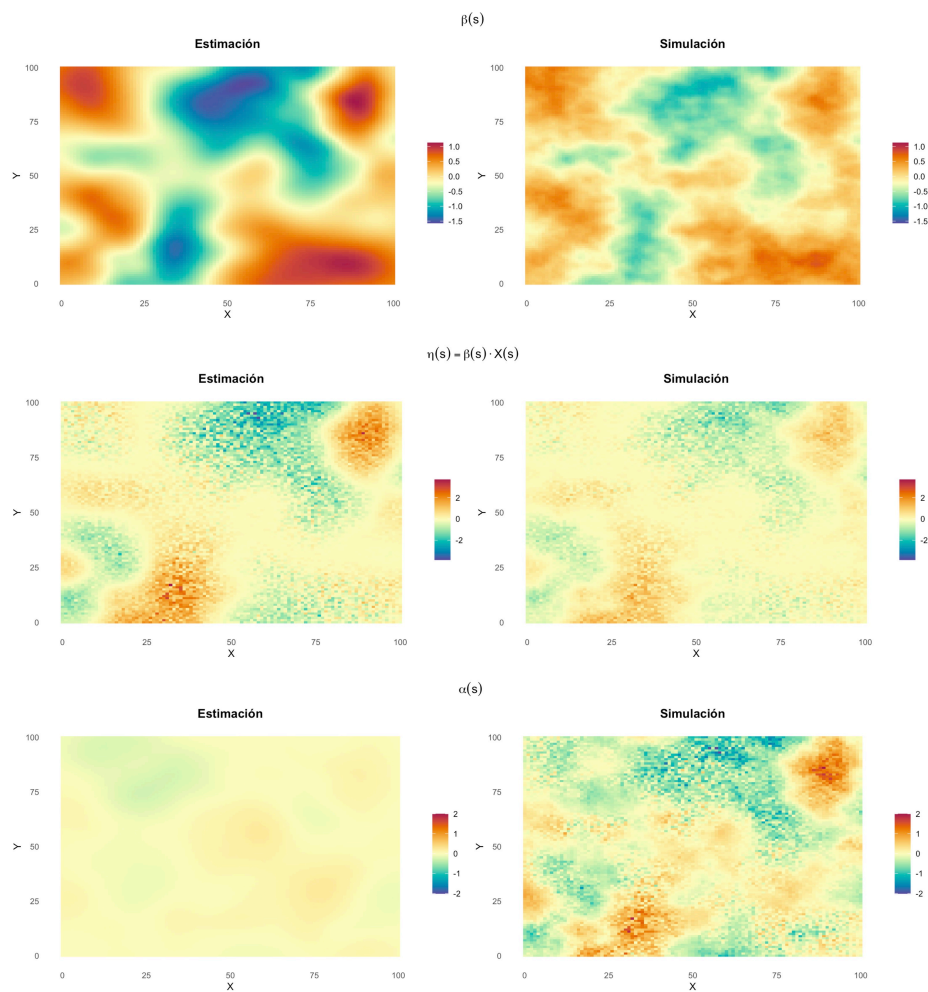


Figura 3.22: Comparación entre los campos espaciales simulados y las estimaciones medias obtenidas mediante INLA a partir de 100 repeticiones de Monte Carlo para el caso de dependencia fuerte ( $\rho = 0,7$ ). En cada fila se representan la estimación media obtenida mediante INLA (izquierda) y el campo espacial simulado (derecha). Las gráficas de arriba se corresponden con los resultados obtenidos para el coeficiente espacialmente variable  $\beta(s)$ , las del medio con los del efecto combinado  $\eta(s)$  y las de abajo con los del efecto espacial residual  $\alpha(s)$ .

Finalmente, en la Figura 3.23 representamos las estimaciones correspondientes a la respuesta  $y(s)$  para los dos escenarios con dependencia entre los efectos espaciales del predictor considerados. Comparando estas representaciones con la Figura 3.9 del escenario base ( $\rho = 0$ ), observamos que, a pesar de las dificultades encontradas en la estimación de  $\alpha(s)$ , la buena capacidad predictiva del modelo se conserva, incluso para valores altos de  $\rho$ .

En resumen, los resultados obtenidos en esta sección muestran que cuando el efecto espacial residual y el efecto espacialmente variable asociado a la covariable comparten estructuras espaciales similares, el modelo tiende a inflar la estimación de  $\beta(s)$ , provocando que el efecto combinado  $\eta(s) = \beta(s) \cdot X(s)$  incorpore parte de la variabilidad espacial que en realidad corresponde al efecto espacial residual  $\alpha(s)$ . Como consecuencia, la estimación individual de la componente residual  $\alpha(s)$  se deteriora notablemente, mientras que las componentes  $\beta(s)$  y  $\eta(s)$  siguen reproduciendo razonablemente bien los patrones espaciales observados. A pesar de ello, la capacidad predictiva sobre la variable respuesta apenas se ve afectada, lo que indica que el modelo logra compensar la pobre estimación del campo residual incluyendo su señal espacial en la componente espacial de la covariable. Estos resultados son consistentes con el fenómeno de *spatial confounding*.

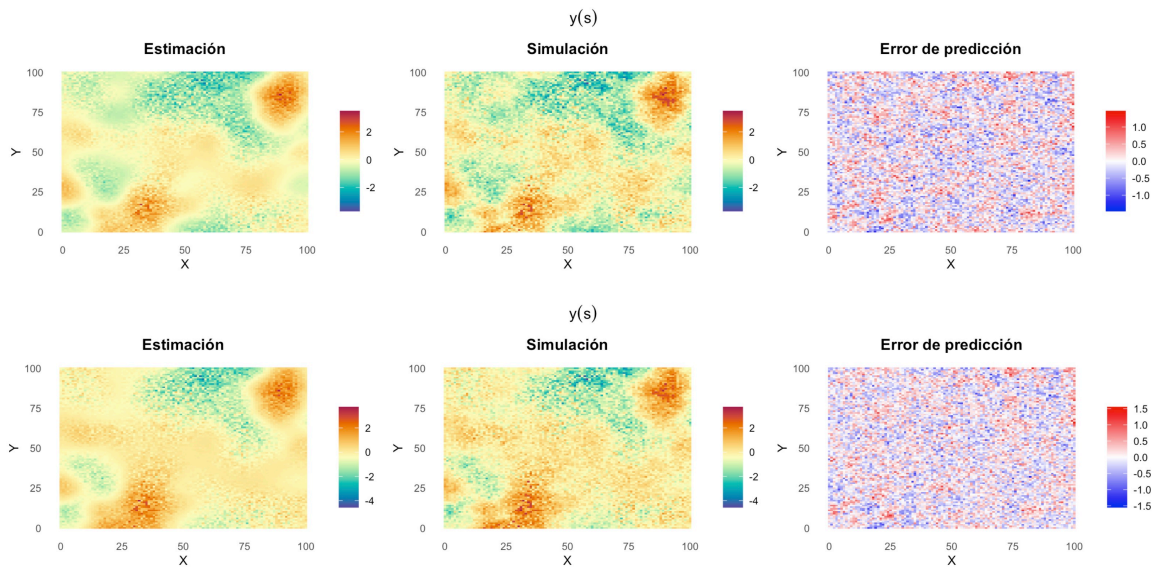


Figura 3.23: Comparación entre la respuesta simulada  $y(s)$  y la estimación media obtenida mediante INLA a partir de las 100 repeticiones Monte Carlo para distintos valores del parámetro  $\rho$ . Las tres gráficas de arriba se corresponden con el caso  $\rho = 0,4$  y las de abajo con el caso  $\rho = 0,7$ . En cada fila se representan, de izquierda a derecha, la estimación media de la respuesta, la respuesta simulada, y el correspondiente error medio de predicción, calculado como la diferencia media entre los valores estimados y los valores reales simulados.



## Capítulo 4

# Conclusiones

En este trabajo, mediante distintos escenarios de simulación, obtuvimos conclusiones relevantes sobre el comportamiento de los modelos de regresión espaciales ajustados mediante INLA, que pueden ser de utilidad para la aplicación e interpretación de este tipo de modelos en la práctica, por ejemplo, en su uso en el ámbito de la evaluación y gestión de recursos pesqueros. Más concretamente, analizamos cómo distintos escenarios de simulación y diferentes especificaciones del predictor espacial afectan tanto a la capacidad predictiva del modelo INLA como a la correcta identificación e interpretación de las distintas fuentes de variabilidad espacial.

La primera conclusión que extraemos de este estudio es que, cuando el modelo está correctamente especificado, INLA muestra un buen comportamiento: consigue estimar correctamente las distintas componentes espaciales incluidas en la simulación y predecir adecuadamente la variable respuesta, aunque con cierto sobresuavizado de patrones espaciales de pequeña escala. Es decir, que si la estructura espacial presente en los datos se incorpora adecuadamente al modelo, se obtienen conclusiones correctas tanto sobre la respuesta como sobre los efectos espaciales que afectan a la misma. Por ejemplo, si la variable respuesta representase la abundancia de reclutas de un stock de peces, estos modelos nos permitirían identificar correctamente las áreas con alta presencia de peces jóvenes, proporcionándonos información útil a la hora de establecer vedas para proteger dichas zonas.

En segundo lugar, concluimos que una incorrecta especificación del predictor no afecta necesariamente de la misma manera a la capacidad predictiva del modelo y a la correcta estimación e interpretación de las componentes espaciales que explican la variabilidad de la respuesta.

Por un lado, observamos que, debido a su formulación como campo aleatorio espacial con estructura de dependencia, el efecto espacial residual presenta una gran capacidad para capturar la variabilidad espacial asociada a otros efectos simulados (como el efecto espacial de la covariable) cuando estos no se incluyen en el predictor o se especifican de forma inadecuada, es decir, ignorando su dependencia espacial. Esto implica que, cuando se ignora la covariable o se modela mediante estructuras RW2, la capacidad predictiva del modelo apenas se ve afectada. Sin embargo, las conclusiones obtenidas sobre el efecto y relevancia de las covariables sí pueden ser erróneas. En concreto, hemos observado un caso en el que la especificación de un efecto RW2 para la covariable (cuando el efecto de la misma era en realidad espacialmente dependiente) provocaba que el efecto asociado a dicha covariable se estimara como prácticamente nulo. Esto puede llevar en la práctica a concluir erróneamente que dicha covariable no es relevante en la explicación de la variabilidad de la respuesta. No obstante, hemos observado que este resultado no refleja una ausencia real de efecto, sino una inadecuada especificación del modelo, en la que el efecto espacial residual termina absorbiendo parte de la variabilidad correspondiente a la covariable. Por este motivo, hemos observado que en este tipo de situaciones resulta recomendable considerar formulaciones con coeficientes espacialmente variables, especialmente cuando exista eviden-

cia de heterogeneidad espacial en el efecto de las covariables o cuando las especificaciones tipo RW2 produzcan resultados difíciles de interpretar desde un punto de vista científico.

Por otro lado, observamos que considerar el efecto espacial residual sí que resulta importante para que el modelo conserve una buena capacidad predictiva, pues el efecto espacial asociado a la covariable no es lo suficientemente flexible para absorber la estructura espacial residual de los datos. En consecuencia, recomendamos incluir este efecto de forma explícita en la práctica, ya que nuestros resultados indican que la inclusión simultánea de ambas componentes (efecto espacial residual y covariable espacialmente dependiente) no supone un problema cuando el modelo está correctamente especificado y no existe dependencia entre las dos componentes espaciales del predictor, es decir, cuando ambas forman parte del proceso generador de los datos de manera diferenciada. En este caso, el modelo es capaz de estimar los efectos sin problemas relevantes de identificabilidad.

Es importante recalcar que todas las conclusiones anteriores se obtuvieron bajo la suposición de independencia entre las dos componentes espaciales del predictor. Cuando esta hipótesis no se cumple aparece el fenómeno de *spatial confounding*. En nuestro caso, observamos que el coeficiente espacialmente variable tendía a inflarse, provocando que el efecto asociado a la covariable incorporase parte de la estructura espacial que en realidad correspondía al efecto espacial residual. En otros escenarios podría suceder lo contrario, pero, en cualquier caso, la conclusión es que en este tipo de situaciones, las conclusiones obtenidas sobre el efecto de cada componente espacial pueden estar sesgadas. A pesar de todo, vimos que la capacidad predictiva del modelo apenas se veía afectada por esta situación de dependencia, ya que existía una compensación entre las estimaciones de las dos componentes. Por todo esto, recomendamos ser cautelosos cuando en la práctica se sospeche de la existencia de dependencia entre las componentes espaciales del predictor, pues, aunque las predicciones obtenidas puedan seguir siendo buenas, las conclusiones sobre los efectos de las componentes espaciales pueden ser incorrectas.

Por último, concluimos que el comportamiento del modelo también depende de factores como el tamaño muestral o el mecanismo de muestreo considerado. En particular, observamos que tamaños muestrales muy pequeños y mecanismos de muestreo fuertemente preferenciales empeoran considerablemente las estimaciones obtenidas. Por ello, recomendamos tener en cuenta estas cuestiones en la práctica, ya que pueden afectar tanto a la capacidad predictiva del modelo como a la correcta estimación de las distintas componentes espaciales.

En vista de todo lo anterior, consideramos que este trabajo puede resultar útil tanto por las conclusiones obtenidas como por servir de punto de partida para futuros estudios relacionados con el comportamiento de modelos espaciales ajustados mediante INLA, poniendo además a disposición de la comunidad científica todo el código desarrollado para este trabajo en [https://github.com/sararaposeiras/modelado\\_espacial\\_INLA](https://github.com/sararaposeiras/modelado_espacial_INLA).

A raíz de este trabajo, se han identificado además diversas cuestiones que podrían resultar de gran interés y utilidad para su desarrollo en investigaciones futuras. En particular, resultaría interesante ampliar el estudio del fenómeno de *spatial confounding*, con escenarios que simulen la dependencia de forma alternativa, pudiendo así profundizar más en cómo afecta la correlación entre el campo espacial residual y las covariables espaciales al comportamiento del modelo. También estaría bien comparar los resultados obtenidos mediante INLA con los de otros enfoques alternativos, como el uso de modelos GAM (*Generalized Additive Models*) propuesto en [18]. Estos modelos permiten modelar la dependencia espacial mediante coeficientes espacialmente dependientes, pero sin incorporar explícitamente un campo espacial residual dentro del predictor, por lo que nos permitirían estudiar si dos maneras tan distintas de tratar la dependencia espacial pueden proporcionar resultados similares. Además, teniendo en cuenta que en aplicaciones reales es habitual que los datos se obtengan mediante mecanismos de muestreo preferencial (por ejemplo, los pescadores no seleccionan las localizaciones de pesca aleatoriamente, si no que gracias a su conocimiento van a pescar a dónde saben que hay mayor abundancia

de una especie), también sería interesante estudiar el comportamiento de modelos con formulaciones que incorporen explícitamente la dependencia asociada al proceso de muestreo, como los *marked point processes* considerados en [3]. Finalmente, dada la naturaleza de los datos usados en el ámbito de la gestión pesquera, sería oportuno extender los escenarios considerados incorporando también dependencia temporal y estudiar cómo esta afecta al comportamiento de los modelos espacio-temporales ajustados mediante INLA.

Dado el interés práctico que pueden tener las conclusiones que hemos obtenido en este trabajo, no descartamos continuar desarrollando este estudio, con el fin de elaborar un artículo científico que permita difundir estos resultados y acercarlos a investigadores que trabajen con este tipo de modelos y que puedan hacer uso de dichas conclusiones.



# Bibliografía

- [1] Cooper, A. B., & Weir, K. (2006). A guide to fisheries stock assessment: From data to recommendations. University of New Hampshire, Sea Grant College Program.
- [2] Dirección de Recursos Pesqueros de la FAO. (2000). Indicadores para el desarrollo sostenible de la pesca de captura marina. <https://www.fao.org/4/x3307s/x3307s00.htm>
- [3] Fuster-Alonso, A., Conesa, D., Cousido-Rocha, M., Izquierdo, F., Paradinas, I., Cerviño, S., & Pennino, M. G. (2024). Accounting for spatio-temporal and sampling dependence in survey and CPUE biomass indices: Simulation and Bayesian modeling framework. *ICES Journal of Marine Science*, 81(5), 984–995. <https://doi.org/10.1093/icesjms/fsae056>
- [4] Gelman, A., Hwang, J., & Vehtari, A. (2014). Understanding predictive information criteria for Bayesian models. *Statistics and Computing*, 24(6), 997–1016. <https://doi.org/10.1007/s11222-013-9416-2>
- [5] Hanks, E. M., Schliep, E. M., Hooten, M. B., & Hoeting, J. A. (2015). Restricted spatial regression in practice: Geostatistical models, confounding, and robustness under model misspecification. *Environmetrics*, 26(4), 243–254. <https://doi.org/10.1002/env.2331>
- [6] Hilborn, R., & Walters, C. J. (1992). Quantitative fisheries stock assessment: Choice, dynamics and uncertainty. Chapman and Hall. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-3598-0>
- [7] Hodges, J. S., & Reich, B. J. (2010). Adding spatially-correlated errors can mess up the fixed effect you love. *The American Statistician*, 64(4), 325–334. <https://doi.org/10.1198/tast.2010.10052>
- [8] Hughes, J., & Haran, M. (2013). Dimension reduction and alleviation of confounding for spatial generalized linear mixed models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 75(1), 139–159. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2012.01041.x>
- [9] Hyndman, R. J., & Koehler, A. B. (2006). Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*, 22(4), 679–688. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2006.03.001>
- [10] Instituto Español de Oceanografía (IEO-CSIC). (s.f.). *Instituto Español de Oceanografía*. <https://www.ieo.es/es/>
- [11] Izquierdo, F., Menezes, R., Wise, L., Teles-Machado, A. & Garrido, S. (2022). Bayesian spatio-temporal CPUE standardization: Case study of European sardine (*Sardina pilchardus*) along the western coast of Portugal. *Fisheries Management and Ecology*, 29, 670–680. <https://doi.org/10.1111/fme.12556>
- [12] Izquierdo, F., Pennino, M. G., Paradinas, I., Muñoz, F., Fernández-Casal, R., & Bellido, J. M. (2021). Spatio-temporal assessment of the European hake (*Merluccius merluccius*) recruits in the northern Iberian Peninsula. *Frontiers in Marine Science*, 8, 614675. <https://doi.org/10.3389/fmars.2021.614675>

- [13] Maunder, M. N., & Punt, A. E. (2004). Standardizing catch and effort data: A review of recent approaches. *Fisheries Research*, 70(2–3), 141–159. <https://doi.org/10.1016/j.fishres.2004.08.002>
- [14] Meehan, T. D., Michel, N. L., & Rue, H. (s.f.). Spatially varying coefficient models with R-INLA. R-INLA Project. R-INLA vignette.
- [15] Muñoz, F., Pennino, M. G., Conesa, D., López-Quílez, A., & Bellido, J. M. (2012). Estimation and prediction of the spatial occurrence of fish species using Bayesian latent Gaussian models. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 27(5), 1171–1180. <https://doi.org/10.1007/s00477-012-0652-3>
- [16] Lindgren, F., & Rue, H. (2015). Bayesian spatial modelling with R-INLA. *Journal of Statistical Software*, 63(19), 1–25. <http://www.jstatsoft.org/>
- [17] Lindgren, F., Rue, H., & Lindström, J. (2011). An explicit link between Gaussian fields and Gaussian Markov random fields: The stochastic partial differential equation approach. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 73(4), 423–498. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2011.00777.x>
- [18] López, F. de A., Roca-Pardiñas, J., & Ordóñez, C. (2024). Regression analysis with spatially-varying coefficients using generalized additive models (GAMs). *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 255, 105254. <https://doi.org/10.1016/j.chemolab.2024.105254>
- [19] Paradinas, I., Illian, J. B., Alonso-Fernández, A., Pennino, M. G., & Smout, S. (2023). Combining fishery data through integrated species distribution models. *ICES Journal of Marine Science*, 80(10), 2579–2590. <https://doi.org/10.1093/icesjms/fsad069>
- [20] Pennino, M. G., Muñoz, F., Paradinas, I., López-Quílez, A., & Bellido, J. M. (2022). Identifying persistent biomass areas: The case study of the common sole in the northern Iberian waters. *Fisheries Research*, 248, 106196. <https://doi.org/10.1016/j.fishres.2021.106196>
- [21] Rue, H., Martino, S., & Chopin, N. (2009). Approximate Bayesian inference for latent Gaussian models by using integrated nested Laplace approximations. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 71(2), 319–392. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2008.00700.x>
- [22] Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P., & van der Linde, A. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 64(4), 583–639. <https://doi.org/10.1111/1467-9868.00353>
- [23] Watanabe, S. (2010). Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory. *Journal of Machine Learning Research*, 11, 3571–3594.
- [24] Zuur, A. F., Ieno, E. N., & Saveliev, A. A. (2017). *Beginner’s guide to spatial, temporal, and spatial-temporal ecological data analysis with R-INLA: Volume I: Using GLM and GLMM*. Highland Statistics Ltd.