



Trabajo Fin de Máster

Cálculo de valores de Banzhaf por medio de las extensiones multilineales

Marta Díaz-Maroto García-Vaquero

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2025-2026

Propuesta de Trabajo Fin de Máster

Título en galego: Cálculo dos valores de Banzhaf empregando extensións multilineais
Título en español: Cálculo de valores de Banzhaf por medio de las extensiones multilineales
English title: Computation of Banzhaf values using multilinear extensions
Modalidad: Modalidad A
Autora: Marta Díaz-Maroto García-Vaquero, Universidad de Vigo
Directora: Balbina Virginia Casas Méndez, Universidad de Santiago de Compostela
Breve resumen del trabajo: Este trabajo aborda el cálculo eficiente del valor de Banzhaf mediante extensiones multilineales (EML). Analiza escenarios de cooperación restringida, proponiendo una nueva medida original de reparto, y demuestra la ventaja algorítmica de las EML mediante simulaciones en R.

Doña Balbina Virginia Casas Méndez, Titular de Universidad de la Universidad de Santiago de Compostela, informa que el Trabajo Fin de Máster titulado

Cálculo de valores de Banzhaf por medio de las extensiones multilineales

fue realizado bajo su dirección por doña Marta Díaz-Maroto García-Vaquero para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, da su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal. Además, doña Balbina Virginia Casas Méndez y doña Marta Díaz-Maroto García-Vaquero

☒ sí ☐ no

autorizan a la publicación de la memoria en el repositorio de acceso público asociado al Máster en Técnicas Estadísticas.

En Santiago de Compostela, a 15 de julio de 2026.

La directora:
Doña Balbina Virginia Casas Méndez

La autora:
Doña Marta Díaz-Maroto García-Vaquero

CASAS MENDEZ
BALBINA VIRGINIA -
09367287P

Firmado digitalmente por CASAS
MENDEZ BALBINA VIRGINIA -
09367287P
Fecha: 2026.07.15 17:59:05 +02'00'

Fdo: Marta Díaz-Maroto García-Vaquero - *9068** el 15/07/2026**

Declaración responsable. Para dar cumplimiento a la Ley 3/2022, de 24 de febrero, de convivencia universitaria, referente al plagio en el Trabajo Fin de Máster (Artículo 11, [Disposición 2978 del BOE núm. 48 de 2022](#)), **la autora declara** que el Trabajo Fin de Máster presentado es un documento original en el que se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones relativas al uso de material de apoyo desarrollado por otros/as autores/as:

- Todas las fuentes usadas para la elaboración de este trabajo han sido citadas convenientemente (libros, artículos, apuntes de profesorado, páginas web, programas,...)
- Cualquier contenido copiado o traducido textualmente se ha puesto entre comillas, citando su procedencia.
- Se ha hecho constar explícitamente cuando un capítulo, sección, demostración,... sea una adaptación casi literal de alguna fuente existente.

Y, acepta que, si se demostrara lo contrario, se le apliquen las medidas disciplinarias que correspondan.

Agradecimientos

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a mi tutora, Balbina, por su apoyo, paciencia y orientación durante la realización de este trabajo. Agradezco especialmente su disposición y el tiempo dedicado a revisarlo.

A mi familia, en especial a mis padres, por su confianza, su respaldo constante y por brindarme las herramientas para llegar hasta aquí. A mi hermano, por ser un apoyo incondicional en todo momento.

Por último, a mis amigos, por su compañía, comprensión, ánimo y por los buenos momentos compartidos a lo largo de toda esta etapa.

Índice general

Resumen	XI
Prefacio	XIII
1. Preliminares	1
1.1. Juegos TU	1
1.2. Juegos simples	2
1.3. Núcleo de un juego TU	4
1.4. Solución de un juego TU	5
1.5. Índice de poder	6
1.6. Valor de Banzhaf (β)	7
1.7. Índice de Banzhaf	7
1.8. Extensiones multilineales (EML)	8
1.9. Análisis de eficiencia computacional y simulación numérica	10
1.10. Valor de Shapley (φ)	11
2. Valores en juegos con uniones <i>a priori</i>	15
2.1. Juegos con uniones <i>a priori</i>	15
2.2. Valor de Banzhaf-Owen (Ψ)	17
2.3. Valor coalicional de Banzhaf	18
2.4. El valor Ψ en un sistema de votación	21
2.5. Valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π)	23
2.6. El valor Π y la propiedad de juego cociente	31

3. Cálculo de valores generales mediante extensiones multilineales	35
3.1. Extensión multilineal ante uniones <i>a priori</i>	36
3.2. Valor de Banzhaf-Owen a través de la EML	36
3.3. Valor de Banzhaf coalicional simétrico a través de la EML	37
3.4. Análisis de eficiencia computacional y simulación numérica	39
4. Valores en juegos con configuraciones de coaliciones	43
4.1. Índice de Banzhaf-Coleman generalizado (η')	43
4.2. La asimetría coalicional del índice η'	47
4.3. El índice de Banzhaf coalicional simétrico generalizado (Π')	49
5. Conclusiones	53
A. Implementación del valor de Banzhaf combinatorio	57
B. Implementación del valor de Banzhaf mediante EML	59
C. Implementación del valor de Banzhaf-Owen combinatorio	61
D. Implementación del valor de Banzhaf-Owen mediante EML	65
Bibliografía	69

Resumen

Resumen en español

La teoría de juegos cooperativos proporciona un marco analítico riguroso para estudiar la distribución de poder. Tras establecer los fundamentos de los juegos con utilidad transferible, este Trabajo Fin de Máster aborda dos grandes retos: la modelización teórica de la cooperación restringida y el alto coste computacional derivado de la explosión combinatoria. En el ámbito teórico, se evalúan métricas para escenarios donde los agentes negocian condicionados por agrupaciones previas, analizando el comportamiento del valor de Banzhaf-Owen (Ψ), para juegos con uniones *a priori*, y del índice de Banzhaf-Coleman generalizado (η'), para configuraciones de coaliciones con solapamiento. Como enfoque de reparto alternativo, se estudia el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π) en particiones estrictas, y se propone y formaliza una nueva medida original para recubrimientos no disjuntos: el valor Π' . Estas formulaciones sintetizan la lógica probabilística de Banzhaf en el nivel macroscópico y la asignación eficiente de Shapley en el nivel microscópico. Para sortear esta complejidad exponencial, el trabajo desarrolla la fundamentación teórica de las extensiones multilineales (EML) y su posterior implementación computacional. La memoria incluye dos estudios de simulación numérica en R: uno aplicado al valor clásico de Banzhaf en juegos sin restricciones, y otro que calcula el valor de Banzhaf-Owen en juegos con uniones *a priori*. Ambos experimentos certifican empíricamente que la transición del cálculo discreto combinatorio al entorno analítico continuo proporciona una clara ventaja algorítmica.

English abstract

Cooperative game theory provides a rigorous analytical framework for studying power distribution. After establishing the fundamentals of transferable utility games, this Master's Thesis addresses two major challenges: the theoretical modeling of restricted cooperation and the high computational cost derived from combinatorial explosion. In the theoretical scope, metrics are evaluated for scenarios where agents negotiate constrained by preexisting alliances, analyzing the behavior of the Banzhaf-Owen value (Ψ) for games with *a priori* unions, and the generalized Banzhaf-Coleman index (η') for overlapping coalition configurations. As an alternative allocation approach, the symmetric coalitional Banzhaf value (Π) is studied for strict partitions, and a novel original measure is proposed and formalized for non-disjoint coverings: the Π' value. These formulations synthesize Banzhaf's probabilistic logic at the macroscopic level and Shapley's efficient allocation at the microscopic level. To overcome this exponential complexity, the thesis develops the theoretical foundation of multilinear extensions (MLE) and their subsequent computational implementation. The document includes two numerical simulation studies in R: one applied to the classic Banzhaf value in unrestricted games, and another computing the Banzhaf-Owen value in games with *a priori* unions. Both experiments empirically certify that

transitioning from discrete combinatorial calculus to a continuous analytical environment provides a clear algorithmic advantage.

Prefacio

La teoría de juegos cooperativos y, en particular, las soluciones basadas en contribuciones marginales, proporcionan un marco analítico riguroso para entender cómo diferentes agentes deben repartir equitativamente las ganancias o el poder fruto de su colaboración. Lejos de limitarse a un ejercicio puramente teórico, este enfoque ha permitido modelizar con éxito interacciones en campos sumamente diversos: desde la asignación de beneficios en redes de energía (Bergantiños *et al.* 2019 [5]) y consorcios de transporte logístico (Lozano *et al.* 2013 [12]), hasta la cuantificación de la influencia de variables clínicas en algoritmos de *machine learning* (Davila Pena *et al.* 2022 [7]). Entre las soluciones clásicas más destacadas para abordar la medición del poder en estos escenarios se encuentra el valor de Banzhaf (Banzhaf 1965 [4]).

Sin embargo, para que estos modelos matemáticos reflejen con fidelidad la realidad, es necesario superar la premisa tradicional de que la colaboración ocurre en un entorno de libertad absoluta. En la práctica, las dinámicas de negociación están fuertemente condicionadas por agrupaciones previas. La literatura reciente evidencia la necesidad de transitar hacia modelos estructurales más complejos; por ejemplo, en el análisis de redes ocultas se ha demostrado que la eficacia de un grupo de actores depende de la organización de las coaliciones externas (Saavedra Nieves y Casas Méndez 2023 [16]). Del mismo modo, en el ámbito de la logística colaborativa, estudios recientes prueban que permitir la participación simultánea de los agentes en múltiples alianzas, pasando de modelos de particiones estrictas a configuraciones de coaliciones con solapamiento, mejora significativamente la eficiencia operativa (Guajardo *et al.* 2018 [10]).

Tradicionalmente, la literatura ha abordado estas restricciones mediante sistemas de uniones *a priori* (particiones estrictamente disjuntas). No obstante, la creciente complejidad de los acuerdos modernos exige dar un paso más allá y explorar modelos de geometría variable, donde los actores pueden pertenecer a múltiples alianzas de forma simultánea, configurando redes de cooperación solapadas. Para el análisis de estas estructuras, este trabajo se vertebrará en torno a tres medidas fundamentales: el valor de Banzhaf-Owen (Ψ) y el valor de Banzhaf coalicional simétrico (II) para los sistemas de uniones *a priori* (Alonso Meijide 2002 [3]), y el índice de Banzhaf-Coleman generalizado (η') para las configuraciones de coaliciones (Albizuri y Aurrekoetxea 2006 [2]).

A la complejidad estructural de estos modelos se suma un obstáculo de carácter operativo: la explosión combinatoria. El cálculo de medidas de poder fundamentales, como el valor de Banzhaf, requiere evaluar el comportamiento de los jugadores frente a todas las subcoaliciones posibles, un recuento discreto que crece exponencialmente ($\mathcal{O}(2^n)$) y que hace inviable su cómputo directo en juegos de gran tamaño. Para mitigar esta barrera computacional, la comunidad científica desarrolla continuamente herramientas informáticas avanzadas, destacando la creación de librerías especializadas en lenguajes como R (tales como `CoopGame`, `GameTheory`, `TUGLab`, `powerindexR` o la más reciente `TUvalues`). En paralelo a este esfuerzo de *software*, desde el ámbito del análisis matemático, la literatura ha propuesto el uso de las extensiones multilineales (EML) de Owen (1972) [13] como una de las técnicas más elegantes para sortear esta limitación, permitiendo transformar el pesado cálculo combinatorio

discreto en operaciones analíticas continuas y eficientes.

Tomando como punto de partida este doble contexto teórico y computacional, el presente Trabajo Fin de Máster aborda los siguientes objetivos. En primer lugar, realizar una revisión exhaustiva de la literatura más relevante que considera las extensiones multilineales como método para el cálculo del valor de Banzhaf y sus derivados. En segundo lugar, analizar el alcance y las particularidades que presentan diversas métricas consolidadas en la literatura según el contexto de aplicación. Dado que la idoneidad de un valor depende de los objetivos y propiedades deseables en cada escenario, se estudia el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π) como una medida alternativa ya existente que resulta más adecuada bajo ciertas premisas en particiones estrictas frente al valor de Banzhaf-Owen (Ψ). Asimismo, como aportación original de este trabajo, se propone y formaliza un nuevo índice que ofrece una perspectiva complementaria al índice de Banzhaf-Coleman generalizado (η') ante configuraciones con solapamiento. Finalmente, se ilustrarán algunos de estos modelos matemáticos mediante escenarios aplicados, como sistemas parlamentarios, y se respaldarán los hallazgos teóricos mediante rutinas computacionales y estudios de simulación numérica para evaluar su eficiencia, sin descuidar en ningún momento el rigor de las demostraciones teóricas.

Para dar cumplimiento a estos objetivos, el documento se estructura en los siguientes capítulos:

En el **Capítulo 1** se establecen los cimientos matemáticos del trabajo. Se revisan los fundamentos de los juegos cooperativos con utilidad transferible (juegos TU) y los juegos simples, introduciendo conceptos estructurales clave y los axiomas que caracterizan soluciones clásicas como los valores de Banzhaf (β) y Shapley (φ). Este último se incluye por su indispensable valor como herramienta metodológica. Asimismo, se define la teoría de las extensiones multilineales (EML) y se ilustra empíricamente, mediante un primer experimento de simulación en R, cómo el cálculo continuo mitiga la explosión combinatoria frente al método discreto tradicional.

El **Capítulo 2** adentra al lector en los modelos de cooperación restringida mediante particiones estrictamente disjuntas (juegos con uniones *a priori*). En primer lugar, se evalúa el valor de Banzhaf-Owen (Ψ) y se ilustra su incapacidad para preservar la simetría en el juego cociente. Para solventar esto, se estudia detalladamente una solución alternativa: el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π). Mediante su caracterización axiomática, se demuestra cómo esta métrica logra una distribución coherente al operar en dos niveles, combinando el poder absoluto de Banzhaf en la interacción entre bloques con la justicia distributiva de Shapley en el reparto interno.

El **Capítulo 3** conecta la teoría de las estructuras coalicionales del capítulo anterior con la optimización computacional. Se demuestra formalmente cómo las restricciones que imponen las uniones *a priori* pueden modelizarse mediante transformaciones algebraicas sobre la extensión multilineal. Así, se detalla la obtención de los valores Ψ y Π mediante derivadas parciales e integrales. El capítulo finaliza ampliando el estudio numérico, certificando empíricamente que la metodología analítica continua supera las barreras del cómputo discreto en grandes juegos jerarquizados.

El **Capítulo 4** da un paso más allá en la flexibilización de las restricciones cooperativas, abordando las configuraciones de coaliciones (recubrimientos que permiten el solapamiento de alianzas). Se evalúa el índice de Banzhaf-Coleman generalizado (η') y se demuestra que padece una inconsistencia semejante a la de su predecesor. Para dar respuesta a este problema abierto, se propone y formaliza una nueva métrica original: el índice de Banzhaf coalicional simétrico generalizado (Π'). Su comportamiento demuestra que es posible respetar la relevancia macroscópica de las alianzas de geometría variable, independientemente de su grado de solapamiento interno.

Finalmente, el **Capítulo 5** sintetiza los principales resultados teóricos y computacionales de la memoria, y plantea diversas líneas de trabajo futuras para continuar profundizando en el ámbito de las estructuras de cooperación.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presenta una revisión de los conceptos y resultados fundamentales relativos a los juegos cooperativos con utilidad transferible, prestando especial atención a la subclase de los juegos simples. Asimismo, se introducen las nociones de núcleo y de solución puntual de un juego TU, junto con el concepto de índice de poder, elementos esenciales para el posterior análisis del valor y el índice de Banzhaf. Adicionalmente, se exponen las extensiones multilineales como una herramienta analítica clave que facilita el cálculo de dichas soluciones. El capítulo concluye con una sección dedicada al valor de Shapley, cuya inclusión resulta necesaria para fundamentar y demostrar ciertos resultados a lo largo del trabajo.

1.1. Juegos TU

Esta sección se centra en el estudio de los juegos cooperativos con utilidad transferible. Estos juegos analizan situaciones de negociación coalicional en las que un conjunto de jugadores, dotados de mecanismos para establecer acuerdos vinculantes, busca determinar cómo distribuir los beneficios derivados de su cooperación.

Ahora bien, para que una asignación sea finalmente adoptada, no es necesario que todos los jugadores estén de acuerdo con ella, sino que existen ciertos grupos de jugadores, denominados coaliciones, que son capaces de imponer determinadas asignaciones. Además, los beneficios generados por una coalición pueden distribuirse de cualquier manera entre sus miembros, lo que justifica el nombre de utilidad transferible.

Para caracterizar una de estas situaciones, basta con indicar el conjunto de jugadores y los beneficios que puede generar cualquier coalición posible. A un par de este tipo es a lo que llamamos un juego TU. Formalmente:

Definición 1.1.1. Un juego cooperativo con utilidad transferible o juego TU es un par (N, v) , donde $N = \{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto finito de jugadores y $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ es la función característica del juego, verificando que $v(\emptyset) = 0$.

Dada una coalición $S \subseteq N$, el valor $v(S)$ representa el pago que se pueden asegurar los jugadores de S ; es decir, el beneficio que S puede generar por sí misma, independientemente de las decisiones que tomen los jugadores que no pertenecen a dicha coalición ($N \setminus S$).

En ocasiones, por simplicidad, nos referiremos a un juego (N, v) únicamente mediante su función característica v . Asimismo, denotaremos por $TU(N)$ al conjunto de todos los juegos cooperativos con utilidad transferible cuyo conjunto de jugadores es $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

A continuación, definimos una propiedad de los juegos TU que resulta fundamental para modelizar que la cooperación es provechosa.

Definición 1.1.2. Un juego $(N, v) \in TU(N)$ se dice que es superaditivo si para todo par de coaliciones $S, T \subseteq N$, tales que $S \cap T = \emptyset$, se verifica que:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Nótese que un juego es superaditivo cuando los jugadores tienen incentivos reales para cooperar, ya que la unión de dos grupos disjuntos de jugadores nunca disminuye el beneficio total que estos pueden generar de forma conjunta frente a lo que obtendrían por separado.

Otra propiedad estructural de gran relevancia al relacionar la cooperación y el crecimiento de las coaliciones es la monotonía, la cual se formaliza a continuación.

Definición 1.1.3. Un juego $(N, v) \in TU(N)$ se dice que es monótono si $v(T) \leq v(S)$ para todo par de coaliciones $S, T \subseteq N$ tales que $T \subseteq S$.

Es decir, un juego es monótono cuando la incorporación de nuevos jugadores a una coalición nunca reduce el valor total de los beneficios que esta puede generar.

Por otro lado, es necesario identificar el papel individual de los jugadores dentro de la estructura del juego. Dado un juego $(N, v) \in TU(N)$, se dice que $i \in N$ es un **jugador nulo** si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para cualquier coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$. Asimismo, se dice que dos jugadores $i, j \in N$ son **simétricos** si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ para cualquier coalición $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$.

1.2. Juegos simples

Una subclase de especial relevancia dentro de los juegos TU es la formada por los juegos simples. Estos modelos son fundamentales para analizar situaciones de votación y toma de decisiones, donde el beneficio de una coalición no es una magnitud continua, sino un resultado binario: el éxito (ganar) o el fracaso (perder). A continuación, se presentan los conceptos y resultados fundamentales que permiten caracterizar estos escenarios.

Definición 1.2.1. Un juego $(N, v) \in TU(N)$ se denomina juego simple si satisface las siguientes condiciones:

- i) Codominio binario: para toda coalición $S \subseteq N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.
- ii) Consistencia: $v(N) = 1$ y $v(\emptyset) = 0$.
- iii) Monotonía: si $S \subseteq T$, entonces $v(S) \leq v(T)$.

Se denotará por $SI(N)$ al conjunto de juegos simples con un conjunto de jugadores $N = \{1, 2, \dots, n\}$. En este contexto, el estatus de una agrupación es claro: una coalición S es ganadora si $v(S) = 1$ y perdedora si $v(S) = 0$. El conjunto de todas las coaliciones ganadoras se designa por $W = \{S \subseteq N \mid v(S) = 1\}$. Es evidente que N es un elemento de W y que si $S \in W$ y $S \subseteq T$, entonces $T \in W$.

Para simplificar el análisis, resulta de gran utilidad identificar aquellas coaliciones que son suficientes para ganar. Una coalición ganadora se dice minimal si no contiene a ninguna otra coalición ganadora como subconjunto propio. El conjunto de estas coaliciones, denotado por W^m , se define formalmente como:

$$W^m = \{S \in W \mid v(T) = 0, \text{ para toda coalición } T \subset S\}.$$

Es interesante observar que un juego simple queda completamente determinado por su conjunto de coaliciones minimales ganadoras W^m . Esto permite una representación compacta del juego, denotándolo simplemente como el par (N, W^m) .

Atendiendo a la estructura de W , podemos distinguir dos propiedades de estabilidad y resolución que son clave en ciertos estudios, por ejemplo, de sistemas políticos:

- **Juegos propios:** son aquellos donde no pueden existir dos coaliciones ganadoras disjuntas ($S, T \in W \implies S \cap T \neq \emptyset$). En estos juegos, la victoria de un grupo impide automáticamente la de su opositor. Cabe destacar que, en la clase de los juegos simples, la propiedad de ser propio es equivalente a la superaditividad.
- **Juegos decisivos:** aquellos donde, para cualquier coalición S , o bien S es ganadora, o bien su complementaria $N \setminus S$ lo es. En estos juegos no existe la posibilidad de bloqueo; siempre hay una mayoría capaz de imponerse.

Dentro de la clase de los juegos simples, destacan por su aplicabilidad los juegos de mayoría ponderada. Estos representan de manera natural los procesos de decisión colectiva en los que cada jugador posee un número determinado de votos o un peso asignado, y donde las coaliciones ganadoras se definen en función de una cuota o mayoría requerida.

Definición 1.2.2. Un juego $(N, v) \in SI(N)$ es de mayoría ponderada si existen un vector de pesos $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ con $w_i \geq 0, \forall i \in N$ y una mayoría $q \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$S \in W \iff v(S) = 1 \iff \sum_{i \in S} w_i \geq q.$$

Habitualmente, este tipo de juegos se denotan de forma compacta mediante $[q; w_1, w_2, \dots, w_n]$.

Tras analizar cómo la distribución de pesos y cuotas determina la victoria en los juegos de mayoría ponderada, es natural preguntarse por aquellos escenarios donde la cooperación debe ser absoluta. Existe un tipo de juego simple, de vital importancia para la estructura algebraica de los juegos TU, en el que una coalición específica S es estrictamente necesaria y suficiente para obtener el éxito, de modo que cualquier ausencia dentro de dicha coalición invalida el resultado.

Este nivel de dependencia total nos conduce a los juegos de unanimidad. Como se verá a continuación, estos juegos no solo representan una situación de veto recíproco entre los miembros de una coalición, sino que constituyen las piezas básicas con las que se puede construir y descomponer cualquier otro juego cooperativo.

Definición 1.2.3. Dado un conjunto finito de jugadores N y una coalición no vacía $S \subseteq N$, se denomina juego de unanimidad asociado a S , denotado por $(N, u_S) \in TU(N)$, a aquel cuya función característica verifica:

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subseteq T, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que en el lenguaje de los juegos simples, para el juego u_S , el conjunto de coaliciones ganadoras minimales es unitario, $W^m = \{S\}$. Esto implica que todos los jugadores en S tienen derecho de veto: si uno solo de ellos no participa, la coalición resultante es perdedora.

Cualquier juego TU puede descomponerse como una combinación lineal de juegos de unanimidad. Este hecho, demostrado en Shapley (1953) [17], es de vital importancia, pues implica que el conjunto de todos los juegos de unanimidad que pueden definirse para un conjunto N de jugadores constituye una base del espacio vectorial $TU(N)$, cuya dimensión es $2^n - 1$.

Teorema 1.2.4. *Si $(N, v) \in TU(N)$, entonces el juego v se puede expresar de forma única como combinación lineal de los juegos de unanimidad $\{u_S \mid S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\}$:*

$$v = \sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} c_S u_S,$$

donde los coeficientes c_S vienen dados por

$$c_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T),$$

con $s = |S|$ y $t = |T|$. El valor c_S se denomina *coordenada de unanimidad de la coalición S* .

1.3. Núcleo de un juego TU

Para determinar cómo se distribuye de forma estable el beneficio total generado por la gran coalición, surge el concepto de núcleo. Esta noción busca identificar aquellos repartos que garanticen la estabilidad del acuerdo frente a posibles deserciones o rupturas por parte de los jugadores.

Para formalizar esta noción, considérese un juego $(N, v) \in TU(N)$. Suponiendo la existencia de mecanismos para establecer acuerdos vinculantes, los jugadores disponen de la cantidad total $v(N)$ para repartir entre ellos. Aunque este reparto puede hacerse de cualquier forma, parece lógico suponer que ningún jugador i aceptará un pago menor que $v(\{i\})$, es decir, la cantidad que puede obtener actuando de manera individual. Bajo estas premisas, se introduce en primer lugar el conjunto de vectores de pago razonables, denominado conjunto de imputaciones.

Definición 1.3.1. Dado un juego $(N, v) \in TU(N)$, se dice que un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una imputación si satisface:

- i) Racionalidad individual: $x_i \geq v(\{i\})$, para todo $i \in N$.
- ii) Eficiencia (o racionalidad colectiva): $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$.

El conjunto de todas las imputaciones de un juego se denotará por $I(N, v)$.

Nótese que la eficiencia es un requerimiento natural si el juego es superaditivo.

De este modo, dadas dos imputaciones x y z distintas, y teniendo en cuenta que ambas reparten el valor total $v(N)$, existirán grupos de jugadores que prefieran una de ellas frente a la otra dependiendo del beneficio individual que cada una les asigne, así como de la asignación total recibida por el grupo.

A continuación, presentamos la definición del núcleo, uno de los conceptos más relevantes en la teoría de juegos cooperativos debido a su relación directa con la estabilidad de las coaliciones. Para cualquier juego (N, v) , el núcleo es un subconjunto del conjunto de imputaciones $I(N, v)$.

Definición 1.3.2. Se define el núcleo de un juego $(N, v) \in TU(N)$, denotado por $Nu(N, v)$, como el subconjunto de imputaciones que satisfacen la racionalidad coalicional:

$$Nu(N, v) = \left\{ x \in I(N, v) \mid \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \text{ para toda coalición } S \subseteq N \right\}.$$

El núcleo cumple con la racionalidad individual, lo que significa que cada jugador recibe al menos lo que puede garantizarse por sí solo. Pero además, exige racionalidad coalicional, es decir, ninguna coalición de jugadores tiene incentivos para separarse de la gran coalición, puesto que no es capaz de mejorar su situación mediante sus propios recursos.

1.4. Solución de un juego TU

Mientras que el núcleo busca vectores de pagos estables, pudiendo resultar en un conjunto vacío o contener infinitos elementos, en esta sección y a lo largo del trabajo, el análisis se orienta hacia soluciones que asignan a cada juego un único vector de pagos basado en criterios de equidad. Con este fin, se caracterizarán dichas soluciones mediante un conjunto de propiedades deseables, estableciendo, en primer lugar, el concepto formal de solución sobre $TU(N)$.

Definición 1.4.1. Una solución sobre $TU(N)$ es una aplicación:

$$\begin{aligned} f : TU(N) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (N, v) &\longmapsto f(N, v) = (f_1(N, v), \dots, f_n(N, v)) \end{aligned}$$

que a cada juego le hace corresponder un único vector de $\mathbb{R}^n$, donde la componente i -ésima, $f_i(N, v)$, representa el pago o beneficio que recibe el jugador i .

A continuación, se enuncian las propiedades fundamentales empleadas en este trabajo para caracterizar una solución $f : TU(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Estos axiomas formalizan principios de justicia distributiva y coherencia interna que determinan la viabilidad y aceptación del reparto.

- **Poder total (PT):** Una solución satisface esta propiedad si para todo juego $(N, v) \in TU(N)$ se cumple que:

$$\sum_{i=1}^n f_i(N, v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^n \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Esta propiedad establece que el pago total distribuido entre los jugadores equivale a la suma de las medias de las contribuciones marginales de cada integrante del juego.

- **Simetría (SIM):** Una solución es simétrica si, para cualquier par de jugadores $i, j \in N$ que sean simétricos en el juego $(N, v) \in TU(N)$, se verifica que $f_i(N, v) = f_j(N, v)$. Esto garantiza que jugadores con contribuciones idénticas reciban el mismo pago.
- **Jugador nulo (JN):** Una solución satisface la propiedad de jugador nulo si, para todo jugador $i \in N$ que sea nulo en el juego $(N, v) \in TU(N)$, se tiene que $f_i(N, v) = 0$. Es decir, un jugador que no aporta nada a ninguna coalición no debe recibir beneficio.
- **Aditividad (ADI):** Una solución es aditiva si para cualquier par de juegos $(N, v) \in TU(N)$ y $(N, w) \in TU(N)$ se cumple:

$$f(N, v + w) = f(N, v) + f(N, w),$$

donde el juego suma se define como $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$ para toda coalición $S \subseteq N$. Esta propiedad permite descomponer juegos complejos en la suma de juegos más simples como los de unanimidad.

- **Monotonía fuerte (MF):** Una solución satisface la monotonía fuerte si, para cualquier par de juegos $(N, v) \in TU(N)$ y $(N, w) \in TU(N)$, y cualquier jugador $i \in N$ cuyas contribuciones marginales en v sean siempre mayores o iguales que en w , es decir:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S), \quad \forall S \subseteq N \setminus \{i\},$$

entonces se garantiza que su pago no disminuye: $f_i(N, v) \geq f_i(N, w)$.

1.5. Índice de poder

Cuando se trabaja con juegos simples, se suele utilizar el término índice de poder para referirse a las soluciones que miden la influencia o capacidad de decisión de cada jugador en el resultado final del juego. El principal interés en este tipo de juegos radica en cuantificar en qué medida la participación de un jugador puede alterar el resultado colectivo.

Si bien puede emplearse cualquier concepto de solución definido en el contexto general de los juegos con utilidad transferible, existen conceptos más específicos adaptados a la estructura binaria de los juegos simples. De hecho, el valor de Banzhaf se formuló originalmente para este tipo de juegos y posteriormente se extendió a toda la clase de juegos TU.

Definición 1.5.1. Un índice de poder sobre $SI(N)$ es una aplicación:

$$\begin{aligned} f : SI(N) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (N, v) &\longmapsto f(N, v) = (f_1(N, v), \dots, f_n(N, v)) \end{aligned}$$

que a cada juego le hace corresponder un único vector de $\mathbb{R}^n$, donde la componente i -ésima, $f_i(N, v)$, representa el poder que tiene el jugador i .

La propiedad de aditividad, no puede aplicarse directamente en la clase de los juegos simples. Esto se debe a que la suma de dos juegos simples (definida punto a punto sobre sus funciones características) no siempre da lugar a otro juego simple, ya que los valores de la función característica pueden dejar de ser binarios. Por esta razón, los índices de poder requieren axiomas y propiedades propios, adecuados a la estructura discreta de los juegos simples.

Se sustituye la propiedad de aditividad por una condición más adecuada a la naturaleza binaria de estos juegos: la propiedad de transferencia. Con el fin de enunciar dicha propiedad, se introducen previamente las operaciones de unión e intersección entre juegos simples.

Definición 1.5.2. Dados $(N, v), (N, w) \in SI(N)$, se definen los juegos simples $(N, v \vee w)$ y $(N, v \wedge w)$ de la siguiente forma:

- **Unión:**

$$(v \vee w)(S) = \max\{v(S), w(S)\} \iff (v \vee w)(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(S) = 1 \text{ o } w(S) = 1, \\ 0 & \text{si } v(S) = 0 \text{ y } w(S) = 0. \end{cases}$$

■ **Intersección:**

$$(v \wedge w)(S) = \min\{v(S), w(S)\} \iff (v \wedge w)(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(S) = 1 \text{ y } w(S) = 1, \\ 0 & \text{si } v(S) = 0 \text{ o } w(S) = 0. \end{cases}$$

Obsérvese que dados dos juegos simples (N, v) y (N, w) se verifica que $v + w = (v \vee w) + (v \wedge w)$. Enunciamos ahora la propiedad de transferencia:

Transferencia (TR): Un índice de poder $f : SI(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de transferencia (o aditividad para juegos simples) si para todo par de juegos (N, v) y $(N, w) \in SI(N)$, se tiene que

$$f(N, v) + f(N, w) = f(N, v \vee w) + f(N, v \wedge w).$$

1.6. Valor de Banzhaf (β)

Dentro de las soluciones puntuales propuestas para la clase $TU(N)$, el valor de Banzhaf ocupa un lugar destacado. Fue introducido originalmente por Banzhaf (1965) [4] en el contexto de los juegos simples y, posteriormente, extendido por Owen (1975) [14] para la clase general de los juegos de utilidad transferible. Con el fin de estudiar sus propiedades estructurales, en esta sección nos basaremos en la caracterización axiomática desarrollada por Feltkamp (1995) [9], la cual se enuncia a continuación.

Teorema 1.6.1. *La única solución f definida en $TU(N)$ que satisface aditividad (ADI), jugador nulo (JN), simetría (SIM) y poder total (PT) es el valor de Banzhaf. Dado un juego (N, v) , esta solución asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:*

$$\beta_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{n-1}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Este valor asigna a cada jugador la media de las contribuciones marginales que dicho jugador aporta a todas las coaliciones posibles en las que no participa. Bajo esta perspectiva, se asume que todas las coaliciones que no contienen al jugador i tienen la misma probabilidad de formarse, concretamente $1/2^{n-1}$.

Si empleamos la propiedad de monotonía fuerte en lugar de la aditividad y el jugador nulo, obtenemos una caracterización alternativa del valor de Banzhaf, propuesta por Alonso Meijide (2002) [3].

Teorema 1.6.2. *La única solución f definida en $TU(N)$ que satisface monotonía fuerte (MF), simetría (SIM) y poder total (PT) es el valor de Banzhaf.*

1.7. Índice de Banzhaf

El Teorema (1.6.1), que caracteriza el valor de Banzhaf en el contexto de los juegos TU mediante la propiedad de aditividad, no puede aplicarse directamente en la clase de los juegos simples. Para caracterizar el índice de Banzhaf en la clase de los juegos simples, se sustituye la propiedad de aditividad por la propiedad de transferencia, como hemos indicado en la sección anterior.

Utilizando esta propiedad, Dubey y Shapley (1979) [8] obtuvieron una caracterización para el valor de Banzhaf en la clase de los juegos simples conocido como índice de poder de Banzhaf-Coleman.

Teorema 1.7.1. *El único índice de poder $f : SI(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica las propiedades de transferencia (TR), jugador nulo (JN), simetría (SIM) y poder total (PT) es el valor de Banzhaf.*

El valor de Banzhaf asigna a cada jugador i , la media aritmética de sus contribuciones marginales a las distintas coaliciones a las que puede unirse. En el caso de los juegos simples, como $v(S) = 1$ si $S \in W$ y $v(S) = 0$ en otro caso, se cumple que:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si el jugador } i \text{ hace ganadora a } S, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, se tiene que el índice de poder de Banzhaf-Coleman de un jugador i en el juego simple (N, v) es:

$$\beta_i(N, v) = \sum_{S \in S(i)} \frac{1}{2^{n-1}},$$

donde $S(i) = \{S \subseteq N \setminus \{i\} \mid S \notin W \text{ y } S \cup \{i\} \in W\}$.

Al conjunto de pares de coaliciones $(S, S \cup \{i\})$ con $S \in S(i)$, se le denomina movimientos críticos o conjunto de swings para el jugador i . Un swing para i es una situación en la que la coalición S es perdedora pero al incorporar el jugador i , la nueva coalición $S \cup \{i\}$ se convierte en ganadora.

El índice de poder de Banzhaf-Coleman de un jugador i mide así, la frecuencia relativa con la que un jugador resulta crítico en el resultado de las coaliciones. Es decir, se corresponde con el número de swings para el jugador i , normalizado por el número total de coaliciones a las que se puede unir.

1.8. Extensiones multilineales (EML)

El principal problema al trabajar con soluciones de juegos cooperativos, como el valor de Banzhaf, es la naturaleza esencialmente discreta de los juegos TU. Dado que la función característica v solo está definida para combinaciones exactas de jugadores, cualquier cálculo directo requiere evaluar un número de coaliciones que crece de forma exponencial ($\mathcal{O}(2^n)$). Este fenómeno, dificulta la obtención de resultados cuando el conjunto de jugadores es numeroso.

Para solventar esta limitación, podemos adoptar una perspectiva geométrica. Si representamos a cada jugador $i \in N$ como una dimensión en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, cualquier coalición $S \subseteq N$ puede identificarse con un punto específico cuyas coordenadas son binarias: un 1 en la posición i indica que el jugador pertenece a la coalición, mientras que un 0 indica su ausencia.

Bajo esta óptica, el dominio de la función característica v no es más que el conjunto de los 2^n vértices de un cubo unitario en n dimensiones. La propuesta de Owen (1972) [13] consistió en “rellenar” dicho cubo, permitiendo que las coordenadas tomen cualquier valor en el intervalo continuo $[0, 1]$. Esta transición transforma un problema de combinatoria pura en un problema de análisis continuo, permitiendo el uso de herramientas potentes como el cálculo diferencial.

Formalmente, definimos el cubo unitario como:

$$I^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \text{ para cada } i \in N\}.$$

Cada vértice del cubo se denota por e^S , donde las componentes del vector $e^S \in \{0, 1\}^n$ vienen

dadas por:

$$e_i^S = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S, \\ 0 & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

El objetivo es, por tanto, definir una función $f : I^n \rightarrow \mathbb{R}$ que sea suave y que, en los vértices del cubo, coincida exactamente con los valores del juego original; es decir, que cumpla la condición de interpolación $f(e^S) = v(S)$ para toda coalición $S \subseteq N$.

Definición 1.8.1. Sea $(N, v) \in TU(N)$. Se define la extensión multilineal (EML) del juego v como la función $f : I^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{S \subseteq N} \left[\prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in N \setminus S} (1 - x_j) \right] v(S) \quad (1.1)$$

donde $0 \leq x_i \leq 1$ para cada jugador $i \in \{1, \dots, n\}$. Por convención, un producto sobre un conjunto vacío se considera igual a 1.

Más allá de su expresión analítica, esta función admite una interpretación probabilística muy intuitiva que dota de sentido al uso del cubo unitario. Si consideramos que cada jugador i decide participar en una coalición de manera independiente con una probabilidad x_i , entonces el término entre corchetes en la Expresión (1.1) representa precisamente la probabilidad de que se constituya exactamente la coalición S .

Bajo este enfoque, si definimos una variable aleatoria Y que represente el beneficio o ganancia de una coalición formada al azar, se tiene que $\mathbb{P}(Y = v(S))$ es la probabilidad de que se forme S . En consecuencia, la extensión multilineal evalúa la esperanza matemática de dicha ganancia:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{E}[Y].$$

Esta construcción no es arbitraria. Owen (1972) [13] demostró que esta es la única forma de extender el juego al cubo unitario preservando la propiedad de multilinealidad (la función es de grado uno respecto a cada variable x_i de forma independiente) y respetando los valores originales en los vértices.

Teorema 1.8.2. Sea v una función característica definida sobre el conjunto de todas las coaliciones 2^N . Existe una única función multilineal $f : I^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada coalición $S \subseteq N$, se cumple que $f(e^S) = v(S)$. Esta función es precisamente la definida en la Expresión (1.1).

La verdadera potencia de la extensión multilineal en el marco de este trabajo reside en que permite transformar el cálculo combinatorio del valor de Banzhaf en una operación puramente analítica. En Owen (1975) [14] se probó que las contribuciones marginales del juego quedan recogidas en las derivadas parciales de su extensión.

Teorema 1.8.3. Sea $(N, v) \in TU(N)$ y f su extensión multilineal. El valor de Banzhaf de un jugador $i \in N$ viene dado por la derivada parcial de f respecto a la variable x_i , evaluada en el centro del hipercubo unitario:

$$\beta_i(N, v) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right).$$

Este resultado constituye el eje central de nuestro estudio. Al evaluar la derivada en el punto $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, estamos asumiendo formalmente que cada jugador tiene la misma probabilidad de pertenecer

o no a una coalición, lo que coincide con la filosofía original del valor de Banzhaf. Esta metodología no solo simplifica el cálculo, sino que permite abordar juegos con un gran número de jugadores donde el cómputo directo de las contribuciones marginales sería inabordable.

El índice de poder de Banzhaf-Coleman también puede obtenerse utilizando las extensiones multilineales.

1.9. Análisis de eficiencia computacional y simulación numérica

Como se ha argumentado teóricamente, el cálculo directo del valor de Banzhaf a partir de su definición combinatoria presenta una complejidad computacional de orden exponencial, específicamente $\mathcal{O}(2^n)$, debido a la necesidad de evaluar el conjunto de partes 2^N . Con el propósito de ilustrar el impacto cuantitativo de esta explosión combinatoria y contrastar la eficiencia analítica de las extensiones multilineales, en esta sección se desarrolla un estudio de simulación numérica utilizando el lenguaje de programación R.

Para garantizar la reproducibilidad de los resultados, todos los experimentos computacionales detallados en este trabajo se han ejecutado en un ordenador portátil HP ProBook 440 G7 con procesador Intel Core i5-10210U (1,60 GHz) y 16 GB de memoria RAM, operando bajo el sistema operativo Windows 11 Pro y utilizando la versión 4.4.2 de R.

El experimento compara los tiempos de ejecución requeridos para calcular el valor de Banzhaf a través de tres enfoques metodológicos diferenciados:

1. **Enfoque combinatorio por definición:** cómputo directo evaluando las contribuciones marginales sobre todas las coaliciones posibles, mediante la función `calcular_banzhaf_vector`.
2. **Enfoque analítico mediante EML:** evaluación algebraica indirecta basada en el cálculo de la derivada parcial de la extensión multilineal en el centro del hipercubo $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, utilizando la rutina `calcular_banzhaf_aml`.
3. **Librería especializada de R:** implementación mediante paquetes específicos de la literatura; en este caso se hace uso de la función correspondiente de la librería `CoopGame`.

A continuación, en el Cuadro 1.1, se recogen los tiempos de cómputo (expresados en segundos) obtenidos al incrementar progresivamente el número de jugadores n en juegos simples generados a partir de un juego mayoría ponderada. Para ello, se evalúan los rendimientos de la implementación combinatoria clásica frente al código analítico basado en extensiones multilineales, cuyos desarrollos en el lenguaje R se detallan en el Apéndice A y el Apéndice B, respectivamente.

A partir de los resultados analizados y su representación visual en la Figura 1.1, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- **Crecimiento exponencial:** para un número bajo de jugadores ($n \leq 10$), las diferencias de tiempo son pequeñas. Sin embargo, a partir de $n = 15$, el método por definición se dispara drásticamente (28,96 s).
- **Eficiencia de la EML:** el enfoque basado en las extensiones multilineales demuestra ser el más rápido de la comparativa, completando el cálculo para $n = 16$ en solo 23,37 segundos (frente a los 63,45 s de la definición y los 60,42 s de la librería especializada).

Jugadores (n)	Definición (s)	EML (s)	CoopGame (s)
5	1,209919	0,895697	1,082110
10	1,476603	1,352395	1,751322
15	28,96548	12,82889	29,57175
16	63,45468	23,37309	60,42942

Cuadro 1.1: Comparativa de tiempos de cómputo para el cálculo del valor de Banzhaf en juegos simples.

- **Ventaja sobre la librería:** la implementación por EML que se ha programado supera a la librería especializada CoopGame en escenarios de mayor escala ($n \geq 15$).

Estos datos confirman empíricamente que la transición del análisis combinatorio discreto al cálculo continuo mediante la EML no solo es elegante teóricamente, sino que es de gran utilidad para la viabilidad computacional del juego.

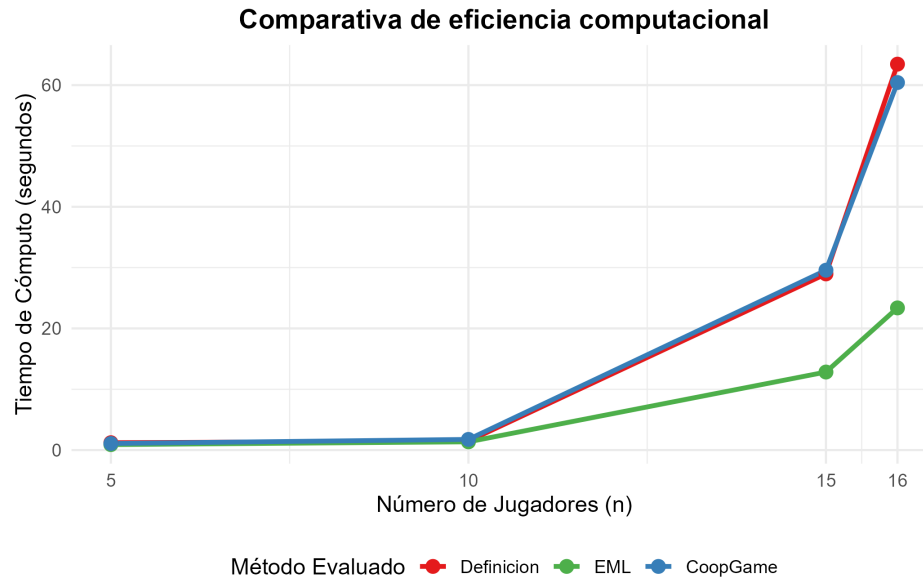


Figura 1.1: Evolución del tiempo de cómputo en función del número de jugadores.

1.10. Valor de Shapley (φ)

Aunque el núcleo de este trabajo se desarrollará bajo una perspectiva diferente, el valor de Shapley constituye una herramienta fundamental de la teoría de soluciones en juegos cooperativos con utilidad transferible. La inclusión de esta sección se justifica por su relevancia metodológica, ya que las propiedades y la estructura matemática de este valor serán herramientas analíticas para el desarrollo de demostraciones en los capítulos posteriores.

Introducido formalmente en el trabajo de Shapley (1953) [17], este valor asigna a cada jugador un promedio ponderado de sus contribuciones marginales donde la ponderación está basada en el tamaño de las coaliciones. En primer lugar, es necesario introducir una nueva propiedad para caracterizar una solución sobre $TU(N)$, un axioma de distribución fundamental que regula el reparto de la riqueza generada:

Eficiencia (EFI): Una solución $f : TU(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de eficiencia si para todo juego $(N, v) \in TU(N)$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n f_i(N, v) = v(N).$$

Esta propiedad exige que la riqueza total disponible o el valor de la gran coalición sea distribuido por completo entre todos los participantes, garantizando que no se produzcan excedentes ni déficits globales en el sistema. A continuación, se detalla la formulación del valor y su caracterización clásica basada en este principio.

Teorema 1.10.1. *Existe una única solución f definida sobre el espacio $TU(N)$ que satisface simultáneamente las propiedades de aditividad (ADI), jugador nulo (JN), simetría (SIM) y eficiencia (EFI). Esta solución, denominada valor de Shapley y denotada por φ , asigna a cada juego (N, v) y cada jugador $i \in N$ el pago:*

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

donde $n = |N|$ y $s = |S|$ representan los cardinales de la gran coalición y de la subcoalición considerada, respectivamente.

Desde un punto de vista conceptual, los pesos combinatorios $\frac{s!(n-s-1)!}{n!}$ modelan la probabilidad de que un jugador se incorpore a una coalición S bajo el supuesto de que todos los órdenes de llegada de los jugadores (permutaciones del conjunto N) son igualmente probables.

La propiedad de eficiencia que vertebrata esta caracterización resulta especialmente natural y atractiva en problemas económicos donde el objetivo primordial es la justicia distributiva, ya sea para el reparto equitativo de un beneficio neto generado de forma conjunta o para la asignación óptima de costes compartidos. En tales escenarios, este principio obliga a que se reparta exactamente todo lo ganado o lo gastado entre los miembros del grupo, de modo que nadie reciba de más ni de menos.

A lo largo de la evolución de la teoría de juegos, se han propuesto enfoques alternativos para fundamentar el valor de Shapley. Uno de los avances más destacados se debe a Young (1985) [18], quien demostró que es posible prescindir tanto de la aditividad como del axioma del jugador nulo si se introduce la propiedad de monotonía fuerte.

Teorema 1.10.2. *El valor de Shapley es la única solución f definida sobre $TU(N)$ que satisface las propiedades de monotonía fuerte (MF), simetría (SIM) y eficiencia (EFI).*

Tras estas caracterizaciones, resulta fundamental contrastar la filosofía distributiva del valor de Shapley con la de la solución central de este trabajo: el valor de Banzhaf. Podría considerarse la propiedad de eficiencia como un requisito indispensable para cualquier regla de reparto justa en contextos económicos. Bajo este prisma, podríamos cuestionarnos la validez del valor de Banzhaf debido a su falta de eficiencia, ya que la suma de sus pagos no da como resultado el valor de la gran coalición $v(N)$.

Sin embargo, su renuncia a la eficiencia no es un defecto, sino la consecuencia de modelizar un concepto distinto: el poder absoluto y la toma de decisiones independientes. Mientras que Shapley asume un escenario de reparto cerrado donde toda la riqueza debe ser distribuida (eficiencia), el valor de Banzhaf mide la capacidad de un jugador para alterar los resultados de un juego.

A falta de la propiedad de eficiencia, el valor de Banzhaf se encuentra respaldado por dos propiedades estructurales alternativas. En primer lugar, verifica la propiedad de poder total, lo que vincula el sumatorio de los pagos a la estructura combinatoria global del juego. En segundo lugar, es la única solución que satisface el principio de 2-eficiencia junto a otras propiedades básicas como simetría y jugador nulo. Este axioma fue introducido por Lehrer (1988) [11] para formalizar la resistencia del valor ante fusiones o comportamientos estratégicos manipulativos.

Formalmente, si consideramos un juego (N, v) y un par de jugadores distintos $i, j \in N$, denotamos por $(N_{i,j}, v_{i,j})$ al juego donde los jugadores i y j se han fusionado para actuar como un único jugador compuesto, al que llamaremos $\{i, j\}$. La propiedad de **2-eficiencia** establece que para toda solución f se debe cumplir:

$$f_i(N, v) + f_j(N, v) = f_{\{i,j\}}(N_{i,j}, v_{i,j}).$$

Desde un punto de vista conceptual, la 2-eficiencia actúa como un principio de inmunidad frente a la manipulación estructural. Garantiza que si dos jugadores deciden unirse y operar como una sola unidad política o económica, el poder conjunto que reciben en el nuevo juego es exactamente igual a la suma de los poderes que ostentaban cuando actuaban por separado.

El valor de Shapley, a pesar de cumplir la propiedad de eficiencia, no satisface la propiedad de 2-eficiencia. Esto implica que bajo el esquema de Shapley, los jugadores tienen incentivos estratégicos para dividirse o fusionarse y alterar así el reparto en su beneficio. Por tanto, el valor de Banzhaf garantiza una solución robusta, no manipulable e idónea para el análisis del poder político e institucional.

En conclusión, es importante destacar que ningún valor es mejor que el otro. La elección entre el valor de Shapley y el valor de Banzhaf depende simplemente de la situación que se quiera modelizar y de las propiedades que se busquen. Mientras que el valor de Shapley es ideal en contextos económicos donde se requiere repartir la totalidad de los beneficios o costes (eficiencia), el valor de Banzhaf resulta más adecuado para medir el poder de decisión y la resistencia frente a posibles fusiones de los jugadores. Por lo tanto, ambas métricas no compiten entre sí, sino que ofrecen enfoques complementarios dentro de la teoría de juegos cooperativos.

Capítulo 2

Valores en juegos con uniones *a priori*

En los modelos analizados en el capítulo anterior, partíamos de la premisa de una libertad absoluta de asociación, cualquier coalición era factible al no existir restricciones en la cooperación entre los jugadores. Sin embargo, la realidad de los procesos de decisión suele ser más compleja. Para representar situaciones donde existen afinidades previas, bloques políticos o estructuras organizativas, es preciso transitar hacia modelos que incorporen esta información.

Uno de los marcos más robustos para este fin es el de los juegos TU con un sistema de uniones. En este modelo, el conjunto de jugadores se organiza mediante una partición que describe una estructura de coaliciones preexistentes. Comenzaremos el capítulo introduciendo el concepto de juegos con uniones *a priori*. A continuación, en las secciones posteriores, profundizaremos en las soluciones diseñadas para este entorno, centrándonos en el valor de Banzhaf-Owen y el valor de Banzhaf coalicional simétrico. Evaluaremos sus propiedades teóricas y utilizaremos ejemplos prácticos para demostrar cómo estas extensiones capturan el impacto real de las estructuras organizativas sobre el valor de Banzhaf original.

2.1. Juegos con uniones *a priori*

Comenzamos formalizando la estructura de los juegos con uniones *a priori* y la notación que emplearemos para navegar por las distintas configuraciones de poder.

Definición 2.1.1. Un juego TU con un sistema de uniones es una terna $(N, v, \mathcal{P})$, donde (N, v) es un juego TU y $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ es una partición de N que define el sistema de uniones asociado.

Denotaremos por $U(N)$ al conjunto de todos los juegos con sistema de uniones sobre el conjunto de jugadores N , y por U a la clase general de estos juegos.

Definición 2.1.2. Para un conjunto dado $N = \{1, 2, \dots, n\}$:

- $\mathcal{P}(N)$ representa el conjunto de todas las particiones posibles de N .
- $\mathcal{P}_n$ designa la partición dada por $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$. Nos referiremos a ella como el sistema de uniones trivial, representando un escenario donde cada jugador actúa de forma independiente.

- $\mathcal{P}_N$ denota la partición $\{N\}$, donde todos los jugadores forman una única unión.
- Para cualquier jugador $i \in N$, definimos $\mathcal{P}(i)$ como el subconjunto de particiones de N en las que dicho jugador constituye, por sí mismo, una unión; es decir, existe algún $P_k \in \mathcal{P}$ tal que $P_k = \{i\}$.

Una vez definida la estructura del juego, necesitamos un mecanismo para asignar pagos o medir el poder de los jugadores respetando dicha estructura. Esto nos conduce al concepto de solución en este contexto.

Definición 2.1.3. Una solución sobre $U(N)$ es una aplicación:

$$\begin{aligned} f : U(N) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (N, v, \mathcal{P}) &\longmapsto f(N, v, \mathcal{P}) = (f_1(N, v, \mathcal{P}), \dots, f_n(N, v, \mathcal{P})) \end{aligned}$$

que asigna a cada juego $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$ un vector de pagos o recompensas, donde la componente i -ésima representa el beneficio o poder que recibe el jugador i bajo la estructura de uniones dada.

A continuación, se enuncian de nuevo algunas propiedades fundamentales para caracterizar una solución $f : U(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$, esta vez en el marco de juegos TU con sistema de uniones. Para ello, es fundamental introducir el concepto de juego cociente. Este objeto matemático nos permite analizar el juego desde una perspectiva macroscópica, tratando a cada unión como un bloque único de decisión antes de entrar en los repartos individuales.

Definición 2.1.4. Sea $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$ con $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$. Se define el juego cociente asociado como el juego $(M, v^{\mathcal{P}}) \in TU(M)$ tal que:

$$v^{\mathcal{P}}(R) = v\left(\bigcup_{k \in R} P_k\right), \quad \forall R \subseteq M,$$

donde $M = \{1, 2, \dots, m\}$ es el conjunto de índices que representan a las uniones.

Bajo este marco, diremos que dos uniones distintas $P_k, P_s \in \mathcal{P}$ son simétricas en el juego $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$ si los índices k y s son jugadores simétricos en el juego cociente $(M, v^{\mathcal{P}})$. Es decir, para los jugadores k y $s \in M$ se tiene $v^{\mathcal{P}}(R \cup \{k\}) = v^{\mathcal{P}}(R \cup \{s\})$ para cualquier coalición $R \subseteq M \setminus \{k, s\}$.

Ya estamos en condiciones de enunciar las propiedades fundamentales para caracterizar una solución $f : U(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ en este contexto. Al introducir un sistema de uniones, las propiedades clásicas de equidad se desdoblan para capturar la jerarquía entre los bloques y sus integrantes:

- **Simetría en cada unión (SU):** Una solución es simétrica en cada unión si para todo par de jugadores $i, j \in P_k$ que sean simétricos en el juego (N, v) , con $P_k \in \mathcal{P}$, se cumple que:

$$f_i(N, v, \mathcal{P}) = f_j(N, v, \mathcal{P}),$$

para todo $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$. Esta propiedad garantiza que, si dos jugadores de la misma unión desempeñan el mismo papel, reciban el mismo pago.

- **Simetría en el cociente (SC):** Una solución es simétrica en el juego cociente si para todo par de uniones simétricas $P_k, P_s \in \mathcal{P}$, se verifica que:

$$\sum_{i \in P_k} f_i(N, v, \mathcal{P}) = \sum_{i \in P_s} f_i(N, v, \mathcal{P}),$$

para todo $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$. Establece que dos bloques que se comportan de igual forma en la negociación global deben obtener, como grupo, el mismo beneficio.

- **Jugador nulo (JN):** Una solución satisface esta propiedad si para todo jugador $i \in N$ que sea nulo en el juego (N, v) , se tiene que $f_i(N, v, \mathcal{P}) = 0$, para todo juego $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$. La presencia de uniones no otorga valor a quien no aporta nada a ninguna coalición.
- **Aditividad (ADI):** Una solución es aditiva si para cualquier par de juegos sobre la misma estructura de uniones, $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$ y $(N, w, \mathcal{P}) \in U(N)$, se cumple que $f(N, v + w, \mathcal{P}) = f(N, v, \mathcal{P}) + f(N, w, \mathcal{P})$. Recordemos que, $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$ para cualquier coalición $S \subseteq N$.
- **Juego cociente (JC):** Una solución satisface la propiedad de juego cociente si para todo $P_k \in \mathcal{P}$, se cumple:

$$\sum_{i \in P_k} f_i(N, v, \mathcal{P}) = f_k(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m),$$

para todo $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$. Esta propiedad establece una conexión directa entre el pago total de una unión y el pago que recibiría como jugador individual en el juego cociente.

- **Monotonía fuerte (MF):** Una solución es fuertemente monótona si ante un incremento en las contribuciones marginales de un jugador i en el juego v respecto a un juego w , es decir, $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S)$ para todo $i \in N$ y para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$, se garantiza que $f_i(N, v, \mathcal{P}) \geq f_i(N, w, \mathcal{P})$, para todo par de juegos $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$ y $(N, w, \mathcal{P}) \in U(N)$.
- **Contribuciones equilibradas en las uniones (CEU):** Una solución satisface esta propiedad si para toda coalición $P_k \in \mathcal{P}$ y para todo par de jugadores $i, j \in P_k$, se verifica:

$$f_i(N, v, \mathcal{P}) - f_i(N, v, \mathcal{P}_{-i}) = f_j(N, v, \mathcal{P}) - f_j(N, v, \mathcal{P}_{-i}),$$

para todo juego $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$. Denotamos por $\mathcal{P}_{-i}$ al sistema donde el jugador i deja su bloque para formar una unión unitaria, $\mathcal{P}_{-i} = \{P_1, \dots, P_{k-1}, P_k \setminus \{i\}, P_{k+1}, \dots, P_m, \{i\}\}$. Esta propiedad refleja la estabilidad interna de los bloques. Establece que la ganancia (o pérdida) que supone para un jugador i que un compañero j abandone la unión P_k , debe ser igual a la que sufriría j si fuera i quien la abandonase. Refuerza la idea de que todos los integrantes de una unión deben beneficiarse por igual de su cooperación mutua.

2.2. Valor de Banzhaf-Owen (Ψ)

Una vez comprendida la estructura de los juegos con uniones *a priori*, nos centramos en una de las soluciones que se van a tratar en este capítulo, el valor de Banzhaf-Owen. Propuesto por Owen (1981) [15], esta solución nace como una extensión natural del valor de Banzhaf para escenarios donde la cooperación está jerarquizada.

La filosofía detrás de esta solución se puede articular en dos niveles de negociación. En un primer nivel, las uniones actúan como bloques independientes en un juego global (juego cociente), donde su poder se mide según el valor de Banzhaf. En un segundo nivel, el poder obtenido por cada bloque se distribuye internamente entre sus miembros, considerando nuevamente su capacidad de contribución relativa. Esta estructura es la que define la esencia del valor de Banzhaf-Owen, que denotaremos por Ψ .

Definición 2.2.1. Dado un juego con un sistema de uniones $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$, el valor de Banzhaf-Owen asigna a cada jugador $i \in N$ el pago $\Psi_i(N, v, \mathcal{P})$ definido por:

$$\Psi_i(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{p_k-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i\}} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)], \quad (2.1)$$

donde $P_k \in \mathcal{P}$ es la unión que contiene al jugador i , p_k es el cardinal de dicha unión, y $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$ representa la reunión de las uniones externas que participan en la coalición.

Es fundamental notar que el valor de Banzhaf-Owen presenta una propiedad singular: no verifica necesariamente la simetría en el juego cociente. Esto implica que, a pesar de que dos uniones desempeñen el mismo papel estratégico en el juego global, podrían recibir pagos totales distintos si sus estructuras internas (el número de jugadores que las componen) difieren.

Ejemplo 2.2.2. Consideremos el juego de unanimidad (N, u_N) con $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y una estructura de uniones $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ donde $P_1 = \{1, 2, 3\}$ y $P_2 = \{4, 5\}$. A pesar de que en el juego cociente $(M, u_N^{\mathcal{P}})$ con $M = \{1, 2\}$ ambas uniones son simétricas (ambas son necesarias para ganar), el cálculo del valor de Banzhaf-Owen arroja:

$$\Psi(N, u_N, \mathcal{P}) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right).$$

Al sumar los pagos por bloques, observamos que para la primera unión se obtiene $\sum_{i \in P_1} \Psi_i(N, u_N, \mathcal{P}) = 3/8$, mientras que para la segunda el sumatorio resulta ser $\sum_{i \in P_2} \Psi_i(N, u_N, \mathcal{P}) = 1/2$. Esta discrepancia pone de manifiesto que el valor de Banzhaf-Owen penaliza a los jugadores que pertenecen a uniones más numerosas, reflejando una dilución del poder individual dentro de bloques grandes.

2.3. Valor coalicional de Banzhaf

Para profundizar en la caracterización del valor de Banzhaf-Owen desarrollada por Alonso Meijide (2002) [3], introducimos el concepto de valor coalicional. Esta noción permite tender un puente entre los valores clásicos y sus extensiones con uniones *a priori*, exigiendo consistencia cuando la estructura de uniones es irrelevante, es decir, un valor coalicional de un determinado valor debe coincidir con este valor cuando el sistema de uniones es el trivial, $\mathcal{P}_n$, donde cada jugador es una unión.

Definición 2.3.1. Dado un valor f definido sobre un juego TU (N, v) , un valor coalicional de f es una aplicación $g : U(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, si el sistema de uniones es el trivial, $\mathcal{P}_n$, entonces la solución coincide con el valor original:

$$g(N, v, \mathcal{P}_n) = f(N, v).$$

Bajo esta óptica, el valor de Banzhaf-Owen se entiende como un valor coalicional de Banzhaf. Esta relación de herencia garantiza que, al eliminar la jerarquía de las uniones, recuperamos la medida de poder absoluto estudiada en el primer capítulo.

Definición 2.3.2. Un valor coalicional de Banzhaf es una aplicación $f : U(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ verificando que, para el sistema de uniones trivial $\mathcal{P}_n$:

$$f(N, v, \mathcal{P}_n) = \beta(N, v).$$

Esta propiedad de consistencia es la que justifica el uso de Ψ como la extensión natural para proyectar el análisis del poder de Banzhaf sobre estructuras de cooperación preestablecidas.

La caracterización del valor de Banzhaf-Owen que presentaremos a continuación se fundamenta, además de en el concepto de valor coalicional, en dos propiedades que refinan el comportamiento de la solución ante cambios en la estructura de las uniones: la indiferencia en las uniones y el juego cociente para uniones unitarias.

Definición 2.3.3. Una solución $f : U(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de **indiferencia en las uniones (IU)** si para todo $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$, para toda unión $P_k \in \mathcal{P}$ y para todo par de jugadores $i, j \in P_k$ ($i \neq j$), se verifica:

$$f_i(N, v, \mathcal{P}) = f_i(N, v, \mathcal{P}_{-j}).$$

Esta propiedad encierra una intuición estratégica clave, ya que si un jugador decide de forma unilateral abandonar su unión para actuar de manera independiente, el poder absoluto del resto de sus antiguos compañeros de bloque no debería verse alterado.

Definición 2.3.4. Una solución $f : U(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de **juego cociente para coaliciones formadas por un único jugador (JCU)** si para todo jugador $i \in N$, para toda partición $\mathcal{P} \in \mathcal{P}(i)$ y para todo juego $(N, v, \mathcal{P})$, se cumple:

$$f_i(N, v, \mathcal{P}) = f_k(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m),$$

donde $k \in M$ es el índice tal que $P_k = \{i\}$.

Esta propiedad establece un principio de consistencia, que establece que si un jugador constituye por sí mismo una unión, su pago debe coincidir exactamente con el que le correspondería en el juego cociente.

Para demostrar que el valor de Banzhaf-Owen es la solución adecuada en este contexto, enunciamos los siguientes lemas que confirman que Ψ hereda y respeta estas estructuras:

Lema 2.3.5. *El valor de Banzhaf-Owen es un valor coalicional de Banzhaf.*

Demostración. Dado $(N, v, \mathcal{P}_n) \in U(N)$, para todo $i \in N$ existe un $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $P_k = \{i\}$. Puesto que en este escenario el número de uniones es $m = n$ y el tamaño de cada unión es $p_k = 1$, tenemos que $P_k \setminus \{i\} = \emptyset$ ($T = \emptyset$) en la Expresión (2.1), que se reduce a:

$$\Psi_i(N, v, \mathcal{P}_n) = \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{p_k-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} (v(Q \cup \{i\}) - v(Q)) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)),$$

lo cual coincide exactamente con la definición del valor de Banzhaf original $\beta_i(N, v)$. $\square$

Lema 2.3.6. *El valor de Banzhaf-Owen verifica la propiedad de indiferencia en las uniones (IU).*

Demostración. Sea $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$. Si un jugador $j \in P_k \in \mathcal{P}$ abandona la unión para formar $P' = \{j\}$, el nuevo sistema $\mathcal{P}_{-j}$ cuenta con $m+1$ uniones y la unión original queda reducida a $P_k \setminus \{j\}$. Al aplicar la definición de Ψ_i , los cambios en los factores de ponderación (2^{m-1} y 2^{p_k-1}) se compensan mutuamente y debido a la estructura combinatoria del sumatorio resulta que $\Psi_i(N, v, \mathcal{P}_{-j}) = \Psi_i(N, v, \mathcal{P})$, si $i \in P_k, i \neq j$. $\square$

Lema 2.3.7. *El valor de Banzhaf-Owen verifica la propiedad de juego cociente para coaliciones formadas por un único jugador (JCU).*

Demostración. Sea $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$. Haciendo uso de la Expresión (2.1), si $P_k = \{i\}$ ($p_k = 1$), entonces $P_k \setminus \{i\} = \emptyset$ ($T = \emptyset$), por lo que la suma interna desaparece y la expresión queda simplificada a la media de las contribuciones marginales de la unión k en el juego cociente:

$$\begin{aligned} \Psi_i(N, v, \mathcal{P}) &= \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{p_k-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} (v(Q \cup \{i\}) - v(Q)) \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} (v^{\mathcal{P}}(R \cup \{k\}) - v^{\mathcal{P}}(R)) = \Psi_k(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m), \end{aligned}$$

siendo $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$. Por el Lema 2.3.5, esto coincide justamente con el valor de Banzhaf de la unión en el juego cociente $\beta_k(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m)$. $\square$

Una vez analizadas las propiedades de la solución y su comportamiento ante la fragmentación de las uniones, estamos en disposición de enunciar el resultado central de esta sección. Se caracteriza el valor de Banzhaf-Owen como la única extensión posible del valor de Banzhaf al contexto de los juegos TU con sistema de uniones que verifica simultáneamente las dos propiedades anteriores.

Teorema 2.3.8. *El valor de Banzhaf-Owen es el único valor coalicional de Banzhaf que verifica las propiedades de indiferencia en las uniones (IU) y de juego cociente para uniones unitarias (JCU).*

Demostración. La demostración se divide en dos partes: existencia y unicidad.

Existencia: en los Lemas 2.3.5, 2.3.6 y 2.3.7 se ha demostrado que el valor de Banzhaf-Owen Ψ es, efectivamente, un valor coalicional de Banzhaf que satisface las propiedades de IU y JCU.

Unicidad: supongamos que existen dos valores coalicionales de Banzhaf, f^1 y f^2 , que verifican ambas propiedades. Si ambos valores no son idénticos, debe existir al menos un juego $(N, v) \in TU(N)$ y una partición $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ para los cuales $f_i^1(N, v, \mathcal{P}) \neq f_i^2(N, v, \mathcal{P})$ para algún jugador $i \in N$.

Consideremos que $\mathcal{P}$ es la partición con el máximo número de uniones, la más cercana a la partición trivial, que mantiene esta diferencia para el jugador i . Dado que f^1 y f^2 son valores coalicionales de Banzhaf, sabemos que si $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n$, entonces $f^1 = f^2 = \beta$, por lo que necesariamente el número de uniones de la partición conflictiva debe ser $m < n$. Analizamos entonces dos casos posibles según la naturaleza de la unión a la que pertenece el jugador i :

- **Caso 1:** el jugador i pertenece a una unión unitaria, es decir, $P_k = \{i\}$. En este caso, aplicando la propiedad de juego cociente para uniones unitarias (JCU) y el hecho de que tanto f^1 como f^2 son valores coalicionales de Banzhaf, se obtiene directamente:

$$f_i^1(N, v, \mathcal{P}) = \beta_k(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m) = f_i^2(N, v, \mathcal{P}),$$

lo que contradice la hipótesis de que los valores diferían para el jugador i en esta partición.

- **Caso 2:** el jugador i pertenece a una unión P_k con más de un jugador ($p_k > 1$). Sea $j \in P_k$ un jugador tal que $j \neq i$. Por la propiedad de indiferencia en las uniones (IU), tenemos que:

$$f_i^1(N, v, \mathcal{P}) = f_i^1(N, v, \mathcal{P}_{-j}) \quad \text{y} \quad f_i^2(N, v, \mathcal{P}) = f_i^2(N, v, \mathcal{P}_{-j}).$$

La partición modificada $\mathcal{P}_{-j}$ posee $m + 1$ uniones. Debido a nuestra hipótesis de maximalidad sobre $\mathcal{P}$ (siendo esta la partición con mayor número de bloques donde las soluciones diferían para i), en $\mathcal{P}_{-j}$ ambos valores están obligados a coincidir:

$$f_i^1(N, v, \mathcal{P}_{-j}) = f_i^2(N, v, \mathcal{P}_{-j}).$$

Por transitividad, deducimos de manera inmediata que $f_i^1(N, v, \mathcal{P}) = f_i^2(N, v, \mathcal{P})$, alcanzando una contradicción con la suposición inicial en ambos escenarios.

Por consiguiente, la solución es única. $\square$

Este resultado es de suma importancia, ya que justifica técnicamente por qué el valor de Banzhaf-Owen es la extensión natural y lógica del valor de Banzhaf cuando el juego presenta una estructura de bloques. En las secciones posteriores se pondrá un ejemplo del valor de Banzhaf-Owen y una nueva propuesta de valor coalicional de Banzhaf, el valor de Banzhaf coalicional simétrico.

2.4. El valor Ψ en un sistema de votación

Para consolidar los conceptos teóricos y las propiedades de indiferencia en las uniones (IU) y de juego cociente para uniones unitarias (JCU), se presenta a continuación un análisis detallado de un juego de mayoría ponderada.

Considérese el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$, derivado de un juego de mayoría ponderada con un vector de pesos $w = (40, 30, 20, 10)$. La cuota de mayoría se establece en $q = 51$. Definimos una estructura de uniones *a priori* tal que:

$$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}.$$

El juego cociente $(M, v^{\mathcal{P}})$ se desarrolla entre tres bloques con pesos $W_1 = 40$, $W_2 = 50$ y $W_3 = 10$. En este nivel, las coaliciones de uniones ganadoras son aquellas cuya suma de pesos es igual o superior a 51:

- $\{P_1, P_2\}$ (suman 90).
- $\{P_2, P_3\}$ (suman 60).
- $\{P_1, P_2, P_3\}$ (suman 100).

Nótese que la unión P_2 es un jugador indispensable en el juego cociente, ya que ninguna coalición puede ganar sin él, y las uniones P_1 y P_3 son simétricas entre sí, ya que son socios intercambiables que permiten a P_2 alcanzar la mayoría.

Para proceder con el cálculo numérico de las asignaciones, resulta conveniente aplicar la expresión del valor de Banzhaf-Owen. Para cada jugador $i \in N$:

$$\Psi_i(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{p_k-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i\}} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)],$$

donde $P_k \in \mathcal{P}$ es la unión que contiene al jugador i , p_k es el cardinal de dicha unión, y $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$.

Jugadores en uniones unitarias (casos $i = 1$ e $i = 4$): por la propiedad de JCU, el pago coincide con su valor de Banzhaf en el juego cociente. Para el jugador $i = 1$, que pertenece a P_1 , tenemos $m = 3$ y $p_1 = 1$. El sumatorio interno evalúa $T = \emptyset$, por lo que:

- Si $R = \emptyset \implies v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0$ (puesto que $w_1 = 40$).
- Si $R = \{2\}$ ($Q = P_2$) $\implies v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 1 - 0 = 1$ (puesto que $w_1 + w_2 + w_3 = 90$ y $w_2 + w_3 = 50$).
- Si $R = \{3\}$ ($Q = P_3$) $\implies v(\{1, 4\}) - v(\{4\}) = 0 - 0 = 0$ (puesto que $w_1 + w_4 = 50$ y $w_4 = 10$).
- Si $R = \{2, 3\}$ ($Q = P_2 \cup P_3$) $\implies v(\{1, 2, 3, 4\}) - v(\{2, 3, 4\}) = 1 - 1 = 0$ (puesto que $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 100$ y $w_2 + w_3 + w_4 = 60$, ambas coaliciones ganan).

La suma total de contribuciones marginales para este jugador es 1. Por tanto: $\Psi_1(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{2^{3-1}} \cdot 1 \cdot (1) = 0,25$.

Dado que la unión $P_3 = \{4\}$ es también unitaria y guarda una posición simétrica a la de P_1 en el juego cociente, ya que ambas requieren de las mismas coaliciones externas para ganar, un desarrollo análogo nos conduce a que $\Psi_4(N, v, \mathcal{P}) = 0,25$.

Jugadores en la unión compleja (casos $i = 2$ e $i = 3$): para el jugador $i = 2$, que pertenece a P_2 , tenemos $m = 3$ y $p_2 = 2$. El sumatorio interno evalúa $T = \emptyset$ y $T = \{3\}$, por lo que:

- Si $R = \emptyset$: no hay contribuciones (2 solo no gana y si se une con 3 tampoco).
- Si $R = \{1\}$ ($Q = P_1$):
 - $T = \emptyset \implies v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 1 - 0 = 1$.
 - $T = \{3\} \implies v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 1 - 1 = 0$.
- Si $R = \{3\}$ ($Q = P_3$):
 - $T = \emptyset \implies v(\{2, 4\}) - v(\{4\}) = 0 - 0 = 0$.
 - $T = \{3\} \implies v(\{2, 3, 4\}) - v(\{3, 4\}) = 1 - 0 = 1$.
- Si $R = \{1, 3\}$ ($Q = P_1 \cup P_3$):
 - $T = \emptyset \implies v(\{1, 2, 4\}) - v(\{1, 4\}) = 1 - 0 = 1$.
 - $T = \{3\} \implies v(\{1, 2, 3, 4\}) - v(\{1, 3, 4\}) = 1 - 1 = 0$.

Ya que la suma total de contribuciones marginales es 3, se tiene que $\Psi_2(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^1} \cdot (3) = \frac{3}{8} = 0,375$. Por la propiedad de simetría en cada unión, que verifica esta solución, se concluye directamente que $\Psi_3(N, v, \mathcal{P}) = 0,375$.

Presentamos los resultados en los siguientes cuadros para analizar detalladamente el impacto de la estructura con uniones *a priori* frente al escenario de votación directa sin un sistema de uniones. En primer lugar, se recogen los valores obtenidos bajo la partición propuesta en el Cuadro 2.1.

Jugador	Votos	Unión	Banzhaf-Owen (Ψ)	Poder Relativo
1	40	P_1	0,250	20,00 %
2	30	P_2	0,375	30,00 %
3	20	P_2	0,375	30,00 %
4	10	P_3	0,250	20,00 %
Total	100		1,250	100,00 %

Cuadro 2.1: Reparto de poder bajo la estructura de uniones $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$.

Por otro lado, en el juego sin uniones previas establecidas, el valor de Banzhaf-Owen colapsa en el valor de Banzhaf (β), tal como se ha demostrado en las secciones anteriores. Sus valores se recogen en el Cuadro 2.2.

Este contraste numérico ilustra una consecuencia fundamental del valor de Banzhaf-Owen: la estructura de uniones permite a los jugadores 2 y 3 no solo igualar, sino superar el poder del jugador 1

Jugador	Votos	Banzhaf (β)	Poder Relativo
1	40	0,625	41,67 %
2	30	0,375	25,00 %
3	20	0,375	25,00 %
4	10	0,125	8,33 %
Total	100	1,500	100,00 %

Cuadro 2.2: Reparto de poder en el juego sin estructura de uniones.

(quien cae del 41,67 % al 20 %), a pesar de contar con menos escaños individualmente. Este fenómeno se apoya en la validez de los axiomas que caracterizan esta solución.

Por un lado, el cumplimiento de la propiedad de JCU explica el comportamiento de los bloques unitarios; el jugador 4, el más pequeño, eleva su poder relativo del 8,33 % al 20 % para equipararse al jugador 1, al operar ambos como socios intercambiables en el juego cociente frente a la unión P_2 .

Por otro lado, la inclusión del escenario clásico permite verificar de forma nítida la propiedad de IU. Si el jugador 3 decidiera abandonar unilateralmente la unión P_2 para actuar de forma independiente, la estructura de bloques se disolvería en la partición trivial formada únicamente por uniones unitarias, $\mathcal{P}_{-3} = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{3\}\}$. El valor de Banzhaf-Owen bajo esta partición colapsa en el valor de Banzhaf del juego sin uniones. Al observar la tabla, se constata que $\Psi_2(N, v, \mathcal{P}) = 0,375$ y $\beta_2(N, v) = 0,375$. Por lo que, la deserción de un socio no altera la fuerza marginal de los miembros restantes. No obstante, el poder relativo porcentual de los jugadores 2 y 3 sí experimenta una variación, descendiendo del 30 % al 25 %. Esta oscilación no contradice el axioma IU, sino que evidencia la conocida falta de eficiencia del valor de Banzhaf.

Finalmente, los valores de Ψ_2 y Ψ_3 resultan notablemente más elevados en el juego con estructura de coaliciones preestablecidas respecto de Ψ_1 y Ψ_4 , debido a que la unión P_2 constituye una coalición indispensable para alcanzar la mayoría en el juego cociente, cuyo poder se reparte equitativamente a nivel interno por la propiedad de simetría en cada unión.

2.5. Valor de Banzhaf coalicional simétrico (II)

Como se ha mencionado anteriormente, el valor de Banzhaf-Owen no garantiza la simetría en el juego cociente. Esto implica que el poder que una unión ejerce como bloque no siempre se traduce de forma coherente en el sumatorio de los pagos de sus miembros. En esta sección, se define y caracteriza una extensión alternativa, a la que denominaremos valor de Banzhaf coalicional simétrico, propuesto por Alonso Meijide (2002) [3], y diseñada específicamente para respetar la jerarquía estratégica del juego entre uniones.

El punto de partida para este nuevo enfoque es reformular la propiedad de poder total. En los juegos TU clásicos, el poder total distribuido depende únicamente del número de jugadores. Sin embargo, cuando existen uniones *a priori*, la cooperación se ve restringida, y parece lógico que el total a repartir deba estar vinculado a la estructura de dichas uniones.

Para derivar esta nueva propiedad, combinamos los principios de valor coalicional y de juego cociente. Si buscamos una solución $f : U(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que sea consistente con el poder que las uniones tienen en el juego global, el pago total de los jugadores de cada unión debe coincidir con el valor asignado a dicha unión en el juego cociente:

$$\sum_{i \in P_k} f_i(N, v, \mathcal{P}) = f_k(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m).$$

Si extendemos esta igualdad a todos los jugadores del juego, $i \in N$, obtenemos que la suma global de los pagos es:

$$\sum_{i \in N} f_i(N, v, \mathcal{P}) = \sum_{k \in M} f_k(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m).$$

Bajo la premisa de que nuestra solución actúa como un valor coalicional de Banzhaf cuando el juego se desarrolla estrictamente entre bloques; es decir, operando en el juego cociente con la partición trivial entre ellos, la solución debe colapsar en el valor de Banzhaf (β). Por tanto, la expresión anterior se transforma en:

$$\sum_{i \in N} f_i(N, v, \mathcal{P}) = \sum_{k \in M} \beta_k(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m).$$

Aplicando la definición de la propiedad de poder total del valor de Banzhaf sobre el juego cociente, llegamos a la definición del siguiente axioma fundamental para esta sección:

Definición 2.5.1. Una solución $f : U(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de **poder total coalicional (PTC)** si para todo juego con m uniones $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$, se cumple que:

$$\sum_{i \in N} f_i(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k \in M} \sum_{T \subseteq M \setminus \{k\}} [v^{\mathcal{P}}(T \cup \{k\}) - v^{\mathcal{P}}(T)].$$

Esta propiedad establece que el poder total que se distribuye entre todos los jugadores es exactamente igual al poder total disponible en el juego donde las uniones actúan como los únicos jugadores. A diferencia del poder total clásico, el PTC reconoce que la estructura de uniones limita o potencia el valor global generado, haciendo que el reparto dependa de cuántos bloques existen (m) y no solo de cuántos individuos hay (n).

A continuación se propone y caracteriza una extensión alternativa del valor de Banzhaf para juegos TU con sistema de uniones, el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π). Como veremos, esta solución integra las ventajas estratégicas del análisis de Banzhaf con la equidad interna del valor de Shapley.

Teorema 2.5.2. *Existe una única solución $f : U(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica las propiedades de poder total coalicional (PTC), jugador nulo (JN), simetría en las uniones (SU), simetría en el cociente (SC) y aditividad (ADI).*

Dado un sistema de uniones $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$, esta solución, denotada por Π , asigna a cada jugador $i \in N$ el valor:

$$\Pi_i(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i\}} \frac{t!(p_k - t - 1)!}{p_k!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)], \quad (2.2)$$

donde $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$, p_k es el cardinal de P_k siendo $P_k \in \mathcal{P}$ la unión que contiene a i y t es el cardinal de T .

Demostración. La demostración se divide en dos partes: existencia y unicidad.

Existencia:

En primer lugar, comprobaremos que la solución Π , definida en la Expresión (2.2), verifica las propiedades enumeradas en el teorema.

Poder total coalicional

Dado un juego con un sistema de uniones $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$, procedemos a sumar los pagos de todos los jugadores $i \in N$:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \Pi_i(N, v, \mathcal{P}) &= \sum_{k \in M} \sum_{i \in P_k} \Pi_i(N, v, \mathcal{P}) \\ &= \sum_{k \in M} \sum_{i \in P_k} \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i\}} \frac{t!(p_k - t - 1)!}{p_k!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)]. \end{aligned}$$

Para simplificar esta expresión, fijamos una unión $P_k \in \mathcal{P}$ y una coalición de uniones $R \subseteq M \setminus \{k\}$, definiendo $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$. Consideramos ahora el juego TU $(P_k, \tilde{v}_Q) \in TU(P_k)$, cuya función característica se define como:

$$\tilde{v}_Q(T) = v(Q \cup T) - v(Q), \quad \forall T \subseteq P_k.$$

En este contexto, el valor de Shapley de un jugador $i \in P_k$ en el juego $(P_k, \tilde{v}_Q)$ se expresa como:

$$\varphi_i(P_k, \tilde{v}_Q) = \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i\}} \frac{t!(p_k - t - 1)!}{p_k!} [\tilde{v}_Q(T \cup \{i\}) - \tilde{v}_Q(T)].$$

Sustituyendo la definición de $\tilde{v}_Q$:

$$\varphi_i(P_k, \tilde{v}_Q) = \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i\}} \frac{t!(p_k - t - 1)!}{p_k!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)].$$

Debido a la propiedad de eficiencia del valor de Shapley, se obtiene que la suma de los pagos sobre la unión es:

$$\sum_{i \in P_k} \varphi_i(P_k, \tilde{v}_Q) = \tilde{v}_Q(P_k) = v(Q \cup P_k) - v(Q),$$

que es equivalente a:

$$\sum_{i \in P_k} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i\}} \frac{t!(p_k - t - 1)!}{p_k!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)] = v(Q \cup P_k) - v(Q).$$

Insertando este resultado en la expresión general del principio, tenemos:

$$\sum_{i \in N} \Pi_i(N, v, \mathcal{P}) = \sum_{k \in M} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \frac{1}{2^{m-1}} [v(Q \cup P_k) - v(Q)].$$

Considerando que $v(Q \cup P_k) - v(Q) = v^{\mathcal{P}}(R \cup \{k\}) - v^{\mathcal{P}}(R)$, se llega finalmente a:

$$\sum_{i \in N} \Pi_i(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k \in M} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} [v^{\mathcal{P}}(R \cup \{k\}) - v^{\mathcal{P}}(R)],$$

quedando verificada la propiedad de PTC.

Jugador nulo, simetría en las uniones y aditividad

A partir de la Expresión (2.2), es directo comprobar que:

- Si i es un jugador nulo, sus contribuciones marginales son siempre nulas, resultando $\Pi_i(N, v, \mathcal{P}) = 0$.
- La solución satisface la simetría en cada unión, dado que los pesos del sumatorio interno dependen únicamente del tamaño de las coaliciones t , tratando de igual forma a jugadores sustituibles dentro de P_k .
- La expresión es lineal respecto a v , por lo tanto, la solución es aditiva.

Simetría en el cociente

Se ha demostrado previamente que la cantidad total obtenida por los jugadores de la unión P_k es:

$$\sum_{i \in P_k} \Pi_i(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} [v^{\mathcal{P}}(R \cup \{k\}) - v^{\mathcal{P}}(R)]. \quad (2.3)$$

Dadas dos uniones simétricas $P_k, P_s \in \mathcal{P}$, se cumple que $v^{\mathcal{P}}(R \cup \{k\}) = v^{\mathcal{P}}(R \cup \{s\})$ para todo $R \subseteq M \setminus \{k, s\}$. Además, $v^{\mathcal{P}}(R \cup \{k\}) = v^{\mathcal{P}}(T \cup \{s\})$, donde $T = (R \setminus \{s\}) \cup \{k\}$, para todo $R \subseteq M \setminus \{k\}$ con $s \in R$. Aplicando estas condiciones a la expresión anterior, se deduce que:

$$\sum_{i \in P_k} \Pi_i(N, v, \mathcal{P}) = \sum_{j \in P_s} \Pi_j(N, v, \mathcal{P}).$$

Por tanto, se satisface la propiedad de simetría en el cociente.

Unicidad:

Para demostrar la unicidad, es suficiente probar que cualquier solución f que satisface las propiedades enumeradas en el teorema coincide con Π para los juegos de unanimidad. Dado que la propiedad de aditividad y el hecho de que la clase de los juegos de unanimidad constituye una base del espacio de los juegos TU, la coincidencia en esta base garantiza la unicidad del valor para cualquier juego $(N, v, \mathcal{P})$.

Considérese un conjunto finito N y el juego de unanimidad u_T , con $T \subseteq N$. Dada una partición $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\} \in \mathcal{P}(N)$, definimos:

- $m(T) = \{j \in M \mid P_j \cap T \neq \emptyset\}$, el conjunto de índices de las uniones que contienen al menos un jugador de T .
- $T_j^0 = P_j \cap T$, el conjunto de jugadores de la unión P_j que pertenecen a T . Denotaremos su cardinal por $t_j^0 = |T_j^0|$.

El juego cociente $(M, u_T^{\mathcal{P}})$ queda definido como:

$$u_T^{\mathcal{P}}(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } m(T) \subseteq R \\ 0 & \text{si } m(T) \not\subseteq R \end{cases}$$

para todo $R \subseteq M$. Supóngase ahora una solución f que cumple las propiedades consideradas en el teorema.

Como f satisface la propiedad de jugador nulo, se tiene que $f_i(N, u_T, \mathcal{P}) = 0$ para todo jugador $i \notin T$. Además, por las propiedades de poder total coalicional, jugador nulo y simetría en el juego cociente, se debe verificar para cada unión P_k :

$$\sum_{i \in P_k} f_i(N, u_T, \mathcal{P}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin m(T) \\ \frac{1}{2^{|m(T)|-1}} & \text{si } k \in m(T) \end{cases}$$

para todo $k \in M$. Dado que una solución f que satisface la propiedad de simetría en las uniones otorga a todo jugador perteneciente a T_k^0 la misma cantidad, se deduce que:

$$f_i(N, u_T, \mathcal{P}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin T \\ \frac{1}{t_k^0 2^{|m(T)|-1}} & \text{si } i \in T_k^0. \end{cases}$$

Por otro lado, analizamos el valor Π definido en la Expresión (2.2). Si $i \notin T$, es inmediato que $\Pi_i(N, u_T, \mathcal{P}) = 0$. Cuando $i \in T$, entonces $i \in T_k^0 = T \cap P_k$ para algún $k \in m(T)$. En el juego de unanimidad, la contribución marginal $u_T(Q \cup S \cup \{i\}) - u_T(Q \cup S) = 1$ si y sólo si:

- $m(T) \setminus \{k\} \subseteq R \subseteq M \setminus \{k\}$, donde $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$.
- $T_k^0 \setminus \{i\} \subseteq S \subseteq P_k \setminus \{i\}$.

Por lo tanto, si $i \in T_k^0$:

$$\Pi_i(N, u_T, \mathcal{P}) = \sum_{m(T) \setminus \{k\} \subseteq R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T_k^0 \setminus \{i\} \subseteq S \subseteq P_k \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{s!(p_k - s - 1)!}{p_k!}.$$

Calculando los sumatorios se observa:

1. El número de conjuntos R que cumplen $m(T) \setminus \{k\} \subseteq R \subseteq M \setminus \{k\}$ es $2^{(m-1)-(|m(T)|-1)} = 2^{m-|m(T)|}$.
2. La suma interna sobre S se resuelve aplicando la eficiencia y simetría del valor de Shapley al juego de unanimidad $(P_k, u_{T_k^0})$. Dado que en dicho juego los jugadores $i \in T_k^0$ son simétricos y los jugadores $j \in P_k \setminus T_k^0$ son nulos, la suma de las contribuciones marginales ponderadas para cualquier $i \in T_k^0$ es:

$$\sum_{T_k^0 \setminus \{i\} \subseteq S \subseteq P_k \setminus \{i\}} \frac{s!(p_k - s - 1)!}{p_k!} = \frac{1}{t_k^0}.$$

Combinando estos resultados:

$$\Pi_i(N, u_T, \mathcal{P}) = 2^{m-|m(T)|} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \frac{1}{t_k^0} = \frac{2^{m-|m(T)|}}{2^{m-1} t_k^0} = \frac{1}{t_k^0 2^{|m(T)|-1}}.$$

En consecuencia, f y Π coinciden para cualquier juego de unanimidad $(N, u_T, \mathcal{P})$, y por linealidad, coinciden para todo $(N, v, \mathcal{P})$. $\square$

La estructura del valor de Banzhaf coalicional simétrico responde a un enfoque metodológico común en la literatura de juegos con uniones *a priori*. Como ocurre en diversas soluciones de este tipo, el reparto de poder se articula mediante un procedimiento en dos niveles bien diferenciados: un nivel externo que regula la interacción entre los bloques y un nivel interno que gestiona la distribución intracoalicional. La especificidad y el interés de la solución Π radican, precisamente, en la combinación particular de los criterios elegidos para cada etapa:

1. **A nivel externo (entre uniones):** el poder a nivel macroscópico se distribuye siguiendo la filosofía del valor de Banzhaf, asumiendo que todas las coaliciones entre bloques son equiprobables.
2. **A nivel interno (dentro de cada unión):** el poder total asignado al bloque se ramifica entre sus integrantes mediante el esquema del valor de Shapley, respetando la contribución marginal ponderada de cada individuo. La incorporación de esta lógica garantiza un resultado de especial interés para la coherencia del modelo; asegura que los grupos de jugadores pertenecientes a uniones simétricas en el juego cociente reciban, en su conjunto, idéntica compensación.

Esta propuesta logra subsanar la asimetría en el juego cociente que presentaba el valor de Banzhaf-Owen. De este modo, Π se consolida como una alternativa axiomática idónea para modelizar escenarios donde las uniones operan externamente bajo una lógica de poder absoluto (Banzhaf), pero exigen un reparto interno estrictamente eficiente y equitativo (Shapley).

Una vez definida la solución Π , es fundamental analizar las propiedades que garantizan su unicidad y su comportamiento ante cambios en la estructura de las uniones. Una de las caracterizaciones más potentes se basa en la monotonía fuerte, que asegura que si las contribuciones marginales de un jugador aumentan, su pago no puede disminuir.

Teorema 2.5.3. *El valor de Banzhaf coalicional simétrico es la única solución f sobre $U(N)$ que verifica las propiedades de poder total coalicional (PTC), simetría en las uniones (SU), simetría en el cociente (SC) y monotonía fuerte (MF).*

Sin embargo, para entender la justicia distributiva interna de este valor, debemos recurrir a la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones (CEU). Esta propiedad establece que el efecto que tiene la salida de un jugador j sobre el pago de otro jugador i (dentro de la misma unión) es recíproco.

Lema 2.5.4. *El valor de Banzhaf coalicional simétrico verifica la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones (CEU), es decir, para todo $P_k \in \mathcal{P}$ e $i, j \in P_k$:*

$$\Pi_i(N, v, \mathcal{P}) - \Pi_i(N, v, \mathcal{P}_{-j}) = \Pi_j(N, v, \mathcal{P}) - \Pi_j(N, v, \mathcal{P}_{-i}).$$

Demostración. Sea $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$ con m uniones. Para un jugador $i \in P_k$, podemos expresar su pago Π_i desglosando el sumatorio interno según la presencia del jugador j en las subcoaliciones T :

$$\begin{aligned} \Pi_i(N, v, \mathcal{P}) &= \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i, j\}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{t!(p_k - t - 1)!}{p_k!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)] \\ &\quad + \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i, j\}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{(t+1)!(p_k - t - 2)!}{p_k!} [v(Q \cup T \cup \{j\} \cup \{i\}) - v(Q \cup T \cup \{j\})], \end{aligned}$$

donde $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$. Por otro lado, al considerar el sistema $\mathcal{P}_{-j}$, el jugador j forma una unión unitaria propia, el número de uniones pasa a ser $m + 1$ y el tamaño de la unión P_k se reduce a $p_k - 1$. El pago

de i en esta nueva estructura es:

$$\begin{aligned}\Pi_i(N, v, \mathcal{P}_{-j}) &= \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i, j\}} \frac{1}{2^m} \frac{t!(p_k - t - 2)!}{(p_k - 1)!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)] \\ &+ \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i, j\}} \frac{1}{2^m} \frac{t!(p_k - t - 2)!}{(p_k - 1)!} [v(Q \cup T \cup \{j\} \cup \{i\}) - v(Q \cup T \cup \{j\})].\end{aligned}$$

Restando ambas expresiones, obtenemos:

$$\begin{aligned}\Pi_i(N, v, \mathcal{P}) - \Pi_i(N, v, \mathcal{P}_{-j}) &= \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i, j\}} A_1 [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)] \\ &+ \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i, j\}} A_2 [v(Q \cup T \cup \{j\} \cup \{i\}) - v(Q \cup T \cup \{j\})],\end{aligned}$$

donde los coeficientes algebraicos son:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{2^{m-1}} \frac{t!(p_k - t - 1)!}{p_k!} - \frac{1}{2^m} \frac{t!(p_k - t - 2)!}{(p_k - 1)!}, \\ A_2 &= \frac{1}{2^{m-1}} \frac{(t+1)!(p_k - t - 2)!}{p_k!} - \frac{1}{2^m} \frac{t!(p_k - t - 2)!}{(p_k - 1)!}.\end{aligned}$$

Para simplificar, definamos $C = \frac{1}{2^m} \frac{t!(p_k - t - 2)!}{(p_k - 1)!}$. Se puede comprobar que $A_1 + A_2 = 0$ mediante la siguiente manipulación:

$$\begin{aligned}A_1 + A_2 &= \frac{1}{2^{m-1}} \left[\frac{t!(p_k - t - 2)!}{p_k!} ((p_k - t - 1) + (t + 1)) \right] - 2C \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \left[\frac{t!(p_k - t - 2)!}{p_k!} (p_k) \right] - 2C \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \frac{t!(p_k - t - 2)!}{(p_k - 1)!} - 2C = 2C - 2C = 0.\end{aligned}$$

Al ser $A_2 = -A_1$, la diferencia de pagos de i se escribe como:

$$A_1 \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i, j\}} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T) - v(Q \cup T \cup \{j\} \cup \{i\}) + v(Q \cup T \cup \{j\})].$$

Esta expresión es simétrica respecto a i y j , salvo un cambio de signo global que se compensa al realizar el mismo cálculo para Π_j . Por lo tanto, la diferencia de lo que i gana con y sin j es igual a lo que j gana con y sin i , cumpliéndose la propiedad de CEU. $\square$

Ahora para entender su consistencia externa, debemos recurrir a la propiedad de juego cociente (JC), la cual asegura que el poder total asignado a los integrantes de una unión sea coherente con el poder que dicha unión ejerce como un único bloque en el nivel global de negociación.

Lema 2.5.5. *El valor de Banzhaf coalicional simétrico es un valor coalicional de Banzhaf y satisface la propiedad de juego cociente (JC), es decir, para todo $P_k \in \mathcal{P}$:*

$$\sum_{i \in P_k} \Pi_i(N, v, \mathcal{P}) = \Pi_k(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m),$$

Demostración. Procedemos a demostrar ambas afirmaciones:

1. Valor coalicional de Banzhaf: dado un juego $(N, v) \in TU(N)$, considérese el sistema de uniones trivial $\mathcal{P}_n = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$, donde cada unión es un conjunto unitario. En este caso, $m = n$ y para cada unión P_k , el cardinal es $p_k = 1$ (lo que implica $T = \emptyset$ y $t = 0$). Sustituyendo estos valores en la Expresión (2.2), se obtiene:

$$\Pi_i(N, v, \mathcal{P}_n) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{R \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{0!(1-0-1)!}{1!} [v(Q \cup \{i\}) - v(Q)] = \beta_i(N, v).$$

Esto demuestra que Π es un valor coalicional de Banzhaf, ya que coincide con el valor de Banzhaf cuando la estructura de uniones es trivial.

2. Propiedad de juego cociente: de la Expresión (2.3), se tiene que la suma de los pagos de los jugadores de una unión P_k es:

$$\sum_{i \in P_k} \Pi_i(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} [v^{\mathcal{P}}(R \cup \{k\}) - v^{\mathcal{P}}(R)].$$

El término de la derecha es, por definición, el valor de Banzhaf de la unión P_k en el juego cociente $(M, v^{\mathcal{P}})$, es decir, $\beta_k(M, v^{\mathcal{P}})$. Dado que se ha demostrado que Π equivale a β bajo el sistema de uniones trivial $\mathcal{P}_m$, podemos concluir que $\beta_k(M, v^{\mathcal{P}}) = \Pi_k(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m)$. Por lo tanto, se deduce que el valor Π satisface la propiedad de JC.

□

A partir de estos resultados, podemos establecer una caracterización fundamental que sitúa a Π como la extensión lógica de Banzhaf cuando se exige consistencia tanto a nivel coalicional como individual.

Teorema 2.5.6. *El valor de Banzhaf coalicional simétrico es el único valor coalicional de Banzhaf que satisface las propiedades de contribuciones equilibradas en las uniones (CEU) y juego cociente (JC).*

Además, también se puede caracterizar Π sustituyendo en el Teorema 2.5.2 la propiedad de simetría en las uniones por la de contribuciones equilibradas en las uniones.

Teorema 2.5.7. *El valor de Banzhaf coalicional simétrico es la única solución f sobre $U(N)$ que verifica las propiedades de poder total coalicional (PTC), jugador nulo (JN), simetría en el cociente (SC), aditividad (ADI) y contribuciones equilibradas en las uniones (CEU).*

Si restringimos nuestro estudio a la clase de los juegos simples con uniones *a priori* $SU(N)$, donde el valor de Banzhaf se interpreta estrictamente como un índice de poder, la aditividad puede sustituirse por la propiedad de transferencia (TR).

Teorema 2.5.8. *El único índice de poder $f : SU(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica las propiedades de poder total coalicional (PTC), jugador nulo (JN), simetría en las uniones (SU), simetría en el cociente (SC) y transferencia (TR) es el valor de Banzhaf coalicional simétrico.*

Esta caracterización es especialmente relevante para el análisis de sistemas parlamentarios y organismos internacionales, ya que garantiza que el índice de poder resultante respeta la arquitectura de bloques sin renunciar a las propiedades axiomáticas que hacen del valor de Banzhaf una medida de poder absoluto robusta.

Finalmente, cabe destacar que para esta clase de juegos simples, Π mantiene su caracterización como el único valor coalicional de Banzhaf que satisface simultáneamente las propiedades de juego cociente y contribuciones equilibradas en las uniones.

2.6. El valor Π y la propiedad de juego cociente

Para ilustrar las diferencias prácticas entre el valor de Banzhaf-Owen (Ψ) y el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π), analizaremos un parlamento hipotético. Supongamos una cámara con un total de $N = 100$ escaños, donde la mayoría necesaria para aprobar cualquier ley es $q = 51$. Los partidos se organizan en tres bloques legislativos $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$, con la siguiente distribución:

$$P_1 = \{1\} \text{ (35 escaños), } P_2 = \{2\} \text{ (35 escaños), } P_3 = \{3, 4, 5\} \text{ (10 escaños cada uno).}$$

Este escenario refleja una configuración parlamentaria recurrente, donde dos grandes partidos tradicionales (P_1 y P_2) requieren el apoyo del bloque de partidos minoritarios (P_3) para formar gobierno o aprobar legislación.

El juego cociente

Si miramos el parlamento, asumiendo que el bloque de los partidos minoritarios actúa siempre como una sola voz, tenemos el juego cociente $(M, v^{\mathcal{P}})$ con $M = \{1, 2, 3\}$, que se desarrolla en tres bloques con pesos $W_1 = 35$, $W_2 = 35$ y $W_3 = 30$. Ningún bloque tiene escaños suficientes para ganar por sí solo. Sin embargo, cualquier pareja de bloques que se alíe supera la mayoría necesaria. El juego cociente $(M, v^{\mathcal{P}})$ se define mediante la función característica:

$$v^{\mathcal{P}}(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{k \in R} W_k \geq 51 \text{ para } R \subseteq M, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Evaluando las coaliciones macroscópicas ganadoras obtenemos:

- $v^{\mathcal{P}}(\{1, 2\}) = 1$ (escaños: $35 + 35 = 70 > 51$).
- $v^{\mathcal{P}}(\{1, 3\}) = 1$ (escaños: $35 + 30 = 65 > 51$).
- $v^{\mathcal{P}}(\{2, 3\}) = 1$ (escaños: $35 + 30 = 65 > 51$).
- $v^{\mathcal{P}}(\{1, 2, 3\}) = 1$ (escaños: $35 + 35 + 30 = 100 > 51$).

Para el resto de coaliciones, $v^{\mathcal{P}}(R) = 0$. Al calcular el valor de Banzhaf (β) para este juego de tres bloques utilizando la fórmula $\beta_k(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} [v^{\mathcal{P}}(R \cup \{k\}) - v^{\mathcal{P}}(R)]$, el poder se reparte exactamente a partes iguales:

$$\beta_1(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m) = \frac{1}{2}, \quad \beta_2(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m) = \frac{1}{2}, \quad \beta_3(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la propiedad de juego cociente (JC) dicta una regla de sentido común político: el poder global del bloque P_3 es igual a la suma del poder que ostentan sus miembros internos, garantizando así la coherencia entre el nivel macroscópico (coaliciones de bloques) y el nivel microscópico (partidos individuales dentro de los bloques):

$$\sum_{j \in P_3} \beta_j(N, v, \mathcal{P}) = \beta_3(M, v^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}_m) = \frac{1}{2}.$$

Valor de Banzhaf-Owen (Ψ)

El valor de Banzhaf-Owen modeliza una dinámica donde cada partido negocia con subgrupos dentro de su propia unión (T) y con los restantes bloques en su totalidad (Q). Vamos a calcular el poder del jugador 3 $\in P_3$ aplicando su fórmula:

$$\Psi_3(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \frac{1}{2^{p_3-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{3\}} \sum_{T \subseteq P_3 \setminus \{3\}} [v(Q \cup T \cup \{3\}) - v(Q \cup T)],$$

donde $m = 3$ (bloques), $p_3 = 3$ (partidos miembros de P_3) y $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$. La constante de ponderación es: $\frac{1}{2^{3-1}} \cdot \frac{1}{2^{3-1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

Desglosamos el doble sumatorio analizando la contribución marginal del jugador 3, $[v(Q \cup T \cup \{3\}) - v(Q \cup T)]$, según cada coalición externa de bloques R y cada subcoalición interna T :

1. Sin apoyo de los dos grandes partidos ($R = \emptyset \implies Q = \emptyset$):

- $T = \emptyset \implies v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$ (escaños: $10 < 51$).
- $T = \{4\} \implies v(\{3, 4\}) - v(\{4\}) = 0 - 0 = 0$ (escaños: $20 < 51$).
- $T = \{5\} \implies v(\{3, 5\}) - v(\{5\}) = 0 - 0 = 0$ (escaños: $20 < 51$).
- $T = \{4, 5\} \implies v(\{3, 4, 5\}) - v(\{4, 5\}) = 0 - 0 = 0$ (escaños: $30 < 51$).

2. Con el apoyo de un solo partido grande ($R = \{1\} \implies Q = P_1$): el partido grande aporta $w_1 = 35$ escaños.

- $T = \emptyset \implies v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) = 0 - 0 = 0$ (escaños: $35 + 10 = 45 < 51$).
- $T = \{4\} \implies v(\{1, 3, 4\}) - v(\{1, 4\}) = 1 - 0 = 1$ (escaños: $35 + 10 + 10 = 55 > 51$).
- $T = \{5\} \implies v(\{1, 3, 5\}) - v(\{1, 5\}) = 1 - 0 = 1$ (escaños: $35 + 10 + 10 = 55 > 51$).
- $T = \{4, 5\} \implies v(\{1, 3, 4, 5\}) - v(\{1, 4, 5\}) = 1 - 1 = 0$ (escaños: $35 + 10 + 10 + 10 = 65 > 51$).

El jugador 3 es decisivo en 2 ocasiones cuando actúa el bloque P_1 . Análogamente, cuando el bloque externo es P_2 ($R = \{2\} \implies Q = P_2$), se obtienen que el jugador 3 es también decisivo en 2 ocasiones.

3. Con el apoyo de los dos grandes partidos ($R = \{1, 2\} \implies Q = P_1 \cup P_2$): los dos partidos grandes juntos ya suman $35 + 35 = 70$ escaños, por lo que la ley es ganadora independientemente de T :

- Para todo $T \subseteq \{4, 5\} \implies v(\{1, 2\} \cup T \cup \{3\}) - v(\{1, 2\} \cup T) = 1 - 1 = 0$.

El jugador 3 es decisivo en un total de 4 ocasiones. Por lo que:

$$\Psi_3(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{16} \times 4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,250.$$

Dado que los tres miembros de P_3 son simétricos, por la propiedad de simetría en cada unión, todos reciben el mismo valor ($\Psi_3(N, v, \mathcal{P}) = \Psi_4(N, v, \mathcal{P}) = \Psi_5(N, v, \mathcal{P}) = 0,250$). Al sumar el poder total que el valor de Banzhaf-Owen asigna a este bloque, obtenemos:

$$\sum_{i \in P_3} \Psi_i(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,750.$$

Este resultado pone de manifiesto una inconsistencia: la suma del poder individual calculado mediante Ψ (0,750) no coincide con el poder del bloque P_3 calculado en el juego cociente ($\frac{1}{2}$). Esto demuestra que el valor de Banzhaf-Owen no satisface la propiedad del juego cociente (JC). Esta discrepancia es la que motiva la necesidad de un valor alternativo, como el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π), que garantice la coherencia entre el poder macroscópico de los bloques y la distribución microscópico de sus miembros.

Valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π)

El valor Π soluciona la inconsistencia anterior. Aunque tanto Ψ como Π operan aplicando un reparto en dos niveles (bloques y partidos), su diferencia metodológica es sustancial: mientras que el valor de Banzhaf-Owen utiliza el enfoque de Banzhaf en ambos niveles, el valor Π emplea Banzhaf para la evaluación externa y la lógica de Shapley para la distribución interna. Este cambio metodológico permite que el valor Π satisfaga la propiedad de juego cociente (JC).

El valor Π para cada jugador $i \in P_k$ dado un sistema de uniones $(N, v, \mathcal{P})$ viene dado por:

$$\Pi_i(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{R \subseteq M \setminus \{k\}} \sum_{T \subseteq P_k \setminus \{i\}} \frac{t!(p_k - t - 1)!}{p_k!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)],$$

donde $Q = \bigcup_{r \in R} P_r$, p_k es el cardinal de P_k siendo $P_k \in \mathcal{P}$ la unión que contiene a i y t es el cardinal de T .

Para el jugador $3 \in P_3$ ($k = 3$, $p_3 = 3$), la ponderación externa asociada al valor de Banzhaf es $\frac{1}{2^{3-1}} = \frac{1}{4}$. Evaluamos el sumatorio interno ponderado por los factoriales del valor de Shapley según cada coalición de bloques externos R :

1. **Para $R = \emptyset$ y $R = \{1, 2\}$:** como vimos en el análisis anterior, todas las contribuciones marginales $[v(Q \cup T \cup \{3\}) - v(Q \cup T)]$ son iguales a 0 para cualquier conjunto de socios T , por lo que la suma interna da 0.
2. **Para P_1 aislado ($R = \{1\} \implies Q = P_1$):** el partido grande aporta 35 escaños. Analizamos los subconjuntos de socios $T \subseteq \{4, 5\}$ y sus factoriales $\frac{t!(3-t-1)!}{3!} = \frac{t!(2-t)!}{6}$:

- $T = \emptyset$ ($t = 0$) $\implies \frac{0!2!}{6} \cdot [v(\{1, 3\}) - v(\{1\})] = \frac{2}{6} \cdot (0 - 0) = 0$.
- $T = \{4\}$ ($t = 1$) $\implies \frac{1!1!}{6} \cdot [v(\{1, 3, 4\}) - v(\{1, 4\})] = \frac{1}{6} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{6}$.
- $T = \{5\}$ ($t = 1$) $\implies \frac{1!1!}{6} \cdot [v(\{1, 3, 5\}) - v(\{1, 5\})] = \frac{1}{6} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{6}$.
- $T = \{4, 5\}$ ($t = 2$) $\implies \frac{2!0!}{6} \cdot [v(\{1, 3, 4, 5\}) - v(\{1, 4, 5\})] = \frac{2}{6} \cdot (1 - 1) = 0$.

La suma interna para el escenario de P_1 es exactamente: $0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

3. **Para P_2 aislado ($R = \{2\} \implies Q = P_2$):** análogamente al paso anterior, la suma de las contribuciones marginales internas ponderadas vuelve a dar exactamente $\frac{1}{3}$.

Reuniendo todos los componentes e integrando la ponderación externa de Banzhaf, el cálculo final para el jugador 3 es:

$$\Pi_3(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{4} \cdot \left(0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \approx 0,167.$$

Dado que los tres miembros del bloque son simétricos, sus valores individuales bajo la solución Π son idénticos: $\Pi_3(N, v, \mathcal{P}) = \Pi_4(N, v, \mathcal{P}) = \Pi_5(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{6}$. Si sumamos el poder político de toda la

unión obtenemos:

$$\sum_{i \in P_3} \Pi_i(N, v, \mathcal{P}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,500.$$

El valor Π cumple la propiedad de juego cociente. La suma del poder de los integrantes del bloque coincide con el valor asignado a la unión en el juego cociente ($1/2$), demostrando que esta medida mantiene la coherencia entre el nivel macroscópico y el microscópico.

Resultados y conclusiones

A través del análisis del parlamento propuesto, se ha evaluado el comportamiento de dos índices de poder ante una estructura coalicional fija. La comparativa entre el valor de Banzhaf-Owen (Ψ) y el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π) revela una divergencia sustancial en la distribución del poder político.

Esta diferencia radica en el cálculo de las probabilidades de formación de las coaliciones a nivel interno. En ambas soluciones, un jugador puede negociar de forma independiente con jugadores de su propio bloque (T) y con bloques externos completos (Q). Sin embargo, mientras que el valor Ψ evalúa la formación de subcoaliciones internas asumiendo un modelo de equiprobabilidad (propio del valor de Banzhaf), el valor Π ajusta el reparto interno aplicando una ponderación combinatoria basada en el tamaño de las subcoaliciones (propia de la lógica de Shapley). Es precisamente este cambio metodológico el que permite que la suma de los poderes individuales bajo el valor Π coincida con el peso macroscópico del bloque en el juego cociente, evitando la distorsión numérica que genera el valor Ψ .

El Cuadro 2.3 resume los resultados obtenidos para el bloque minoritario P_3 .

Métrica	Valor Ψ	Valor Π
Poder por partido $i \in P_3$	0,250	0,167
Poder total del bloque P_3	0,750	0,500
Poder de P_3 en el juego cociente	0,500	0,500
¿Cumple propiedad JC?	No	Sí

Cuadro 2.3: Comparativa de la distribución de poder en el bloque P_3 .

En conclusión, para el análisis de parlamentos donde los partidos operan bajo una dinámica de bloques o pactos de gobierno estables, el valor Π garantiza la coherencia estructural. Esta métrica evita la distorsión del poder individual y resulta idónea para evaluar la influencia política en sistemas donde el poder se ejerce no solo de forma aislada, sino a través de alianzas jerarquizadas.

Capítulo 3

Cálculo de valores generales mediante extensiones multilineales

La caracterización axiomática de las soluciones para juegos con uniones *a priori* proporciona un marco conceptual sólido sobre la equidad y la estabilidad de los repartos. Sin embargo, desde una perspectiva computacional y aplicada, la determinación de estos valores a través de sumatorios combinatorios tradicionales presenta una elevada complejidad algorítmica.

Para soslayar esta limitación computacional, en este capítulo se desarrolla la herramienta analítica basada en las extensiones multilineales, introducida originalmente por Owen (1972) [13]. Esta técnica permite transformar los problemas discretos de la teoría de juegos, definidos sobre el conjunto de partes 2^N , en operadores diferenciables e integrables sobre el hipercubo unidad $[0, 1]^n$.

A lo largo de las siguientes secciones, centraremos nuestra atención en el cálculo de las soluciones definidas en el Capítulo 2: el valor de Banzhaf-Owen (Ψ) y el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π). La ventaja fundamental de este enfoque radica en que las restricciones estructurales que imponen las uniones *a priori* pueden modelizarse de forma natural mediante transformaciones algebraicas directas sobre las variables de la extensión multilineal del juego. Cabe destacar que, como se establecerá en el próximo capítulo, esta base analítica también es plenamente aplicable para evaluar el índice de Banzhaf generalizado (η') a través de su juego inducido, si bien dicho enfoque indirecto conlleva una penalización computacional al expandir artificialmente el espacio de jugadores.

Finalmente, para evidenciar el impacto práctico de esta transición de lo discreto a lo continuo, el capítulo concluirá retomando el estudio de simulación numérica iniciado en el Capítulo 1. Si en la Sección 1.9 se demostró la eficiencia de las extensiones multilineales frente a la explosión combinatoria asociada al valor de Banzhaf clásico, en este capítulo se ampliará dicho análisis empírico para cuantificar la mejora algorítmica que proporcionan las extensiones multilineales en el cálculo del valor de Banzhaf-Owen frente a su homólogo combinatorio.

3.1. Extensión multilineal ante uniones *a priori*

Recordemos que, para un juego cooperativo clásico $(N, v) \in TU(N)$, su extensión multilineal (EML) viene dada por la función $h : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{S \subseteq N} \left[\prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j) \right] v(S). \quad (3.1)$$

Cuando el conjunto de jugadores N se encuentra regulado por un sistema de uniones $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$, la independencia probabilística implícita en la Ecuación (3.1) debe modificarse para reflejar que la negociación se articula en dos niveles. Conceptualmente, los jugadores pertenecientes a una misma unión operan de forma coordinada frente al exterior. Analíticamente, este fenómeno se captura forzando a que las variables asociadas a los miembros de un mismo bloque externo se comporten de manera idéntica.

Fijemos una unión de referencia $P_j \in \mathcal{P}$. Para capturar la interacción exógena, es decir, las relaciones y alianzas que ocurren entre los bloques como si fueran entes unitarios; introducimos para cada unión ajena P_l ($l \neq j$) una variable agregada $y_l \in [0, 1]$. De este modo, realizamos la sustitución lineal:

$$x_k = y_l, \quad \forall k \in P_l \quad \text{con } l \neq j.$$

Esta transformación da lugar a una función intermedia dependiente del vector de variables individuales de la unión de referencia, $(x_i)_{i \in P_j}$, y del vector de variables coalicionales, $(y_l)_{l \neq j}$. No obstante, esta sustitución genera términos de grado superior de la forma $y_l^a (1 - y_l)^b$ debido a la estructura del producto en la Ecuación (3.1). Dado que en el marco multilineal se debe preservar la linealidad respecto a cada componente (reflejo de que la probabilidad de que el bloque participe unánimemente es y_l), se define un operador de linealización $\mathcal{L}$ que reduce los exponentes, tal que $\mathcal{L}(y_l^\alpha) = y_l$ para cualquier $\alpha \geq 1$.

La aplicación de este operador permite definir formalmente la extensión multilineal restringida a la estructura de uniones $\mathcal{P}$ desde la perspectiva de la unión P_j , a la que denotaremos como:

$$g((x_i)_{i \in P_j}, (y_l)_{l \neq j}) = \mathcal{L} \left[h((x_i)_{i \in P_j}, (\mathbf{y}_l)_{l \neq j}) \right], \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{y}_l$ representa el vector en el que cada componente $k \in P_l$ ha sido reemplazada por la variable común y_l .

A partir de esta función base g , las distintas filosofías de reparto (tanto de poder absoluto como de eficiencia interna) se materializan mediante la aplicación de operadores diferenciales e integrales específicos.

3.2. Valor de Banzhaf-Owen a través de la EML

El valor de Banzhaf-Owen (Ψ) extiende la filosofía del poder absoluto al contexto de los juegos con restricciones de cooperación, aplicando la lógica original de Banzhaf de forma simultánea en los dos niveles de la negociación.

Desde el punto de vista analítico, la premisa fundamental de Banzhaf asume que la formación de alianzas constituye un escenario donde todas las coaliciones son equiprobables. En el lenguaje de

las extensiones multilineales, esto se traduce en que no es necesario calcular integrales a lo largo del hipercubo de juego $[0, 1]^n$ para evaluar diferentes tasas de participación. Por el contrario, el valor de Banzhaf-Owen se calcula fijando todas las variables en el centro simétrico del hipercubo, donde la probabilidad de activación de cualquier jugador es $\frac{1}{2}$. Esta lógica opera bajo dos vertientes:

- **A nivel exógeno (entre bloques):** se asume que la probabilidad de que las uniones rivales decidan participar o no en una gran coalición con la unión de referencia es equiprobable. Por ello, las variables externas se evalúan como constantes fijas: $(y_l)_{l \neq j} = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$.
- **A nivel endógeno (dentro de la unión):** la negociación entre los propios jugadores de una unión sigue esta misma naturaleza de poder absoluto. Una vez calculada la derivada parcial para aislar la aportación del jugador bajo estudio, el apoyo de sus compañeros de bloque se evalúa también en un entorno de equiprobabilidad, fijando $x_k = \frac{1}{2}$ para todo $k \in P_j$.

El siguiente teorema (Carreras y Magaña 1994 [6]) formaliza matemáticamente este comportamiento, mostrando cómo el valor de Banzhaf-Owen emerge directamente al operar con derivadas parciales evaluadas en este punto simétrico.

Teorema 3.2.1. *Sea $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$ un juego cooperativo con sistema de uniones a priori. El valor de Banzhaf-Owen para un jugador $i \in P_j$ puede calcularse mediante la derivada parcial de la función multilinear restringida g recogida en la Ecuación (3.2) respecto a la variable individual x_i , evaluada en el punto de equiprobabilidad:*

$$\Psi_i(N, v, \mathcal{P}) = \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \left((x_k)_{k \in P_j}, \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)_{l \neq j} \right) \right|_{x_k = \frac{1}{2}, \forall k \in P_j}.$$

3.3. Valor de Banzhaf coalicional simétrico a través de la EML

A diferencia de la solución anterior, el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π) exige el cumplimiento de la propiedad de eficiencia (hace uso del valor de Shapley) dentro de la unión de referencia, manteniendo la estructura de Banzhaf únicamente en el nivel externo, entre coaliciones. Su determinación mediante herramientas de análisis matemático se formaliza en el siguiente teorema (Alonso Meijide 2002 [3]).

Teorema 3.3.1. *Sea $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$ un juego cooperativo con sistema de uniones a priori. El valor de Banzhaf coalicional simétrico de un jugador $i \in P_j$ viene dado por el operador integral:*

$$\Pi_i(N, v, \mathcal{P}) = \int_0^1 \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(t, t, \dots, t) dt,$$

donde $\alpha_j((x_k)_{k \in P_j})$ es la función multilinear intracoalicional obtenida al evaluar las variables externas de la función g en la Ecuación (3.2) en el valor constante $1/2$, esto es:

$$\alpha_j((x_k)_{k \in P_j}) = g \left((x_k)_{k \in P_j}, \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)_{l \neq j} \right).$$

Demostración. Consideremos un jugador i perteneciente a la unión de referencia $P_j \in \mathcal{P}$ y sea $h(x_1, \dots, x_n)$ la extensión multilinear original del juego (N, v) definida en la Expresión (3.1).

Al ejecutar el proceso de sustitución de variables de los bloques externos, $x_k = y_l$ para todo $k \in P_l, l \neq j$, analicemos el comportamiento de los productos asociados a cualquier unión externa P_l . Si una coalición $S \subseteq N$ interseca de manera parcial a la unión P_l (es decir, $S \cap P_l \neq \emptyset$ y $S^c \cap P_l \neq \emptyset$ ¹), el sumando correspondiente en la extensión multilinear incorporará necesariamente el término:

$$\prod_{k \in S \cap P_l} x_k \prod_{k \in P_l \setminus S} (1 - x_k) \longrightarrow y_l^{|S \cap P_l|} (1 - y_l)^{|P_l \setminus S|}.$$

La aplicación del operador de linealización $\mathcal{L}$ sobre este producto intermedio provoca su anulación sistemática, puesto que:

$$\mathcal{L} \left[y_l^{|S \cap P_l|} (1 - y_l)^{|P_l \setminus S|} \right] = y_l - y_l = 0.$$

Por tanto, todas las coaliciones S que dividen internamente a cualquier bloque externo se anulan en la función restringida. En consecuencia, las únicas coaliciones que sobreviven al operador $\mathcal{L}$ son aquellas que contienen a las uniones externas de forma íntegra o no contienen ningún elemento de ellas. Es decir, S debe ser de la forma $S = Q \cup T$, donde $T \subseteq P_j$ representa una subcoalición interna de la unión de referencia, y $Q = \bigcup_{l \in L} P_l$ es la unión exacta de un conjunto de bloques externos con $L \subseteq M \setminus \{j\}$.

Bajo esta restricción estructural, la función multilinear restringida g se simplifica a la expresión:

$$g((x_k)_{k \in P_j}, (y_l)_{l \neq j}) = \sum_{T \subseteq P_j} \sum_{L \subseteq M \setminus \{j\}} \left[\prod_{k \in T} x_k \prod_{k \in P_j \setminus T} (1 - x_k) \prod_{l \in L} y_l \prod_{l \notin L \cup \{j\}} (1 - y_l) \right] v(Q \cup T).$$

Para proyectar esta función sobre la filosofía del valor de Banzhaf coalicional simétrico, evaluamos el comportamiento externo fijando de manera homogénea la probabilidad de las uniones rivales en $y_l = 1/2$ para todo $l \neq j$. El producto exterior resulta en un factor de ponderación constante dependiente del número de bloques excluidos:

$$\prod_{l \in L} \frac{1}{2} \prod_{l \notin L \cup \{j\}} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^{|L|} \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1-|L|} = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Extrayendo este factor determinista de los sumatorios, la función intracoalicional α_j queda definida por:

$$\alpha_j((x_k)_{k \in P_j}) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{T \subseteq P_j} \sum_{L \subseteq M \setminus \{j\}} \left[\prod_{k \in T} x_k \prod_{k \in P_j \setminus T} (1 - x_k) \right] v(Q \cup T).$$

Procedemos a derivar la función α_j respecto a la variable del jugador bajo estudio $i \in P_j$. El operador diferencial actúa como un filtro que aísla las contribuciones marginales de i , reestructurando el sumatorio sobre el espacio de subcoaliciones de la unión que no contienen a dicho jugador ($T \subseteq P_j \setminus \{i\}$):

$$\frac{\partial \alpha_j((x_k)_{k \in P_j})}{\partial x_i} = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{T \subseteq P_j \setminus \{i\}} \sum_{L \subseteq M \setminus \{j\}} \left[\prod_{k \in T} x_k \prod_{k \in P_j \setminus (T \cup \{i\})} (1 - x_k) \right] [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)].$$

¹ S^c denota el conjunto complementario de la coalición S , esto es, $N \setminus S$.

Finalmente, parametrizamos la trayectoria interna evaluando todas las variables restantes en el valor continuo $t \in [0, 1]$ e integramos en dicho intervalo regular:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(t, \dots, t) dt &= \int_0^1 \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{T \subseteq P_j \setminus \{i\}} \sum_{L \subseteq M \setminus \{j\}} t^{|T|} (1-t)^{p_j-|T|-1} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)] dt \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{T \subseteq P_j \setminus \{i\}} \sum_{L \subseteq M \setminus \{j\}} \left(\int_0^1 t^{|T|} (1-t)^{p_j-|T|-1} dt \right) [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)]. \end{aligned}$$

Reconociendo que la integral del operando temporal responde exactamente a la definición de la función Beta de Euler, su resolución analítica proporciona el cociente factorial clásico del valor de Shapley:

$$\int_0^1 t^{|T|} (1-t)^{p_j-|T|-1} dt = B(|T| + 1, p_j - |T|) = \frac{|T|!(p_j - |T| - 1)!}{p_j!}.$$

Sustituyendo este núcleo combinatorio en la expresión integrada, se obtiene:

$$\int_0^1 \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(t, \dots, t) dt = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{L \subseteq M \setminus \{j\}} \sum_{T \subseteq P_j \setminus \{i\}} \frac{|T|!(p_j - |T| - 1)!}{p_j!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)],$$

lo cual coincide de forma exacta con la definición explícita del valor de Banzhaf coalicional simétrico $\Pi_i(N, v, \mathcal{P})$ enunciada en el Teorema 2.5.2. Queda, por tanto, demostrada la correspondencia. $\square$

3.4. Análisis de eficiencia computacional y simulación numérica

Así como las extensiones multilineales hacen más eficiente el cálculo del valor de Banzhaf, su aplicación resulta también determinante en presencia de uniones *a priori*. El cálculo directo del valor de Banzhaf-Owen mediante su definición combinatoria es costoso computacionalmente. Esto se debe a un doble factor combinatorio: la necesidad de evaluar las agrupaciones entre las uniones externas y, de forma simultánea, todas las combinaciones posibles de jugadores dentro de la propia unión a la que pertenece el jugador evaluado. Con el propósito de ilustrar cuantitativamente el impacto de esta complejidad exponencial y contrastar la eficiencia del enfoque analítico por EML, en esta sección se desarrolla un segundo estudio de simulación numérica en R.

El experimento se estructura en seis escenarios. Esto permite controlar los parámetros del modelo para evaluar de forma independiente el comportamiento del rendimiento computacional: por un lado, incrementando el número de jugadores (n) mientras se mantiene constante el número de uniones y, por otro, modificando la fragmentación del juego al aumentar el número de uniones prefijadas (m). Para evaluar el desempeño, se analizan los tiempos de ejecución bajo la siguiente estrategia comparativa:

1. **Enfoque combinatorio por definición:** cómputo directo del valor de Banzhaf-Owen basado en la enumeración exhaustiva e iterativa de las contribuciones marginales del juego, materializado en la función `calcular_banzhaf_owen`.
2. **Enfoque analítico mediante EML:** resolución algebraica del valor de Banzhaf-Owen que sustituye el conteo discreto por derivadas parciales continuas combinadas con programación dinámica, implementada en la función optimizada `calcular_banzhaf_owen_mle_fast`.

3. **Librería especializada de R:** uso de la función `pi.banzhaf` del paquete `powerindexR`. Al incorporar el sistema de uniones *a priori* como argumento, esta herramienta computa directamente el valor de Banzhaf-Owen. Su inclusión en el experimento sirve como punto de contraste para evaluar la eficiencia temporal de la rutina propuesta mediante EML frente a una implementación ya existente en la literatura que resuelve el mismo problema.

A continuación, en el Cuadro 3.1, se recogen los tiempos de cómputo (expresados en segundos) obtenidos al evaluar los seis escenarios. Las implementaciones en el lenguaje R se detallan en el Apéndice C y el Apéndice D, respectivamente.

Jugadores (n)	Uniones (m)	Definición (s)	Mediante EML (s)	powerindexR (s)
8	2	1,4422	1,3422	1,5640
14	2	2,2668	1,2715	1,2043
18	2	32,0748	1,1556	1,2324
18	5	9,3674	1,5430	1,2889
22	2	158,7263	1,1471	1,2548
22	6	17,9268	1,3667	1,4106

Cuadro 3.1: Comparativa de tiempos de cómputo para el cálculo del valor de Banzhaf-Owen.

A partir de los resultados analizados y su representación visual en la Figura 3.1 y la Figura 3.2, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- **Coste fijo del entorno:** en escenarios de dimensiones reducidas ($n = 8$), las diferencias temporales entre los tres métodos son marginales e inferiores a las dos décimas de segundo. Este fenómeno evidencia la presencia de un coste fijo de inicialización y asignación de memoria inherente al entorno de R, el cual enmascara la eficiencia de las funciones en juegos pequeños.
- **Crecimiento exponencial en función del orden del juego (n):** al mantener el número de uniones constante ($m = 2$) e incrementar el número de jugadores de $n = 8$ hasta $n = 22$, el cálculo directo se vuelve exponencialmente ineficiente, requiriendo más de 2,6 minutos (158,73 s). En contraposición, la rutina propuesta por EML muestra estabilidad, completando el cálculo en la franja de los 1,15 segundos.
- **Efecto de la estructura de uniones (m):** esta simulación demuestra que el problema del cálculo por definición no es el número total de jugadores (n), sino el tamaño de la unión más grande. Al fragmentar el juego en más uniones (mayor m), los grupos se vuelven más pequeños y el tiempo computacional cae; por ejemplo, en el juego de 22 jugadores, pasa de 158,73 s a solo 17,93 s.
- **Eficiencia frente a otras soluciones:** al contrastar los resultados, se observa que la rutina analítica desarrollada mediante EML compite en la misma franja de tiempo ($\approx 1,15$ s) que la función empleada del paquete `powerindexR`. Esto confirma que la aproximación continua propuesta no solo evita la explosión combinatoria, sino que alcanza una eficiencia equiparable a la de implementaciones especializadas de la literatura.

En definitiva, los resultados numéricos expuestos corroboran que las extensiones multilineales son una alternativa más rápida y robusta para el cálculo del valor de Banzhaf-Owen en juegos de gran tamaño. Este enfoque analítico supera las limitaciones del conteo discreto, garantizando la eficiencia y la escalabilidad del modelo ante cualquier configuración u orden de jugadores.

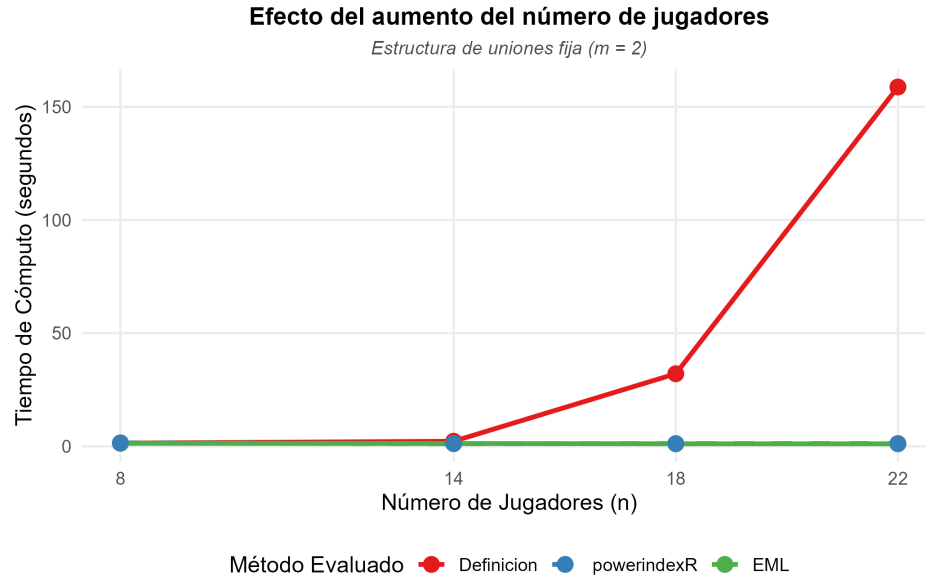


Figura 3.1: Evolución del tiempo de cómputo en función del número de jugadores (n) para una estructura de uniones fija ($m = 2$).

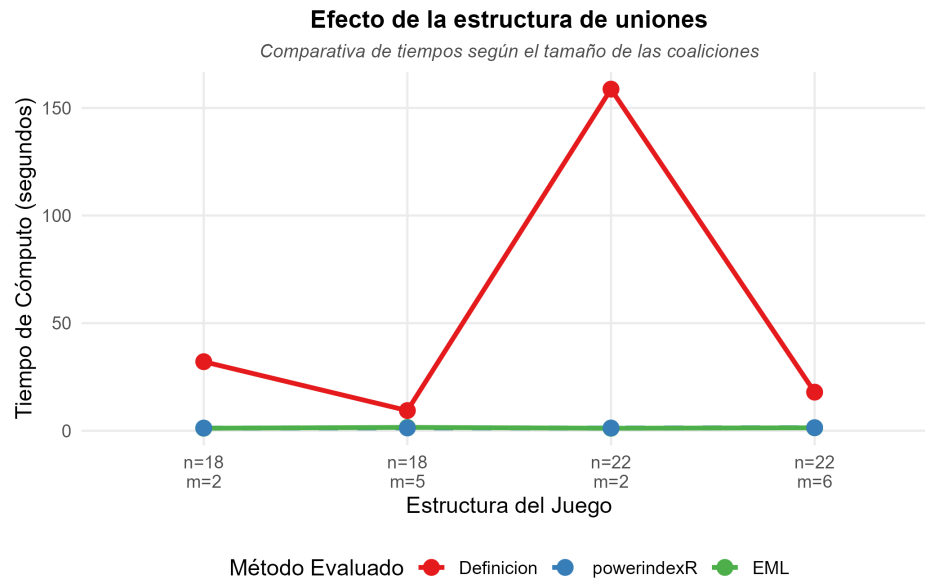


Figura 3.2: Impacto de la fragmentación y estructura de uniones (m) sobre el tiempo de cómputo para un número fijo de jugadores.

Capítulo 4

Valores en juegos con configuraciones de coaliciones

En el Capítulo 2, el análisis de la cooperación restringida se fundamentó en sistemas con uniones *a priori*, donde los jugadores se organizan en bloques de decisión estrictamente disjuntos formando una partición del conjunto de jugadores. Sin embargo, en la práctica institucional, política y económica, las dinámicas de negociación suelen ser más complejas. Para capturar la riqueza de estos escenarios, en este capítulo se da un paso más allá y se abandona la restricción de las particiones disjuntas para introducir las configuraciones de coaliciones (o recubrimientos), estructuras donde un mismo jugador puede pertenecer a múltiples alianzas de forma simultánea.

El desarrollo del presente capítulo se estructura como sigue. En primer lugar, se presenta el índice de Banzhaf-Coleman generalizado (η') propuesto por Albizuri y Aurrekoetxea (2006) [2], una extensión diseñada para modelizar estas alianzas solapadas. Además se caracteriza axiomáticamente y a través de un juego inducido se establece la relación que lo vincula con el valor de Banzhaf-Owen (Ψ). A continuación, se analizará el comportamiento de este índice, demostrando mediante un ejemplo que presenta una inconsistencia similar a la del valor de Banzhaf-Owen, vulnerando la propiedad de simetría coalicional. Finalmente, para dar respuesta a esta limitación, se propondrá y formalizará un nuevo concepto de solución: el *valor de Banzhaf coalicional simétrico generalizado* (Π'). Esta nueva propuesta combinará la lógica del poder absoluto, propia del valor de Banzhaf, en la interacción entre bloques con la justicia distributiva interna del valor de Shapley. Se ilustrará cómo, en el ejemplo propuesto para tratar la inconsistencia del índice de Banzhaf-Coleman generalizado, el valor propuesto sí satisface la simetría coalicional y de forma análoga al índice de Banzhaf-Coleman generalizado se probará la relación que lo vincula con el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π).

4.1. Índice de Banzhaf-Coleman generalizado (η')

Para iniciar el estudio de las soluciones coalicionales bajo estructuras flexibles, es fundamental abordar el marco donde la cooperación no se restringe a bloques disjuntos. Un escenario óptimo para ilustrar esta dinámica se presenta en los sistemas parlamentarios multipartidistas, donde los partidos políticos articulan pactos transversales y acuerdos de geometría variable para asegurar la gobernabilidad. En estos contextos, un mismo partido político puede integrarse simultáneamente en múltiples bloques estratégicos, manteniendo al mismo tiempo su autonomía e identidad diferenciada frente a sus

socios en cada uno de ellos.

Para modelizar formalmente este escenario, se emplea el concepto de configuración de coaliciones, donde la estructura exógena de cooperación se establece mediante un recubrimiento del conjunto de jugadores en lugar de una partición.

Definición 4.1.1. Sea N el conjunto finito de jugadores. Una configuración de coaliciones de N es una colección finita de coaliciones $\mathfrak{B} = \{B_k\}_{k \in M}$ tal que $\bigcup_{k \in M} B_k = N$. Denotaremos por $\mathcal{B}(N)$ al conjunto de todas las configuraciones de coaliciones posibles sobre N . Asimismo, denotamos por M al conjunto de índices de las coaliciones de la configuración. Si $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$ e $i \in N$, $\mathfrak{B}^i = \{B_k \in \mathfrak{B} \mid i \in B_k\}$ denota al conjunto de coaliciones a las que pertenece el jugador i .

A continuación, se define la extensión natural del índice de Banzhaf para esta clase de estructuras, conocido en la literatura como el índice de Banzhaf-Coleman generalizado. Este operador extiende la noción de poder absoluto midiendo las contribuciones marginales de los jugadores tanto dentro de sus propios bloques como en las interacciones con los bloques externos en los que no participan.

Definición 4.1.2. Sea (N, v) un juego simple, y sea $\mathfrak{B}$ una configuración de coaliciones sobre N . El índice de Banzhaf-Coleman generalizado para un jugador $i \in N$, denotado por $\eta'_i(N, v, \mathfrak{B})$, se define como:

$$\eta'_i(N, v, \mathfrak{B}) = \sum_{B_k \in \mathfrak{B}^i} \sum_{\substack{\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{B} \\ \mathcal{R} \cap \mathfrak{B}^i = \emptyset}} \sum_{T \subseteq B_k \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{b_k-1}} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)],$$

donde $m = |\mathfrak{B}|$ es el número total de coaliciones en la configuración, $b_k = |B_k|$ es el número de miembros de la coalición activa B_k , y $Q = \bigcup_{B \in \mathcal{R}} B$ representa el conjunto de jugadores aportados por los bloques externos.

Para comprender la mecánica de este índice y su similitud con el valor de Banzhaf-Owen, resulta de gran utilidad desglosar la ecuación en sus tres niveles de agregación:

- **Nivel de pertenencia:** a diferencia de las particiones estrictas, un jugador i puede pertenecer a varias alianzas simultáneamente. El primer sumatorio itera sobre todos los bloques $B_k \in \mathfrak{B}^i$ de los que el jugador forma parte, acumulando el poder que ejerce desde cada uno de ellos.
- **Nivel macroscópico:** representa la negociación exógena. Itera sobre todas las combinaciones posibles de los bloques externos a los que no pertenece el jugador i (es decir, $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{B}$ tal que $\mathcal{R} \cap \mathfrak{B}^i = \emptyset$), aplicando la ponderación de equiprobabilidad de Banzhaf $\frac{1}{2^{m-1}}$. Esta restricción del sumatorio obedece a que, si el jugador i formara parte de alguno de los bloques externos evaluados, su aportación marginal se anularía al estar ya presente en la coalición.
- **Nivel microscópico:** modela la dinámica interna dentro del bloque activo B_k . Itera sobre las posibles subcoaliciones de compañeros T , manteniendo de nuevo la filosofía de poder absoluto de Banzhaf mediante el factor $\frac{1}{2^{b_k-1}}$.

El corchete final evalúa la contribución marginal del jugador i , calculando si su adhesión transforma una coalición perdedora (formada por los bloques externos Q y sus compañeros internos T) en una coalición ganadora.

Para ilustrar de forma práctica la mecánica de este índice y cómo captura el solapamiento estratégico entre alianzas, se expone el siguiente escenario parlamentario.

Ejemplo 4.1.3. Considérese un parlamento modelizado mediante un juego simple (N, v) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$, donde las coaliciones ganadoras mínimas son aquellas que disponen de al menos tres jugadores (es decir, $v(S) = 1$ si $|S| \geq 3$ y $v(S) = 0$ en otro caso). Políticamente, supondremos que el jugador 1 representa un partido de izquierda, los jugadores 2 y 3 representan partidos de centro, y el jugador 4 representa un partido de derecha.

Si el juego se desarrollara bajo una premisa de libertad absoluta de asociación (sistema de uniones trivial $\mathcal{P}_n$), el valor de Banzhaf asignaría un poder simétrico a todos los actores de la cámara:

$$\beta(N, v) = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8} \right).$$

No obstante, supóngase que los partidos de centro aprovechan su afinidad ideológica y su centralidad política para suscribir alianzas y pactos estables en ambos espectros de la cámara, configurando un recubrimiento dado por la configuración de coaliciones $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2\} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$. Aplicando el índice de Banzhaf generalizado para cada jugador, el vector de poder resultante es:

$$\eta'(N, v, \mathfrak{B}) = \left(\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8} \right).$$

Este resultado ilustra analíticamente cómo los jugadores centristas 2 y 3 logran duplicar su poder estratégico relativo frente a los partidos periféricos 1 y 4. Al participar simultáneamente en todas las coaliciones de la configuración ($\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}^3 = \mathfrak{B}$), el primer sumatorio de la fórmula de η' acumula el poder que estos jugadores ejercen de forma independiente desde el bloque B_1 y desde el bloque B_2 , mientras que los jugadores 1 y 4 quedan restringidos a las oportunidades de una única alianza institucional.

Para caracterizar axiomáticamente esta solución en el marco de los recubrimientos, se presentan a continuación las siguientes propiedades adaptadas a las particularidades de las configuraciones de coaliciones. Consideremos un universo infinito de jugadores $\mathcal{U}$. Sea f un índice de poder definido como una aplicación $f : \bigcup_{N \subset \mathcal{U}} (SI(N) \times \mathcal{B}(N)) \longrightarrow \bigcup_{N \subset \mathcal{U}} \mathbb{R}^N$, tal que $f(v, \mathfrak{B}) \in \mathbb{R}^N$ para cualquier juego simple $(N, v) \in SI(N)$ y cualquier configuración $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$. Se establecen las siguientes propiedades:

- **Transferencia (TR):** Para todo par de juegos simples $(N, v), (N, w) \in SI(N)$ y toda configuración $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$, se verifica que $f(v \vee w, \mathfrak{B}) + f(v \wedge w, \mathfrak{B}) = f(v, \mathfrak{B}) + f(w, \mathfrak{B})$. Esta propiedad adapta la aditividad a la estructura binaria de los juegos simples.
- **Jugador *dummy* (JD):** Si un jugador $i \in N$ es un jugador *dummy* en el juego $(N, v) \in SI(N)$ (es decir, su aportación marginal es $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$ para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$) y pertenece a una única alianza en la configuración (es decir, $|\mathfrak{B}^i| = 1$), entonces recibe exactamente su valor individual, $f_i(v, \mathfrak{B}) = v(\{i\})$ para toda $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$.
- **Anonimidad (ANO):** Sea $(N, v) \in SI(N)$ y sea π una permutación del conjunto de jugadores N . Definimos el juego permutado πv tal que $(\pi v)(S) = v(\pi S)$ para todo $S \subseteq N$, y la configuración permutada $\pi \mathfrak{B} = \{\pi(B_k)\}_{B_k \in \mathfrak{B}}$. Entonces, para todo $i \in N$ y para toda $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$, se cumple que $f_i(\pi v, \mathfrak{B}) = f_{\pi(i)}(v, \pi \mathfrak{B})$.

Para enunciar las propiedades relativas a la fusión o amalgamación de jugadores, sea $(N, v) \in SI(N)$ y supongamos que dos jugadores $i, j \in N$ se amalgaman para formar un único jugador representativo $a \notin N$. Definimos el conjunto $A = \{i, j\} \subseteq B_q \in \mathfrak{B}$ y el nuevo juego v_A sobre el conjunto $(N \setminus A) \cup \{a\}$ de la siguiente forma: $v_A(S) = v(S)$ si $a \notin S$, y $v_A(S) = v((S \setminus \{a\}) \cup \{i, j\})$ si $a \in S$ para $S \subseteq (N \setminus A) \cup \{a\}$.

- **Amalgamación interna en $\mathfrak{B}$:** Sean $(N, v) \in SI(N)$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$ y $A = \{i, j\} \subset N$ dos jugadores que pertenecen exactamente a las mismas alianzas (es decir, $\mathfrak{B}^i = \mathfrak{B}^j$). Si definimos la nueva configuración $\hat{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}^i) \cup \{(B_k \setminus \{i, j\}) \cup \{a\}\}_{B_k \in \mathfrak{B}^i}$, se garantiza que $f_i(v, \mathfrak{B}) + f_j(v, \mathfrak{B}) \leq f_a(v_A, \hat{\mathfrak{B}})$. Es decir, la fusión interna no perjudica el poder conjunto de los aliados.
- **Amalgamación externa en $\mathfrak{B}$:** Sean $(N, v) \in SI(N)$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$ y $A = \{i, j\} \subset N$. Si existen dos alianzas unitarias $B_k = \{i\}$ y $B_s = \{j\}$ tales que estos jugadores no pertenecen a ninguna otra alianza de la configuración y definimos la nueva configuración amalgamada como $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B} \setminus \{B_k, B_s\}) \cup \{\{a\}\}$, entonces $f_i(v, \mathfrak{B}) + f_j(v, \mathfrak{B}) \leq f_a(v_A, \mathfrak{B})$.
- **Estabilidad de amalgamación en $\mathfrak{B}$:** Sean $(N, v) \in SI(N)$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$ y $A = \{i, j\} \subset N$ tales que $\mathfrak{B}^i = \mathfrak{B}^j$. La amalgamación de estos dos jugadores no debe alterar el pago de ningún jugador externo a sus coaliciones. Formalmente, para todo jugador $l \in N \setminus (\bigcup_{B_k \in \mathfrak{B}^i} B_k)$, se cumple que $f_l(v, \mathfrak{B}) = f_l(v_A, \hat{\mathfrak{B}})$.

Adicionalmente, se consideran axiomas para escenarios donde un jugador actúa como el representante o duplicado estratégico de otro. Dados $(N, v) \in SI(N)$ y $j, k \in N$, definimos el juego $v_{-k,j}$ sobre $N \setminus \{k\}$ asumiendo que el jugador k abandona el juego y sus funciones son absorbidas por j : $v_{-k,j}(S) = v(S)$ si $j \notin S$, y $v_{-k,j}(S) = v(S \cup \{k\})$ si $j \in S$ para $S \subseteq N \setminus \{k\}$. Así mismo, dados $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$ y $j, k \in N$ donde $\mathfrak{B}^j \cap \mathfrak{B}^k = \emptyset$, definimos a la configuración de coaliciones de $N \setminus \{k\}$ como $\mathfrak{B}_{-k,j} = (\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}^k) \cup \{(B_s \setminus \{k\}) \cup \{j\}\}_{B_s \in \mathfrak{B}^k}$.

Por otro lado, sean $(N, v) \in SI(N)$ y $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$ se dice que los jugadores j, k son **dobles** en el juego $(v, \mathfrak{B})$ si cumplen dos condiciones: (1) $v(S \cup \{j\}) = v(S \cup \{k\})$ para todo $S \subseteq N$, y (2) si $S \cup \{j\} \in \mathfrak{B}^j$, entonces ni $S \cup \{k\}$ ni $S \cup \{j, k\}$ pertenecen a $\mathfrak{B}^k$ para todo $S \subseteq N \setminus \{j, k\}$. Bajo estas premisas se enuncian las siguientes propiedades:

- **Fusión:** Sean $(N, v) \in SI(N)$ y $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$, si j, k son jugadores dobles en el juego $(v, \mathfrak{B})$, entonces para cualquier otro jugador $i \in N \setminus \{j, k\}$, su poder permanece inalterado: $f_i(v, \mathfrak{B}) = f_i(v_{-k,j}, \mathfrak{B}_{-k,j})$.
- **Fusión aditiva:** Sean $(N, v) \in SI(N)$ y $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$, si j, k son jugadores dobles en el juego $(v, \mathfrak{B})$, el jugador que asume la representación (j) acumula exactamente el poder original de ambos: $f_j(v_{-k,j}, \mathfrak{B}_{-k,j}) = f_j(v, \mathfrak{B}) + f_k(v, \mathfrak{B})$.

A partir de estas propiedades, se establece el siguiente resultado de caracterización axiomática. Este teorema demuestra que el índice de Banzhaf-Coleman generalizado es, la única solución que satisface de forma simultánea el conjunto de axiomas propuestos.

Teorema 4.1.4. *Un índice de poder $f : \bigcup_{N \subset \mathcal{U}} (\mathcal{B}(N) \times SI(N)) \rightarrow \bigcup_{N \subset \mathcal{U}} \mathbb{R}^N$ satisface las propiedades de transferencia (TR), jugador dummy (JD), anonimidad (ANO), amalgamación interna en $\mathfrak{B}$, amalgamación externa en $\mathfrak{B}$, estabilidad de amalgamación en $\mathfrak{B}$, fusión y fusión aditiva si y solo si coincide con el índice de Banzhaf-Coleman generalizado (η').*

Tras haber fundamentado axiomáticamente el índice η' , una de las características más notables de este índice generalizado es que puede resolverse de forma indirecta utilizando el marco conceptual clásico de las uniones *a priori* de Owen, a través de un juego inducido que expande el espacio original de jugadores mediante una técnica de duplicación de roles independientes.

Sea $(N, v) \in SI(N)$ y $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$, para cada coalición $B_k \in \mathfrak{B}$, se asocia a cada jugador $i \in B_k$ un jugador ficticio e independiente (que admite la interpretación de representante del jugador en esa

coalición de la configuración a la que pertenece) al que denotamos por $i(k)$. De esta forma, definimos el nuevo espacio ramificado de jugadores como $P = \{i(k) \mid i \in B_k, B_k \in \mathfrak{B}\}$. Sobre este espacio P se construye una partición canónica (sistema de uniones) dada por $\mathfrak{B}^P = \{B_1^P, \dots, B_m^P\}$, donde cada bloque disjunto viene definido por $B_k^P = \{i(k) \mid i \in B_k\}$. Finalmente, se define el juego inducido v^P sobre P tal que para cualquier $S \subseteq P$:

$$v^P(S) = v(T), \quad \text{siendo } T = \{i \in N \mid \exists B_k \in \mathfrak{B} \text{ tal que } i(k) \in S\}.$$

La relación formal entre ambos modelos (juegos con recubrimientos frente a juegos con una partición expandida) queda establecida por la siguiente proposición que vincula el índice generalizado con el valor clásico de Banzhaf-Owen (Ψ).

Proposición 4.1.5. *Para cualquier juego simple (N, v) y cualquier configuración de coaliciones $\mathfrak{B}$ de N , el índice de Banzhaf-Coleman generalizado de un jugador $i \in N$ equivale a la suma de los valores de Banzhaf-Owen (Ψ) de sus respectivas réplicas calculados sobre el juego con uniones a priori asociado $(P, v^P, \mathfrak{B}^P)$:*

$$\eta'_i(N, v, \mathfrak{B}) = \sum_{B_k \in \mathfrak{B}^i} \Psi_{i(k)}(P, v^P, \mathfrak{B}^P).$$

La equivalencia establecida en la proposición anterior garantiza que las extensiones multilineales, que se han analizado en el capítulo anterior como herramienta clave para simplificar el cálculo combinatorio, son plenamente aplicables para evaluar este índice generalizado.

Sin embargo, este enfoque plantea un inconveniente computacional importante. Se necesita construir un juego artificial donde se replican los jugadores que forman parte de varias coaliciones. Esta replicación incrementa el cardinal del conjunto de jugadores ($|P| > |N|$), lo que eleva de forma exponencial el coste computacional de los algoritmos.

Más allá de este obstáculo puramente operativo, el hecho de que el índice η' se sustente analíticamente sobre la estructura del valor de Banzhaf-Owen (Ψ) determina su comportamiento matemático. Al heredar su metodología, adopta también sus mismas características estructurales, lo que implica que no satisface determinadas propiedades axiomáticas que pueden ser deseables en el estudio de juegos con estructuras coalicionales.

4.2. La asimetría coalicional del índice η'

Como consecuencia de esta herencia metodológica, el índice de Banzhaf-Coleman generalizado (η') presenta un comportamiento particular cuando se analiza desde una perspectiva macroscópica. Para ilustrar esta característica, resulta pertinente introducir la propiedad de simetría coalicional.

Dado que este axioma fue formulado por Albizuri *et al.* (2006) [1] originalmente en el ámbito de los juegos TU y para particiones estrictas, denotaremos por $\mathcal{B}_0(N) \subset \mathcal{B}(N)$ al subconjunto de configuraciones que constituyen una partición (o estructura coalicional) del conjunto de jugadores N . Sobre este dominio, consideremos una solución genérica f definida como una aplicación $f : \bigcup_{N \subset \mathcal{U}} (TU(N) \times \mathcal{B}_0(N)) \longrightarrow \bigcup_{N \subset \mathcal{U}} \mathbb{R}^N$, que asigna a cada juego $(N, v) \in TU(N)$ con estructura coalicional $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}_0(N)$ un vector de pagos $f(v, \mathfrak{B}) \in \mathbb{R}^N$. Bajo este marco, la propiedad se enuncia de la siguiente manera:

- **Simetría coalicional:** Sea $(N, v) \in TU(N)$ un juego cooperativo y $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}_0(N)$ una partición. Si dos coaliciones $B_p, B_q \in \mathfrak{B}$ son tales que para toda subcolección $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B} \setminus \{B_p, B_q\}$ se cumple

la condición

$$v\left(B_p \cup \bigcup_{B_r \in \mathfrak{C}} B_r\right) = v\left(B_q \cup \bigcup_{B_r \in \mathfrak{C}} B_r\right),$$

entonces la solución f debe garantizar que el poder total distribuido internamente por ambas coaliciones sea idéntico:

$$\sum_{i \in B_p} f_i(v, \mathfrak{B}) = \sum_{i \in B_q} f_i(v, \mathfrak{B}).$$

Esta propiedad exige que, si dos alianzas desempeñan el mismo papel estratégico frente al exterior (son simétricas en el nivel macroscópico de la negociación), el poder total que distribuyen a sus miembros debe ser idéntico, independientemente de la estructura interna o el tamaño de dichos bloques. A continuación, se demuestra mediante un escenario práctico que el índice η' no cumple este principio de equidad estructural.

Ejemplo 4.2.1. Considérese el juego de unanimidad (N, u_N) , con $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La función característica de este juego se define como $u_N(S) = 1$ si $S = N$ y $u_N(S) = 0$ en caso contrario. La configuración de coaliciones (que en este escenario actúa estrictamente como una partición) viene dada por $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2\}$ con $B_1 = \{1, 2, 3\}$ y $B_2 = \{4, 5\}$.

Observamos que ambas coaliciones son simétricas puesto que las dos son necesarias para ganar. Por otro lado, la única subcolección externa a ambas es el conjunto vacío ($\mathfrak{C} = \emptyset$), y se verifica la condición:

$$u_N(B_1) = 0 = u_N(B_2).$$

Para evaluar el poder interno que el índice η' distribuye, partimos de su definición teórica para un jugador $i \in N$:

$$\eta'_i(N, u_N, \mathfrak{B}) = \sum_{B_k \in \mathfrak{B}^i} \sum_{\substack{\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{B} \\ \mathcal{R} \cap \mathfrak{B}^i = \emptyset}} \sum_{T \subseteq B_k \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{b_k-1}} [u_N(Q \cup T \cup \{i\}) - u_N(Q \cup T)],$$

donde $m = 2$ es el número total de coaliciones en la configuración, $b_k = |B_k|$ es el número de miembros de la coalición activa B_k , y $Q = \bigcup_{B \in \mathcal{R}} B$. Analizamos el reparto de poder sustituyendo en la ecuación para los integrantes de cada bloque:

- **Poder distribuido por B_1 ($b_1 = 3$):** para cualquier jugador $i \in B_1$, su único bloque activo es B_1 . Para que la contribución marginal no sea nula, es estrictamente necesario que participen todos los jugadores externos ($Q = B_2$) y todos sus compañeros internos ($T = B_1 \setminus \{i\}$). Sustituyendo los parámetros en la fórmula:

$$\eta'_i(N, u_N, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2^{2-1}} \frac{1}{2^{3-1}} [u_N(B_2 \cup (B_1 \setminus \{i\}) \cup \{i\}) - u_N(B_2 \cup (B_1 \setminus \{i\}))].$$

Agrupando los términos, observamos que se evalúa la contribución a la gran coalición N :

$$\eta'_i(N, u_N, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} [u_N(N) - u_N(N \setminus \{i\})] = \frac{1}{8} [1 - 0] = 0,125.$$

La suma de las asignaciones de los tres miembros de B_1 es, por tanto:

$$\sum_{i \in B_1} \eta'_i(N, u_N, \mathfrak{B}) = 3 \times 0,125 = 0,375.$$

- **Poder distribuido por B_2 ($b_2 = 2$):** para cualquier jugador $j \in B_2$, la lógica de unanimidad requiere la participación del bloque externo $Q = B_1$ y de su único compañero interno $T = B_2 \setminus \{j\}$. Sustituyendo los parámetros:

$$\eta'_j(N, u_N, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2^{2-1}} \frac{1}{2^{2-1}} [u_N(B_1 \cup (B_2 \setminus \{j\}) \cup \{j\}) - u_N(B_1 \cup (B_2 \setminus \{j\}))],$$

$$\eta'_j(N, u_N, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [u_N(N) - u_N(N \setminus \{j\})] = \frac{1}{4} [1 - 0] = 0,250.$$

La suma de las asignaciones de los dos miembros de B_2 es:

$$\sum_{j \in B_2} \eta'_j(N, u_N, \mathfrak{B}) = 2 \times 0,250 = 0,500.$$

A pesar de que ambas coaliciones son simétricas, observamos una evidente discrepancia en el poder total que distribuyen ($0,375 < 0,500$). De manera análoga a lo expuesto en el Ejemplo 2.2.2 para el valor de Banzhaf-Owen, esta divergencia pone de manifiesto que el índice generalizado η' penaliza a los jugadores que pertenecen a coaliciones más numerosas, reflejando una dilución del poder individual dentro de bloques grandes y demostrando analíticamente su falta de simetría coalicional.

Esta característica estructural del índice generalizado η' pone de manifiesto la necesidad de plantear una alternativa analítica capaz de evaluar el peso estratégico de las alianzas de forma equitativa e independiente de su tamaño.

4.3. El índice de Banzhaf coalicional simétrico generalizado (Π')

Para restaurar la equidad macroscópica en el análisis de configuraciones de coaliciones, resulta natural extender la filosofía del valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π), introducido en la Ecuación (2.2) para particiones estrictas, a este nuevo marco estructural.

Al desvincular el poder estratégico de un bloque de su cardinalidad interna, se pretende evitar la dilución probabilística que penaliza a las uniones más numerosas. Como se ilustrará a continuación, esta corrección permite solventar la falta de simetría coalicional detectada en el índice anterior, ofreciendo una representación matemática más coherente de la dinámica de negociación.

Definición 4.3.1. Sea (N, v) un juego simple, y sea $\mathfrak{B}$ una configuración de coaliciones sobre N . El índice de Banzhaf coalicional simétrico generalizado para un jugador $i \in N$, denotado por $\Pi'_i(N, v, \mathfrak{B})$, se define como:

$$\Pi'_i(N, v, \mathfrak{B}) = \sum_{B_k \in \mathfrak{B}^i} \sum_{\substack{\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{B} \\ \mathcal{R} \cap \mathfrak{B}^i = \emptyset}} \sum_{T \subseteq B_k \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{t!(b_k - t - 1)!}{b_k!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)],$$

donde $m = |\mathfrak{B}|$ es el número total de coaliciones en la configuración, $b_k = |B_k|$ es el número de miembros de la coalición activa B_k , $t = |T|$ es el cardinal de la subcoalición interna considerada, y $Q = \bigcup_{B \in \mathcal{R}} B$ representa el conjunto de jugadores aportados por los bloques externos.

Para comprender la mecánica de este índice y su diferencia estructural con la medida η' , se desglosa la ecuación en sus tres niveles de agregación:

- **Nivel de pertenencia:** al igual que en la medida anterior, un jugador i puede pertenecer a varias alianzas simultáneamente. El primer sumatorio itera sobre todos los bloques $B_k \in \mathfrak{B}^i$ de los que el jugador forma parte, acumulando el poder que ejerce desde cada uno de ellos.
- **Nivel macroscópico:** representa la negociación exógena. Itera sobre todas las combinaciones posibles de los bloques externos a los que no pertenece el jugador i (es decir, $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{B}$ tal que $\mathcal{R} \cap \mathfrak{B}^i = \emptyset$), aplicando la ponderación de equiprobabilidad de Banzhaf $\frac{1}{2^{m-1}}$. Esta restricción en el sumatorio asegura nuevamente que, si el jugador i formara parte de alguno de los bloques externos evaluados, su aportación marginal se anularía al estar ya presente en la coalición.
- **Nivel microscópico:** aquí radica la diferencia fundamental con el índice generalizado η' . Para modelar la dinámica interna dentro del bloque activo B_k , se itera sobre las posibles subcoaliciones de compañeros T , pero sustituyendo la equiprobabilidad por la filosofía del valor de Shapley mediante el factor $\frac{t!(b_k-t-1)!}{b_k!}$. Este enfoque basado en permutaciones internas garantiza que el poder obtenido por el bloque en el nivel macroscópico se distribuya equitativamente entre sus miembros, evitando la penalización por el tamaño de la alianza.

De nuevo, el corchete final evalúa la contribución marginal del jugador i , calculando si su adhesión transforma una coalición perdedora (formada por los bloques externos Q y sus compañeros internos T) en una coalición ganadora.

Esta propuesta permite corregir la asimetría coalicional detectada en la sección anterior, tal y como se comprueba al reevaluar el escenario de unanimidad.

Ejemplo 4.3.2. Retomando el escenario planteado, consideremos de nuevo el juego de unanimidad (N, u_N) con $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la configuración de coaliciones $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2\}$ donde $B_1 = \{1, 2, 3\}$ y $B_2 = \{4, 5\}$.

Como se analizó previamente, ambas alianzas son coalicionalmente simétricas, ya que son estrictamente necesarias para alcanzar la coalición ganadora. Además, se verifica la condición:

$$u_N(B_1) = 0 = u_N(B_2).$$

Calculamos el índice de Banzhaf coalicional simétrico generalizado (Π') para un jugador $i \in N$, para evaluar el reparto de poder interno:

$$\Pi'_i(N, v, \mathfrak{B}) = \sum_{B_k \in \mathfrak{B}^i} \sum_{\substack{\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{B} \\ \mathcal{R} \cap \mathfrak{B}^i = \emptyset}} \sum_{T \subseteq B_k \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{t!(b_k-t-1)!}{b_k!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)],$$

donde $m = 2$ es el número total de coaliciones en la configuración, $b_k = |B_k|$ es el número de miembros de la coalición activa B_k , $t = |T|$ es el cardinal de la subcoalición interna considerada, y $Q = \bigcup_{B \in \mathcal{R}} B$.

- **Poder distribuido por B_1 ($b_1 = 3$):** para cualquier jugador $i \in B_1$, la única contribución marginal no nula exige que participen todos los jugadores externos ($Q = B_2$) y todos sus compañeros internos ($T = B_1 \setminus \{i\}$, por lo que $t = 2$). Sustituyendo en la ecuación:

$$\Pi'_i(N, u_N, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2^{2-1}} \frac{2!(3-2-1)!}{3!} [u_N(N) - u_N(N \setminus \{i\})],$$

$$\Pi'_i(N, u_N, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{6} [1 - 0] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \approx 0,167.$$

Al sumar los pagos por bloques, observamos que para la primera alianza el poder distribuido resulta ser:

$$\sum_{i \in B_1} \Pi'_i(N, u_N, \mathfrak{B}) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0,500.$$

- **Poder distribuido por B_2 ($b_2 = 2$):** para cualquier jugador $j \in B_2$, se requiere la participación del bloque externo $Q = B_1$ y de su único compañero interno $T = B_2 \setminus \{j\}$ (por lo que $t = 1$).

$$\Pi'_j(N, u_N, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2^{2-1}} \frac{1!(2-1-1)!}{2!} [u_N(N) - u_N(N \setminus \{j\})],$$

$$\Pi'_j(N, u_N, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} [1 - 0] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,250.$$

Para la segunda alianza, el sumatorio resulta ser:

$$\sum_{j \in B_2} \Pi'_j(N, u_N, \mathfrak{B}) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0,500.$$

Con este resultado, $\sum_{i \in B_1} \Pi'_i(N, u_N, \mathfrak{B}) = \sum_{j \in B_2} \Pi'_j(N, u_N, \mathfrak{B})$, se demuestra que el índice Π' cumple la propiedad de simetría coalicional en este escenario. Al sustituir la ponderación de equiprobabilidad interna por una distribución basada en permutaciones, el poder asignado a nivel macroscópico se reparte internamente de forma equitativa, garantizando que dos alianzas con idéntico peso estratégico frente a las demás distribuyan exactamente la misma cantidad de poder, sin sufrir ninguna penalización por su tamaño.

Al igual que en la Proposición 4.1.5 se estableció la relación formal entre el índice de Banzhaf-Coleman generalizado y el valor de Banzhaf-Owen, para consolidar la solidez teórica de esta nueva medida, establecemos a continuación su conexión estructural con el modelo original para particiones. El índice de Banzhaf coalicional simétrico generalizado Π' puede derivarse evaluando el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π) sobre el juego inducido que expande el espacio de jugadores.

Recordemos que, dada una configuración $\mathfrak{B}$, se define el conjunto expandido de réplicas $P = \{i(k) \mid i \in B_k, B_k \in \mathfrak{B}\}$ y su partición canónica asociada $\mathfrak{B}^P$. El juego inducido v^P sobre P determina que el valor de una coalición replicada equivale al valor en el juego original de los jugadores que la conforman. La siguiente proposición formaliza esta equivalencia.

Proposición 4.3.3. *Para cualquier juego simple (N, v) y cualquier configuración de coaliciones $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}(N)$, el índice de Banzhaf coalicional simétrico generalizado de un jugador $i \in N$ equivale a la suma de los valores de Banzhaf coalicional simétrico (Π) de sus respectivas réplicas calculados sobre el juego con uniones a priori asociado $(P, v^P, \mathfrak{B}^P)$:*

$$\Pi'_i(N, v, \mathfrak{B}) = \sum_{B_k \in \mathfrak{B}^i} \Pi_{i(k)}(P, v^P, \mathfrak{B}^P).$$

Demostración. Fijemos un jugador $i \in N$ y analicemos el valor Π asignado a una de sus réplicas $i(k) \in B_k^P$ en el juego inducido. Partiendo de la definición teórica para particiones dada en la Ecuación (2.2), tenemos:

$$\Pi_{i(k)}(P, v^P, \mathfrak{B}^P) = \sum_{C \subseteq \mathfrak{B}^P \setminus \{B_k^P\}} \sum_{S \subseteq B_k^P \setminus \{i(k)\}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{s!(b_k - s - 1)!}{b_k!} [v^P(C \cup S \cup \{i(k)\}) - v^P(C \cup S)],$$

donde $C = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B^P$, $s = |S|$ y $b_k = |B_k^P| = |B_k|$ representa el cardinal del bloque.

Podemos establecer una biyección entre los elementos del juego inducido y el juego original. Toda subcoalición $S \subseteq B_k^P \setminus \{i(k)\}$ se corresponde con un subconjunto $T \subseteq B_k \setminus \{i\}$ (con $|T| = t = s = |S|$). Del mismo modo, toda subcolección de bloques replicados $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{B}^P \setminus \{B_k^P\}$ se corresponde con una colección original $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{B} \setminus \{B_k\}$, de forma que C representa al conjunto de jugadores $Q = \bigcup_{B \in \mathcal{R}} B$.

Por la propia definición del juego inducido v^P , el valor de una coalición en P es equivalente al valor en v del conjunto de jugadores originales a los que representan. Dado que las réplicas $C \cup S \cup \{i(k)\}$ se proyectan exactamente sobre los jugadores $Q \cup T \cup \{i\}$, las contribuciones marginales resultan:

$$v^P(C \cup S \cup i(k)) - v^P(C \cup S) = v(Q \cup T \cup i) - v(Q \cup T).$$

Por otro lado, veamos qué ocurre si la subcolección evaluada $\mathcal{R}$ contiene algún bloque al que el jugador original i ya pertenezca (es decir, $\mathcal{R} \cap \mathfrak{B}^i \neq \emptyset$). En tal caso, el jugador i ya se encuentra contenido en el conjunto Q . Dado que la adición de un elemento a un conjunto que ya lo incluye no altera el conjunto ($Q \cup \{i\} = Q$), su aportación marginal es cero: $v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T) = 0$. Esto implica que, en el juego inducido, la réplica $i(k)$ presenta una contribución marginal nula siempre que la coalición ya cuente con otra réplica del mismo jugador, anulando estos términos dentro del sumatorio.

Por tanto, los únicos términos no nulos son aquellos donde el jugador i no pertenece a ningún bloque de $\mathcal{R}$, lo que restringe la suma externa a la condición $\mathcal{R} \cap \mathfrak{B}^i = \emptyset$. Al aplicar esta reducción y sumar sobre todas las réplicas $B_k \in \mathfrak{B}^i$, obtenemos:

$$\sum_{B_k \in \mathfrak{B}^i} \Pi_{i(k)}(P, v^P, \mathfrak{B}^P) = \sum_{B_k \in \mathfrak{B}^i} \sum_{\substack{\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{B} \\ \mathcal{R} \cap \mathfrak{B}^i = \emptyset}} \sum_{T \subseteq B_k \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{t!(b_k - t - 1)!}{b_k!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)],$$

que coincide exactamente con la definición formal de $\Pi'_i(N, v, \mathfrak{B})$, quedando probada la equivalencia. $\square$

Al igual que sucedía con el índice η' , esta caracterización a través del juego inducido tiene una doble implicación práctica. Por un lado, confirma que el cálculo analítico basado en las extensiones multilineales, desarrollado en el capítulo previo, sigue siendo perfectamente válido para simplificar la evaluación de Π' . Por otro lado, reproduce el mismo obstáculo operativo, se necesita operar sobre un espacio de jugadores expandido mediante réplicas ($|P| > |N|$), dispara exponencialmente la complejidad algorítmica, limitando la aplicabilidad de este método de cálculo indirecto en escenarios de gran escala.

Capítulo 5

Conclusiones

En este Trabajo Fin de Máster se ha estudiado el cálculo y la distribución de poder en el marco de los juegos cooperativos con utilidad transferible. Para abordar este ámbito, el análisis ha conjugado el desarrollo de los modelos teóricos de coalición con la necesaria transición desde el ineficiente cálculo combinatorio directo hacia enfoques analíticos continuos. Por un lado, se han analizado detalladamente los fundamentos teóricos de la cooperación restringida, lo que ha implicado abandonar el supuesto clásico de asociación totalmente libre para adentrarse en modelos organizativos más complejos y fieles a la realidad. Este recorrido teórico ha permitido transitar desde los sistemas de uniones a priori, donde los actores negocian estructurados en bloques estrictamente disjuntos, hasta las configuraciones de coaliciones, las cuales capturan la dinámica de los acuerdos de geometría variable y el solapamiento de alianzas. Por otro lado, el trabajo ha puesto un énfasis especial en las herramientas analíticas necesarias para garantizar la viabilidad computacional de estos modelos. Ante la explosión combinatoria que exige el cálculo discreto de las contribuciones marginales, se ha examinado cómo la transformación del problema hacia un entorno analítico continuo, mediante el uso de las extensiones multilineales (EML), se erige como un mecanismo indispensable para evaluar de forma eficiente los índices de poder en juegos de gran dimensión.

A partir de la revisión y el análisis desarrollado a lo largo de los capítulos, se extraen las siguientes conclusiones teóricas y estructurales:

- Se ha abordado el estudio del valor de Banzhaf clásico y su extensión natural a escenarios con uniones a priori mediante el valor de Banzhaf-Owen (Ψ). Durante este análisis, se ha constatado analíticamente que este valor no satisface la propiedad de simetría en el cociente. Al aplicar un modelo de equiprobabilidad tanto en la negociación externa como en la interna, propio del valor de Banzhaf, el valor penaliza a los jugadores que pertenecen a coaliciones más numerosas, distorsionando el peso macroscópico de los bloques.
- A raíz de esto, se ha estudiado el valor de Banzhaf coalicional simétrico (II). Se ha evidenciado cómo la adopción de un enfoque distributivo, basado en las permutaciones del valor de Shapley, en la negociación interna, permite preservar la simetría en el cociente. De este modo, se garantiza que dos alianzas con idéntico peso estratégico en el juego global distribuyan exactamente la misma cantidad de poder entre sus miembros.
- Al flexibilizar aún más la cooperación transitando hacia las configuraciones de coaliciones, donde se permite el solapamiento de alianzas y la geometría variable, se ha examinado el índice de Banzhaf-Coleman generalizado (η'). Se ha demostrado mediante un ejemplo práctico que este

índice, al heredar la metodología analítica de Ψ , vulnera la propiedad de simetría coalicional, diluyendo el poder en alianzas amplias.

- Motivado por la necesidad de satisfacer dicha simetría coalicional en el escenario de las alianzas solapadas, este trabajo aporta la propuesta formal del índice de Banzhaf coalicional simétrico generalizado (Π'). Esta aportación sienta las bases de una métrica sobre recubrimientos no disjuntos que proyecta la filosofía de equiprobabilidad (Banzhaf) en la negociación externa y de distribución probabilística (Shapley) en la negociación interna, respetando la relevancia estratégica de las alianzas independientemente de su tamaño.

Desde la vertiente operativa y computacional, el trabajo concluye lo siguiente:

- Se ha demostrado que las extensiones multilineales (EML) no son únicamente una construcción teórica elegante, sino una herramienta analítica y práctica imprescindible para esquivar la explosión combinatoria ($\mathcal{O}(2^n)$) inherente a los juegos TU. La transformación del conteo discreto en el cálculo continuo de derivadas parciales e integrales se ha evidenciado empíricamente mediante estudios de simulación. Concretamente, las implementaciones desarrolladas en R confirman que las EML proporcionan una clara ventaja algorítmica, reduciendo drásticamente los tiempos de cómputo tanto para el valor de Banzhaf como para el valor de Banzhaf-Owen.
- Se ha comprobado teóricamente que el cálculo de los índices generalizados para configuraciones de coaliciones (η' y el propuesto Π') es posible llevarlo a cabo utilizando las EML de Ψ y Π a través de la construcción de un juego inducido. Sin embargo, a nivel operativo, este enfoque exige modelizar el solapamiento mediante la réplica de jugadores, generando un espacio expandido artificialmente. En la práctica, este aumento del número de variables agrava el problema de la explosión combinatoria ($|N| < |P|$), lo que podría debilitar la eficiencia aportada por las EML y deja como reto abierto la búsqueda de métodos de cálculo más directos.

Finalmente, a la luz de los resultados obtenidos y de las cuestiones que permanecen abiertas tras este estudio, se proponen las siguientes líneas de investigación y tareas futuras:

- **Implementación computacional para el valor Π :** llevar a la práctica operativa el estudio analítico desarrollado para el valor de Banzhaf coalicional simétrico (Π). El objetivo sería realizar un análisis empírico análogo al ya ejecutado con el valor de Banzhaf clásico y el valor de Banzhaf-Owen, implementando rutinas específicas en R para su cálculo combinatorio directo y a través de las EML. Esto permitiría profundizar en el rendimiento algorítmico mediante simulaciones numéricas, verificando empíricamente la eficiencia temporal de la solución continua frente a la discreta y evaluando la escalabilidad del modelo al incrementar tanto el número de jugadores como la cantidad de uniones a priori.
- **Desarrollo analítico de EML para índices generalizados:** se plantea como desafío teórico fundamental superar la dependencia actual de los juegos inducidos para el cálculo del índice de Banzhaf-Coleman generalizado (η') y del nuevo índice propuesto (Π'). El objetivo es derivar una formulación de las extensiones multilineales que opere directamente sobre la estructura original de las configuraciones de coaliciones, sin necesidad de recurrir a la replicación artificial de jugadores. Esta aproximación permitiría capturar el solapamiento y la geometría variable de las alianzas dentro del propio formalismo de la EML, evitando la explosión combinatoria derivada de la expansión del conjunto de jugadores y garantizando, una resolución analítica eficiente y escalable para estos modelos.
- **Caracterización axiomática de Π' :** formalizar el estudio de las propiedades del índice de Banzhaf coalicional simétrico generalizado (Π') propuesto en este trabajo. El objetivo es identificar el conjunto de axiomas que satisface esta nueva métrica, tales como la simetría coalicional,

el jugador nulo o la aditividad. Esta validación teórica resulta imprescindible para dotar a la propuesta de un fundamento sólido, permitiendo analizar su comportamiento y establecer una comparativa frente a otras soluciones de la literatura.

- **Aplicaciones prácticas:** resulta de gran interés trasladar los valores e índices analizados a casos prácticos reales en diversos sectores. Se sugiere explorar las siguientes vías:
 - *Votaciones en bloque (Valor de Banzhaf-Owen, Ψ):* este valor calcula el poder en dos etapas para grupos cerrados (uniones a priori). En la vida real, serviría para analizar asambleas o parlamentos donde los representantes están obligados a votar todos a una. Este escenario ilustra de forma muy intuitiva el cálculo del índice: el poder real de un individuo depende, primero, de si su voto es capaz de desempatar la postura que tomará su grupo a puerta cerrada y, segundo, de si su grupo, actuando como un único jugador, resulta ser el voto crucial en la votación final de toda la cámara.
 - *Consortios y comités simétricos (Valor de Banzhaf coalicional simétrico, Π):* a diferencia de Banzhaf-Owen, Π impone un tratamiento simétrico a los jugadores independientemente del tamaño de su unión. Una de sus aplicaciones serían los consorcios de investigación o comités corporativos formados por empresas de distinto tamaño (uniones disjuntas). Serviría para evaluar el poder de influencia real de cada directivo, garantizando que el cálculo de su capacidad de veto no se vea distorsionado por el hecho de pertenecer a un bloque mayor o menor.
 - *Redes de colaboración cruzada (Índice de Banzhaf-Coleman generalizado, η'):* el índice η' extiende el cálculo a escenarios donde los actores pertenecen a varias alianzas a la vez (configuraciones con solapamiento). Un ejemplo claro se da en el sector tecnológico o industrial, donde una misma empresa puede participar simultáneamente en distintos proyectos conjuntos o consorcios de innovación. Este índice permite identificar qué empresa de la red es aquella que, por estar conectada en múltiples frentes, tiene la capacidad real de hacer que una red de proyectos compartidos salga adelante o se paralice por completo.
 - *Geopolítica y tratados internacionales (Índice de Banzhaf coalicional simétrico generalizado, Π'):* la nueva propuesta unifica el tratamiento simétrico con las estructuras de coaliciones solapadas. En el mundo real, ilustra el poder de los estados en la red geopolítica actual (por ejemplo, países que participan simultáneamente en la UE, la OTAN y en múltiples acuerdos bilaterales). Aplicar Π' permitiría descubrir qué nación es indispensable en el tablero global; es decir, quién posee la mayor capacidad para paralizar o habilitar acuerdos, garantizando que este cálculo de poder no se vea distorsionado por el tamaño de los bloques a los que pertenece el país.

Apéndice A

Implementación del valor de Banzhaf combinatorio

En este apéndice se detalla la implementación diseñada en el lenguaje R para el cálculo del valor y el índice de Banzhaf a partir de su definición combinatoria tradicional, utilizada para contrastar los tiempos de ejecución en la simulación numérica.

```
1  calcular_banzhaf_vector <- function(n, v) {
2
3    # Comprobación de que un juego de n jugadores debe tener exactamente 2^n
      valores
4    if (length(v) != 2^n) {
5      stop(paste("Error: El vector v debe tener exactamente", 2^n, "elementos
      para", n, "jugadores."))
6    }
7
8    # Generación de la matriz de coaliciones binarias
9    total_coaliciones <- 2^n
10   matriz_coaliciones <- matrix(0, nrow = total_coaliciones, ncol = n)
11
12   for (i in 1:total_coaliciones) {
13     matriz_coaliciones[i, ] <- as.integer(intToBits(i - 1)[1:n])
14   }
15
16   contribuciones_totales <- numeric(n)
17
18   # Contribuciones marginales
19   for (i in 1:n) {
20     con_i <- matriz_coaliciones[, i] == 1
21
22     # Matriz sin el jugador i
23     matriz_temporal <- matriz_coaliciones
24     matriz_temporal[, i] <- 0
25
26     # Posición en v de S \ {i}
27     indices_sin_i <- match(data.frame(t(matriz_temporal)), data.frame(t(
      matriz_coaliciones)))
28
```

```

29   #  $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ 
30   contribuciones_marginales <- v[con_i] - v[indices_sin_i[con_i]]
31   contribuciones_totales[i] <- sum(contribuciones_marginales)
32 }
33
34 # Valores de Banzhaf
35 banzhaf_absoluto <- contribuciones_totales / (2^(n - 1))
36 suma_absolutos <- sum(banzhaf_absoluto)
37 banzhaf_normalizado <- if (suma_absolutos != 0) banzhaf_absoluto / suma_
    absolutos else rep(0, n)
38
39 # Devolución de resultados
40 return(data.frame(
41   Jugador = paste("Jugador", 1:n),
42   Contribucion_Total = contribuciones_totales,
43   Banzhaf_Absoluto = banzhaf_absoluto,
44   Banzhaf_Normalizado = banzhaf_normalizado
45 ))
46 }

```

Listing A.1: Función para el cálculo del valor de Banzhaf por definición.

Para ilustrar su funcionamiento, a continuación se presenta un ejemplo de ejecución para un juego de mayoría ponderada. Previamente, se define una función auxiliar `simple_game` que genera el vector de la función característica del juego a partir de los pesos y la cuota requerida.

```

1  # Función para generar el juego simple desde un juego de mayoría ponderada
2  simple_game <- function(weights, cuota) {
3    n <- length(weights)
4    ncoal <- 2^n
5    v <- numeric(ncoal)
6
7    for (s in 0:(ncoal - 1)) {
8      coalition <- as.integer(intToBits(s))[1:n]
9      total_weight <- sum(coalition * weights)
10     v[s + 1] <- ifelse(total_weight >= cuota, 1, 0)
11   }
12   return(v)
13 }
14
15 # Ejemplo de juego de mayoría ponderada
16 pesos <- c(10, 20, 30, 40, 50)
17 cuota <- 51
18 n <- 5
19
20 # Juego simple asociado
21 v <- simple_game(pesos, cuota)
22
23 # Valor de Banzhaf del juego
24 Banzhaf_value <- calcular_banzhaf_vector(n, v)
25 print(Banzhaf_value)

```

Listing A.2: Ejemplo de ejecución para el valor de Banzhaf combinatorio.

Apéndice B

Implementación del valor de Banzhaf mediante EML

En este apéndice se expone la implementación desarrollada en R para obtener el valor de Banzhaf explotando la diferenciación analítica de la extensión multilineal (EML) propuesta por Owen. Este algoritmo calcula las derivadas parciales en el centro del hipercubo unitario $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$.

```
1  calcular_banzhaf_eml <- function(n, v) {
2    if (length(v) != 2^n) {
3      stop(paste("Error: El vector v debe tener exactamente", 2^n, "elementos."))
4    }
5
6    # Matriz de coaliciones binarias
7    total_coaliciones <- 2^n
8    matriz_coaliciones <- matrix(0, nrow = total_coaliciones, ncol = n)
9
10   for (i in 1:total_coaliciones) {
11     matriz_coaliciones[i, ] <- as.integer(intToBits(i - 1)[1:n])
12   }
13
14   banzhaf_absoluto <- numeric(n)
15
16   for (i in 1:n) {
17     suma_derivada <- 0
18
19     for (k in 1:total_coaliciones) {
20       coalicion <- matriz_coaliciones[k, ]
21
22       if (coalicion[i] == 1) {
23         elementos_restantes <- sum(coalicion[-i])
24         prob_coalescencia <- 0.5^(n - 1)
25       }
26     }
27
28     x_con_1 <- rep(0.5, n); x_con_1[i] <- 1
29     x_con_0 <- rep(0.5, n); x_con_0[i] <- 0
30   }
```

```

31 evaluar_eml <- function(x) {
32   resultado <- 0
33   for (k in 1:total_coaliciones) {
34     coalicion <- matriz_coaliciones[k, ]
35     peso <- prod(ifelse(coalicion == 1, x, 1 - x))
36     resultado <- resultado + v[k] * peso
37   }
38   return(resultado)
39 }
40
41 banzhaf_absoluto[i] <- evaluar_eml(x_con_1) - evaluar_eml(x_con_0)
42 }
43
44 # Normalización
45 suma_absolutos <- sum(banzhaf_absoluto)
46 banzhaf_normalizado <- if (suma_absolutos != 0) banzhaf_absoluto / suma_
47   absolutos else rep(0, n)
48
49 return(data.frame(
50   Jugador = paste("Jugador", 1:n),
51   Banzhaf_Absoluto = banzhaf_absoluto,
52   Banzhaf_Normalizado = banzhaf_normalizado
53 ))

```

Listing B.1: Función para el cálculo del valor de Banzhaf mediante extensiones multilineales.

A continuación, se muestra un ejemplo de ejecución de la rutina anterior partiendo del juego de mayoría ponderada propuesto. Asimismo, se incluye una llamada a la librería especializada `CoopGame` para verificar y contrastar los resultados obtenidos.

```

1  # Valor de Banzhaf del juego utilizando extensiones multilineales
2  Banzhaf_value_EML <- calcular_banzhaf_eml(n, v)
3  print(Banzhaf_value_EML)
4
5  # Valor de Banzhaf del juego empleando la librería de R
6  library(CoopGame)
7  v_coop <- weightedVotingGameVector(n, pesos, cuota)
8  Banzhaf_value_R <- banzhafValue(v_coop)
9  print(Banzhaf_value_R)

```

Listing B.2: Ejemplo de ejecución para el valor de Banzhaf mediante EML.

Apéndice C

Implementación del valor de Banzhaf-Owen combinatorio

En este apéndice se detalla la implementación desarrollada en R para calcular el valor de Banzhaf-Owen utilizando su definición combinatoria clásica. Este algoritmo evalúa de manera exhaustiva todas las coaliciones posibles, diferenciando la evaluación en dos niveles: las uniones externas y las subcoaliciones internas de los jugadores, determinando los escenarios en los que cada jugador resulta decisivo.

```
1  calcular_banzhaf_owen <- function(pesos, cuota, uniones) {
2    n <- length(pesos)
3    m <- length(uniones)
4
5    # Peso total de cada unión
6    pesos_unionos <- sapply(uniones, function(u) sum(pesos[u]))
7
8    # Unión a la que pertenece cada jugador
9    union_pertenencia <- numeric(n)
10   for (j in 1:m) {
11     union_pertenencia[uniones[[j]]] <- j
12   }
13
14   bo_valores <- numeric(n)
15
16   for (i in 1:n) {
17     u_i <- union_pertenencia[i]
18
19     # Combinaciones de bloques externos
20     otras_unionos <- setdiff(1:m, u_i)
21     if (length(otras_unionos) > 0) {
22       combos_unionos <- expand.grid(lapply(otras_unionos, function(x) c(
23         FALSE, TRUE)))
24     } else {
25       combos_unionos <- data.frame(DUMMY = TRUE)
26     }
27
28     # Combinaciones de jugadores internos
29     otros_en_su_union <- setdiff(uniones[[u_i]], i)
30     if (length(otros_en_su_union) > 0) {
```

```

30     combos_internos <- expand.grid(lapply(otros_en_su_union, function(x) c
      (FALSE, TRUE)))
31   } else {
32     combos_internos <- data.frame(DUMMY = TRUE)
33   }
34
35   intersecciones_ganadoras <- 0
36   total_combinaciones <- 0
37
38   for (k in 1:nrow(combos_uniones)) {
39
40     if (length(otras_uniones) > 0) {
41       uniones_activas <- otras_uniones[as.logical(combos_uniones[k, , drop
        = FALSE])]
42       peso_externo <- sum(pesos_uniones[uniones_activas])
43     } else {
44       peso_externo <- 0
45     }
46
47     for (h in 1:nrow(combos_internos)) {
48
49       if (length(otros_en_su_union) > 0) {
50         internos_activos <- otros_en_su_union[as.logical(combos_internos[h
          , , drop = FALSE])]
51         peso_interno <- sum(pesos[internos_activos])
52       } else {
53         peso_interno <- 0
54       }
55
56       peso_sin_i <- peso_externo + peso_interno
57       peso_con_i <- peso_sin_i + pesos[i]
58
59       #  $v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)$ 
60       if (peso_sin_i < cuota && peso_con_i >= cuota) {
61         intersecciones_ganadoras <- intersecciones_ganadoras + 1
62       }
63       total_combinaciones <- total_combinaciones + 1
64     }
65   }
66   bo_values[i] <- intersecciones_ganadoras / total_combinaciones
67 }
68
69 # Normalización
70 bo_normalizado <- if(sum(bo_values) > 0) bo_values / sum(bo_values) else
  bo_values
71
72 return(data.frame(
73   Jugador      = 1:n,
74   Peso         = pesos,
75   Union        = union_pertenencia,
76   BO_Absoluto  = bo_values,
77   BO_Normalizado = bo_normalizado
78 ))
79 }

```

Listing C.1: Función para el cálculo del valor de Banzhaf-Owen por definición.

A continuación, se detalla un caso práctico para demostrar la utilización de esta función en un escenario con uniones *a priori*.

```
1  #Ejemplo juego de mayoría ponderada con uniones a priori
2  pesos <- c(10, 20, 30, 40, 50)
3  cuota <- 70
4  uniones <- list(c(1, 2, 3), c(4, 5))
5
6  # Valor de Banzhaf-Owen del juego con uniones a priori
7  Banzhaf_Owen_value <- calcular_banzhaf_owen(pesos, cuota, uniones)
8  print(Banzhaf_Owen_value)
```

Listing C.2: Ejemplo de ejecución para el valor de Banzhaf-Owen combinatorio.

Apéndice D

Implementación del valor de Banzhaf-Owen mediante EML

En este apéndice se expone la implementación desarrollada en R para calcular el valor de Banzhaf-Owen explotando la diferenciación analítica de la extensión multilineal (EML) propuesta por Owen y adaptada por Carreras y Magaña. Este algoritmo optimiza el cálculo combinatorio mediante técnicas de programación dinámica, determinando de manera eficiente las distribuciones de pesos tanto a nivel macroscópico (entre bloques) como a nivel microscópico (dentro de cada unión), evaluadas en el centro del hipercubo unitario $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$.

```
1  calcular_banzhaf_owen_mle_fast <- function(pesos, cuota, uniones) {
2    n <- length(pesos)
3    m <- length(uniones)
4
5    # Identificación de pertenencia a uniones
6    union_pertenencia <- numeric(n)
7    for (j in 1:m) {
8      union_pertenencia[uniones[[j]]] <- j
9    }
10
11   # Peso total de cada unión
12   pesos_unionos <- sapply(uniones, function(u) sum(pesos[u]))
13
14   bo_values <- numeric(n)
15
16   # Programación dinámica para obtener la distribución de pesos
17   obtener_distribucion_pesos <- function(pesos_elementos) {
18     dp <- numeric(cuota)
19     dp[1] <- 1.0
20
21     for (w in pesos_elementos) {
22       if (w == 0) next
23       for (i in cuota:1) {
24         if (dp[i] > 0) {
25           nuevo_peso <- (i - 1) + w
26           if (nuevo_peso < cuota) {
27             dp[nuevo_peso + 1] <- dp[nuevo_peso + 1] + dp[i] * 0.5
28           }
29         }
30       }
31     }
32   }
33 }
```

```

29     dp[i] <- dp[i] * 0.5
30   }
31 }
32 }
33 return(dp)
34 }
35
36 # Índice para cada jugador
37 for (i in 1:n) {
38   u_i <- union_pertenencia[i]
39   w_i <- pesos[i]
40
41   # Distribución de bloques externos
42   otras_uniones <- pesos_uniones[-u_i]
43   dp_macro <- obtener_distribucion_pesos(otras_uniones)
44
45   # Distribución de jugadores internos
46   otros_internos <- pesos[setdiff(uniones[[u_i]], i)]
47   dp_interno <- obtener_distribucion_pesos(otros_internos)
48
49   # Convolución de ambas distribuciones
50   suma_derivada <- 0
51
52   for (w_m in 0:(cuota - 1)) {
53     prob_m <- dp_macro[w_m + 1]
54     if (prob_m == 0) next
55
56     max_w_in <- cuota - 1 - w_m
57     for (w_in in 0:max_w_in) {
58       prob_in <- dp_interno[w_in + 1]
59       if (prob_in == 0) next
60
61       peso_total <- w_m + w_in
62       if (peso_total + w_i >= cuota) {
63         suma_derivada <- suma_derivada + (prob_m * prob_in)
64       }
65     }
66   }
67   bo_values[i] <- suma_derivada
68 }
69
70 # Normalización
71 bo_normalizado <- if(sum(bo_values) > 0) bo_values / sum(bo_values) else
  bo_values
72
73 return(data.frame(
74   Jugador      = 1:n,
75   Peso         = pesos,
76   Union        = union_pertenencia,
77   BO_MLE_Absoluto = bo_values,
78   BO_MLE_Normalizado = bo_normalizado
79 ))
80 }

```

Listing D.1: Función para el cálculo del valor de Banzhaf-Owen mediante extensiones multilineales.

Finalmente, se expone la ejecución del enfoque mediante extensiones multilineales. Para confirmar la robustez de los resultados, se realiza una comparación ejecutando la función equivalente provista por la librería `powerindexR`.

```
1  # Valor de Banzhaf-Owen del juego con uniones a priori mediante EML
2  Banzhaf_Owen_value_EML <- calcular_banzhaf_owen_mle_fast(pesos, cuota,
3    uniones)
4  print(Banzhaf_Owen_value_EML)
5
6  # Valor de Banzhaf-Owen del juego con uniones a priori empleando la librería
7  de R
8  partition <- c(1, 1, 1, 2, 2)
9  library(powerindexR)
10 Banzhaf_Owen_value_R <- pi.banzhaf(cuota, pesos, partition)
11 print(Banzhaf_Owen_value_R)
```

Listing D.2: Ejemplo de ejecución para el valor de Banzhaf-Owen mediante EML.

Bibliografía

- [1] Albizuri MJ, Aurrecochea J, Zarzuelo JM (2006) Configuration values: Extensions of the coalitional Owen value. *Games and Economic Behavior* 57:1-17.
- [2] Albizuri MJ, Aurrekoetxea J (2006) Coalition configurations and the Banzhaf index. *Social Choice and Welfare* 26:571-596.
- [3] Alonso Meijide JM (2002) Contribuciones a la teoría del valor en juegos cooperativos con condicionamientos exógenos. Tesis, Universidad de Santiago de Compostela.
- [4] Banzhaf JF (1965) Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis. *Rutgers Law Review* 19:317-343.
- [5] Bergantiños G, González-Díaz J, González Rueda AM (2019) The Shapley rule for loss allocation in energy transmission networks. En: *Handbook of the Shapley Value*. Chapman and Hall/CRC, pp 369-392.
- [6] Carreras F, Magaña A (1994) The multilinear extension and the modified Banzhaf-Coleman index. *Mathematical Social Sciences* 28:215-222.
- [7] Davila Pena L, García Jurado I, Casas Méndez B (2022) Assessment of the influence of features on a classification problem: an application to COVID 19 patients. *European Journal of Operational Research* 299:631-641.
- [8] Dubey P, Shapley LS (1979) Mathematical properties of the Banzhaf power index. *Mathematics of Operations Research* 4:99-131.
- [9] Feltkamp V (1995) Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values. *International Journal of Game Theory* 24:179-186.
- [10] Guajardo M, Rönnqvist M, Flisberg P, Frisk M (2018) Collaborative transportation with overlapping coalitions. *European Journal of Operational Research* 271:238-249.
- [11] Lehrer E (1988) An axiomatization of the Banzhaf value. *International Journal of Game Theory* 17:89-99.
- [12] Lozano S, Moreno P, Adenso Díaz B, Algaba E (2013) Cooperative game theory approach to allocating benefits of horizontal cooperation. *European Journal of Operational Research* 229:444-452.
- [13] Owen G (1972) Multilinear extensions of games. *Management Science* 18:64-79.
- [14] Owen G (1975) Multilinear extensions and the Banzhaf value. *Naval Research Logistics Quarterly* 22:741-750.

- [15] Owen G (1981) Modification of the Banzhaf-Coleman index for games with a priori unions. En: Holler MJ (ed) Power, voting and voting power. Physica-Verlag, Wurzburg, pp 232-238.
- [16] Saavedra Nieves A, Casas Méndez B (2023) On the centrality analysis of covert networks using games with externalities. European Journal of Operational Research 309:1365-1378.
- [17] Shapley LS (1953) A value for n-person games. En: Tucker AW, Kuhn H (ed) Annals of Mathematics Studies, Vol. 28. Princeton University Press, pp 307-317.
- [18] Young HP (1985) Monotonic solutions of cooperative games. International Journal of Game Theory 14:65-72.