



Universidade de Vigo

Trabajo Fin de Máster

Teoría de juegos en el control de inundaciones

Álvaro de Prado Saborido

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2024-2025

Propuesta de Trabajo Fin de Máster

Título en galego: Teoría de xogos no control de inundacións
Título en español: Teoría de juegos en el control de inundaciones
English title: Game Theory in Flood Management
Modalidad: Modalidad A
Autor/a: Álvaro de Prado Saborido, Universidade de Vigo
Director/a: Juan José Vidal Puga, Universidade de Vigo
Breve resumen del trabajo: Se estudian mediante teoría de juegos dos problemas relacionados con el control de inundaciones. El primero de ellos, la construcción de diques, se aborda mediante el análisis de un experimento diseñado y ejecutado por Chan, Chiang y Liao (2023), tanto desde la perspectiva cooperativa como desde la no cooperativa. El segundo, la configuración de terrenos de cuencas fluviales, se trata desde la perspectiva cooperativa y en los términos de Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019).

Don Juan José Vidal Puga, Catedrático de la Universidade de Vigo, informa que el Trabajo Fin de Máster titulado

Teoría de juegos en el control de inundaciones

fue realizado bajo su dirección por don Álvaro de Prado Saborido para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, dan su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Vigo, a 22 de julio de 2025.

Firmado por VIDAL
PUGA JUAN JOSE -
***9090** el día
22/07/2025 con un

El director:
Don Juan José Vidal Puga

El autor:
Don Álvaro de Prado Saborido

Declaración responsable. Para dar cumplimiento a la Ley 3/2022, de 24 de febrero, de convivencia universitaria, referente al plagio en el Trabajo Fin de Máster (Artículo 11, [Disposición 2978 del BOE núm. 48 de 2022](#)), **el/la autor/a declara** que el Trabajo Fin de Máster presentado es un documento original en el que se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones relativas al uso de material de apoyo desarrollado por otros/as autores/as:

- Todas las fuentes usadas para la elaboración de este trabajo han sido citadas convenientemente (libros, artículos, apuntes de profesorado, páginas web, programas, . . .)
- Cualquier contenido copiado o traducido textualmente se ha puesto entre comillas, citando su procedencia.
- Se ha hecho constar explícitamente cuando un capítulo, sección, demostración, . . . sea una adaptación casi literal de alguna fuente existente.

Y, acepta que, si se demostrara lo contrario, se le apliquen las medidas disciplinarias que correspondan.

Índice general

1. Introducción	1
2. Diques	3
2.1. El experimento de Chan, Chiang y Liao (2023)	3
2.1.1. <i>To build, or not to build, that is the question</i>	8
2.1.2. Método de estimación I: ignorancia total sobre p	9
2.1.3. Método de estimación II: media móvil exponencial	10
2.1.4. Método de estimación III: regla de sucesión de Laplace modificada	10
2.2. Simulación de la modalidad no cooperativa	11
2.2.1. Simulación con el auténtico valor de p	12
2.2.2. Simulaciones con distintos valores de p	14
2.3. Modalidad cooperativa	16
2.3.1. El enfoque más conservador	16
2.3.2. Juego cooperativo basado en la estimación de p	17
2.3.3. Comentarios sobre el juego cooperativo	20
3. Juegos de inundación	25
3.1. El modelo	25
3.2. Sobre el núcleo de los juegos de inundación	28
3.3. Soluciones puntuales	38
4. Conclusiones	43
A. Demostración redundante y algoritmo	45
A.1. Afirmación 3.7 en problemas de tres jugadores	45
A.2. Algoritmo para calcular el reparto estable más beneficioso para los terratenientes río arriba	46
B. Código de R	47
B.1. Matriz de pagos esperados del juego de diques	47
B.2. Simulación de RR iteraciones de una partida de R rondas del juego de diques	47
B.3. Simulación de RR iteraciones de las partidas asociadas a múltiples valores de p	50
B.4. Representación de núcleos con el paquete TUGLab	53
Bibliografía	55

Capítulo 1

Introducción

Las acciones y las decisiones de quienes controlan localidades o terrenos en riesgo de inundación tienen influencia sobre los perjuicios que la inundación causa cuando finalmente se produce. El objetivo de este trabajo es estudiar mediante la teoría de juegos dos problemas propios del control de inundaciones: la construcción de diques y la configuración de tierras de una cuenca fluvial.

El asunto de la construcción de diques como mecanismo de protección frente a inundaciones se aborda a través del estudio teórico —tanto desde la perspectiva cooperativa como desde la no cooperativa— de un experimento diseñado y puesto en práctica por Chan, Chiang y Liao (2023). Este experimento es, en esencia, un juego (en la acepción coloquial) en el que tres participantes deciden a lo largo de múltiples rondas si construir (virtualmente) o no diques y después reciben pagos que dependen de sus propias decisiones, de las decisiones de los demás participantes, y de la magnitud de la inundación (virtual) que se simula en cada ronda. Un componente fundamental de la situación es la incertidumbre: los participantes no tienen toda la información que les convendría tener, mayormente porque no saben cómo se rigen las inundaciones ni cómo piensan los otros jugadores que se rigen las inundaciones; esto dota al problema de una complejidad que lleva inevitablemente a incurrir en la arbitrariedad al modelizar el juego y al teorizar de qué maneras podrían o deberían comportarse los participantes. Por tal motivo, el objetivo no es «resolver» el experimento, sino más bien descubrir qué propiedades tiene desde el punto de vista de la teoría de juegos y proponer posibles criterios de decisión que sean consecuentes con ello. La razón por la que este asunto se presta a ser analizado tanto desde la perspectiva cooperativa como desde la no cooperativa es que el experimento tiene tres modalidades distintas: una primera que impide la comunicación entre jugadores y reduce al mínimo la información que se les proporciona, una segunda que proporciona más información pero sigue impidiendo la comunicación, y una tercera que admite comunicación y colaboración entre jugadores. La primera modalidad se puede encuadrar en el marco de los juegos no cooperativos, y la tercera, en el de los juegos cooperativos.

El asunto de la configuración de tierras de una cuenca fluvial se trata desde el punto de vista cooperativo y en los términos propuestos por Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019). Partiendo de la consideración de que los bosques de una cuenca fluvial pueden reducir el impacto que las inundaciones tienen sobre otras tierras de dicha cuenca, se define un modelo en el que cada tierra de la cuenca fluvial puede ser o bien un «bosque» o bien «otra cosa», de tal forma que cada bosque genera una externalidad positiva a aquellas tierras que no son bosques y que respecto de ella están río abajo. Si estas externalidades son adecuadas, los terratenientes pueden tener motivos para cooperar y negociar, o sea, para gestionar sus tierras conjuntamente y repartir los beneficios resultantes de manera que todos salgan ganando en comparación con el escenario no cooperativo. Por tal motivo, uno de los objetivos

de esta parte del trabajo es entender en qué condiciones es racional y estable esa cooperación entre terratenientes. Para ello se enuncian y se prueban varios de los resultados teóricos de Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) y uno propio de este trabajo. Además, se estudian dos ejemplos numéricos, uno para complementar el proceso de modelización y otro más enfocado al cálculo de tres reglas de reparto estables con interpretaciones intuitivas.

Capítulo 2

Diques

2.1. El experimento de Chan, Chiang y Liao (2023)

Si bien es cierto que un dique cumple el propósito inmediato de proteger a una localidad o propiedad de las inundaciones —siempre que estas no sean suficientemente poderosas como para sobrepasarlo o destruirlo—, existen razones para argumentar que las construcciones de ciertos diques pueden resultar más perjudiciales que las inundaciones que pretenden evitar. En primer lugar, según Tobin (1995), si un dique se construye y posteriormente se produce una inundación que lo sobrepasa, la inundación puede resultar más perjudicial de lo que habría resultado si el dique no se hubiese llegado a construir. En segundo lugar, la construcción de diques en ciertos puntos de una cuenca fluvial puede tener efectos negativos sobre el resto de la cuenca, pues, en caso de inundación, las tierras desprotegidas reciben daño adicional del agua que las tierras protegidas no absorben —esta consideración es particularmente interesante desde un punto de vista moral, por estar la construcción de un dique y las características del mismo sujetas a la capacidad económica de quienes se benefician de él—.

En vista de lo anterior, una situación en la que varios agentes deben decidir si construir o no diques en sus localidades es claramente susceptible de ser analizada a través de la teoría de juegos, tanto desde la perspectiva cooperativa como desde la no cooperativa. En Chan, Chiang y Liao (2023), esta situación se estudia a través de la realización de un experimento en el que tres agentes —tres estudiantes universitarios— participan en un juego de veinte rondas de duración. Cada una de las rondas se desarrolla como sigue.

- En primer lugar, los tres jugadores reciben una cantidad fija de dinero.
- A continuación, disponen de un periodo de tiempo para decidir si invertir o no parte de su saldo en la construcción de un dique que protege su localidad. Los jugadores toman sus decisiones independientemente.
- Una vez terminado el periodo de decisión, se simula una inundación. Estas inundaciones pueden ser de magnitud normal —caso en el que los diques son efectivos— o extrema —caso en el que los diques, además de ser inefectivos, causan perjuicio adicional a todos—. A lo largo de las 20 rondas, las inundaciones están regidas por dos patrones distintos: durante una mitad del experimento, la magnitud de la inundación es puramente aleatoria, con $\frac{1}{2}$ de probabilidad para cada tipo; durante la otra mitad, las inundaciones se rigen por un patrón claro, alternando los dos tipos de inundación.
- Por último, la magnitud de la inundación se revela a los jugadores, y cada uno de estos recibe un pago que depende de su decisión, de las decisiones de los otros dos jugadores, y de la magnitud

de la inundación.

Al término de las 20 rondas, cada jugador se lleva el dinero acumulado a lo largo del juego. La puesta en práctica del experimento de Chan, Chiang y Liao (2023) involucró en total a 76 tríos de estudiantes, aunque no todos los tríos participaron exactamente en el mismo juego. Primero, porque se probaron tres modalidades de juego distintas —una primera en la que al final de cada ronda se comunica a cada jugador su pago pero no los pagos de los demás; una segunda en la que sí se proporciona la información anterior; y una tercera en la que se proporciona toda la información y, además, los jugadores pueden comunicarse durante el tiempo de decisión—; y segundo, porque algunos tríos tuvieron las 10 rondas de inundaciones de patrón fijo antes que las 10 rondas de inundaciones de magnitud aleatoria, y los otros tríos, lo contrario. Los pagos, sin embargo, sí se rigieron a lo largo de las 20 rondas por el mismo sistema de puntuación, detallado a continuación.

- Al principio de cada ronda, cada jugador recibe 150 puntos, equivalentes a una cierta cantidad de dinero.
- A cada jugador le cuesta 40 puntos construir su dique; no construirlo es gratis.
- Si se produce una inundación normal, un jugador pierde...
 - 0 puntos si construyó su dique.
 - 50 puntos si no construyó su dique y los otros jugadores tampoco.
 - 55 puntos si no construyó su dique pero uno y solo uno de los otros dos jugadores sí.
 - 65 puntos si no construyó su dique pero los otros dos jugadores sí.
- Si se produce una inundación extrema, un jugador pierde...
 - 70 puntos si no construyó su dique.
 - 80 puntos si construyó su dique y al menos uno de los otros dos jugadores no construyó su dique.
 - 100 puntos si todos los jugadores construyeron sus diques.

Merece la pena notar que el experimento de Chan, Chiang y Liao (2023) está enfocado mayormente al estudio psicológico de las acciones de los jugadores; así, el principal propósito de la división en las tres modalidades mencionadas antes era el de responder a la pregunta de si la información y la interacción tienen relación con las decisiones de los jugadores: ¿son menos egoístas quienes perciben el perjuicio que causan a los demás, especialmente si pueden comunicarse entre sí? Una de las conclusiones del estudio es la de que, dentro de la modalidad que permitía comunicación entre jugadores, los estudiantes más comunicativos tendieron a construir menos diques, pero este resultado se interpreta como una medida de empatía o de sociabilidad, y no se menciona que ninguna de las partidas de dicha modalidad derivase en situaciones de cooperación o negociación entre jugadores. La introducción de dos patrones distinguidos para regir las inundaciones responde también a un interés psicológico, el de ver cómo reaccionan los jugadores en cada contexto y comprobar si los comportamientos de aquellos jugadores que se enfrentan primero al patrón fijo y después a la aleatoriedad son distintos de los de aquellos que se enfrentan primero a la aleatoriedad y después al patrón fijo. Como en Chan, Chiang y Liao (2023) no se estudia el experimento desde el punto de vista de la teoría de juegos, esta es una buena ocasión para afrontar parte de esa tarea.

El objetivo principal de esta sección es el de analizar el experimento desde la perspectiva de la teoría de juegos no cooperativos. Conviene tener presente, primero, que el proceso de modelización que sigue se aplica a la modalidad de experimento más restrictiva, en la que no se habilita la comunicación entre jugadores ni se informa a cada jugador de las decisiones que toman los demás. Además, se estudia únicamente la mitad del experimento en la que las inundaciones tienen magnitud aleatoria —probabilidad

$\frac{1}{2}$ de inundación normal, probabilidad $\frac{1}{2}$ de inundación extrema—, pues la inclusión de ambos patrones añadiría una profundidad fuera de los objetivos de este trabajo. Tal como en el experimento real, se considera que antes de empezar los jugadores conocen las reglas del juego y el sistema de pagos, pero no tienen información ninguna sobre cómo se rigen las inundaciones; este factor es fundamental a lo largo del resto de la sección.

El primer paso es modelizar y analizar una ronda de experimento aislada, desde la perspectiva de un participante del experimento. Por lo ya comentado, una estructura teórica apropiada debe ser compatible con un contexto no cooperativo en el que las decisiones se toman simultáneamente; con esto en mente, se introducen los juegos en forma estratégica.

Definición 2.1. Un juego en forma estratégica G con conjunto de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$ es una $2n$ -tupla $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$ en la que, para todo $i \in N$, X_i es el conjunto de estrategias del jugador i y $H_i : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathbb{R}$ es su función de pago, que asigna a cada perfil de estrategias $x \in X$ el pago que i obtiene si se juega de acuerdo a tal perfil.

Así, en el caso que interesa, el conjunto de los tres participantes del experimento se identifica con $N = \{1, 2, 3\}$, siendo sus respectivos conjuntos de estrategias $X_i = \{D, A\}$ para cada $i \in N$, donde D representa «construir del dique» y A representa «abstenerse de construirlo». Teniendo en cuenta que los jugadores tienen incertidumbre sobre la magnitud de la inundación en la ronda genérica considerada, lo más razonable desde sus perspectivas es identificar con un parámetro $p \in [0, 1]$ la probabilidad de que la inundación producida sea extrema, de forma que los pagos del juego no cooperativo queden expresados en función de p . Dado que las normas del juego y el sistema de puntuación tratan del mismo modo a los tres jugadores, resulta una situación simétrica, y entonces no es necesario calcular los pagos de todos los perfiles de estrategias uno a uno, basta ver cómo varían en función del número de diques construidos.

Se denota con $H_i^p(x_1, x_2, x_3)$ el pago esperado del jugador i cuando la probabilidad de inundación extrema es p y el perfil de estrategias jugado es (x_1, x_2, x_3) , y se identifica con G^p el juego resultante. A continuación se calculan los pagos del juego G^p , obviando los perfiles de estrategias redundantes.

- Si los tres jugadores construyen sus diques, obtienen el mismo pago: para todo $i \in N$,

$$H_i^p(D, D, D) = 150 - 40 - 100p = 110 - 100p.$$

- Si solo los jugadores 1 y 2 construyen sus diques, estos obtienen un pago de

$$H_1^p(D, D, A) = H_2^p(D, D, A) = 150 - 40 - 80p = 110 - 80p,$$

mientras que el jugador 3 obtiene

$$H_3^p(D, D, A) = 150 - 70p - 65(1 - p) = 85 - 5p.$$

- Si solo el jugador 1 construye su dique, obtiene un pago de

$$H_1^p(D, A, A) = 150 - 40 - 80p = 110 - 80p,$$

mientras que los jugadores 2 y 3 obtienen

$$H_2^p(D, A, A) = H_3^p(D, A, A) = 150 - 70p - 55(1 - p) = 95 - 15p.$$

- Por último, si ningún jugador construye su dique, se tiene para todo $i \in N$ que

$$H_i^p(A, A, A) = 150 - 70p - 50(1 - p) = 100 - 20p.$$

El juego G^p queda plasmado en el Cuadro 2.1. Las estrategias del jugador 1 se identifican con las filas; las estrategias del jugador 2, con las columnas; y las estrategias del jugador 3, con la celda superior izquierda. Dentro del cuadro aparecen los pagos esperados asociados a cada perfil de estrategias.

D	D	A
D	$110 - 100p, 110 - 100p, 110 - 100p$	$110 - 80p, 85 - 5p, 110 - 80p$
A	$85 - 5p, 110 - 80p, 110 - 80p$	$95 - 15p, 95 - 15p, 110 - 80p$

A	D	A
D	$110 - 80p, 110 - 80p, 85 - 5p$	$110 - 80p, 95 - 15p, 95 - 15p$
A	$95 - 15p, 110 - 80p, 95 - 15p$	$100 - 20p, 100 - 20p, 100 - 20p$

Tabla 2.1: Perfiles de estrategias y pagos esperados de G^p .

Llegado este punto, es fundamental recordar que, como p es desconocido para los jugadores, estos no saben exactamente «a qué juego están jugando» y, por tanto, tampoco pueden saber cuál es su estrategia óptima, si es que la hay. Sin embargo, sí pueden analizar G^p en general. Esto es lo que se hace a continuación: dentro del marco no cooperativo, se estudia, para cada $p \in [0, 1]$, cómo deberían comportarse en la ronda considerada los jugadores si antes de tomar sus decisiones se les revelase que la auténtica probabilidad de inundación extrema es p .

Definición 2.2. Dado un juego en forma estratégica $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$, un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias $x \in X$ que cumple que $H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x'_i)$ para todo $x'_i \in X_i$ y todo $i \in N$, siendo (x_{-i}, x'_i) el perfil de estrategias $(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

En otras palabras, un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias estable, en el sentido de que ninguno de los jugadores puede mejorar su pago desviándose unilateralmente. A continuación se estudia, para cada perfil de estrategias de G^p , qué valores de p lo convierten en equilibrio de Nash.

- (D, D, D) . Si cualquiera de los jugadores se desvía, su pago pasa de ser $110 - 100p$ a ser $85 - 5p$. Por tanto, (D, D, D) es un equilibrio de Nash si y solo si

$$110 - 100p \geq 85 - 5p \iff p \leq \frac{5}{19}.$$

- (D, D, A) . Si el jugador 1 o el jugador 2 se desvía unilateralmente, su pago pasa de ser $110 - 80p$ a ser $95 - 15p$. Si el jugador 3 se desvía, su pago pasa de ser $85 - 5p$ a ser $110 - 100p$. Por tanto, (D, D, A) es un equilibrio de Nash si y solo si

$$\begin{cases} 110 - 80p \geq 95 - 15p \\ 85 - 5p \geq 110 - 100p \end{cases} \iff \frac{5}{19} \leq p \leq \frac{3}{13},$$

lo cual no es posible. Merece la pena notar que la equivalencia anterior realmente es la misma para todos aquellos perfiles de estrategias que resultan en la construcción de dos diques. Por tanto, ni (D, D, A) , ni (D, A, D) ni (A, D, D) pueden ser equilibrios de Nash.

- (A, A, D) . Si el jugador 1 o el jugador 2 se desvían unilateralmente, sus pagos pasan de ser $95 - 15p$ a ser $110 - 80p$. Si el jugador 3 se desvía, su pago pasa de ser $110 - 80p$ a ser $100 - 20p$. Por tanto, (A, A, D) es un equilibrio de Nash si y solo si

$$\begin{cases} 95 - 15p \geq 110 - 80p \\ 110 - 80p \geq 100 - 20p \end{cases} \iff \frac{3}{13} \leq p \leq \frac{1}{6},$$

lo cual no es posible. Por tanto, el perfil (A, A, D) nunca puede ser un equilibrio de Nash, y lo mismo ocurre con los otros dos perfiles que identifican la construcción de un solo dique, (A, D, A) y (D, A, A) .

- (A, A, A) . Si cualquiera de los jugadores se desvía, su pago pasa de ser $100 - 20p$ a ser $110 - 80p$. Por tanto, (D, D, D) es un equilibrio de Nash si y solo si

$$100 - 20p \geq 110 - 80p \iff \frac{1}{6} \leq p.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{6} < \frac{5}{19}$, se puede concluir que

- si $p \in [0, \frac{1}{6})$, hay un único equilibrio de Nash: (D, D, D) ;
- si $p \in [\frac{1}{6}, \frac{5}{19}]$, hay dos: (D, D, D) y (A, A, A) ;
- si $p \in (\frac{5}{19}, 1]$, hay uno: (A, A, A) .



Figura 2.1: Equilibrios de Nash según p .

La Figura 2.1 muestra qué equilibrios de Nash tiene el juego en función del valor de p . En vista de las normas del juego, es razonable que para valores suficientemente pequeños de p solo sea posible alcanzar la estabilidad mediante la construcción de los tres diques, y que para valores suficientemente grandes de p solo sea posible mediante la no construcción. Llegado este punto, merece la pena notar lo siguiente: que un perfil de estrategias sea un equilibrio de Nash es una condición necesaria pero no suficiente para que en la práctica se autoimponga. ¿Cuándo se autoimponen un perfil de estrategias $x = (x_1, \dots, x_n)$? Cuando es el perfil de estrategias por el que tendría que optar un conjunto de jugadores racionales, o sea, cuando la decisión racionalmente más beneficiosa para cada $i \in N$ es indiscutiblemente x_i , lo cual sucede si y solo si x_i es la única estrategia de i que, jueguen lo que jueguen los jugadores de $N \setminus \{i\}$, siempre reporta a i un pago no inferior (y, en al menos un caso, estrictamente superior) al que le reportaría cualquier otra estrategia $x'_i \in X_i$. A continuación se estudia para qué valores de p se autoimponen (D, D, D) y (A, A, A) .

- (D, D, D) es equilibrio de Nash para $p \leq \frac{5}{19}$. Como en G^p los tres jugadores son idénticos, para comprobar si (D, D, D) se autoimponen basta ver, desde la perspectiva de cualquiera de ellos, qué valores de p llevan a la conclusión de que debe jugar D y no A . Eligiendo arbitrariamente al jugador 3, se tiene lo que sigue.

- $H_3^p(D, A, D) = 110 - 80p > 95 - 15p = H_3^p(D, A, A) \iff p < \frac{3}{13}$.
- $H_3^p(A, D, D) = 110 - 80p > 95 - 15p = H_3^p(A, D, A) \iff p < \frac{3}{13}$.
- $H_3^p(A, A, D) = 110 - 80p \geq 100 - 20p = H_3^p(A, A, D) \iff p \leq \frac{1}{6}$.

Por ser (D, D, D) equilibrio de Nash para $p \leq \frac{5}{19}$, $H_3^p(D, D, D) \geq H_3^p(D, D, A)$ para todo $p \leq \frac{5}{19}$. Entonces, teniendo en cuenta que $\frac{1}{6} < \frac{5}{19}$, se puede concluir que, si el jugador 3 es racional, debería jugar D siempre que $p \leq \frac{1}{6}$. Como la misma lógica se aplica a todos los jugadores, (D, D, D) se autoimpone si y solo si $p \leq \frac{1}{6}$. Es interesante notar que, dado que $110 - 100p \geq 100 - 20p$ si y solo si $p \leq \frac{1}{8}$, el perfil (D, D, D) reporta a los tres jugadores pagos estrictamente peores que (A, A, A) para todo $p > \frac{1}{8}$, lo que pone de manifiesto que en el contexto no cooperativo un perfil puede autoimponerse aunque haya otro perfil más conveniente para todos los jugadores.

- (A, A, A) es equilibrio de Nash para $p \geq \frac{1}{6}$. El estudio de este caso es análogo al de (D, D, D) , en el sentido de que, como todos los jugadores optan por A , basta estudiar a uno de ellos. Una vez más, se elige arbitrariamente al jugador 3.
 - $H_3^p(D, A, A) = 95 - 15p > 110 - 80p = H_3^p(D, A, D) \iff p > \frac{3}{13}$.
 - $H_3^p(A, D, A) = 95 - 15p > 110 - 80p = H_3^p(A, D, D) \iff p > \frac{3}{13}$.
 - $H_3^p(D, D, A) = 85 - 5p \geq 110 - 100p = H_3^p(D, D, D) \iff p \geq \frac{5}{19}$.

Por ser (A, A, A) equilibrio de Nash para $p \geq \frac{1}{6}$, la desigualdad $H_3^p(A, A, A) \geq H_3^p(A, A, D)$ está garantizada para todo $p \geq \frac{1}{6}$. Entonces, teniendo en cuenta que $\frac{1}{6} < \frac{3}{13} < \frac{5}{19}$, se puede concluir que, si el jugador 3 es racional, debería jugar A siempre que $p \geq \frac{5}{19}$. Como la misma lógica se aplica a todos los jugadores, (A, A, A) se autoimpone si y solo si $p \geq \frac{5}{19}$.

En definitiva, dos perfiles de estrategias se autoimponen para ciertos valores de p : (D, D, D) para $p \leq \frac{1}{6}$ y (A, A, A) para $p \geq \frac{5}{19}$. Esto no quiere decir, sin embargo, que no haya manera de determinar qué debería ocurrir para los demás valores de p . Observando que, si $p > \frac{1}{6}$, se cumple que $H_i^p(A, A, A) \geq H_i^p(x_1, x_2, x_3)$ para todo $i \in N$ y para todo $(x_1, x_2, x_3) \neq (A, A, A)$, lo razonable es afirmar que realmente el perfil (A, A, A) debería ser jugado en la práctica siempre que $p > \frac{1}{6}$, pues todos los jugadores tienen presente que es estrictamente el mejor resultado posible para cada uno y que los tres saldrían perjudicados al desviarse unilateralmente de él. Así, tiene sentido concluir que, si los participantes del experimento pudiesen conocer el valor de p antes de jugar, sería posible que los tres optasen por construir sus diques si $p \leq \frac{1}{6}$ y por no construir sus diques en el resto de los casos.

2.1.1. *To build, or not to build, that is the question*

Con el juego G^p ya analizado estratégicamente para todos los posibles valores de p , hay que recordar que el valor empleado en el experimento real de Chan, Chiang y Liao (2023) es $p = \frac{1}{2}$. Se sabe por el análisis previo que, si los jugadores conocieran ese dato, optarían por no construir sus diques, pues, para $p = \frac{1}{2}$, (A, A, A) se autoimpone y es un equilibrio estricto —esto es, un equilibrio de Nash tal que cualquier desvío unilateral no solo no favorece sino que además perjudica al desviado—. Pero, por supuesto, los jugadores no saben que $p = \frac{1}{2}$, y entonces la decisión se complica. A continuación se propone un mecanismo para hacer frente a este problema y tratar de determinar una manera razonable de proceder a lo largo de R rondas de experimento con inundación de magnitud aleatoria.

Los participantes del experimento saben únicamente que en cada ronda puede darse una inundación normal o extrema. Por tanto, desde sus perspectivas, no está garantizado siquiera que el mecanismo que rige las inundaciones sea el mismo en cada ronda: podría ocurrir, por ejemplo, que la probabilidad de inundación extrema se incrementase al avanzar las rondas, o que no fuese posible tener dos

inundaciones extremas consecutivamente, etc. Ante esta situación, cualquier criterio que se proponga para tomar la decisión en cada una de las R rondas del experimento será inevitablemente arbitrario. Por simplicidad y atendiendo al principio de parsimonia, podría ser natural pensar, desde el punto de vista de los jugadores, que la magnitud de la inundación de una cierta ronda $r \in \{1, \dots, R\}$ es puramente aleatoria y se rige por el mismo mecanismo en todas las rondas, de modo que las inundaciones resultan independientes entre sí. Pero, por ejemplo, también se puede concebir la posibilidad de que la probabilidad de inundación extrema no sea la misma en todas las rondas, o de que exista una cierta relación de dependencia entre rondas.

En definitiva, la falta de información hace que el camino a la decisión óptima no sea claro. A continuación se proponen tres métodos distintos para estimar p , con el fin de aplicarlos más adelante en una simulación del experimento.

2.1.2. Método de estimación I: ignorancia total sobre p

El primer método de estimación que se propone parte únicamente de la hipótesis de que la probabilidad de inundación extrema es la misma en todas las rondas del experimento. Una manera de formalizar matemáticamente este planteamiento es siguiendo la propuesta de Hall y Smith (2011), que consiste en expresar la ignorancia total sobre la probabilidad de inundación extrema, p , mediante la distribución a priori impropia dada por la función

$$f(p) = \begin{cases} \frac{1}{p(1-p)} & \text{si } 0 \leq p \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definiendo para cada ronda $k \in \{1, \dots, R\}$ una variable $Y_k \sim \text{Bernoulli}(p)$, con $Y_k = 1$ si la inundación producida al final de k es extrema y $Y_k = 0$ en caso contrario, la función de verosimilitud de p al término de la ronda $r - 1$ es

$$L(p) = \mathbb{P}(Y_1 = y_1, \dots, Y_{r-1} = y_{r-1} \mid p) = \prod_{k=1}^{r-1} p^{y_k} (1-p)^{1-y_k} = p^{e_r} (1-p)^{r-1-e_r},$$

siendo $e_r = \sum_{k=1}^{r-1} Y_k$ la cantidad de inundaciones extremas producidas durante las $r - 1$ primeras rondas. En el momento de la toma de decisiones de la ronda r , la distribución a posteriori de p viene dada por la función

$$\begin{aligned} f(p \mid Y_1 = y_1, \dots, Y_{r-1} = y_{r-1}) &= \frac{L(p) f(p)}{\int_0^1 L(q) f(q) dq} = \frac{p^{e_r} (1-p)^{r-1-e_r} \frac{1}{p(1-p)}}{\int_0^1 q^{e_r} (1-q)^{r-1-e_r} \frac{1}{q(1-q)} dq} \\ &= \frac{p^{e_r-1} (1-p)^{r-e_r-2}}{\int_0^1 q^{e_r-1} (1-q)^{r-e_r-2} dq}. \end{aligned}$$

Dado que

$$\int_0^1 q^{e_r-1} (1-q)^{r-e_r-2} dq = B(e_r, r - e_r - 1) = \frac{\Gamma(e_r) \Gamma(r - e_r - 1)}{\Gamma(r - 1)} = \frac{(e_r - 1)! (r - e_r - 2)!}{(r - 2)!},$$

se cumple que

$$f(p \mid Y_1 = y_1, \dots, Y_{r-1} = y_{r-1}) = \frac{(r - 2)!}{(e_r - 1)! (r - e_r - 2)!} p^{e_r-1} (1-p)^{r-e_r-2},$$

de modo que la distribución a posteriori de p al cabo de la ronda $r - 1$ es una $\text{Beta}(e_r, r - er - 1)$. Se llega así a que la estimación de p al principio de la ronda r es

$$\mathbb{P}(Y_r = 1 \mid Y_1 = y_1, \dots, Y_{r-1} = y_{r-1}) = \mathbb{E}[p \mid Y_1 = y_1, \dots, Y_{r-1} = y_{r-1}] = \frac{e_r}{r-1} =: \hat{p}_r^I.$$

En definitiva, la distribución a priori propuesta en Hall y Smith (2011) conduce a una estimación de p que refleja efectivamente una ignorancia total sobre p al principio del experimento. Conviene tener presente, sin embargo, que la distribución $\text{Beta}(e_r, r - er - 1)$ no está definida cuando $e_r = 0$ o cuando $e_r = r - 1$, y entonces la distribución a posteriori de p y la igualdad $\mathbb{P}(Y_r = 1 \mid Y_1 = y_1, \dots, Y_{r-1} = y_{r-1}) = \frac{e_r}{r-1}$ solo cobran sentido a partir de la ocurrencia de al menos una inundación de cada tipo, lo cual se da, como muy pronto, tras dos rondas de experimento. En consecuencia, la filosofía de la ignorancia total sobre p puede ser contraproducente si lo que se prioriza es que el criterio sea resolutivo desde el principio, lo cual tiene bastante sentido en un juego que no se extiende más allá de un número no elevado de rondas (en el caso del experimento real, diez).

2.1.3. Método de estimación II: media móvil exponencial

Esta propuesta elimina la hipótesis inicial de que la probabilidad de inundación extrema es constante a lo largo del experimento, y la sustituye por la suposición de que las inundaciones más recientes son las que más información aportan sobre la inundación siguiente. Para formalizar esta perspectiva, se recurre a una media móvil exponencial: para cada ronda $r \in \{2, \dots, R\}$, se considera el estimador

$$\hat{p}_r^{II} := t \cdot I_{r-1} + (1 - t) \cdot \hat{p}_{r-1}^{II},$$

con $t \in (0, 1)$ y donde $I_{r-1} = 1$ si la inundación de la ronda $r - 1$ es extrema e $I_{r-1} = 0$ en caso contrario. Esencialmente, este estimador concede un $100 \cdot t\%$ del peso de la estimación de p a la estimación anterior, y el $100 \cdot (1 - t)\%$ restante depende de la magnitud de la inundación producida al final de la ronda previa. Es importante notar que, como el estimador anterior se va construyendo recurrentemente, es necesario fijar arbitrariamente el valor de \hat{p}_1^{II} .

2.1.4. Método de estimación III: regla de sucesión de Laplace modificada

La regla de sucesión de Laplace (Laplace (1814)), partiendo de la hipótesis inicial de que la probabilidad de inundación extrema es la misma en todas las rondas del experimento, supone que los dos tipos de inundación son posibles. Esto se formaliza fijando como distribución a priori de p una $U(0, 1)$, lo cual equivale a introducir a priori, como si de datos empíricos se tratasen, la ocurrencia de dos inundaciones ficticias, una normal y una extrema. Siguiendo un razonamiento análogo al empleado para hallar la distribución a posteriori de p en el contexto de ignorancia total, se llega a que, según la regla de sucesión de Laplace, la distribución a posteriori de p al principio de la ronda $r \in \{1, \dots, R\}$ es una $\text{Beta}(e_r + 1, r - e_r)$, con función de densidad

$$f_r(p) = \frac{r!}{e_r! (r - 1 - e_r)!} p^{e_r} (1 - p)^{r-1-e_r}.$$

Esta propuesta tiene dos ventajas. La primera de ellas es legítima —en el sentido de que los participantes del experimento, sumidos en la más absoluta ignorancia al principio del juego, también pueden apreciarla— y consiste en que la distribución a priori de p y su estimador están bien definidos ya desde el principio, sin necesidad siquiera de tener observaciones. La segunda ventaja, no tan legítima —los participantes del experimento no pueden ser conscientes de que es una ventaja—, consiste en que, casualmente, la suposición inicial de la ocurrencia de una inundación de cada tipo es totalmente certera, pues en el experimento real se utiliza $p = \frac{1}{2}$. Por este motivo, se puede argumentar que la

regla de sucesión de Laplace es un método de estimación hasta demasiado conveniente, y entonces, a efectos de evitar el resultadismo, se propone a continuación una alternativa quizá aún más razonable desde el punto de vista de quien no conoce p .

Desde la perspectiva de un participante, se podría pensar que los diseñadores del experimento encajan los pagos y el valor de p de forma que se produzcan situaciones ajustadas o polémicas. Los participantes no saben cuánto vale p , pero pueden hacer por su cuenta el antes desarrollado estudio de G^p y llegar a la conclusión de que el valor $p = \frac{1}{6}$ es esencialmente el que marca la frontera entre que se juegue D y que se juegue A . Con esto en mente, lo que se propone es modificar la regla de sucesión de Laplace para que la creencia a priori sea la de que $p = \frac{1}{6}$. Si la lógica de la regla de sucesión de Laplace se replicase directamente, esta propuesta consistiría en estimar p tras la introducción a priori de seis inundaciones ficticias: una extrema y cinco normales; sin embargo, durante las primeras rondas del juego, las observaciones ficticias cobrarían una importancia desmedida en comparación con las empíricas. Para arreglar esto, lo que se propone es fijar a priori la ocurrencia de $\frac{1}{3}$ inundaciones extremas y $\frac{5}{3}$ inundaciones normales, manteniendo así la proporción deseada e introduciendo, a fin de cuentas, dos datos ficticios, igual que la regla de sucesión de Laplace original. En definitiva, la estimación de p al comienzo de la ronda $r \in \{1, \dots, R\}$ sería ahora

$$\frac{e_r + \frac{1}{3}}{r + 1} = \frac{3e_r + 1}{3r + 3} =: \hat{p}_r^{III}.$$

Tal como la regla de sucesión de Laplace, esta alternativa posee la ventaja de estar definida ya desde el principio del juego.

2.2. Simulación de la modalidad no cooperativa

Con el fin de entender mejor las implicaciones prácticas del análisis teórico previo, se simula en \mathbb{R} el experimento a lo largo de $R = 10$ rondas, asignando a cada uno de los tres jugadores un criterio de decisión distinto. Se considera que todos ellos tienen presente que D es su mejor estrategia si $p \leq \frac{1}{6}$ y que A es su mejor estrategia si $p \geq \frac{5}{19}$, y entonces los tres adoptan criterios de decisión que respetan esta noción y basados en los estimadores propuestos antes.

- El jugador 1 estima p siguiendo el planteamiento inicial de ignorancia total. Como el estimador $\hat{p}_r^I = \frac{e_r}{r-1}$ no está definido al comienzo del juego, al jugador 1 se le impone jugar D en la primera ronda, simplemente porque los criterios de decisión de los otros dos jugadores los llevarán a jugar D y, teniendo en cuenta que la ronda inicial no es representativa de la calidad de cada criterio de decisión, lo más natural es evitar que se premie o castigue al jugador 1 sin razón aparente. Para cada $r \in \{2, \dots, 10\}$, el jugador aplica un criterio de decisión muy simple: si $\hat{p}_r^I \leq \frac{1}{6}$, juega D ; si $\hat{p}_r^I \geq \frac{5}{19}$, juega A ; en el resto de los casos, sortea su elección a cara o cruz.
- El jugador 2 estima p con la media móvil exponencial $\hat{p}_r^{II} = 0.3 \cdot I_{r-1} + 0.7 \cdot \hat{p}_{r-1}^{II}$, fijando $\hat{p}_1^{II} = \frac{1}{6}$; la lógica de este punto de partida ya se argumentó en la Subsección 2.1.4. El criterio de decisión del jugador 2 es el mismo que el del jugador 1, pero aplicando al estimador \hat{p}_r^{II} .
- El jugador 3 estima p según la alternativa a la regla de sucesión de Laplace, o sea, con el estimador $\hat{p}_r^{III} = \frac{3e_r+1}{3r+3}$. Su criterio de decisión es algo más complejo que los de los otros jugadores. Al principio de cada ronda $r \in \{1, \dots, 10\}$, la distribución a posteriori de p desde la perspectiva del jugador 3 es una Beta($3e_r + 1$, $3r - 3e_r + 2$). El jugador 3 utiliza esta información para calcular cuál de sus dos estrategias le reporta un pago esperado mayor. ¿Qué se entiende aquí por pago esperado? Para responder a esta pregunta hay que incurrir inevitablemente en la arbitrariedad, pues los pagos del jugador 3 están condicionados por las decisiones de los jugadores 1 y 2. Estas decisiones pueden ser más o menos previsibles para el jugador 3: si, por ejemplo, al empezar

la última ronda se tiene que el estimador de p es $\hat{p}_{10} = \frac{7.4}{11}$, no es atrevido conjeturar que un jugador racional optará por no construir su dique. Sin embargo, durante las primeras rondas del juego —o incluso durante las últimas, si los estimadores de p que van surgiendo no llegan a ser suficientemente tajantes—, hay demasiado margen como para que las decisiones resulten evidentes, lo cual representa un obstáculo considerable. Lo que se propone para tratar de salvarlo es suponer, desde la perspectiva del jugador 3, que los jugadores 1 y 2 jugarán «como deberían», o sea, optando por D si $p \leq \frac{1}{5}$ y por A en caso contrario. En consecuencia, el jugador 3 estima que su pago esperado si juega la estrategia $x_3 \in \{D, A\}$ en la ronda $r \in \{1, \dots, R\}$ es

$$\int_0^{\frac{1}{6}} f_r(p) H_3^p(D, D, x_3) dp + \int_{\frac{1}{6}}^1 f_r(p) H_3^p(A, A, x_3) dp,$$

siendo f_r la función de densidad de la Beta($3e_r + 1, 3r - 3e_r + 2$), o sea,

$$f_r(p) = \begin{cases} \frac{(3r+2)! p^{3e_r} (1-p)^{3r-3e_r+1}}{(3e_r)! (3r-3e_r+1)!} & \text{si } p \in (0, 1), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Finalmente, el jugador 3 se decanta por la estrategia que según la estimación anterior le promete un pago esperado mayor.

2.2.1. Simulación con el auténtico valor de p

Tomando $p = \frac{1}{2}$, tal como en el experimento real de Chan, Chiang y Liao (2023), se simulan 10000 iteraciones de 10 rondas de experimento a partir del Código B.2 (ver apéndice).

Al observar directamente los resultados de iteraciones aisladas —en la Tabla 2.2 se recogen, a modo de ejemplo, los resultados de una iteración— se puede comprobar que, en general, los jugadores 1 y 3 aprenden ya en las primeras rondas que el valor de p está por encima de $p = \frac{1}{5}$. Por esta razón, es frecuente que estos jugadores no construyan ningún dique a partir de la segunda o tercera ronda; esto solo puede evitarse si la sucesión aleatoria de inundaciones de la simulación contiene una cantidad anormalmente baja de inundaciones extremas. El jugador 2, lógicamente, también es mucho más dado a jugar A que D ; sin embargo, como su estimador es una media móvil, para jugar D en una ronda tardía no requiere una sucesión de inundaciones tan atípica como los jugadores 1 y 3, sino que le basta con ver pocas inundaciones extremas en las rondas más recientes. En las primeras rondas del juego se da a veces el fenómeno opuesto: si, por ejemplo, las tres primeras rondas producen inundaciones normales y la cuarta produce una inundación extrema, en la ronda 5 tanto el jugador 1 como el 3 optan por construir el dique, pero el 2 no. En cualquier caso, la conclusión principal de la observación de rondas aisladas es que los comportamientos de los jugadores son muy parecidos, especialmente los de 1 y 3 —de hecho, es habitualmente necesario hacer varias simulaciones para encontrar una ronda en la que difieren—, de forma que, a pequeña escala, no se puede apreciar claramente que un criterio sea mejor que otro.

Al observar las 10000 simulaciones en conjunto sí se obtienen resultados más reveladores de cara a comparar los tres criterios. Para cada simulación $s \in \{1, \dots, 10000\}$, se denota con $p^s = (p_1^s, p_2^s, p_3^s)$ el vector que contiene el pago total conseguido por cada jugador al término de la simulación s . Ahora, a partir de cada p^s , se define

$$q^s = \left(p_1^s - \min_{i \in N} \{p_i^s\}, p_2^s - \min_{i \in N} \{p_i^s\}, p_3^s - \min_{i \in N} \{p_i^s\} \right)$$

r	y_r	x_1	x_2	x_3	pago jugador 1	pago jugador 2	pago jugador 3
1	1	D	D	D	10	10	10
2	0	A	A	A	100	100	100
3	0	A	A	A	100	100	100
4	0	A	D	A	95	110	95
5	0	A	D	D	85	110	110
6	0	A	D	D	85	110	110
7	0	D	D	D	110	110	110
8	1	D	D	D	10	10	10
9	1	A	A	A	80	80	80
10	1	A	A	A	80	80	80

Tabla 2.2: Resultados de una de las 10000 iteraciones simuladas.

Por último, se define $Q^t = \sum_{s=1}^t q^s$, de forma que cada Q_i^t puede interpretarse como la suma acumulada de ganancias del jugador i respecto a los peores pagos a lo largo de las t primeras simulaciones.

En la gráfica de la Figura 2.2 se representan, para cada $s \in \{1, \dots, 10000\}$, las tres coordenadas de Q^t —en rojo, la del jugador 1; en verde, la del jugador 2; en azul, la del jugador 3—. De la gráfica se puede extraer la siguiente conclusión: si los tres jugadores emplean los criterios descritos, a la larga el criterio del jugador 2 es el menos provechoso y el criterio del jugador 3 es el más provechoso. Era de esperar que el jugador 2 obtuviese los peores resultados, pues, como estima p a través de una media móvil, hay determinadas sucesiones de inundaciones que lo llevan a jugar D en rondas en las que 1 y 3 ya tienen aprendida la lección de que lo más provechoso es jugar A . En el largo plazo esto perjudica al jugador 2 por la siguiente razón: si el perfil de estrategias jugado en una cierta ronda es (A, D, A) , los pagos resultantes son $(95, 110, 95)$ si la inundación es normal y $(80, 30, 80)$ si es extrema; por tanto, como las inundaciones normales y extremas son equiprobables, el perfil (A, D, A) reporta en promedio peores resultados al jugador 2 que a los jugadores 1 y 3.

Algo que merece la pena resaltar es que, a lo largo de las 10000 simulaciones, el jugador 3 tiene más probabilidad de construir su dique (26.56 %) que el jugador 1 (24.74 %). En la Figura 2.3 se representa la proporción de veces que cada $i \in N$ juega D en cada ronda $r \in \{1, \dots, 10\}$. En primer lugar, la gráfica sirve para comprobar que, debido a las características de los criterios de decisión empleados, las decisiones de los tres jugadores coinciden siempre en las tres primeras rondas. El efecto de que la decisión del jugador 2 venga determinada por el cálculo de una media móvil se aprecia claramente en las últimas rondas. Un detalle digno de atención es la disparidad que se produce entre las cantidades de diques construidos por los jugadores 1 y 3 en la ronda 5, seguramente debida la influencia de las

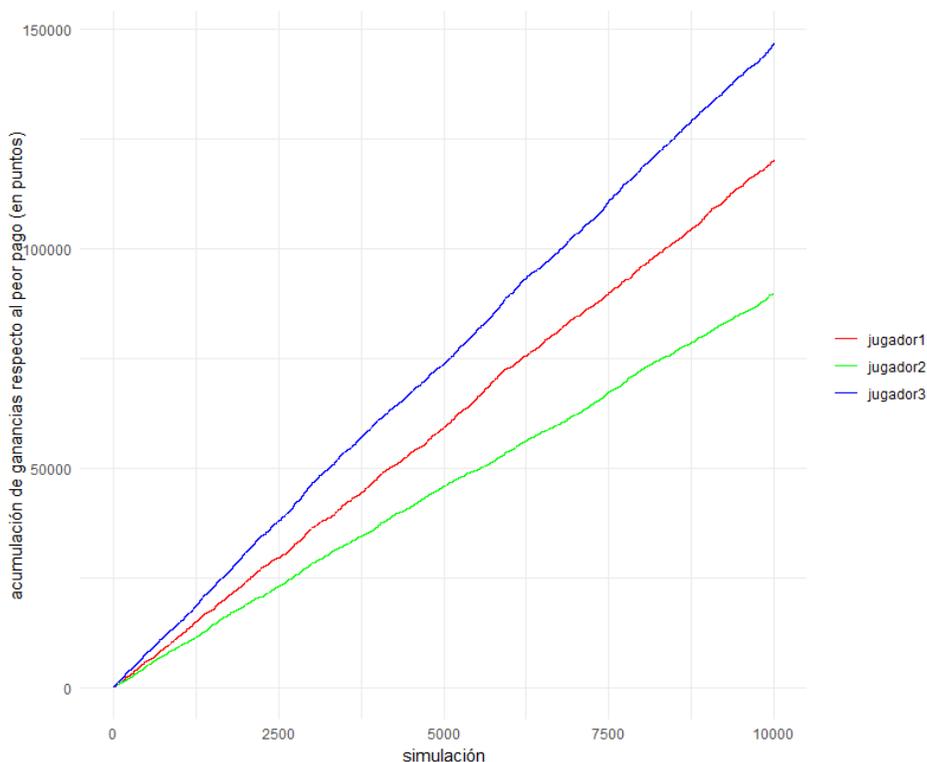


Figura 2.2: Comparación de los tres criterios de decisión a lo largo de 10000 simulaciones.

inundaciones ficticias sobre el estimador empleado por el jugador 3.

2.2.2. Simulaciones con distintos valores de p

Por el análisis previo se sabe que, si $p = \frac{1}{2}$ y los criterios de decisión utilizados los jugadores son los propuestos, cabe esperar que el jugador que aplica el criterio de decisión basado en la regla de sucesión de Laplace salga mejor parado. Esto, sin embargo, no da información sobre lo que ocurre cuando los valores de p son otros. Desde la perspectiva de quien participa en el experimento, como el valor de p es desconocido, lo ideal sería encontrar un método de decisión que funcionase bien en general, no solo en ciertas condiciones específicas no garantizadas. Este razonamiento motiva la siguiente pregunta: ¿los resultados vistos se dan exclusivamente para $\frac{1}{2}$ o se pueden extrapolar al resto de posibles valores de p ?

Con el fin de dar una respuesta, se simulan 3000 iteraciones del experimento para 201 valores distintos de p repartidos a lo largo del intervalo $[0, 1]$, siguiendo el Código B.3 (ver apéndice). Para cada valor de p considerado, se calcula el pago final medio de cada jugador a lo largo de las 3000 iteraciones. Los resultados se representan en la Figura 2.4. En primer lugar, salta a la vista que, cuanto más extremo (en el sentido de cercano a 0 o a 1) es el valor de p , más se igualan los resultados de los tres criterios. Sin embargo, a lo largo de casi todo el intervalo $[0, 1]$ se aprecian diferencias. El jugador 3 es claramente el más beneficiado desde valores muy bajos de p hasta valores superiores a 0.5, y para ningún rango de valores sale peor parado que alguno de los otros dos jugadores. El jugador 2 es ligeramente mejor que el 1 para valores de p entre 0.1 y 0.3, aproximadamente, pero a partir de 0.3 se revierte la tendencia.

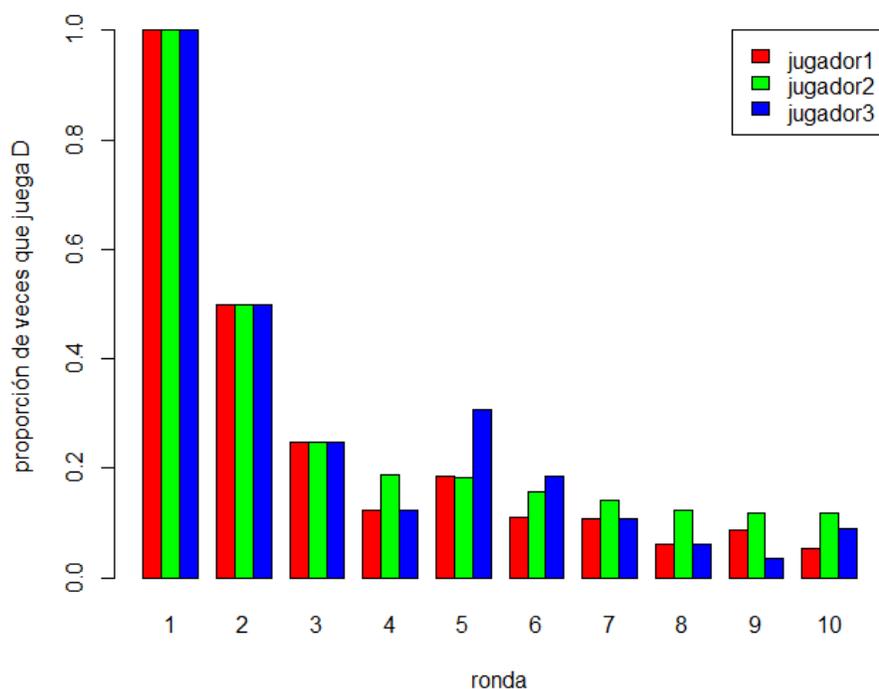


Figura 2.3: Proporción de veces que cada jugador juega D en cada ronda.

Según crece p , el jugador 1 va acercándose al 3, y para valores de p algo superiores a 0.5 la diferencia deja de ser notable. El jugador 2, sin embargo, se mantiene por debajo hasta que se alcanzan los valores más altos de p , en los que los tres jugadores prácticamente se igualan.

Atendiendo a la Figura 2.4, tiene sentido concluir que el criterio del jugador 3 sale ganando en la comparación global y no solo en el caso concreto de $p = \frac{1}{2}$, pues es el mejor para un rango considerable de valores de p y no existe un rango de valores para el que sea visiblemente peor que alguno de los otros dos. La ventaja del jugador 3 podría estar en que su criterio de decisión va un paso más allá que los criterios de los jugadores 1 y 2, en el sentido de que estos jugadores toman su decisión únicamente en función de sus estimaciones de p —es decir, cada uno de ellos se pregunta «con la información que tengo, ¿a qué juego estimo estoy jugando?»—, mientras que el jugador 3 tiene en cuenta toda la distribución de p —es decir, se hace la pregunta de «con la información que tengo, ¿cómo de probable es cada posible pago?»—. En definitiva, si el jugador 3 considera que los jugadores 1 y 2 son capaces de estimar p competentemente, el criterio basado en la regla de sucesión de Laplace modificada le garantiza un pago esperado igual de bueno o mejor que el de los otros jugadores.

2.3. Modalidad cooperativa

Tal como se explicó en la Subsección 2.1, en el experimento de Chan, Chiang y Liao (2023) también se puso en práctica una modalidad de juego en la que los jugadores tenían la posibilidad de comunicarse antes de tomar la decisión de construir o no el dique. En Chan, Chiang y Liao (2023) no se menciona que dicha modalidad diese lugar a situaciones de cooperación pura entre jugadores, pero la causa está quizá en las condiciones concretas del experimento que se llevó a cabo: el método empleado para comunicar a los jugadores, el tiempo del que disponían para ello, la poca preparación teórica o estratégica de los participantes, etc. Al margen de estas circunstancias puntuales, sería interesante saber, en general, qué sucede cuando el experimento se trata desde el punto de vista cooperativo. La presente sección trata de dar una respuesta a esa pregunta, y para ello supone que los participantes del experimento pueden comunicarse y llegar a acuerdos para tomar sus decisiones y repartir los pagos resultantes conjuntamente.

Definición 2.3. Un juego cooperativo con utilidad transferible —en adelante, juego TU— es un par (N, v) donde N es el conjunto de jugadores y $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ es la función característica del juego, de forma que, para cada $S \subset N$, $v(S)$ representa el beneficio conjunto que la coalición S puede garantizarse si sus integrantes cooperan, al margen de lo que hagan los de $N \setminus S$.

En el contexto del experimento de Chan, Chiang y Liao (2023), es evidente que el conjunto de jugadores es $N = \{1, 2, 3\}$ en todas las rondas del juego, pero definir la función característica no es trivial porque los jugadores ignoran cómo se rigen las inundaciones y poseen distinta información en cada una de las rondas. Por tales motivos, lo más razonable ahora es definir un juego TU (N, v_r) para cada ronda $r \in \{1, \dots, 10\}$, de forma que dos rondas distintas puedan tener funciones características distintas. Tal como en el contexto no cooperativo, el hecho de que los jugadores no tengan toda la información causa que se puedan concebir distintas filosofías a la hora de definir la función característica. A continuación se proponen y discuten dos maneras de calcular v_r , siendo r una ronda genérica y denotando con p la probabilidad de que en tal ronda se produzca una inundación extrema, al margen de lo que pueda ocurrir en el resto de las rondas del experimento.

2.3.1. El enfoque más conservador

Dada una coalición $S \subset N$, el enfoque más conservador o pesimista desde la perspectiva de los integrantes de S consiste en suponer que cualquier estrategia conjunta adoptada por S será correspondida por la combinación menos generosa de valor de p y estrategia de $N \setminus S$. Respecto a esto, conviene tener presentes los dos puntos que siguen.

- Por la naturaleza del juego, el peor caso posible para los jugadores de una coalición S siempre será que los jugadores de $N \setminus S$ opten por construir sus diques.
- Todos los pagos de la Tabla 2.1 son inversamente proporcionales a p , así que, independientemente de las estrategias elegidas por S y $N \setminus S$, el peor pago conjunto de S se obtendrá siempre con $p = 1$.

Con el fin de entender mejor cómo calcular en la práctica la función característica determinada por este enfoque conservador, se calcula a continuación, por ejemplo, $v_r(\{1, 2\})$, siendo $r \in \{1, \dots, 10\}$ una ronda arbitraria. Para ello, hay que ver qué pago conjunto puede garantizarse $\{1, 2\}$ con cada una de sus posibles estrategias conjuntas —estas estrategias son (D, D) , (D, A) , (A, D) y (A, A) , aunque, a efectos prácticos, (D, A) y (A, D) son equivalentes—. Dado que $N \setminus \{1, 2\} = \{3\}$, el caso más desfavorable posible para $\{1, 2\}$ se obtiene simplemente suponiendo que $p = 1$ y que el jugador 3 elige siempre D .

- Si $\{1, 2\}$ opta por (D, D) , puede garantizarse un pago conjunto de

$$H_1^1(D, D, D) + H_2^1(D, D, D) = 20.$$

- Si $\{1, 2\}$ opta por (D, A) o (A, D) , puede garantizarse un pago conjunto de

$$H_1^1(D, A, D) + H_2^1(D, A, D) = 110 = H_1^1(A, D, D) + H_2^1(A, D, D).$$

- Si $\{1, 2\}$ opta por (A, A) , puede garantizarse un pago conjunto de

$$H_1^1(A, A, D) + H_2^1(A, A, D) = 160.$$

En definitiva, los integrantes de la coalición $\{1, 2\}$ pueden estar seguros de que si acuerdan jugar la estrategia conjunta (A, A) van a obtener como mínimo un pago conjunto de $v_r(\{1, 2\}) = 160$.

Merece la pena notar que para este enfoque la ronda es irrelevante, pues la mentalidad más conservadora exige suponer siempre que la próxima inundación va a ser extrema, independientemente de lo que haya pasado antes. Por esta razón, se tiene que $v_{r_1}(S) = v_{r_2}(S)$ para cualesquiera $r_1, r_2 \in \{1, \dots, 10\}$ y cualquier $S \subset N$. Aprovechando esto, en lo que sigue se denota la función característica dada por el enfoque pesimista con v , sea cual sea la ronda r del experimento considerada. Para calcular todos los elementos de v solo hay que aplicar al resto de las coaliciones razonamientos similares a los anteriores. Del hecho de que los tres jugadores son idénticos se deduce inmediatamente que $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\})$. Además, como $N \setminus S = \emptyset$, basta observar que el perfil de estrategias (A, A, A) se autoimpone si $p = 1$, y entonces

$$v(N) = H_1^1(A, A, A) + H_2^1(A, A, A) + H_3^1(A, A, A) = 240.$$

Para obtener los valores de las tres condiciones individuales basta calcular uno de ellos. Eligiendo arbitrariamente al jugador 1, al suponer $p = 1$ y que tanto el jugador 2 como el 3 van a elegir D , resulta que:

- si $\{1\}$ opta por D , puede garantizarse un pago de $H_1^1(D, D, D) = 10$;
- si $\{1\}$ opta por A , puede garantizarse un pago de $H_1^1(A, D, D) = 80$.

Por tanto, $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 80$. Juntando todo, se obtiene que la función característica del juego cooperativo según el enfoque más conservador es, en cualquier ronda $r_2 \in \{1, \dots, 10\}$,

$$v = [80, 80, 80; 160, 160, 160; 240].$$

El juego (N, v) es, por tanto, un juego aditivo, o sea, un juego tal que $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ para cualesquiera $S, T \subset N$ tales que $S \cap T = \emptyset$. Esto significa, esencialmente, que el juego no tiene gran interés, pues ninguno de los jugadores tiene incentivos para cooperar con otro. Por ejemplo, para que al jugador 1 le compensase cooperar con el jugador 2 en vez de jugar por su cuenta, el jugador 2 tendría que estar de acuerdo con que el jugador 1 se obtuviese de la cooperación un pago superior a $v(\{1\}) = 80$; pero, como $v(\{1, 2\}) = 160 = 2 \cdot 80$, el jugador 2 tendría que llevarse entonces un pago inferior a $v(\{2\}) = 80$. En conclusión: el enfoque más pesimista no sirve realmente para revelar información sobre lo que podría ocurrir en el experimento cuando los jugadores tienen la oportunidad de cooperar.

2.3.2. Juego cooperativo basado en la estimación de p

Una manera sencilla de reducir el quizá excesivo pesimismo del enfoque anterior es eliminando la suposición de que el valor de p es el más perjudicial posible. El problema de esta modificación es que conlleva introducir arbitrariedad en el cálculo de la función característica: si no se supone el valor más pesimista de p , entonces ¿qué se supone? Siguiendo la línea de las secciones anteriores, una opción sencilla e inmediata es estimar p y definir cada $v_r(S)$ de forma que no refleje el pago conjunto que S

puede garantizarse sino una estimación del pago conjunto esperado que en vista de los datos puede garantizarse —lo cual implica, claro, la posibilidad de que una coalición obtenga en la práctica un pago menor que el pago conjunto esperado que podría garantizarse en vista del estimador—.

Dado que p es siempre inversamente proporcional al beneficio de los jugadores —véase, de nuevo, la Tabla 2.1—, el nivel de optimismo de la función característica se puede regular a través de la elección del estimador de p . En la Sección 2.2, el jugador 1 utilizaba el estimador $\hat{p}_r^I = \frac{e_r}{r-1}$; a efectos de definir la función característica v , podría decirse que \hat{p}_r^I es un estimador ingenuo y optimista, pues confía todo a la muestra y no se protege de la posibilidad muy real de que $\hat{p}_r^I < p$. Para obtener estimadores que no sean tan ingenuos como \hat{p}_r^I ni tan pesimistas como la suposición de $p = 1$, solo habría que aplicar un procedimiento similar al de la regla de sucesión de Laplace, o sea, imponer a priori la ocurrencia de una cierta cantidad de inundaciones extremas ficticias —cuantas más se añadan, menos optimista será el estimador resultante—. Al ir pasando las rondas y aumentando el número de datos, la aportación de las inundaciones extremas ficticias al estimador va perdiendo importancia en comparación con la muestra, lo cual es deseable y coherente si se pretende que la función característica no sea demasiado ingenua ni demasiado pesimista.

Para obtener en la práctica la función característica de la ronda $r \in \{1, \dots, 10\}$ a través de uno de estos enfoques más optimistas, basta tener en cuenta que, como todos los pagos del juego son de la forma $H_i^p(x_1, x_2, x_3) = a + bp$, la estimación del pago esperado para el jugador i y el perfil de estrategias (x_1, x_2, x_3) es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H_i^p(x_1, x_2, x_3) \mid Y_1 = x_1, \dots, Y_{r-1} = x_{r-1}] &= \mathbb{E}[a + bp \mid Y_1 = x_1, \dots, Y_{r-1} = x_{r-1}] \\ &= a + b \mathbb{E}[p \mid Y_1 = x_1, \dots, Y_{r-1} = x_{r-1}]. \end{aligned}$$

Por tanto, si la distribución a posteriori de p tras las $r - 1$ primeras rondas conduce al estimador

$$\hat{p}_r := \mathbb{E}[p \mid Y_1 = x_1, \dots, Y_{r-1} = x_{r-1}] = \mathbb{P}(Y_r = 1 \mid Y_1 = x_1, \dots, Y_{r-1} = x_{r-1}),$$

resulta que

$$\mathbb{E}[H_i^p(x_1, x_2, x_3) \mid Y_1 = x_1, \dots, Y_{r-1} = x_{r-1}] = a + b \hat{p}_r = H_i^{\hat{p}_r}(x_1, x_2, x_3).$$

Al igual que en el enfoque más conservador, para calcular lo que una coalición S puede garantizarse por sí misma al margen de lo que hagan los jugadores de $N \setminus S$, se supone que los jugadores de $N \setminus S$ se van a comportar de la manera más perjudicial para S . Esto se traduce siempre en que los jugadores de $N \setminus S$ construyan sus diques, independientemente de la estimación de p . Con esto presente, se calcula de nuevo, a modo de ejemplo, $v_r(\{1, 2\})$, con el estimador arbitrario \hat{p}_r .

- Si $\{1, 2\}$ opta por (D, D) , se estima que puede garantizarse un pago conjunto esperado de

$$H_1^{\hat{p}_r}(D, D, D) + H_2^{\hat{p}_r}(D, D, D) = 220 - 200 \hat{p}_r.$$

- Si $\{1, 2\}$ opta por (D, A) o por (A, D) , se estima que puede garantizarse un pago conjunto esperado de

$$H_1^{\hat{p}_r}(D, A, D) + H_2^{\hat{p}_r}(D, A, D) = 195 - 85 \hat{p}_r.$$

- Si $\{1, 2\}$ opta por (A, A) , se estima que puede garantizarse un pago conjunto esperado de

$$H_1^{\hat{p}_r}(A, A, D) + H_2^{\hat{p}_r}(A, A, D) = 190 - 30 \hat{p}_r.$$

Para hallar $v_r(S)$ simplemente hay que determinar, en función de \hat{p}_r , cuál de las cantidades recién calculadas es mayor. Se compara primero la estimación para la estrategia (D, D) con la estimación para las estrategias (D, A) y (A, D) :

$$220 - 200\hat{p}_r \geq 195 - 85\hat{p}_r \iff 25 \geq 115\hat{p}_r \iff \hat{p}_r \leq \frac{5}{23};$$

es decir, la estimación del pago conjunto esperado para la estrategia (D, D) es mejor o igual que la estimación para las estrategias (D, A) y (A, D) si y solo si $\hat{p}_r \leq \frac{5}{23}$. Se introduce ahora la estrategia (A, A) en la comparación:

- $220 - 200\hat{p}_r \geq 190 - 30\hat{p}_r \iff 30 \geq 170\hat{p}_r \iff \hat{p}_r \leq \frac{3}{17}$,
- $190 - 30\hat{p}_r \geq 195 - 85\hat{p}_r \iff 55\hat{p}_r \geq 5 \iff \hat{p}_r \geq \frac{1}{11}$.

Dado que $\frac{1}{11} < \frac{3}{17} < \frac{5}{23}$, al juntar todas las desigualdades se llega a la conclusión de que, para maximizar la estimación de su pago conjunto esperado, S debe optar por (D, D) si $\hat{p}_r < \frac{3}{17}$, por (A, A) si $\hat{p}_r > \frac{3}{17}$, y por cualquiera de las dos estrategias si $\hat{p}_r = \frac{3}{17}$; este resultado queda plasmado en la Figura 2.5. En definitiva, al aplicar el enfoque de la estimación puntual con estimador \hat{p}_r se obtiene que

$$v_r(\{1, 2\}) = \begin{cases} 220 - 200\hat{p}_r & \text{si } \hat{p}_r \leq \frac{3}{17}, \\ 190 - 30\hat{p}_r & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Lógicamente, como los tres jugadores son idénticos, se cumple que $v_r(\{1, 2\}) = v_r(\{1, 3\}) = v_r(\{2, 3\})$ para toda ronda $r \in \{1, \dots, 10\}$. Para obtener el resto de valores de la función característica solo hay que aplicar los mismos razonamientos a las coaliciones restantes. Para la coalición total se tiene lo siguiente.

- Si N opta por (D, D, D) , se estima que puede garantizarse un pago conjunto estimado de

$$H_1^{\hat{p}_r}(D, D, D) + H_2^{\hat{p}_r}(D, D, D) + H_3^{\hat{p}_r}(D, D, D) = 330 - 300\hat{p}_r.$$

- Si N opta por (D, D, A) , (D, A, D) o (A, D, D) , se estima que puede garantizarse un pago conjunto esperado de

$$H_1^{\hat{p}_r}(D, D, A) + H_2^{\hat{p}_r}(D, D, A) + H_3^{\hat{p}_r}(D, D, A) = 305 - 165\hat{p}_r.$$

- Si N opta por (D, A, A) , (A, D, A) o (D, A, A) , se estima que puede garantizarse un pago conjunto esperado de

$$H_1^{\hat{p}_r}(D, A, A) + H_2^{\hat{p}_r}(D, A, A) + H_3^{\hat{p}_r}(D, A, A) = 300 - 110\hat{p}_r.$$

- Si N opta por (A, A, A) , se estima que puede garantizarse un pago conjunto esperado de

$$H_1^{\hat{p}_r}(A, A, A) + H_2^{\hat{p}_r}(A, A, A) + H_3^{\hat{p}_r}(A, A, A) = 300 - 60\hat{p}_r.$$

Para ahora obtener $v_r(N)$ hay que comparar las cantidades anteriores en función de \hat{p}_r . Dado que $300 - 110\hat{p}_r \leq 300 - 60\hat{p}_r$ para todo $p \in [0, 1]$, no es necesario tener en cuenta las estrategias (D, A, A) , (A, D, A) y (D, A, A) , pues nunca pueden reportar a N una estimación del pago conjunto esperado mayor que la que reporta (A, A, A) . A continuación se comparan entre sí las demás estrategias.

- $330 - 300\hat{p}_r \geq 305 - 165\hat{p}_r \iff \hat{p}_r \leq \frac{5}{27}$.
- $330 - 300\hat{p}_r \geq 300 - 60\hat{p}_r \iff \hat{p}_r \leq \frac{1}{8}$.

$$\blacksquare 330 - 60\hat{p}_r \geq 305 - 165\hat{p}_r \iff \hat{p}_r \geq \frac{1}{21}.$$

Dado que $\frac{1}{21} < \frac{1}{8} < \frac{5}{27}$, la estimación del pago conjunto esperado de N se maximiza si N juega (D, D, D) cuando $\hat{p}_r < \frac{1}{8}$, (A, A, A) cuando $\hat{p}_r > \frac{1}{8}$, y cualquiera de las dos estrategias cuando $\hat{p}_r = \frac{1}{8}$. Estas comparaciones quedan reflejadas en la Figura 2.5. En definitiva, al aplicar el enfoque de la estimación puntual con estimador \hat{p}_r se obtiene que

$$v_r(N) = \begin{cases} 330 - 300\hat{p}_r & \text{si } \hat{p}_r \leq \frac{1}{8}, \\ 300 - 60\hat{p}_r & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para tener la función característica v_r al completo solo falta conocer el valor de las coaliciones individuales. De nuevo, por ser los jugadores idénticos, se tiene que $v_r(1) = v_r(2) = v_r(3)$, así que basta ver qué ocurre con el jugador 1.

- Si $\{1\}$ opta por D , se estima que puede garantizarse un pago esperado de $H_1^{\hat{p}_r}(D, D, D) = 110 - 100\hat{p}_r$.
- Si $\{1\}$ opta por A , se estima que puede garantizarse un pago esperado de $H_1^{\hat{p}_r}(A, D, D) = 85 - 5\hat{p}_r$.

Dado que $110 - 100\hat{p}_r \geq 85 - 5\hat{p}_r$ si y solo si $\hat{p}_r \leq \frac{5}{19}$, se llega a que

$$v_r(\{1\}) = \begin{cases} 110 - 100\hat{p}_r & \text{si } \hat{p}_r \leq \frac{5}{19}, \\ 85 - 5\hat{p}_r & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A partir de todo lo anterior ya se puede determinar exactamente v_r en función de \hat{p}_r . Para no complicar la notación sin motivo, como las funciones características que aparecen son de la forma $v_r = [a, a, a; b, b, b; c]$, se escribirá simplemente $v_r = [a; b; c]$. Así, juntando todo y teniendo en cuenta que $\frac{1}{8} < \frac{3}{17} < \frac{5}{19}$, se obtiene que la función característica de la ronda r del juego cooperativo según la estimación \hat{p}_r es

$$v_r = \begin{cases} [110 - 100\hat{p}_r; 220 - 200\hat{p}_r; 330 - 300\hat{p}_r] & \text{si } 0 \leq \hat{p}_r \leq \frac{1}{8}, \\ [110 - 100\hat{p}_r; 220 - 200\hat{p}_r; 300 - 60\hat{p}_r] & \text{si } \frac{1}{8} < \hat{p}_r \leq \frac{3}{17}, \\ [110 - 100\hat{p}_r; 190 - 30\hat{p}_r; 300 - 60\hat{p}_r] & \text{si } \frac{3}{17} < \hat{p}_r \leq \frac{5}{19}, \\ [85 - 5\hat{p}_r; 190 - 30\hat{p}_r; 300 - 60\hat{p}_r] & \text{si } \frac{5}{19} < \hat{p}_r \leq 1. \end{cases}$$

Lo primero que vale la pena decir de los juegos cooperativos anteriores es que, a diferencia del dado por el enfoque conservador, sí tienen cierto interés, en el sentido de que los jugadores pueden tener razones para colaborar. Por ejemplo, si $\hat{p}_r = \frac{1}{6} \in (\frac{1}{8}, \frac{3}{16})$, resulta que $v_r = [\frac{280}{3}; \frac{560}{3}; 290]$, y este es un juego en el que hay incentivos para que los tres jugadores cooperen y se forme la coalición total.

2.3.3. Comentarios sobre el juego cooperativo

Definición 2.4. El núcleo de un juego TU (N, v) , $C(N, v)$, es el conjunto de las asignaciones que cumplen eficiencia y racionalidad coalicional, esto es,

$$C(N, v) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ para toda } S \subset N \right\}.$$

Esencialmente, un juego con núcleo no vacío es un juego en el que existe al menos una asignación que no da razones a ninguna coalición para oponerse a la formación de la coalición total. El juego dado por

el enfoque conservador es aditivo, así que estrictamente tiene núcleo no vacío, pero este está formado por un único punto y ninguna coalición tiene tampoco motivos para desear la formación de la coalición total. Con los juegos que se obtienen al aplicar el enfoque de la estimación de p no ocurre lo mismo, pues resultan núcleos que sí incentivan activamente la formación de la coalición total. Para entender esto mejor, se calcula a continuación $C(N, v_r)$ en función de \hat{p}_r .

- Si $\hat{p}_r \in [0, \frac{1}{8}]$, $v_r = [110 - 100\hat{p}_r; 220 - 200\hat{p}_r; 330 - 300\hat{p}_r]$ es un juego aditivo, y entonces su núcleo está formado por una única asignación:

$$\begin{aligned} C(N, v_r) &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \geq 110 - 100\hat{p}_r; \\ &\quad x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3 \geq 220 - 200\hat{p}_r; \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 = 330 - 300\hat{p}_r\} \\ &= \{(110 - 100\hat{p}_r, 110 - 100\hat{p}_r, 110 - 100\hat{p}_r)\}. \end{aligned}$$

- Si $\hat{p}_r \in (\frac{1}{8}, \frac{3}{17}]$, $v_r = [110 - 100\hat{p}_r; 220 - 200\hat{p}_r; 300 - 60\hat{p}_r]$, y entonces

$$\begin{aligned} C(N, v_r) &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \geq 110 - 100\hat{p}_r; \\ &\quad x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3 \geq 220 - 200\hat{p}_r; \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 = 300 - 60\hat{p}_r\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \geq 110 - 100\hat{p}_r; \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 = 300 - 60\hat{p}_r\}. \end{aligned}$$

Dado que $3 \cdot (110 - 100\hat{p}_r) < 300 - 60\hat{p}_r$ para todo $\hat{p}_r > \frac{1}{8}$, v_r no es un juego aditivo, el núcleo contiene infinitas asignaciones, y los jugadores tienen incentivos para cooperar y formar la coalición total.

- Si $\hat{p}_r \in (\frac{3}{17}, \frac{5}{19}]$, $v_r = [110 - 100\hat{p}_r; 190 - 30\hat{p}_r; 300 - 60\hat{p}_r]$, y entonces

$$\begin{aligned} C(N, v_r) &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \geq 110 - 100\hat{p}_r; \\ &\quad x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3 \geq 190 - 30\hat{p}_r; \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 = 300 - 60\hat{p}_r\}. \end{aligned}$$

Observando ahora que $2 \cdot (110 - 100\hat{p}_r) < 190 - 30\hat{p}_r$ para todo $\hat{p}_r > \frac{3}{17}$ y que $\frac{3}{2} \cdot 190 - 30\hat{p}_r < 300 - 60\hat{p}_r$ para todo $\hat{p}_r < 1$, el núcleo de v_r vuelve a contener infinitas asignaciones y los jugadores vuelven a tener incentivos para formar la coalición total.

- Si $\hat{p}_r \in (\frac{5}{19}, 1]$, $v_r = [85 - 5\hat{p}_r; 190 - 30\hat{p}_r; 300 - 60\hat{p}_r]$, y entonces

$$\begin{aligned} C(N, v_r) &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \geq 85 - 5\hat{p}_r; \\ &\quad x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3 \geq 190 - 30\hat{p}_r; \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 = 300 - 60\hat{p}_r\}. \end{aligned}$$

Añadiendo ahora que $2 \cdot (85 - 5\hat{p}_r) < 190 - 30\hat{p}_r$ y que $3 \cdot (85 - 5\hat{p}_r) < 300 - 60\hat{p}_r$ para todo $\hat{p}_r < 1$, los jugadores vuelven a tener incentivos para formar la coalición total salvo en el caso particular $\hat{p}_r = 1$. Esto no debe sorprender, pues, si $\hat{p}_r = 1$, entonces la función característica v_r es exactamente igual a la función característica asociada al enfoque conservador.

En la Figura 2.6 se representan los núcleos de 201 juegos (N, v_r) distintos, cada uno asociado a un valor de \hat{p}_r —se toman 201 valores equiespaciados entre 0 y 1—. Los puntos sueltos alineados se corresponden con los núcleos de los juegos aditivos que surgen cuando $\hat{p}_r \leq \frac{1}{8}$. Los núcleos que tienen

forma poligonal se corresponden con los juegos asociados a los estimadores $\hat{p}_r \in (\frac{1}{8}, 1)$, y se aprecia que, según \hat{p}_r se acerca a 1, estos núcleos convergen a un punto: el núcleo del juego aditivo asociado a $\hat{p}_r = 1$, que coincide con el juego conservador.

De todo lo anterior se puede extraer la siguiente conclusión principal: en la modalidad cooperativa del experimento de Chan, Chiang y Liao (2023), si los participantes estiman que la probabilidad de inundación extrema en una cierta ronda está en el intervalo $(\frac{1}{8}, 1)$, entonces tiene sentido afirmar que la cooperación puede resultarles más rentable que jugar por separado. Por tanto, recordando que en el experimento real se emplea el parámetro $p = \frac{1}{2}$, sería previsible que un grupo de participantes racionales con posibilidad de comunicación encontrase razones para colaborar.

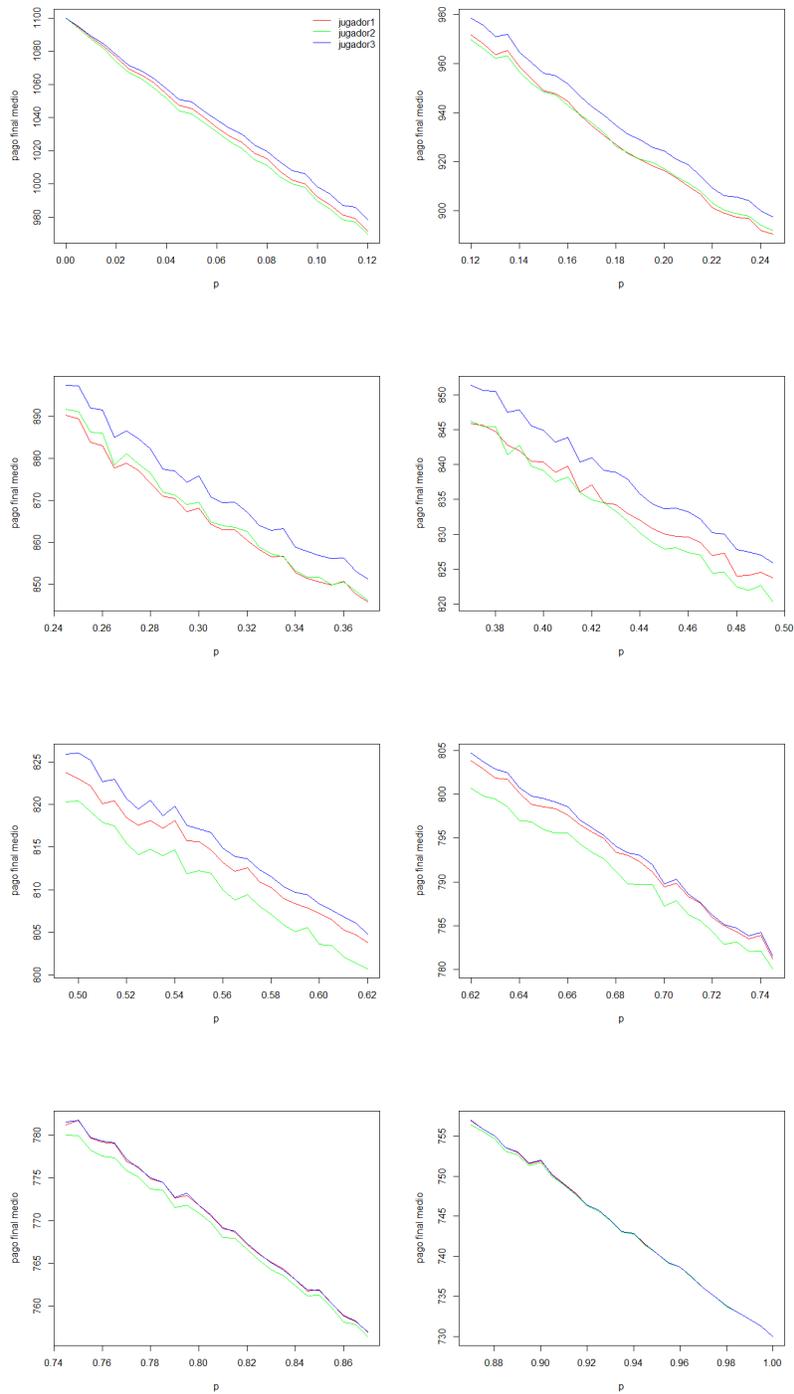


Figura 2.4: Pago total medio de cada jugador en función del valor de p .

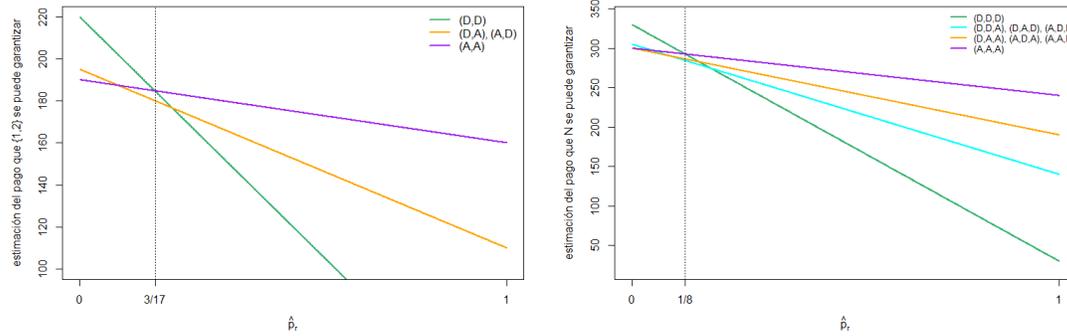


Figura 2.5: Estimación del pago conjunto esperado que $\{1, 2\}$ y N pueden asegurarse según \hat{p}_r .

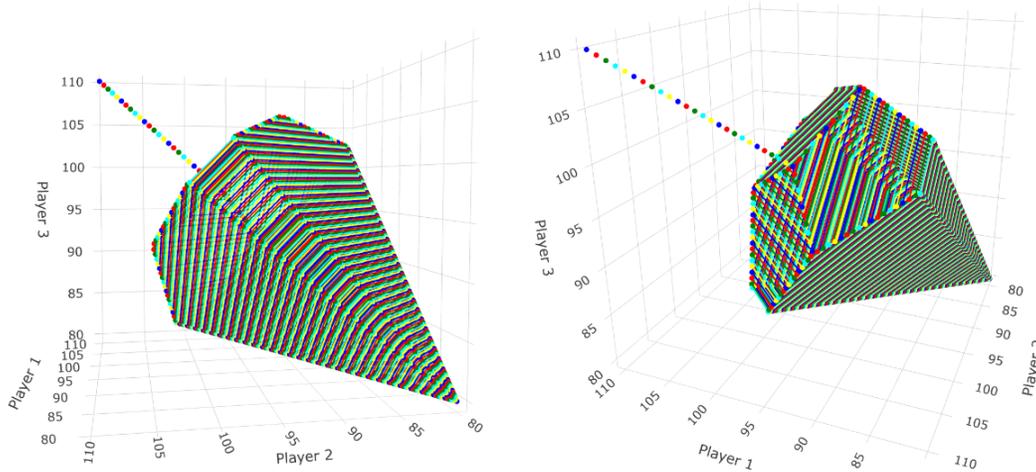


Figura 2.6: Dos perspectivas de los núcleos de (N, v_r) asociados a 201 valores distintos de \hat{p}_r .

Capítulo 3

Juegos de inundación

En este capítulo se aborda el asunto de la prevención de riesgos a través de la reconfiguración de las tierras adyacentes a un río. Para ello, se recurre a la teoría de juegos cooperativos y se sigue mayormente el modelo de Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019).

3.1. El modelo

El primer objetivo es definir los juegos TU a los que se va a hacer referencia durante todo el capítulo: los juegos de inundación. Conviene recordar que un juego TU es un par (N, v) donde N es el conjunto de jugadores y $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ es la función característica, que asocia a cada coalición $S \subset N$ el beneficio que sus integrantes pueden garantizarse si cooperan, al margen de lo que hagan los jugadores de $N \setminus S$. En los juegos de inundación, el conjunto de jugadores $N = \{1, 2, \dots, n\}$ hace referencia al conjunto de las tierras —o, equivalentemente, al conjunto de sus terratenientes, que pueden ser personas, grupos de personas, órganos administrativos, etc.— de una cuenca fluvial. Para definir la función característica es necesario antes hablar de la naturaleza del juego.

Partiendo de la suposición natural de que, cuando se produce una inundación, el estado de una tierra de una cuenca fluvial puede afectar a las tierras que respecto de ella están río abajo pero no a las tierras que respecto de ella están río arriba, la existencia de dependencia entre las tierras de una cuenca fluvial puede modelizarse mediante un grafo \mathcal{G} sin ciclos, en el que los nodos se corresponden con los elementos de N y en el que un arco (i, j) aparece en \mathcal{G} si la tierra i está río arriba respecto de la tierra j . En tal caso, siguiendo lo argumentado en Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019), la influencia de i sobre j viene marcada por un factor crucial: los bosques retienen mejor el agua que los demás tipos de terreno, y entonces, si la tierra i es un bosque y no un terreno dedicado a la agricultura o a cualquier otro propósito, se reduce el impacto que una posible inundación tendría tanto sobre i como sobre j . En esta noción radica el interés y la razón de ser del juego cooperativo: aunque al terrateniente i , por sí mismo, le salga más rentable tener en su tierra algo que no es un bosque, si coopera y negocia con otros terratenientes, es posible que alcancen una disposición conjunta en la que i , como bosque, recibe a fin de cuentas un beneficio mayor que el que recibiría por sí mismo.

Con lo anterior presente, se introduce ahora la notación de los elementos que van a regir la función característica del juego de inundación. Se consideran, dado un conjunto de tierras $N = \{1, 2, \dots, n\}$, los vectores $f = (f_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+^N$ y $a = (a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+^N$, siendo f_i el beneficio individual directo que i obtiene si es un bosque y a_i el beneficio individual directo que i obtiene si no es un bosque, al margen de toda

posibilidad de cooperación y negociación con los demás jugadores. Para modelizar las relaciones entre tierras, se utiliza una matriz $B = (b_{ij})_{i,j \in N}$ en la que $b_{ij} > 0$ si $(i, j) \in \mathcal{G}$ y $b_{ij} = 0$ si $(i, j) \notin \mathcal{G}$; a las cantidades b_{ij} se les llama externalidades. El modelo de Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) considera que para que se produzca la externalidad b_{ij} no basta con que i sea un bosque, sino que además se requiere que j no lo sea. Tal consideración es totalmente legítima si hay razones para pensar que, si j es un bosque, el impacto sobre j de una inundación no se reduce en mayor medida por el hecho de que tierras que están río arriba respecto de j sean también bosques.

Definición 3.1. Un problema de inundación es una quintupla $(N, \mathcal{G}, f, a, B)$. Cada problema de inundación determina un juego de inundación (N, v) .

Dado que, para cada $S \subset N$, $v(S)$ debe representar el beneficio que S puede garantizarse por sí misma, el cálculo de $v(S)$ en los juegos de inundación debe tener en cuenta la posibilidad de que los jugadores de $N \setminus S$ se dispongan de la manera menos favorable para S . Y, dentro de la estructura recién explicada, el caso más pesimista desde el punto de vista de S sería que no se produjese ni una sola externalidad entre miembros de S y miembros de $N \setminus S$. Por tanto, la cantidad $v(S)$ debe ser la suma de los beneficios que los terratenientes de S obtienen de sus propias tierras y las externalidades que las tierras de S que son bosques generan a las tierras de S que no lo son:

$$v(S) = \max_{F \subset S} \Psi(F, S, f, a, B), \quad \text{donde} \quad \Psi(F, S, f, a, B) = \left\{ \sum_{i \in F} f_i + \sum_{j \in S \setminus F} a_j + \sum_{\substack{i \in F \\ j \in S \setminus F}} b_{ij} \right\}.$$

Cada una de las posibles disposiciones de las tierras de una coalición S se denomina configuración. Se dice que una configuración de S es óptima si reporta a S un beneficio conjunto de $v(S)$, al margen de lo que hagan los integrantes de $N \setminus S$. Se utiliza r_S para hacer referencia a la cantidad de configuraciones óptimas de S , denotadas con OC_r^S , $r \in \{1, \dots, r_S\}$, e identificadas, por simplicidad, con el conjunto de tierras que en ellas son bosques; es decir: si OC_r^S es una configuración óptima de S en la que los bosques están, por ejemplo, en las tierras i, j y k , se escribe $OC_r^S = \{i, j, k\}$.

Suposición 3.2. Es importante mencionar que, en general, el modelo de Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) no contempla que la matriz de externalidades, $B = (b_{ij})_{i,j \in N}$, tenga cualquier forma, sino que introduce la suposición de que, dados $i, j, k \in N$,

$$(i, j), (j, k) \in \mathcal{G} \implies (i, k) \in \mathcal{G}, b_{ik} \geq b_{ij}.$$

Es decir: si k está río abajo respecto de j y j está río abajo respecto de i , entonces la externalidad que i puede generar a k no puede ser inferior a la externalidad que j puede generar a k . Según Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019), esta suposición está justificada por dos motivos a la vez: por un lado, cuanto más río abajo está una tierra, mayor es el daño que cabe esperar que reciba de una inundación; y, por otro lado, cuanto más río arriba está una tierra, más capacidad de retención de agua cabe esperar de ella. Esta suposición será relevante en el estudio de las propiedades de los juegos de inundación.

Ejemplo 3.3. Se considera una cuenca fluvial en la que hay tres terratenientes distintos, $N = \{1, 2, 3\}$. Si sus tierras son bosques, los terratenientes reciben de ellas los pagos $f = (0, 0, 0)$; si sus tierras están dedicadas a otros usos, los terratenientes reciben de ellas los pagos $a = (2, 2, 2)$. Las posibles externalidades son $b_{12} = 1$, $b_{13} = 4$, $b_{23} = 3$, y $b_{ij} = 0$ en el resto de los casos. Como $b_{13} = 4 > 3 = b_{23}$, se verifica la suposición de que $b_{ik} \geq b_{jk}$ si $(i, j), (j, k) \in \mathcal{G}$. En la Figura 3.1 se representa la situación.

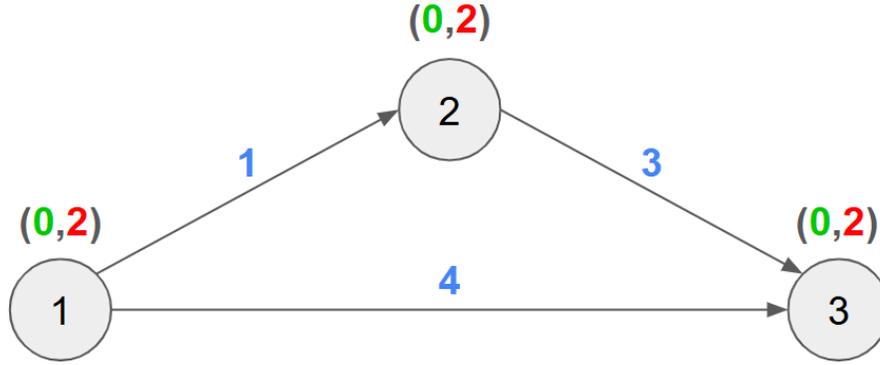


Figura 3.1: Grafo, pagos y externalidades del problema de inundación del Ejemplo 3.3.

Antes de ver el juego cooperativo, vale la pena razonar qué ocurriría si los jugadores no cooperasen o no tuviesen la posibilidad de cooperar. En la Tabla 3.1 se recogen los pagos que las distintas configuraciones reportan a cada jugador, contando con que, si se produce una externalidad, esta va íntegramente para el jugador que la recibe y no para el que se la genera. Igual que cuando se estudiaba el problema de los diques desde la perspectiva no cooperativa, la fila indica la estrategia del jugador 1, la columna indica la del jugador 2, y la subtabla indica la del jugador 3. En vista de la Tabla 3.1, los tres jugadores obtienen un pago individual estrictamente mejor si destinan sus tierras a otros usos, independientemente de lo que hagan los otros dos jugadores. Por tanto, si no hay cooperación entre jugadores, lo más previsible es que los tres decidan dedicar sus tierras a otros usos, obteniendo así los pagos (2, 2, 2).

bosque	bosque	otros usos	otros usos	bosque	otros usos
bosque	0, 0, 0	0, 3, 0	bosque	0, 0, 9	0, 3, 6
otros usos	2, 0, 0	2, 2, 0	otros usos	2, 0, 5	2, 2, 2

Tabla 3.1: Estrategias y pagos del Ejemplo 3.3

El objetivo ahora es ver qué ocurre cuando sí se produce cooperación entre jugadores. Para obtener la función característica del juego hay que calcular qué beneficio se puede garantizar cada coalición por sí misma. Esto quiere decir que las coaliciones individuales no pueden contar con ninguna externalidad, y entonces

$$v(\{i\}) = \max\{f_i, a_i\} = a_i = 2$$

para los tres $i \in N$. Las coaliciones formadas por dos jugadores pueden contar con las externalidades que se producen exclusivamente entre sus dos integrantes. Por tanto:

- $v(\{1, 2\}) = \max\{f_1 + f_2, f_1 + a_2 + b_{12}, a_1 + a_2\} = \max\{0, 3, 4\} = 4,$
- $v(\{1, 3\}) = \max\{f_1 + f_3, f_1 + a_3 + b_{13}, a_1 + a_3\} = \max\{0, 6, 4\} = 6,$
- $v(\{2, 3\}) = \max\{f_2 + f_3, f_2 + a_3 + b_{23}, a_2 + a_3\} = \max\{0, 5, 4\} = 5.$

Por último,

$$\begin{aligned} v(N) &= \text{máx}\{f_1 + f_2 + f_3, f_1 + f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23}, f_1 + a_2 + f_3 + b_{12}, a_1 + f_2 + f_3, \\ &\quad f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13}, a_1 + f_2 + a_3 + b_{23}, a_1 + a_2 + f_3, a_1 + a_2 + a_3\} \\ &= \text{máx}\{0, 9, 3, 2, 9, 7, 4, 6\} = 9. \end{aligned}$$

De lo anterior se extrae, además, que la coalición total tiene dos configuraciones óptimas: una en la que el único bosque es 1 y otra en la que tanto 1 como 2 son bosques; por tanto, se puede afirmar que la condición necesaria y suficiente para que N alcance su beneficio máximo es que 1 sea bosque y 3 no. Juntando los valores de todas las coaliciones, se llega a que la función característica del juego TU es

$$v = [2, 2, 2; 4, 6, 5; 9].$$

Tal como se justificará más adelante, este juego tiene núcleo no vacío y se cumple que $v(N) > v(S) + v(N \setminus S)$ para toda coalición $S \subset N$, así que el desenlace racional en el caso cooperativo es la formación de la coalición total. En la Figura 3.2 se representan el núcleo (área encerrada por las líneas azules) y el core-center (punto verde dentro del núcleo) de v . El core-center, definido en González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2007) como el centro geométrico del núcleo, es una solución puntual, una regla que asigna a cada juego TU con núcleo no vacío un reparto de $v(N)$. En el caso concreto de v , se puede comprobar con el paquete de R TUGLab (dePrado-Saborido et al. (2025)) que el core-center coincide con al menos otras dos soluciones puntuales muy conocidas: el valor de Shapley (Shapley (1952)) y el nucleolo (Schmeidler (1969)). La solución que proponen es $(3, 2.5, 3.5) > (2, 2, 2)$, es decir, asignan a los tres jugadores un pago mayor del que obtendrían si se comportasen racionalmente en el contexto no cooperativo; lo cual, en definitiva, pone de manifiesto la utilidad y la conveniencia de tratar el problema de la configuración de tierras de una cuenca fluvial a través del enfoque cooperativo. \triangle

3.2. Sobre el núcleo de los juegos de inundación

Con los juegos de inundación ya definidos, es natural preguntarse qué condiciones debe cumplir el problema —o sea, cómo deben ser los vectores f y a y la matriz B — para que el núcleo sea no vacío. A estos efectos, se siguen desde ahora los razonamientos de Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019), partiendo de las próximas definiciones.

Definición 3.4. Dado un problema de inundación con conjunto de tierras N y grafo \mathcal{G} , se dice que las tierras $i, j \in N$ son adyacentes si se cumple alguna de estas dos condiciones (mutuamente excluyentes, por ser \mathcal{G} un grafo sin ciclos):

- $(i, j) \in \mathcal{G}$ y no existe $k \in N$ tal que $(i, k), (k, j) \in \mathcal{G}$,
- $(j, i) \in \mathcal{G}$ y no existe $k \in N$ tal que $(j, k), (k, i) \in \mathcal{G}$.

Definición 3.5. Un problema de inundación es saturado si para cualesquiera tierras adyacentes i y j se cumplen estas dos condiciones:

- existe al menos una configuración óptima de N en la que tanto i como j son bosques,
- existe al menos una configuración óptima de N en la que ni i ni j son bosques.

Si $(N, \mathcal{G}, f, a, B)$ es un problema de inundación saturado y (N, v) es el juego de inundación que determina, se dice que (N, v) es un juego de inundación saturado.

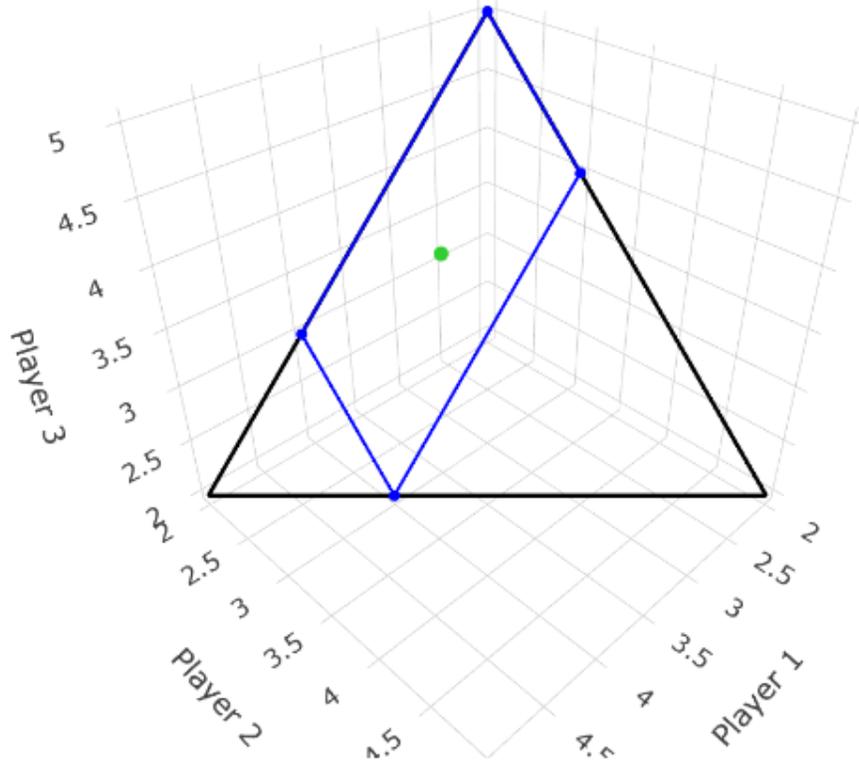


Figura 3.2: Núcleo y core-center del juego TU del Ejemplo 3.3.

El interés de los juegos de inundación saturados radica en que abren una vía para demostrar que los juegos no saturados tienen núcleo no vacío. El primer paso que se da en Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) es probar el siguiente resultado.

Proposición 3.6. *Dado cualquier juego de inundación (N, v) , existe (y se puede calcular) un juego (N, w) que*

- *es saturado,*
- *tiene un grafo asociado con no más arcos que el asociado a (N, v) ,*
- *cumple que $w(N) = v(N)$ y que $w(S) \geq v(S)$ para toda coalición $S \subset N$.*

Además, si (N, v) respeta la Suposición 3.2, puede hallarse un juego (N, w) en las condiciones descritas y que también respeta la Suposición 3.2.

Este resultado es interesante porque, atendiendo a la propia definición de núcleo de un juego TU, se cumple que $C(N, w) \subset C(N, v)$; y entonces, si $C(N, w)$ es no vacío, $C(N, v)$ también debe serlo. Por tal razón, lo ideal sería poder garantizar que los juegos de inundación saturados siempre tienen núcleo no vacío. Desafortunadamente en Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) no se llega a demostrar tal cosa, pero, tal como se expone a continuación, sí se ofrecen motivos para pensar que es cierta siempre que la Suposición 3.2 se respete.

Afirmación 3.7. *Si un problema de inundación saturado $(N, \mathcal{G}, f, a, B)$ respeta la Suposición 3.2, entonces se cumple exactamente una de estas dos condiciones:*

1. $\mathcal{G} = \emptyset$,
2. *existen dos tierras adyacentes $i, j \in N$ tales que $v(S) = v^{-ij}(S)$ para toda $S \subset N$, siendo (N, v) el juego de inundación determinado por $(N, \mathcal{G}, f, a, B)$ y (N, v^{-ij}) el juego de inundación determinado por $(N, \mathcal{G} \setminus \{(i, j)\}, f, a, B')$, donde $b'_{kl} = b_{kl}$ para todo $(k, l) \in \mathcal{G} \setminus \{(i, j)\}$.*

Aunque en Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) no se demuestra la Afirmación 3.7, sí se comprueba su veracidad en un conjunto de más de 640000 juegos de inundación saturados generados aleatoriamente. A continuación se presenta el resultado definitivo que pone de manifiesto la relevancia de la Afirmación 3.7.

Proposición 3.8. *Si la Afirmación 3.7 es cierta, entonces cualquier juego de inundación que respeta la Suposición 3.2 tiene núcleo no vacío.*

Demostración. Sea (N, v) un juego de inundación que respeta la Suposición 3.2. Por la Proposición 3.6, existe un juego de inundación (N, w) saturado que también respeta la Suposición 3.2 y tal que $C(N, w) \subset C(N, v)$. Si la Afirmación 3.7 es cierta, debe darse uno de los dos casos que siguen.

- Si el grafo asociado a (N, w) no tiene ningún arco, entonces no se pueden producir externalidades. En consecuencia, para cualesquiera coaliciones $S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$, se tiene que $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$, lo cual equivale a decir que (N, w) es un juego aditivo. Como los núcleos de los juegos aditivos están formados por la asignación que reporta a cada jugador el valor de su coalición individual, se cumple que $\emptyset \neq C(N, w) \subset C(N, v)$.
- En caso contrario, deben existir tierras adyacentes $i, j \in N$ tales que $w^{-ij} = w$. Denotando con \mathcal{G}_w el grafo asociado a (N, w) y con $\mathcal{G}_{w^{-ij}}$ el grafo asociado a (N, w^{-ij}) , en \mathcal{G}_w se cumple que i y j son tierras adyacentes o, equivalentemente, que no existe otra tierra k tal que $(i, k), (k, j) \in \mathcal{G}_w$. Como los grafos \mathcal{G}_w y $\mathcal{G}_{w^{-ij}}$ solo difieren en el arco (i, j) , tampoco puede existir una tierra k tal que $(i, k), (k, j) \in \mathcal{G}_{w^{-ij}}$, y esto garantiza que la matriz de externalidades asociada a (N, w^{-ij}) también respeta la Suposición 3.2. Por tanto, al juego (N, w^{-ij}) se le puede aplicar desde cero el mismo razonamiento que al principio de esta demostración se aplica a (N, v) . Dado que N tiene un número finito de jugadores, en el grafo original, el asociado a (N, v) , hay una cantidad finita de arcos, y entonces, al aplicar sucesivamente la Proposición 3.6 y la Afirmación 3.7, los arcos van desapareciendo hasta que al cabo de un número finito de iteraciones se alcanza un juego de inundación (N, w') con grafo vacío y tal que $C(N, w') \subset C(N, v)$. Por ser (N, w') aditivo, se puede concluir que $\emptyset \neq C(N, w') \subset C(N, v)$.

□

Resumiendo: si se pudiese probar que la Afirmación 3.7 es cierta, estaría demostrado que todos los juegos que cumplen la Suposición 3.2 tienen núcleo no vacío. En ausencia de tal certeza, el trabajo de Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) se complementa aquí con la demostración de que el núcleo es efectivamente no vacío si el juego de inundación tiene tres jugadores y respeta la Suposición 3.2. Para garantizar tal cosa, bastaría probar que la Afirmación 3.7 es verdadera en el subconjunto de juegos de inundación considerado (ver Proposición A.1 en el apéndice); sin embargo, el resultado que se presenta a continuación es más fuerte.

Proposición 3.9. *Si un problema de inundación $(N, \mathcal{G}, f, a, B)$ con $|N| = 3$ respeta la Suposición 3.2, el juego de inundación que determina es convexo.*

Demostración. Un juego (N, v) es convexo si y solo si

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

para cualesquiera $S, T \subset N \setminus \{i\}$ con $S \subset T$ y para todo $i \in N$. Dado que el caso $S = T$ es trivial, para $N = \{1, 2, 3\}$ se tendrá que (N, v) es convexo si y solo si

$$v(N) - v(\{j, k\}) \geq v(\{i, j\}) - v(\{j\}) \quad (3.1)$$

para todas las permutaciones de $i, j, k \in N$ con $i \neq j \neq k \neq i$. El objetivo de la demostración es comprobar que estas desigualdades se satisfacen. Teniendo en cuenta que $N = \{1, 2, 3\}$ y que \mathcal{G} no puede tener ciclos, la estructura de \mathcal{G} debe ser, al margen de posibles intercambios de identidad entre jugadores, una de estas:

- $\mathcal{G} = \emptyset$,
- $\mathcal{G} = \{(1, 2)\}$,
- $\mathcal{G} = \{(1, 2), (1, 3)\}$,
- $\mathcal{G} = \{(1, 3), (2, 3)\}$,
- $\mathcal{G} = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

Lo anterior implica que la estructura de la matriz de externalidades B debe ser, también al margen de posibles intercambios de identidad entre jugadores, una de estas cinco:

1. $b_{ij} = 0$ para cualesquiera $i, j \in N$.
2. $b_{12} > 0$, $b_{ij} = 0$ en el resto de los casos.
3. $b_{12}, b_{13} > 0$, $b_{ij} = 0$ en el resto de los casos.
4. $b_{13}, b_{23} > 0$, $b_{ij} = 0$ en el resto de los casos.
5. $b_{12} > 0 < b_{23} \geq b_{13}$ (aplica la Suposición 3.2), $b_{ij} = 0$ en el resto de los casos.

Es importante notar, de cara a lo que sigue, que la estructura 4 es la única en el que puede ocurrir que $b_{13} < b_{23}$; en todas las demás posibles estructuras de B , está garantizado que $b_{13} \geq b_{23}$. A continuación, se prueba la convexidad del juego (N, v) viendo que para todas las permutaciones de los jugadores de N se cumple la desigualdad 3.1.

- $(i, j, k) = (1, 2, 3)$. Hay que ver que $v(N) - v(\{2, 3\}) \geq v(\{1, 2\}) - v(\{2\})$.

Para la coalición $\{1, 2\}$ debe cumplirse una de estas dos condiciones excluyentes: o bien su única configuración óptima es $\{1\}$, o bien $v\{1, 2\} = v(\{1\}) + v(\{2\})$. Si el caso que se da es el segundo, la desigualdad 3.1 se cumple trivialmente, pues

$$v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) = v(\{1\}) \leq v(N) - v(\{2, 3\}).$$

Por tanto, queda ver qué ocurre cuando la única configuración óptima de $\{1, 2\}$ involucra externalidad positiva, o sea, cuando la única configuración óptima es $\{1\}$ con $b_{12} > 0$ y de tal forma que $v(\{1, 2\}) = f_1 + a_2 + b_{12}$. La apreciación de que $b_{12} > 0$ es relevante porque implica que la estructura de B no puede ser la 4, y entonces está garantizado que $b_{13} \geq b_{23}$, una condición que próximamente será útil.

Ahora, sobre la coalición $\{2, 3\}$ se puede decir que, o bien su única configuración óptima es $\{2\}$, o bien se cumple que $v(\{2, 3\}) = v(\{2\}) + v(\{3\})$. Si el caso que se da es el segundo, entonces

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{2, 3\}) &= v(N) - (v(\{2\}) + v(\{3\})) \\ &\geq (f_1 + a_2 + v(\{3\}) + b_{12}) - (v(\{2\}) + v(\{3\})) \\ &= f_1 + a_2 + b_{12} - v(\{2\}) = v(\{1, 2\}) - v(\{2\}), \end{aligned}$$

de forma que se cumple la desigualdad 3.1. Falta por estudiar qué sucede si la única configuración óptima de $\{2, 3\}$ es $\{2\}$, caso en el que $v(\{2, 3\}) = f_2 + a_3 + b_{23}$. Para ello, lo que se hace es ver qué configuraciones de N pueden ser óptimas y comprobar que la desigualdad 3.1 se cumple en los casos en los que procede.

- En las configuraciones $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3\}$ y \emptyset , el jugador 1 no produce ninguna externalidad; y entonces, fijada la suposición de que la única configuración óptima de $\{2, 3\}$ es $\{2\}$, ninguna de las cuatro puede ser óptima.
- $\{2\}$ no puede ser configuración óptima de N porque el pago conjunto que reporta es estrictamente menor que el que reporta la configuración $\{1\}$:

$$a_1 + f_2 + a_3 + b_{23} \leq a_1 + f_2 + a_3 + b_{13} < f_1 + a_2 + b_{12} + a_3 + b_{13},$$

donde la primera desigualdad se debe a que $b_{13} \geq b_{23}$ y la segunda se debe a la suposición de que la única configuración óptima de $\{1, 2\}$ es $\{1\}$.

- $\{1, 3\}$ no puede ser configuración óptima de N . Si lo fuera, tendría que reportar un pago no inferior al que reporta la configuración $\{1\}$, y entonces, teniendo de nuevo en cuenta que $b_{13} \geq b_{23}$, se llegaría a que

$$\begin{aligned} f_1 + a_2 + f_3 + b_{12} &\geq f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \iff f_3 \geq a_3 + b_{13} \\ \implies f_3 &\geq a_3 + b_{23} \iff f_2 + f_3 \geq f_2 + a_3 + b_{23}, \end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición de que la única configuración óptima de $\{2, 3\}$ es $\{2\}$.

- Si $\{1, 2\}$ es configuración óptima de N , entonces el pago conjunto que reporta no puede ser inferior al que reporta $\{1\}$. Teniendo en cuenta que $b_{13} \geq b_{23}$ y que $v(\{2\}) \geq f_2$, resulta que

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23} &\geq f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \iff f_2 + b_{23} \geq a_2 + b_{12} \\ \implies f_2 + b_{13} &\geq a_2 + b_{12} \implies v(\{2\}) + b_{13} \geq a_2 + b_{12}. \end{aligned}$$

y entonces la desigualdad 3.1 se cumple, pues

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{2, 3\}) &\geq v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) \\ \iff f_1 + b_{13} &\geq f_1 + a_2 + b_{12} - v(\{2\}) \iff v(\{2\}) + b_{13} \geq a_2 + b_{12}. \end{aligned}$$

- Si $\{1\}$ es configuración óptima de N , entonces la desigualdad 3.1 se cumple si

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{2, 3\}) &\geq v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) \\ \iff f_1 + a_2 + b_{12} + b_{13} - f_2 - b_{23} &\geq f_1 + a_2 + b_{12} - v(\{2\}) \\ \iff b_{13} - f_2 - b_{23} &\geq -v(\{2\}) \iff b_{13} \geq b_{23} + f_2 - v(\{2\}). \end{aligned}$$

Como $b_{13} \geq b_{23}$ y $v(\{2\}) \geq f_2$, la desigualdad 3.1 se cumple.

En definitiva, la desigualdad 3.1 se cumple en todos los casos que pueden darse si $(i, j, k) = (1, 2, 3)$.

- $(i, j, k) = (1, 3, 2)$. Hay que ver que $v(N) - v(\{2, 3\}) \geq v(\{1, 3\}) - v(\{3\})$.

Si la coalición $\{1, 3\}$ tiene al menos una configuración óptima sin externalidades, de tal forma $v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) = v(\{1\})$, se cumple trivialmente la desigualdad 3.1. Por tanto, a partir de ahora se supone que la única configuración óptima de $\{1, 3\}$ es $\{1\}$, de forma que $v(\{1, 3\}) = f_1 + a_3 + b_{13}$. Ahora, si la coalición $\{2, 3\}$ tiene al menos una configuración óptima sin externalidades, la desigualdad 3.1 se cumple, pues

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{2, 3\}) &= v(N) - (v(\{2\}) + v(\{3\})) \\ &\geq (f_1 + v(\{2\}) + a_3 + b_{13}) - (v(\{2\}) + v(\{3\})) \\ &= f_1 + a_3 + b_{13} - v(\{3\}) = v(\{1, 3\}) - v(\{3\}). \end{aligned}$$

Por tanto, a partir de ahora se supone también que la única configuración óptima de $\{2, 3\}$ es $\{2\}$, de forma que $v(\{2, 3\}) = f_2 + a_3 + b_{23}$. A continuación se estudian una por una las posibles configuraciones óptimas de N .

- En las configuraciones $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3\}$ y \emptyset , el jugador 1 no produce ninguna externalidad; y entonces, fijada la suposición de que la única configuración óptima de $\{2, 3\}$ es $\{2\}$, ninguna de las cuatro puede ser óptima.
- $\{2\}$ no puede ser configuración óptima de N , pues el pago conjunto que reporta es inferior al que reporta $\{1, 2\}$:

$$a_1 + f_2 + a_3 + b_{23} = (a_1 + a_3) + (f_2 + b_{23}) < (f_1 + a_3 + b_{13}) + (f_2 + b_{23}),$$

siendo la desigualdad anterior consecuencia de la suposición de que la única configuración óptima de $\{1, 3\}$ es $\{1\}$.

- $\{1, 3\}$ no puede ser configuración óptima de N . Si lo fuera, tendría que reportar un pago conjunto no inferior al que reporta la configuración $\{1\}$, y entonces resultaría que

$$\begin{aligned} f_1 + a_2 + f_3 + b_{12} &\geq f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \\ \iff f_3 &\geq a_3 + b_{13} \iff f_1 + f_3 \geq f_1 + a_3 + b_{13}, \end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición de que $\{1\}$ es la única configuración óptima de $\{1, 3\}$.

- Si $\{1, 2\}$ es configuración óptima de N , entonces la desigualdad 3.1 es cierta:

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{2, 3\}) \geq v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) &\iff f_1 + b_{13} \geq f_1 + a_3 + b_{13} - v(\{3\}) \\ \iff 0 &\geq a_3 - v(\{3\}) \iff \max\{f_3, a_3\} \geq a_3. \end{aligned}$$

- Si $\{1\}$ es configuración óptima de N , entonces debe reportar un pago conjunto no inferior al que reporta $\{1, 2\}$, de forma que

$$f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \geq f_1 + f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23} \iff a_2 + b_{12} \geq f_2 + b_{23}.$$

Por lo anterior y teniendo en cuenta que $v(\{3\}) = \max\{f_3, a_3\} \geq a_3$, se llega a que la desigualdad 3.1 se cumple:

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{2, 3\}) &\geq v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) \\ \iff f_1 + a_2 - f_2 + b_{12} + b_{13} - b_{23} &\geq f_1 + a_3 + b_{13} - v(\{3\}) \\ \iff a_2 + b_{12} + v(\{3\}) &\geq f_2 + b_{23} + a_3. \end{aligned}$$

En definitiva, la desigualdad 3.1 se cumple en todos los casos que pueden darse si $(i, j, k) = (1, 3, 2)$.

- $(i, j, k) = (2, 1, 3)$. Hay que ver que $v(N) - v(\{1, 3\}) \geq v(\{1, 2\}) - v(\{1\})$.

Si la coalición $\{1, 2\}$ tiene al menos una configuración óptima sin externalidades, de tal forma que $v(\{1, 2\}) = v(\{1\}) + v(\{2\})$, se cumple trivialmente la desigualdad 3.1. Por tanto, a partir de ahora se supone que la única configuración óptima de $\{1, 2\}$ es $\{1\}$, de forma que $v(\{1, 2\}) = f_1 + a_2 + b_{12}$. Entonces, si la coalición $\{1, 3\}$ tiene al menos una configuración óptima sin externalidades, la desigualdad 3.1 se cumple, pues

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{1, 3\}) &= v(N) - (v(\{1\}) + v(\{3\})) \\ &\geq (f_1 + a_2 + v(\{3\}) + b_{12}) - (v(\{1\}) + v(\{3\})) \\ &= f_1 + a_2 + b_{12} - v(\{1\}) = v(\{1, 2\}) - v(\{1\}). \end{aligned}$$

Por tanto, a partir de ahora se supone también que la única configuración óptima de $\{1, 3\}$ es $\{1\}$, de forma que $v(\{1, 3\}) = f_1 + a_3 + b_{13}$. A continuación se estudian una por una las configuraciones de N .

- En las configuraciones $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3\}$ y \emptyset , el jugador 2 no produce ni recibe ninguna externalidad; y entonces, fijada la suposición de que la única configuración óptima de $\{1, 3\}$ es $\{1\}$, ninguna de las cuatro puede ser óptima.
- $\{2\}$ no puede ser configuración óptima de N . Si lo fuera, tendría que reportar un pago conjunto no inferior al que reporta $\{1, 2\}$, y entonces resultaría que

$$\begin{aligned} a_1 + f_2 + a_3 + b_{23} &\geq f_1 + f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23} \\ \iff a_1 &\geq f_1 + b_{13} \iff a_1 + a_3 \geq f_1 + a_3 + b_{13}, \end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición de que $\{1\}$ es la única configuración óptima de $\{1, 3\}$.

- $\{1, 3\}$ no puede ser configuración óptima de N . Si lo fuera, tendría que reportar un pago conjunto no inferior al que reporta $\{1\}$, y entonces resultaría que

$$\begin{aligned} f_1 + a_2 + f_3 + b_{12} &\geq f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \\ \iff f_3 &\geq a_3 + b_{13} \iff f_1 + f_3 \geq f_1 + a_3 + b_{13}, \end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición de que $\{1\}$ es la única configuración óptima de $\{1, 3\}$.

- Si $\{1, 2\}$ es configuración óptima de N , entonces debe reportar un pago conjunto no inferior al que reporta $\{1\}$, de forma que

$$f_1 + f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23} \geq f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \iff f_2 + b_{23} \geq a_2 + b_{12}.$$

Por lo anterior y teniendo en cuenta que $v(\{1\}) \geq f_1$, la desigualdad 3.1 se cumple:

$$v(N) - v(\{1, 3\}) \geq v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) \iff f_2 + b_{23} \geq f_1 + a_2 + b_{12} - v(\{1\}).$$

- Si $\{1\}$ es configuración óptima de N , entonces la desigualdad 3.1 es cierta:

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{1, 3\}) &\geq v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) \iff a_2 + b_{12} \geq f_1 + a_2 + b_{12} - v(\{1\}) \\ &\iff 0 \geq f_1 - v(\{1\}) \iff \max\{f_1, a_1\} \geq f_1. \end{aligned}$$

En definitiva, la desigualdad 3.1 se cumple en todos los casos que pueden darse si $(i, j, k) = (2, 1, 3)$.

- $(i, j, k) = (2, 3, 1)$. Hay que ver que $v(N) - v(\{1, 3\}) \geq v(\{2, 3\}) - v(\{3\})$.

Si la coalición $\{2, 3\}$ tiene al menos una configuración óptima sin externalidades, de tal forma que $v(\{2, 3\}) = v(\{2\}) + v(\{3\})$, se cumple trivialmente la desigualdad 3.1. Por tanto, a partir de ahora se supone que la única configuración óptima de $\{2, 3\}$ es $\{2\}$, de forma que $v(\{2, 3\}) = f_2 + a_3 + b_{23}$. Entonces, si la coalición $\{1, 3\}$ tiene al menos una configuración óptima sin externalidades, la desigualdad 3.1 se cumple, pues

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{1, 3\}) &= v(N) - (v(\{1\}) + v(\{3\})) \\ &\geq (v(\{1\}) + f_2 + a_3 + b_{23}) - (v(\{1\}) + v(\{3\})) \\ &= f_2 + a_3 + b_{23} - v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) - v(\{3\}). \end{aligned}$$

Por tanto, a partir de ahora se supone también que la única configuración óptima de $\{1, 3\}$ es $\{1\}$, de forma que $v(\{1, 3\}) = f_1 + a_3 + b_{13}$. A continuación se estudian una por una las configuraciones de N .

- En las configuraciones $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3\}$ y \emptyset , el jugador 2 no produce ni recibe ninguna externalidad; y entonces, fijada la suposición de que la única configuración óptima de $\{1, 3\}$ es $\{1\}$, ninguna de las cuatro puede ser óptima.
- $\{2\}$ no puede ser configuración óptima de N . Si lo fuera, tendría que reportar un pago conjunto no inferior al que reporta $\{1, 2\}$, y entonces resultaría que

$$\begin{aligned} a_1 + f_2 + a_3 + b_{23} &\geq f_1 + f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23} \\ \iff a_1 &\geq f_1 + b_{13} \iff a_1 + a_3 \geq f_1 + a_3 + b_{13}, \end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición de que $\{1\}$ es la única configuración óptima de $\{1, 3\}$.

- $\{1, 3\}$ no puede ser configuración óptima de N . Si lo fuera, tendría que reportar un pago conjunto no inferior al que reporta $\{1\}$, y entonces resultaría que

$$\begin{aligned} f_1 + a_2 + f_3 + b_{12} &\geq f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \\ \iff f_3 &\geq a_3 + b_{13} \iff f_1 + f_3 \geq f_1 + a_3 + b_{13}, \end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición de que $\{1\}$ es la única configuración óptima de $\{1, 3\}$.

- Si $\{1, 2\}$ es configuración óptima de N , entonces la desigualdad 3.1 es cierta:

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{1, 3\}) &\geq v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) \iff f_2 + b_{23} \geq f_2 + a_3 + b_{23} - v(\{3\}) \\ &\iff 0 \geq a_3 - v(\{3\}) \iff \max\{f_3, a_3\} \geq a_3. \end{aligned}$$

- Si $\{1\}$ es configuración óptima de N , entonces debe reportar un pago conjunto no inferior al que reporta $\{1, 2\}$, de forma que

$$f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \geq f_1 + f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23} \iff a_2 + b_{12} \geq f_2 + b_{23}.$$

Por lo anterior y teniendo en cuenta que $v(\{1\}) \geq f_1$, la desigualdad 3.1 se cumple:

$$v(N) - v(\{1, 3\}) \geq v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) \iff a_2 + b_{12} \geq f_2 + a_3 + b_{23} - v(\{3\}).$$

En definitiva, la desigualdad 3.1 se cumple en todos los casos que pueden darse si $(i, j, k) = (2, 3, 1)$.

- $(i, j, k) = (3, 1, 2)$. Hay que ver que $v(N) - v(\{1, 2\}) \geq v(\{1, 3\}) - v(\{1\})$.

Si la coalición $\{1, 3\}$ tiene al menos una configuración óptima sin externalidades, de tal forma que $v(\{1, 3\}) = v(\{1\}) + v(\{3\})$, se cumple trivialmente la desigualdad 3.1. Por tanto, a partir de ahora se supone que la única configuración óptima de $\{1, 3\}$ es $\{1\}$, de forma que $v(\{1, 3\}) = f_1 + a_3 + b_{13}$. Entonces, si la coalición $\{1, 2\}$ tiene al menos una configuración óptima sin externalidades, la desigualdad 3.1 se cumple, pues

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{1, 2\}) &= v(N) - (v(\{1\}) + v(\{2\})) \\ &\geq (f_1 + v(\{2\}) + a_3 + b_{13}) - (v(\{1\}) + v(\{2\})) \\ &= f_1 + a_3 + b_{13} - v(\{1\}) = v(\{1, 3\}) - v(\{1\}). \end{aligned}$$

Por tanto, a partir de ahora se supone también que la única configuración óptima de $\{1, 2\}$ es $\{1\}$, de forma que $v(\{1, 2\}) = f_1 + a_2 + b_{12}$. A continuación se estudian una por una las configuraciones de N .

- En las configuraciones $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3\}$ y \emptyset , el jugador 3 no recibe ninguna externalidad; y entonces, fijada la suposición de que la única configuración óptima de $\{1, 2\}$ es $\{1\}$, ninguna de las cuatro puede ser óptima.
- $\{2\}$ no puede ser configuración óptima de N . Si lo fuera, tendría que reportar un pago conjunto no inferior al que reporta $\{1, 2\}$, y entonces resultaría que

$$\begin{aligned} a_1 + f_2 + a_3 + b_{23} &\geq f_1 + f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23} \\ \iff a_1 &\geq f_1 + b_{13} \iff a_1 + a_3 \geq f_1 + a_3 + b_{13}, \end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición de que $\{1\}$ es la única configuración óptima de $\{1, 3\}$.

- $\{1, 3\}$ no puede ser configuración óptima de N . Si lo fuera, tendría que reportar un pago conjunto no inferior al que reporta $\{1\}$, y entonces resultaría que

$$\begin{aligned} f_1 + a_2 + f_3 + b_{12} &\geq f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \\ \iff f_3 &\geq a_3 + b_{13} \iff f_1 + f_3 \geq f_1 + a_3 + b_{13}, \end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición de que $\{1\}$ es la única configuración óptima de $\{1, 3\}$.

- Si $\{1, 2\}$ es configuración óptima de N , entonces debe reportar un pago conjunto no inferior al que reporta $\{1\}$, de forma que

$$f_1 + f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23} \geq f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \iff f_2 + b_{23} \geq a_2 + b_{12}.$$

Por lo anterior y teniendo en cuenta que $v(\{1\}) \geq f_1$, se llega a que la desigualdad 3.1 se cumple:

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{1, 2\}) &\geq v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) \\ \iff f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23} - a_2 - b_{12} &\geq f_1 + a_3 + b_{13} - v(\{1\}) \\ \iff v(\{1\}) + f_2 + b_{23} &\geq f_1 + a_2 + b_{12}. \end{aligned}$$

- Si $\{1\}$ es configuración óptima de N , entonces la desigualdad 3.1 es cierta:

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{1, 2\}) &\geq v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) \iff a_3 + b_{13} \geq f_1 + a_3 + b_{13} - v(\{1\}) \\ \iff 0 &\geq f_1 - v(\{1\}) \iff \max\{f_1, a_1\} \geq f_1. \end{aligned}$$

En definitiva, la desigualdad 3.1 se cumple en todos los casos que pueden darse si $(i, j, k) = (3, 1, 2)$.

- $(i, j, k) = (3, 2, 1)$. Hay que ver que $v(N) - v(\{1, 2\}) \geq v(\{2, 3\}) - v(\{2\})$.

Si la coalición $\{2, 3\}$ tiene al menos una configuración óptima sin externalidades, de tal forma que $v(\{2, 3\}) = v(\{2\}) + v(\{3\})$, se cumple trivialmente la desigualdad 3.1. Por tanto, a partir de ahora se supone que la única configuración óptima de $\{2, 3\}$ es $\{2\}$, de forma que $v(\{2, 3\}) = f_2 + a_3 + b_{23}$. Entonces, si la coalición $\{1, 2\}$ tiene al menos una configuración óptima sin externalidades, la desigualdad 3.1 se cumple, pues

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{1, 2\}) &= v(N) - (v(\{1\}) + v(\{2\})) \\ &\geq (v(\{1\}) + f_2 + a_3 + b_{23}) - (v(\{1\}) + v(\{2\})) \\ &= f_2 + a_3 + b_{23} - v(\{2\}) = v(\{2, 3\}) - v(\{2\}). \end{aligned}$$

Por tanto, a partir de ahora se supone también que la única configuración óptima de $\{1, 2\}$ es $\{1\}$ con $b_{12} > 0$ y de tal forma que $v(\{1, 2\}) = f_1 + a_2 + b_{12}$. La apreciación de que $b_{12} > 0$ vuelve a ser relevante porque implica que la estructura de B no puede ser la 4, y entonces está garantizado que $b_{13} \geq b_{23}$. Con esto presente, a continuación se estudian una por una las configuraciones de N .

- En las configuraciones $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3\}$ y \emptyset , el jugador 3 no recibe ninguna externalidad; y entonces, fijada la suposición de que la única configuración óptima de $\{1, 2\}$ es $\{1\}$, ninguna de las cuatro puede ser óptima.
- $\{2\}$ no puede ser configuración óptima de N porque el pago conjunto que reporta es estrictamente menor que el que reporta la configuración $\{1\}$:

$$a_1 + f_2 + a_3 + b_{23} \leq a_1 + f_2 + a_3 + b_{13} < f_1 + a_2 + b_{12} + a_3 + b_{13},$$

donde la primera desigualdad se debe a que $b_{13} \geq b_{23}$ y la segunda se debe a la suposición de que la única configuración óptima de $\{1, 2\}$ es $\{1\}$.

- $\{1, 3\}$ no puede ser configuración óptima de N . Si lo fuera, tendría que reportar un pago no inferior al que reporta la configuración $\{1\}$, y entonces, teniendo de nuevo en cuenta que $b_{13} \geq b_{23}$, se llegaría a que

$$\begin{aligned} f_1 + a_2 + f_3 + b_{12} &\geq f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \iff f_3 \geq a_3 + b_{13} \\ \implies f_3 &\geq a_3 + b_{23} \iff f_2 + f_3 \geq f_2 + a_3 + b_{23}, \end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición de que la única configuración óptima de $\{2, 3\}$ es $\{2\}$.

- Si $\{1, 2\}$ es configuración óptima de N , entonces el pago conjunto que reporta no puede ser inferior al que reporta $\{1\}$. Teniendo en cuenta que $b_{13} \geq b_{23}$ y que $v(\{2\}) \geq f_2$, resulta que

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23} &\geq f_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} \iff f_2 + b_{23} \geq a_2 + b_{12} \\ \implies f_2 + b_{13} &\geq a_2 + b_{12} \implies v(\{2\}) + b_{13} \geq a_2 + b_{12}. \end{aligned}$$

y entonces la desigualdad 3.1 se cumple, pues

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{1, 2\}) &\geq v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) \\ \iff f_2 + a_3 + b_{13} + b_{23} - a_2 - b_{12} &\geq f_2 + a_3 + b_{23} - v(\{2\}) \\ \iff b_{13} - a_2 - b_{12} &\geq -v(\{2\}) \iff v(\{2\}) + b_{13} \geq a_2 + b_{12}. \end{aligned}$$

- Si $\{1\}$ es configuración óptima de N , entonces la desigualdad 3.1 se cumple si

$$\begin{aligned} v(N) - v(\{1, 2\}) &\geq v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) \\ \iff a_3 + b_{13} &\geq f_2 + a_3 + b_{23} - v(\{2\}) \iff b_{13} \geq b_{23} + f_2 - v(\{2\}). \end{aligned}$$

Como $b_{13} \geq b_{23}$ y $v(\{2\}) \geq f_2$, la desigualdad 3.1 se cumple.

En definitiva, la desigualdad 3.1 se cumple en todos los casos que pueden darse si $(i, j, k) = (3, 2, 1)$.

En vista de todo lo anterior, se verifica que

$$v(N) - v(\{j, k\}) \geq v(\{i, j\}) - v(\{j\})$$

para todas las permutaciones de $i, j, k \in N$ con $i \neq j \neq k \neq i$. Por tanto, se puede concluir que el juego (N, v) es convexo. □

Como consecuencia de la Proposición 3.9 y de lo expuesto en Shapley (1971), se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.10. *Si un problema de inundación $(N, \mathcal{G}, f, a, B)$ con $|N| = 3$ respeta la Suposición 3.2, el juego de inundación que determina tiene núcleo no vacío y el valor de Shapley pertenece a él.*

3.3. Soluciones puntuales

Una vez discutida la existencia del núcleo en juegos de inundación, lo natural es preguntarse de qué manera concreta se deberían o podrían repartir los beneficios de la cooperación. Por el Corolario 3.10 se sabe que el valor de Shapley debe pertenecer al núcleo de los juegos de inundación de tres jugadores que respetan la Suposición 3.2, pero esto puede no ser cierto para conjuntos de jugadores más grandes, tal como se pone de manifiesto en Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) al mostrar un juego de cinco jugadores que respeta la Suposición 3.2 y que tiene un núcleo no vacío que no contiene el valor de Shapley. En consecuencia, si los terratenientes de una cierta cuenca fluvial saben de antemano que la regla por la que el beneficio total se va a repartir es el valor de Shapley, podría darse el caso de que alguna coalición tuviese incentivos para actuar por sí misma en vez de colaborar con el resto de jugadores, lo cual evitaría la formación de la coalición total. Aunque la Afirmación 3.7 no está demostrada en general, las más de 640000 comprobaciones empíricas de Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) llevan a pensar que es cierta o, como mínimo, «suficientemente cierta» como para que valga la pena estudiar qué ocurriría si lo fuera. Siguiendo este razonamiento, si todos los juegos de inundación que respetan la Suposición 3.2 tienen núcleo no nulo, siempre es posible encontrar en ellos un reparto de beneficios que ninguna coalición tenga motivos para rechazar, y entonces es razonable buscar reglas de reparto que siempre estén en el núcleo.

A tales efectos, en Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) se proponen tres reglas de reparto que, de ser cierta la Suposición 3.2, producen siempre repartos estables, en el núcleo. La primera regla de reparto está basada en los razonamientos que se utilizan para probar la Proposición 3.6 —cuya demostración se omite en este trabajo— y la Proposición 3.8 —demostrada en la Sección 3.2— y definida mediante un algoritmo que favorece todo lo posible, en la medida en la que la estabilidad lo permite, a los terratenientes que están más río arriba. La segunda regla es análoga y beneficia todo lo posible a los terratenientes que están más río abajo. La tercera regla se obtiene simplemente promediando las

dos primeras, así que puede entenderse como una solución de compromiso, y su pertenencia al núcleo está garantizada por ser combinación convexa de dos elementos del núcleo. Para de ver cómo se aplican los algoritmos de Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) se recurre al siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.11. Se considera el problema de inundación $(N, \mathcal{G}, f, a, B)$ con

- $N = \{1, 2, 3, 4\}$;
- $\mathcal{G} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$;
- $f = (0, 2, 4, 0)$;
- $a = (2, 2, 0, 0)$;
- $b_{12} = 2, b_{13} = 5, b_{14} = 2, b_{23} = 4$, y $b_{ij} = 0$ si $(i, j) \notin \mathcal{G}$.

En el primer grafo de la Figura 3.3 se representa el problema descrito. Vale la pena observar que se satisface la Suposición 3.2, pues la única desigualdad que exige en este caso concreto es $b_{13} \geq b_{23}$, lo cual es cierto. Para obtener la función característica del juego de inundación asociado, (N, v) , simplemente hay que repetir los razonamientos del Ejemplo 3.3; de esta forma se llega a que la única configuración óptima de N es $\{1, 2\}$ y se obtiene la función característica

$$v = [2, 2, 4, 0; 4, 6, 2, 6, 2, 4; 11, 4, 7, 6; 13].$$

Con el paquete TUGLab se puede comprobar que este juego es convexo, así que, por Shapley (1971), se sabe que el núcleo de (N, v) es no vacío y que el valor de Shapley pertenece a él. El objetivo ahora es calcular la solución de Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) que favorece todo lo posible a los agentes que están más río arriba. Para ello, se sigue el Algoritmo A.2 (ver apéndice).

- El punto de partida es el primer grafo de la Figura 3.3. En él hay tres pares de nodos adyacentes: $(1, 2)$, $(1, 4)$ y $(2, 3)$. Se elige arbitrariamente el par $(1, 2)$. Se tiene que

$$\alpha = v(N) - \max_{F \subset N: \{1,2\} \subset F} \Psi(F, N, f, a, B) = 0$$

y que

$$\beta = v(N) - \max_{F \subset N: F \cap \{1,2\} = \emptyset} \Psi(F, N, f, a, B) = 5 > b_{12}$$

así que se redefine $a_2 \leftarrow a_2 + b_{12} = 4$ y se elimina el arco $(1, 2)$.

- Ahora se parte del segundo grafo de la Figura 3.3. En él hay tres pares de nodos adyacentes: $(1, 3)$, $(1, 4)$ y $(2, 3)$. Se elige arbitrariamente el par $(1, 2)$. Se tiene que

$$\alpha = v(N) - \max_{F \subset N: \{1,3\} \subset F} \Psi(F, N, f, a, B) = 3 < b_{13},$$

así que se redefinen $f_1 \leftarrow f_1 + \alpha = 3$ y $b_{13} \leftarrow b_{13} - \alpha = 2$, de forma que se obtiene el tercer grafo de la Figura 3.3. Ahora resulta que

$$\beta = v(N) - \max_{F \subset N: F \cap \{1,3\} = \emptyset} \Psi(F, N, f, a, B) = 5 > b_{13},$$

así que se redefine $a_3 \leftarrow a_3 + b_{13} = 2$ y se elimina el arco $(1, 3)$.

- Ahora se parte del cuarto grafo de la Figura 3.3. En él hay dos pares de nodos adyacentes: $(1, 4)$ y $(2, 3)$. Se elige arbitrariamente $(1, 4)$. Se tiene que

$$\alpha = v(N) - \max_{F \subset N: \{1,4\} \subset F} \Psi(F, N, f, a, B) = 2 = b_{14},$$

así que se redefine $f_1 \leftarrow f_1 + b_{14} = 5$ y se elimina el arco $(1, 4)$.

- Ahora se parte del quinto grafo de la Figura 3.3. En él hay un único par de nodos adyacentes: (2, 3). Se tiene que

$$\alpha = v(N) - \max_{F \subset N: \{2,3\} \subset F} \Psi(F, N, f, a, B) = 2 < b_{23},$$

así que se redefinen $f_2 \leftarrow f_2 + \alpha = 4$ y $b_{23} \leftarrow b_{23} - \alpha = 2$, de forma que se obtiene el sexto grafo de la Figura 3.3. Ahora resulta que

$$\beta = v(N) - \max_{F \subset N: F \cap \{2,3\} = \emptyset} \Psi(F, N, f, a, B) = 2 = b_{23},$$

así que se redefine $a_3 \leftarrow a_3 + b_{23} = 4$ y se elimina el arco (2, 3). Se obtiene así un grafo sin arcos, el último de la Figura 3.3.

- Como ya no se pueden quitar más arcos, el algoritmo termina. A cada jugador se $i \in N$ se le asigna la cantidad $x_i = \max\{f_i, a_i\}$, así que el reparto estable que en cierto sentido beneficia todo lo posible a los terratenientes río arriba es

$$x = (5, 4, 4, 0).$$

Para obtener la solución propuesta por el otro algoritmo, el que favorece lo máximo posible a los terratenientes río abajo, simplemente hay que repetir los pasos anteriores pero calculando β antes que α en cada iteración. De esta manera se llega al reparto

$$y = (2, 4, 7, 0).$$

El tercer y último reparto propuesto en Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) se obtiene promediando los dos anteriores:

$$z = \frac{x + y}{2} = (3.5, 4, 5.5, 0).$$

En la Figura 3.4 se representan el conjunto de asignaciones que satisfacen eficiencia y racionalidad individual (volumen encerrado por las líneas negras) y el núcleo (volumen encerrado por las líneas azules) del juego (N, v) . Los puntos verdes que están en el interior del núcleo se corresponden con el valor de Shapley y el core-center. Los puntos rojos son los repartos x, y, z . La representación de la izquierda es geoméricamente fiel a la realidad, y la de la derecha es una proyección sobre las tres primeras coordenadas. En ambas representaciones se puede apreciar que las soluciones x, y, z se encuentran sobre una de las caras del núcleo; esto se debe a que ninguna de ellas asigna una cantidad positiva al jugador 4. Además, al ser z el promedio de x e y , las tres aparecen alineadas. La solución x se encuentra sobre el punto medio de la arista del núcleo en la que se maximiza la suma de los pagos de los jugadores 1 y 2, mientras que y se encuentra sobre el punto medio de la arista en la que se maximiza la suma de los pagos de los jugadores 2 y 3. En definitiva, la Figura 3.4 sirve para confirmar que los repartos resultantes hacen justicia a sus razones de ser. \triangle

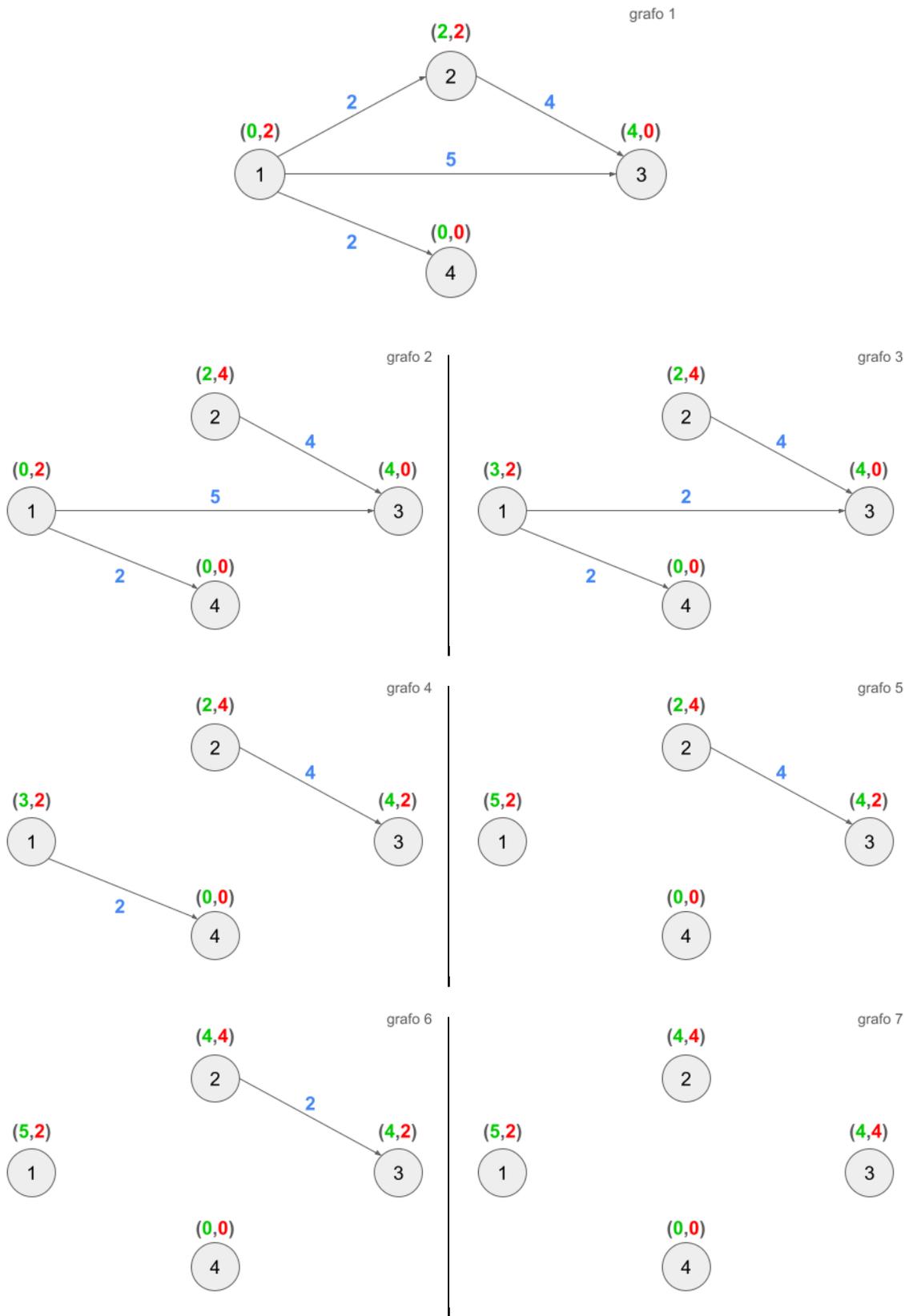


Figura 3.3: Evolución del algoritmo del Ejemplo 3.11.

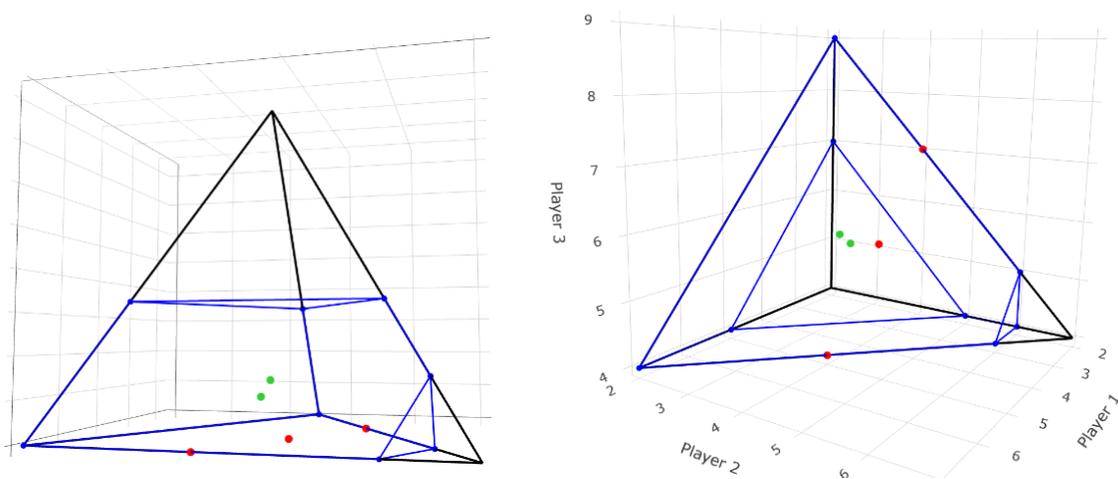


Figura 3.4: Núcleo y varios repartos relevantes del juego del Ejemplo 3.11.

Capítulo 4

Conclusiones

Holgará decirlo, pero este trabajo no pretende, ni mucho menos, reducir el término «control de inundaciones» a los problemas estudiados. El Capítulo 2, de hecho, está construido sobre unos cimientos extremadamente particulares, las condiciones concretas de un experimento como cualquier otro; sin embargo, se podría argumentar que su mayor interés no reside en las conclusiones prácticas que se puedan extraer sobre el experimento de los diques sino en el testimonio de que es posible recurrir a la teoría de juegos para ordenar y aclarar parcialmente una situación que a simple vista no puede descifrarse. El hecho de que a los participantes del experimento les falte información hace que sea inevitable introducir arbitrariedades para avanzar en la modelización. Esto tiene la desventaja de que somete la fiabilidad de las conclusiones a la sensatez de las arbitrariedades introducidas, pero también da lugar a la libertad que se requiere para considerar varios caminos en cada parte del proceso: métodos de estimación basados en diferentes creencias a priori, criterios de decisión más o menos complejos, distintas interpretaciones de lo que debe representar el juego cooperativo. En definitiva, aunque el experimento sobre el que se construye el Capítulo 2 es particular, las ideas y los razonamientos que se le dedican son generales y extrapolables.

Al margen de lo anterior, del Capítulo 2 cabe destacar el haber comprobado que el juego cooperativo más conservador es aditivo —de tal forma que, si los participantes son todo lo pesimistas que pueden llegar a ser, no advierten beneficio ni perjuicio en cooperar— y, sobre todo, el hallazgo de que otros enfoques menos conservadores conducen a núcleos no triviales y, por ende, a situaciones en las que la cooperación se convertiría en un desenlace racional y estable. De cara al futuro, quizá sería interesante profundizar en el estudio de este juego cooperativo considerando otras interpretaciones. Se podría tratar, por ejemplo, el caso de que los participantes tuviesen grados distintos de optimismo, de aversión al riesgo, etc., pues esto es algo que ocurre en la vida real y, sin embargo, el análisis del Capítulo 2 supone implícitamente que los participantes comparten predisposiciones.

En lo que respecta al Capítulo 3, gran parte del trabajo está dedicada simplemente a entender y explicar los razonamientos expuestos en Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019). Estos razonamientos van encaminados a probar que el núcleo de un juego de inundación tiene que ser no vacío siempre que se respete la Suposición 3.2, pero tal cosa no estará garantizada hasta que se tenga una demostración formal de la Afirmación 3.7. Para contribuir a la causa, en este trabajo se prueba que los juegos de inundación de tres jugadores que respetan la Suposición 3.2 son convexos, una condición más fuerte que la existencia de núcleo. Finalmente, en el Ejemplo 3.11 se ejecuta paso a paso el algoritmo de Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019) para así obtener tres repartos con significados intuitivos.

Por último, ya desde el punto de vista más personal, este trabajo también sirve como confirmación de que el tiempo y los esfuerzos invertidos en el paquete `TUGLab` de R no son en vano. El paquete es constantemente útil al lidiar con juegos TU, pues permite obtener de inmediato propiedades, núcleos, soluciones puntuales, etc. Las representaciones gráficas de juegos TU presentadas en este trabajo están hechas con `TUGLab`, y es posible replicarlas ejecutando el Código [B.4](#) (ver apéndice).

Apéndice A

Demostración redundante y algoritmo

A.1. Afirmación 3.7 en problemas de tres jugadores

La Proposición 3.9 garantiza la convexidad de los juegos de inundación de tres jugadores que respetan la Suposición 3.2, y su Corolario 3.10 asegura que sus núcleos son no vacíos y contienen a sus respectivos valores de Shapley. Como la convexidad es más fuerte que la existencia de núcleo, una vez garantizada la convexidad, la Afirmación 3.7 deja de ser relevante. No obstante, pensando en la utilidad que podría tener de cara a ampliar la demostración de la Afirmación 3.7 a un conjunto más grande de juegos, se presenta a continuación la demostración de que la Afirmación 3.7 es cierta si se añade la hipótesis de que el juego tiene tres jugadores.

Proposición A.1. *Si un problema de inundación saturado $(N, \mathcal{G}, f, a, B)$ con $|N| = 3$ respeta la Suposición 3.2, entonces se cumple exactamente una de estas dos condiciones:*

1. $\mathcal{G} = \emptyset$,
2. *existen dos tierras adyacentes $i, j \in N$ tales que $v(S) = v^{-ij}(S)$ para toda $S \subset N$, siendo (N, v) el juego de inundación determinado por $(N, \mathcal{G}, f, a, B)$ y (N, v^{-ij}) el juego de inundación determinado por $(N, \mathcal{G} \setminus \{(i, j)\}, f, a, B')$, donde $b'_{kl} = b_{kl}$ para todo $(k, l) \in \mathcal{G} \setminus \{(i, j)\}$.*

Demostración. Si $(N, \mathcal{G}, f, a, B)$ es un problema de inundación saturado con $|N| = 3$ que respeta la Suposición 3.2, la estructura de \mathcal{G} debe ser igual o análoga a una de las siguientes cinco: $\mathcal{G} = \emptyset$, $\mathcal{G} = \{(1, 2)\}$, $\mathcal{G} = \{(1, 2), (1, 3)\}$, $\mathcal{G} = \{(1, 2), (3, 2)\}$, $\mathcal{G} = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

Si $\mathcal{G} = \emptyset$, se satisface trivialmente la primera condición de la Proposición A.1; para el resto de los casos, partiendo de que las tierras de los jugadores 1 y 2 son adyacentes y siempre es 1 el que genera externalidad a 2, se comprueba a continuación que $v^{-12}(S) = v(S)$ para cualquier coalición $S \subset N$.

- Si $\{1, 2\} \not\subset S$, la existencia del arco $(1, 2)$ es irrelevante en el cálculo del valor de $v(S)$, de forma que $v^{-12}(S) = v(S)$.
- Si $S = N$, suponer que $v^{-12}(S) \neq v(S)$ significa suponer que toda configuración óptima de N utiliza el arco $(1, 2)$. Esto implica que $1 \in \bigcap_{r=1}^r OC_r$, y entonces no puede existir ninguna configuración óptima de N en la que 1 no sea un bosque, lo cual es incompatible con la hipótesis de que v es saturado.
- Si $S = \{1, 2\}$, suponer que $v^{-12}(S) \neq v(S)$ significa suponer que toda configuración óptima de S utiliza el arco $(1, 2)$. Si a esto se añade que el jugador 3 nunca puede generar externalidad positiva

al jugador 1 —el arco $(3, 1)$ no está presente en ninguno de los grafos— y que la externalidad que el jugador 2 genera al jugador 3 nunca es superior a la que el jugador 1 genera al jugador 3 —en el único grafo en el que el arco $(2, 3)$ existe, la Suposición 1 impone que $b_{13} \geq b_{23}$ —, se llega otra vez a la conclusión de que $1 \in \bigcap_{r=1}^{r_N} OC_r$, lo cual es incompatible con la hipótesis de que v es saturado.

Por tanto, si $\mathcal{G} \neq \emptyset$, resulta que $v^{-12}(S) = v(S)$ para toda coalición $S \subset N$. Como las tierras 1 y 2 son adyacentes, se satisface la segunda condición de la Proposición A.1. \square

A.2. Algoritmo para calcular el reparto estable más beneficioso para los terratenientes río arriba

Se presenta a continuación, tal y como aparece en Álvarez, Gómez-Rúa y Vidal-Puga (2019), el algoritmo que calcula el reparto en el núcleo que más beneficia a los terratenientes que están río arriba.

Algorithm 1 Optimal sharing rule for upstream agents

```

1: Input: Landflood problem  $(N, \mathcal{G}, f, a, B)$ 
2: Output:  $x \in \mathbb{R}^N$ 
3: while  $\mathcal{G} \neq \emptyset$  do
4:   for each  $(i, j)$  adjacent in  $\mathcal{G}$  do
5:      $\alpha \leftarrow v(N) - \max_{F \subseteq N: \{i, j\} \subseteq F} \Psi(F, N, f, a, B)$ 
6:     if  $\alpha > 0$  then
7:       if  $\alpha \geq b_{ij}$  then
8:          $f_i \leftarrow f_i + b_{ij}$ 
9:         remove arc  $(i, j)$  from  $\mathcal{G}$ 
10:      else
11:         $f_i \leftarrow f_i + \alpha$ 
12:         $b_{ij} \leftarrow b_{ij} - \alpha$ 
13:      end if
14:    end if
15:     $\beta \leftarrow v(N) - \max_{F \subseteq N: F \cap \{i, j\} = \emptyset} \Psi(F, N, f, a, B)$ 
16:    if  $\beta > 0$  then
17:      if  $\beta \geq b_{ij}$  then
18:         $a_j \leftarrow a_j + b_{ij}$ 
19:        remove arc  $(i, j)$  from  $\mathcal{G}$ 
20:      else
21:         $a_j \leftarrow a_j + \beta$ 
22:         $b_{ij} \leftarrow b_{ij} - \beta$ 
23:      end if
24:    end if
25:  end for
26:  remove arc in  $\mathcal{G}$  unused by any coalition  $S \subseteq N$ 
27: end while
28: for each  $i \in N$  do
29:    $x_i \leftarrow \max\{f_i, a_i\}$ 
30: end for
31: present  $x$  as solution.

```

Apéndice B

Código de R

B.1. Matriz de pagos esperados del juego de diques

```
p <- 1/2
( matriz <- matrix(c(110-100*p,110-100*p,110-100*p, 110-80*p,85-5*p,110-80*p,
                    85-5*p,110-80*p,110-80*p, 95-15*p,95-15*p,110-80*p,
                    110-80*p,110-80*p,85-5*p, 110-80*p,95-15*p,95-15*p,
                    95-15*p,110-80*p,95-15*p, 100-20*p,100-20*p,100-20*p),
                  nrow=4,ncol=6,byrow=TRUE) )
```

B.2. Simulación de RR iteraciones de una partida de R rondas del juego de diques

```
#####
# Simulación de RR iteraciones de una partida de R rondas #
#####

set.seed(13)
R <- 10
RR <- 10000
pagos.RR <- matrix(0,ncol=3,nrow=1)
decisiones.cum <- matrix(0,nrow=R,ncol=3)

for (m in 1:RR) {
  inundaciones <- sample(c(0,1),size=R,replace=TRUE)
  decisiones <- matrix(0,nrow=R,ncol=3)
  pagos <- matrix(0,nrow=R,ncol=3)

  for (r in 1:R) {

    if (r==1) {
      e_r <- 0
    } else {
      e_r <- sum(inundaciones[1:r-1])
    }
  }
}
```

```
#####
### decisión jugador 1 ###
#####
if(r==1) {
  phat.1 <- 1/6
} else {
  phat.1 <- e_r/(r-1)
}
if (phat.1 <= 1/6) {
  dique.1 <- 1
} else if (phat.1 >= 5/19) {
  dique.1 <- 0
} else {
  dique.1 <- sample(c(0,1),size=1)
}
decisiones[r,1] <- dique.1

#####
### decisión jugador 2 ###
#####

if(r==1) {
  phat.2 <- 1/6
  t <- 0.3
} else {
  phat.2 <- t*inundaciones[r-1]+(1-t)*phat.2
}
if (phat.2 <= 1/6) {
  dique.2 <- 1
} else if (phat.2 >= 5/19) {
  dique.2 <- 0
} else {
  dique.2 <- sample(c(0,1),size=1)
}
decisiones[r,2] <- dique.2

#####
### decisión jugador 3 ###
#####

alpha <- 3*e_r+1
beta <- 3*r-3*e_r+2

f <- function(p) {
  coef <- factorial(alpha+beta-1)/(factorial(alpha-1)*factorial(beta-1))
  coef * p^(alpha-1)*(1-p)^(beta-1)
}

DDD <- function(p) {
  (110-100*p)*f(p)
}
```

B.2. SIMULACIÓN DE RR ITERACIONES DE UNA PARTIDA DE R RONDAS DEL JUEGO DE DIQUES49

```
AAD <- function(p) {
  (110-80*p)*f(p)
}
pago.3.D <- integrate(DDD,lower=0,upper=1/6)$value + integrate(AAD,lower=1/6,upper=1)$value

DDA <- function(p) {
  (85-5*p)*f(p)
}
AAA <- function(p) {
  (100-20*p)*f(p)
}
pago.3.A <- integrate(DDA,lower=0,upper=1/6)$value + integrate(AAA,lower=1/6,upper=1)$value

dique.3 <- 0
if (pago.3.D > pago.3.A) {
  dique.3 <- 1
}

decisiones[r,3] <- dique.3

#####
### pagos ###
#####

if (inundaciones[r]==1) {
  if (sum(decisiones[r,])==3) {
    pagos[r,] <- rep(150-40-100,3)
  } else if (sum(decisiones[r,])==2) {
    if (decisiones[r,1]==0) {
      pagos[r,] <- c(150-70,150-40-80,150-40-80)
    } else if (decisiones[r,2]==0) {
      pagos[r,] <- c(150-40-80,150-70,150-40-80)
    } else {
      pagos[r,] <- c(150-40-80,150-40-80,150-70)
    }
  } else if (sum(decisiones[r,])==1) {
    if (decisiones[r,1]==1) {
      pagos[r,] <- c(150-40-80,150-70,150-70)
    } else if (decisiones[r,2]==1) {
      pagos[r,] <- c(150-70,150-40-80,150-70)
    } else {
      pagos[r,] <- c(150-40-80,150-70,150-70)
    }
  } else {
    pagos[r,] <- rep(150-70,3)
  }
} else {
  if (sum(decisiones[r,])==3) {
    pagos[r,] <- rep(150-40,3)
  } else if (sum(decisiones[r,])==2) {
    if (decisiones[r,1]==0) {
      pagos[r,] <- c(150-65,150-40,150-40)
    }
  }
}
```

```

    } else if (decisiones[r,2]==0) {
      pagos[r,] <- c(150-40,150-65,150-40)
    } else {
      pagos[r,] <- c(150-40,150-40,150-65)
    }
  } else if (sum(decisiones[r,])==1) {
    if (decisiones[r,1]==1) {
      pagos[r,] <- c(150-40,150-55,150-55)
    } else if (decisiones[r,2]==1) {
      pagos[r,] <- c(150-55,150-40,150-55)
    } else {
      pagos[r,] <- c(150-55,150-55,150-40)
    }
  } else {
    pagos[r,] <- rep(150-50,3)
  }
}

}

decisiones.cum <- decisiones.cum+decisiones
pagosfinales <- colSums(pagos)
pagos.RR <- rbind(pagos.RR,pagosfinales)
if (m==1) {
  pagos.RR <- pagos.RR[-1,]
}
}

```

B.3. Simulación de *RR* iteraciones de las partidas asociadas a múltiples valores de p

```

#####
# Simulación de RR iteraciones de las partidas asociadas a múltiples valores de p #
#####

set.seed(13)
R <- 10
RR <- 3000
ps <- seq(0,1,length.out=200+1)
pagos.p <- matrix(0,ncol=3,nrow=1)

for (p in 1:length(ps)) {

  pagos.RR <- matrix(0,ncol=3,nrow=1)
  decisiones.cum <- matrix(0,nrow=R,ncol=3)

  for (m in 1:RR) {
    inundaciones <- sample(c(0,1),prob=c(1-ps[p],ps[p]),size=R,replace=TRUE)
    decisiones <- matrix(0,nrow=R,ncol=3)
    pagos <- matrix(0,nrow=R,ncol=3)
  }
}

```

B.3. SIMULACIÓN DE RR ITERACIONES DE LAS PARTIDAS ASOCIADAS A MÚLTIPLES VALORES DE P51

```
for (r in 1:R) {

  if (r==1) {
    e_r <- 0
  } else {
    e_r <- sum(inundaciones[1:r-1])
  }

  #####
  ### decisión jugador 1 ###
  #####
  if(r==1) {
    phat.1 <- 1/6
  } else {
    phat.1 <- e_r/(r-1)
  }
  if (phat.1 <= 1/6) {
    dique.1 <- 1
  } else if (phat.1 >= 5/19) {
    dique.1 <- 0
  } else {
    dique.1 <- sample(c(0,1),size=1)
  }
  decisiones[r,1] <- dique.1

  #####
  ### decisión jugador 2 ###
  #####

  if(r==1) {
    phat.2 <- 1/6
    t <- 0.3
  } else {
    phat.2 <- t*inundaciones[r-1]+(1-t)*phat.2
  }
  if (phat.2 <= 1/6) {
    dique.2 <- 1
  } else if (phat.2 >= 5/19) {
    dique.2 <- 0
  } else {
    dique.2 <- sample(c(0,1),size=1)
  }
  decisiones[r,2] <- dique.2

  #####
  ### decisión jugador 3 ###
  #####

  alpha <- 3*e_r+1
  beta <- 3*r-3*e_r+2

  f <- function(p) {
```

```

coef <- factorial(alpha+beta-1)/(factorial(alpha-1)*factorial(beta-1))
coef * p^(alpha-1)*(1-p)^(beta-1)
}

DDD <- function(p) {
  (110-100*p)*f(p)
}
AAD <- function(p) {
  (110-80*p)*f(p)
}
pago.3.D <- integrate(DDD,lower=0,upper=1/6)$value + integrate(AAD,lower=1/6,upper=1)$value

DDA <- function(p) {
  (85-5*p)*f(p)
}
AAA <- function(p) {
  (100-20*p)*f(p)
}
pago.3.A <- integrate(DDA,lower=0,upper=1/6)$value + integrate(AAA,lower=1/6,upper=1)$value

dique.3 <- 0
if (pago.3.D > pago.3.A) {
  dique.3 <- 1
}

decisiones[r,3] <- dique.3

#####
### pagos ###
#####

if (inundaciones[r]==1) {
  if (sum(decisiones[r,])==3) {
    pagos[r,] <- rep(150-40-100,3)
  } else if (sum(decisiones[r,])==2) {
    if (decisiones[r,1]==0) {
      pagos[r,] <- c(150-70,150-40-80,150-40-80)
    } else if (decisiones[r,2]==0) {
      pagos[r,] <- c(150-40-80,150-70,150-40-80)
    } else {
      pagos[r,] <- c(150-40-80,150-40-80,150-70)
    }
  } else if (sum(decisiones[r,])==1) {
    if (decisiones[r,1]==1) {
      pagos[r,] <- c(150-40-80,150-70,150-70)
    } else if (decisiones[r,2]==1) {
      pagos[r,] <- c(150-70,150-40-80,150-70)
    } else {
      pagos[r,] <- c(150-40-80,150-70,150-70)
    }
  } else {
    pagos[r,] <- rep(150-70,3)
  }
}

```

```

    }
  } else {
    if (sum(decisiones[r,])==3) {
      pagos[r,] <- rep(150-40,3)
    } else if (sum(decisiones[r,])==2) {
      if (decisiones[r,1]==0) {
        pagos[r,] <- c(150-65,150-40,150-40)
      } else if (decisiones[r,2]==0) {
        pagos[r,] <- c(150-40,150-65,150-40)
      } else {
        pagos[r,] <- c(150-40,150-40,150-65)
      }
    } else if (sum(decisiones[r,])==1) {
      if (decisiones[r,1]==1) {
        pagos[r,] <- c(150-40,150-55,150-55)
      } else if (decisiones[r,2]==1) {
        pagos[r,] <- c(150-55,150-40,150-55)
      } else {
        pagos[r,] <- c(150-55,150-55,150-40)
      }
    } else {
      pagos[r,] <- rep(150-50,3)
    }
  }
}

decisiones.cum <- decisiones.cum+decisiones
pagosfinales <- colSums(pagos)
pagos.RR <- rbind(pagos.RR,pagosfinales)
if (m==1) {
  pagos.RR <- pagos.RR[-1,]
}
}
pagos.p <- rbind(pagos.p,colMeans(pagos.RR))
if (p==1) {
  pagos.p <- pagos.p[-1,]
}
}

```

B.4. Representación de núcleos con el paquete TUGLab

```
library(TUGLab)
```

```
#####
# Representar núcleo del juego de inundación con estimación phat #
#####

phat <- 1/2
if (0 <= phat && phat <= 1/8) {
  vr <- c(rep(110-100*phat,3),rep(220-200*phat,3),330-300*phat)
}

```

```

} else if (1/8 < phat && phat <= 3/17) {
  vr <- c(rep(110-100*phat,3),rep(220-200*phat,3),300-60*phat)
} else if (3/17 <= phat && phat <= 5/19) {
  vr <- c(rep(110-100*phat,3),rep(190-30*phat,3),300-60*phat)
} else if (5/19 < phat && phat <= 1) {
  vr <- c(rep(85-5*phat,3),rep(190-30*phat,3),300-60*phat)
} else {
  vr <- NA
}
plotcoreset(vr,solutions=c("corecenter"))

#####
# Representar núcleos de los juegos de inundación asociados a distintas estimaciones de p #
#####

phats <- seq(0,1,length.out=15+1)
for (phat in phats) {
  if (phat==0) {
    vrs <- rep(0,7)
  }
  if (0 <= phat && phat <= 1/8) {
    vr <- c(rep(110-100*phat,3),rep(220-200*phat,3),330-300*phat)
  } else if (1/8 < phat && phat <= 3/17) {
    vr <- c(rep(110-100*phat,3),rep(220-200*phat,3),300-60*phat)
  } else if (3/17 <= phat && phat <= 5/19) {
    vr <- c(rep(110-100*phat,3),rep(190-30*phat,3),300-60*phat)
  } else if (5/19 < phat && phat <= 1) {
    vr <- c(rep(85-5*phat,3),rep(190-30*phat,3),300-60*phat)
  } else {
    vr <- NA
  }
  vrs <- rbind(vrs,vr)
  if (phat==0) {
    vrs <- vrs[-1,]
  }
}
plotcoresets(vrs,imputations=FALSE)

#####
# Representar núcleos y soluciones puntuales del Ejemplo 2.11 #
#####

x <- c(5,4,4,0)
y <- c(2,4,7,0)
z <- (x+y)/2
plotcoreset(c(2,2,4,0,4,6,2,6,2,4,11,4,7,6,13),
            solutions=c("shapleyvalue","corecenter"),
            allocations=rbind(x,y,z))
plotcoreset(c(2,2,4,0,4,6,2,6,2,4,11,4,7,6,13),
            solutions=c("shapleyvalue","corecenter"),
            allocations=rbind(x,y,z),
            projected=TRUE)

```

Bibliografía

- [1] Álvarez, X., Gómez-Rúa, M., Vidal-Puga, J. (2019). River flooding risk prevention: A cooperative game theory approach. *Journal of Environmental Management*, 248, 109284–. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2019.109284>
- [2] Chan, J. K. H., Chiang, Y. S., Liao, K. H. (2023). The levee dilemma game: A game experiment on flood management decision-making. *International Journal of Disaster Risk Reduction*, 90, 103662. <https://doi.org/10.1016/j.ijdr.2023.103662>
- [3] dePrado-Saborido, Á., Mirás-Calvo, M., Núñez-Lugilde, I., Quinteiro-Sandomingo, C., Sánchez-Rodríguez, E. (2025). *TUGLab: A Laboratory for TU Games* (versión 0.0.1). CRAN. <https://CRAN.R-project.org/package=TUGLab>
- [4] Gonzalez-Díaz, J., Sánchez-Rodríguez, E. (2007). A natural selection from the core of a TU game: the core-center. *International Journal of Game Theory*, 36(1), 27-46. <https://doi.org/10.1007/s00182-007-0074-5>
- [5] Hall, T., Smith, G. P. (2011). Expressing Prior Ignorance of a Probability Parameter. Division of Biological Sciences, University of Missouri. <https://web.archive.org/web/20110724200328/http://www.stats.org.uk/priors/noninformative/Smith.pdf>
- [6] Laplace, P. S. (1814). *Essai philosophique sur les probabilités*. Courcier.
- [7] Navaja de Ockham. (21 de julio de 2025). En *Wikipedia*. https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Navaja_de_Ockham&oldid=165585001
- [8] NIST/SEMATECH. (2012). Single Exponential Smoothing. *NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods*. <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section4/pmc431.htm>
- [9] Schmeidler, D. (1969). The Nucleolus of a Characteristic Function Game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17(6), 1163-1170. <https://www.jstor.org/stable/2099196>
- [10] Shapley, L. S. (1952). A Value for n-Person Games. RAND Corporation. <https://doi.org/10.7249/P0295>
- [11] Shapley, L. S. (1971). Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1, 11–26. <https://doi.org/10.1007/BF01753431>
- [12] Tobin, G. A. (1995). The Levee Love Affair: A Stormy Relationship. *Journal of the American Water Resources Association*, 31(3), 359-367. <https://doi.org/10.1007/BF01753431>