



Universidade de Vigo

Traballo Fin de Máster

Estudo econométrico dende un punto de vista social sobre a eficiencia da xestión da auga no sector público e privado

Paula Seoane Gíao

Máster en Técnicas Estatísticas

Curso 2024-2025

Proposta de Traballo Fin de Máster

Título en galego: Estudo econométrico dende un punto de vista social sobre a eficiencia da xestión da auga no sector público e privado
Título en español: Estudio econométrico desde un punto de vista social sobre la eficiencia de la gestión del agua en el sector público y privado
English title: Econometric study from a social point of view on the efficiency of water management in the public and private sector
Modalidade: Modalidade B
Autor/a: Paula Seoane Gao, Universidade de Santiago de Compostela
Director/a: María José Ginzo Villamayor, USC; Alejandro Saavedra Nieves, USC
Titor/a: Lorena Dos Santos Merencio, CETAQUA
Breve resumo do traballo: Mediante un estudo econométrico, dende unha perspectiva das ciencias sociais, compararemos a xestión da auga entre o sector público e privado. Para elo, empregaremos a metodoloxía da Análise Envolvente de Datos (DEA), facendo un breve percorrido histórico así como formulando estes modelos. Ademais, poñeremos en práctica o exposto realizando un estudo empírico sobre a eficiencia da xestión das depuradoras de auga en Galicia.

Dona María José Ginzo Villamayor, profesora da USC, don Alejandro Saavedra Nieves, profesor da USC, dona Lorena Dos Santos Merencio, investigadora de CETAQUA, informan que o Traballo Fin de Máster titulado

**Estudo econométrico dende un punto de vista social sobre a eficiencia da xestión da
auga no sector público e privado**

foi realizado baixo a súa dirección por dona Paula Seoane Giao para o Máster en Técnicas Estatísticas. Estimando que o traballo está rematado, dan a súa conformidade para a presentación e defensa ante un tribunal. Ademais, dona María José Ginzo Villamayor, don Alejandro Saavedra Nieves e dona Paula Seoane Giao

sí non

autorizan á publicación da memoria no repositorio de acceso público asociado ao Máster en Técnicas Estatísticas.

En Santiago de Compostela, a 13 de xaneiro de 2025.

A directora:
Dona María José Ginzo Villamayor

O director:
Don Alejandro Saavedra Nieves

A tutora:
Dona Lorena Dos Santos Merencio

A autora:
Dona Paula Seoane Giao

Declaración responsable. Para dar cumprimento á Lei 3/2022, do 24 de febreiro, de convivencia universitaria, referente ao plaxio no Traballo Fin de Máster (Artigo 11, [Disposición 2978 do BOE núm. 48 de 2022](#)), **o/a autor/a declara** que o Traballo Fin de Máster presentado é un documento orixinal no que se tiveron en conta as seguintes consideracións relativas ao uso de material de apoio desenvolto por outros/as autores/as:

- Todas as fontes usadas para a elaboración deste traballo foron citadas convenientemente (libros, artigos, apuntes de profesorado, páxinas web, programas,...)
- Calquer contido copiado ou traducido textualmente púxose entre comillas, citando a súa procedencia.
- Fíxose constar explícitamente cando un capítulo, sección, demostración,... sexa unha adaptación case literal dalgunha fonte existente.

E, acepta que, se se demostrara o contrario, se lle apliquen as medidas disciplinarias que correspondan.

Agradecementos

Quixera comezar este Traballo Fin de Mestrado agradecendo a todas as persoas que fixeron posible a súa realización, xa fose directa ou indirectamente.

En primeiro lugar, aos meus titores académicos, María e Álex, pola súa orientación, axuda e correccións durante todos estes meses, tanto nos aspectos máis matemáticos do traballo como na realización das prácticas.

Tamén a todo o equipo de CETAQUA por facerme sentir benvida e por axudarme en todo no que estivo na súa man, ben ofrecéndome consello profesional ou ben ensinándome todo o necesario para a realización deste estudo. Especialmente agradecer á miña tutora Lorena, por brindarme a oportunidade de realizar estas prácticas con ela.

Por outra banda, á miña familia por seguir facilitándome a continuación da miña formación académica. E, ás miñas amigas por ser un apoio constante, tantas horas de estudo e conversacións compartidas acompañaranme tanto a nivel persoal como profesional.

Este traballo non podería ser posible sen a colaboración de todos eles.

A todos vós, polo voso apoio e paciencia, grazas.

Índice xeral

Resumo	XI
Prefacio	XIII
1. A xestión da auga	1
1.1. A administración pública e privada en España	2
1.1.1. A eficiencia dos sectores público e privado	2
1.1.2. O prezo dos servizos	3
1.1.3. A calidade da auga	4
1.2. O ciclo integral da auga	5
1.3. As estacións depuradoras de augas residuais	6
2. O enfoque <i>Data Envelopment Analysis</i>: os problemas DEA	9
2.1. O concepto de eficiencia	10
2.2. A xénese da DEA cos modelos CRS	12
2.3. O modelo DEA VRS	14
2.4. Clasificacións básicas dos modelos DEA	15
2.4.1. A clasificación baseada en retornos de escala	15
2.4.2. A clasificación baseada na medida de eficiencia proporcionada	15
2.4.3. A clasificación baseada na orientación do modelo	16
2.4.4. Os modelos DEA clásicos	17
2.5. Aplicacións prácticas da metodoloxía DEA	20
3. A xestión eficiente da auga: estudo empírico	23
3.1. Descrición dos datos	23
3.2. Medindo a eficiencia das EDARs usando a metodoloxía DEA	29
3.2.1. Comparación entre a xestión pública e privada	29
3.2.2. Implementación do modelo	32
4. Resultados e discusión sobre a eficiencia das EDARs en Galicia	35
4.1. A análise DEA das EDARs: o caso trimestral	35
4.1.1. Primeiro trimestre	35
4.1.2. Segundo trimestre	37
4.1.3. Terceiro trimestre	39
4.1.4. Cuarto trimestre	40
4.2. Benchmarking das EDARs	42
4.2.1. Cálculo das eficiencias cruzadas	42
4.2.2. Unha análise comparativa	45
4.3. Discusión dos resultados	49
4.3.1. Resultados trimestrais	49
4.3.2. Comparación entre trimestres	52

4.3.3. Resultados da análise comparativa	56
4.4. Limitacións do estudo	57
5. Conclusións	59
A. Análise descritiva	61
A.1. Variables de entrada	61
A.2. Variables de saída	69
B. Sistema público fronte EDARs privadas	83
B.1. Primeiro trimestre	83
B.2. Terceiro trimestre	85
Bibliografía	87

Resumo

Resumo en galego

Ao longo dos anos a elección entre unha xestión pública ou privada dos recursos hídricos foi, e segue sendo, motivo de debate en moitos países, a pesar das lexislacións particulares de cada un. Existindo argumentos a ambos lados da discusión, podemos dividilos en tres categorías fundamentais para elixir que administración ten un mellor comportamento: prezo da tarifa, calidade da auga e eficiencia da xestión.

Neste traballo, faremos un resumo dalgunhas aportacións da literatura existente neste tema, facendo fincapé naquelas que basean as súas análises en España, pois serán de axuda para o noso caso particular. Ademais, centrarémonos na avaliación da eficiencia entre ambas xestións, empregando a Análise Envoltante de Datos. Así, tras unha breve descrición desta técnica e os seus principais modelos, aplicarémosla ao noso caso: unha comparación da eficiencia entre estacións depuradoras de augas residuais (EDARs) segundo sexan xestionadas por entidades públicas ou pola privada Viaqua Gestión Integral De Aguas De Galicia, S.A.. Unha vez aplicados, poderemos comparar o funcionamento das EDARs en termos dunha medida de eficiencia e veremos cales das depuradoras terán un peor comportamento.

Finalmente, realizando unha análise comparativa combinada coa técnica clúster de análise multivariante, poderemos agrupar as depuradoras en grupos con características similares e estudar cales delas son punto de referencia para as demais.

English abstract

Over the years, the choice between public or private management of water resources has been, and continues to be, a subject of debate in many countries, regardless of the particular legislation of each one. There are arguments on both sides of the discussion, and we can divide them into three fundamental categories to choose which administration has a better performance: tariff price, water quality and management efficiency.

In this dissertation, we will summarise some of the contributions of the existing literature on this subject, focusing on the ones which based their empirical analysis on Spain, since it will be similar for ours. Moreover, we will focus on the evaluation of the efficiency between both managements, using Data Envelopment Analysis. Thus, after a brief description of this technique and its main models, we will apply it to our particular case: a comparison between wastewater treatment plants' efficiency according to whether they are managed by public or private companies, we will focus on Viaqua Gestión Integral De Aguas De Galicia, S.A as our private business. Once we have these results, we will be able to compare the performance of WWTPs on the basis of an efficiency measure, so we will see which ones have a worse performance.

Finally, we will perform a benchmarking analysis and a clustering technique, so we will be able to clasificate WWTPs in groups with similar characteristics and to study which ones are benchmarks for the others.

Prefacio

A auga é un recurso natural tan esencial como escaso, especialmente no contexto actual marcado por diferentes desafíos, como por exemplo o cambio climático. Tendo como principais efectos, tempadas de seca ou de inundacións cada vez máis habituais. Destacamos tamén, unha demanda dos recursos hídricos cada vez maior que deben dar resposta a unha poboación e urbanización que non deixa de medrar. Isto provoca a aparición de novos contaminantes prexudiciais para a saúde, presentes nas augas e que deben ser depurados. De feito, segundo o artigo consultado en [Cordobés \(2019\)](#), de onde se obtén a Figura 1, 108 das 394 masas de auga analizadas por Augas de Galicia presentaban contaminación no ano 2019. Ademais, no caso particular de España contéplanse outros desafíos marcados pola xeografía do territorio, ao trátase dun país cunha diversidade xeográfica e climática destacable.



Figura 1: Vertido de substancias contaminantes no río Furelos, Melide.

É, por iso, necesario garantir unha subministración e saneamento da auga seguro, sostible e de calidade. Precisando para este fin, infraestruturas óptimas que permitan levar a cabo o ciclo integral da auga. Este é un proceso que debe ser administrado eficientemente, sexa por unha entidade pública ou ben por unha privada. Será esta cuestión a debatir en torno á cal centraremos este traballo. Durante anos, e en distintos países, discutiuse que tipo de administración deberían xestionar o servizo de augas. Por unha banda, crese que a necesidade dunha transparencia no sector público favorece á entidade privada. Porén, a proximidade das autoridades locais aos cidadáns permítenlles a estes ter un control maior sobre deste servizo, que os repercute directamente. O noso obxectivo de estudo será dar resposta á pregunta de que tipo de xestión da auga, pública ou privada, é máis eficiente.

Con este propósito, faremos fincapé na comparación das Estacións Depuradoras de Augas Residuais (EDARs), pois é nelas onde se realizan as tarefas de saneamento e volta ao medio das augas tratadas, sendo un punto crucial das infraestruturas hídricas. Falaremos da súa eficiencia, dende unha perspectiva

matemática, non en termos de coste-beneficio, senón da súa efectividade á hora de proporcionar unha boa calidade da auga tratada en Galicia.

Neste contexto, xorde a necesidade de avaliar e comparar a eficiencia das EDARs xestionadas por empresas públicas e privadas. Para isto, presentaremos unha metodoloxía matemática non paramétrica que nos permitirá cuantificar estas eficiencias.

O método que empregaremos coñécese como Análise Envolvente de Datos (DEA, polas súas siglas en inglés), con aplicacións en múltiples contextos. A metodoloxía DEA é unha técnica non paramétrica que permite medir a eficiencia de unidades de toma de decisións (DMUs) ao considerar múltiples inputs e outputs. Da mesma maneira, esta análise permite ter unha visión do desempeño das DMUs en función de recursos empregados e resultados obtidos. A través destas técnicas, é posible identificar as unidades máis eficientes e aquelas que poderían mellorar o seu rendemento. É máis, ao permitir a avaliación da eficiencia tanto en termos de inputs como de outputs, a DEA ofrece unha visión integral do comportamento das EDARs en función dos recursos utilizados e os resultados obtidos.

O obxectivo fundamental deste traballo será analizar a eficiencia da xestión dunha mostra de EDARs en Galicia, a través da metodoloxía DEA. Esta eficiencia será entendida en termos de que depuradoras conseguen un mellor resultado na calidade da auga tratada, é dicir, será máis eficiente aquela que, en comparación coas demais, conseguiu un efluente de saída con menos concentración de substancias nocivas. Tamén, empregando técnicas de *benchmarking* poderemos establecer unha clasificación das EDARs da nosa mostra.

Así pois, este estudo permitiranos, comparando administracións públicas e privadas, aportar evidencias empíricas sobre as vantaxes e limitacións de ambos enfoques, en termos de eficiencia. Para iso, organizaremos o noso traballo como segue.

No Capítulo 1 faremos unha revisión da literatura existente no debate entre a xestión pública e privada da auga, facendo fincapé en España, xa que nos resultará de utilidade para entender o marco político e lexislativo no que se atopa a nosa área de interese, que se corresponde con Galicia. No Capítulo 2, realizando un percorrido histórico, describiremos o marco teórico que xustifica a aplicación da Análise Envolvente de Datos, en adiante os problemas DEA, presentando algunhas das formulacións máis relevantes e ilustrando o seu uso na práctica, neste e noutros contextos. A partir do Capítulo 3 comezaremos co estudo empírico. Presentaremos os datos empregados para o estudo das EDAR en Galicia. Xa no Capítulo 4, expoñeremos os resultados desa análise e estableceremos unha clasificación con técnicas clúster e de *benckmarking*. Tamén discutiremos os resultados obtidos aclarando algunhas limitacións que este estudo presenta. Por último, no Capítulo 5, presentaremos as conclusións finais do traballo e daremos algunhas ideas de posibles liñas futuras, de cara á mellora do estudo.

Capítulo 1

A xestión da auga

A disputa entre a xestión pública ou privada da auga é un debate que segue vivo en moitos países do mundo. No caso de Europa, como se discute en [Thomas et al. \(2012\)](#), a xestión deste servizo realízase de forma diversa en función do país considerado. Por exemplo, comezando polos casos extremos, en Reino Unido a finais dos anos 80 comezan a privatizarse monopolios que antes recaían en mans públicas, incluídos os servizos locais públicos como o servizo de auga urbana. Co cal, na actualidade temos que Inglaterra e Gales teñen este servizo xestionado por empresas privadas e só en Escocia é completamente público, recaendo en mans do goberno. O caso contrario témolo nos Países Baixos, no cal se prohíbe por lei a privatización deste servizo, sendo responsabilidade do Ministerio de Infraestruturas e Xestión de Augas do goberno neerlandés, como se pode comprobar na páxina web [Goberno dos Países Baixos \(2024\)](#). Sen embargo, existen tamén países europeos a medio camiño entre unha posición e a outra. Sendo este o caso de Francia, Portugal ou España, entre outros, onde as compañías privadas, públicas e mixtas se reparten a xestión para satisfacer as necesidades da poboación. De feito, aínda que a maioría das grandes cidades europeas están a cargo de entidades públicas, en España, Francia ou República Checa a maioría dos habitantes do país teñen abastecido o seu servizo de augas por entidades privadas.

Ao longo deste traballo, como xa avanzabamos, centrarémonos na comparativa das xestións nunha área xeográfica concreta, Galicia. Polo tanto, a continuación, faremos fincapé no regulamento que conduce a xestión do servizo de augas en España e, por consecuencia, na localización específica de interese.

Desde 1985, coa aprobación da Lei de Augas, estableceuse o carácter público das augas, tanto superficiais como subterráneas, co cal o seu uso require permiso da administración, como se presenta en [Fanlo \(2002\)](#). Unha das competencias das administracións municipais é a distribución e tratamento da auga, aínda que a súa xestión non ten por que recaer nelas. Co cal, aínda que a titularidade e autoridade legal do servizo de augas lles pertence, a municipalidade pode optar por facerse cargo do servizo ou externalizalo. Emporiso, neste último caso, só se adquire o dereito á explotación. Así, a administración do servizo de augas pode ser delegado na súa totalidade a unha empresa pública, a unha privada ou optar por unha compañía mixta, público-privada. De feito, no ano 2022, con cifras proporcionadas pola enquisa da Asociación Española de Abastecimiento e Saneamento, [AEAS \(2022\)](#), o 35 % da poboación española estaba abastecida por entidades públicas, o 33 % por privadas, o 22 % por sociedades mixtas e o 10 % restante por servizos municipais. Deste xeito, a presenza da xestión privada é relevante, prestando servizo a máis dun 50 % dos habitantes.

Para a privatización de servizos locais, en España, o máis habitual é facelo mediante unha concesión, por medio da cal a administración pública segue sendo a titular do servizo delegando a súa dirección a unha compañía privada. Tamén se poden establecer contratos entre ambas partes para traballos de menor duración ou puntuais. No caso das empresas mixtas, prodúcese unha privatización parcial onde, xeralmente, o socio público encárgase do cumprimento dos obxectivos do servizo, e o privado da xerencia diaria. Cómpre destacar, que algúns dos motivos polos cales os gobernos locais se decantan por externalizar o servizo a unha empresa privada é o resultado dunha combinación entre a inversión

que precisa o mantemento das infraestruturas e melloras operativas, e as habilidades técnicas que posúe. Ademais, da eliminación de parte da carga administrativa pública e da gran demanda de auga nos fogares, que é maior cando máis densidade poboacional teña o municipio. Así pois, é habitual que núcleos urbanos con maior densidade poboacional estean baixo a xestión privada.

En consecuencia, tal e como pode consultarse en [González-Gómez et al. \(2014\)](#), algunha das características do servizo de augas urbanas español é a heteroxeneidade de sistemas ou métodos para a súa xestión. Tamén, aínda que dixemos anteriormente que o 33% da poboación está abastecida por entidades a cargo de sectores privados, esta porcentaxe non está repartida de xeito homoxéneo por todo o territorio español, senón que se produce unha concentración de procesos de privatización en concellos onde a densidade poboacional é alta. Neste mesmo artigo, estímase que en municipios cunha media de 14000 habitantes, o sector privado ou mixto é o máis habitual, mentres que o público encárgase da xestión da auga urbana en concellos cunha poboación media de 3400. Outra característica a destacar da administración do servizo de augas é a concentración de empresas privadas en poucas compañías dominantes. Podemos destacar o caso á compañía francesa *Veolia*, onde coa súa filial, *Aguas de Barcelona (Grupo AGBAR)*, e xunto con *Aqualia*, xestiona o 67% dos servizos municipais de auga que foron privatizados o que, en termos de poboación, equivale a un 75% do abastecemento privado de auga en España.

1.1. A administración pública e privada en España

Como xa avanzabamos, o debate sobre a xestión pública ou privada segue sendo unha controversia en moitos países, e o caso de España non é unha excepción. Anteriormente, revisaremos a situación do servizo de xestión de augas no país dende un punto de vista imparcial. Nesta sección comentaremos os distintos argumentos máis habituais, examinando a literatura consultada, a ambos lados da discusión, centrando a nosa comparación en tres aspectos clave: eficiencia, prezo e calidade do servizo.

1.1.1. A eficiencia dos sectores público e privado

En capítulos posteriores definiremos con exactitude o que entendemos formalmente por *eficiencia*. Porén, nesta sección simplemente revisaremos unha parte da literatura sobre o debate acerca de cal dos dous sectores, público ou privado, é máis eficiente.

Por unha banda, partidarios da privatización baséanse na maior eficacia da xestión do ciclo integral da auga e recursos, así como de servizos de maior calidade no sector privado. Porén, a posición contraria á privatización defende que un manexo público é a mellor opción para garantir un acceso universal a este servizo e para evitar un posible abuso por parte dos monopolios privados.

Existen estudos empíricos en España onde se tenta comparar ambas xestións, pero os resultados a este respecto son diversos e mesmo contraditorios. Por destacar algunhas temos o estudo realizado sobre unha mostra de 50000 habitantes de 24 cidades españolas, que pode consultarse [García-Sánchez \(2006\)](#), onde aplicando un método DEA a autora conclúe que existe unha influencia da densidade demográfica para os niveis de eficiencia obtidos, pero non existen probas determinantes de que xestión é mellor. Outro exemplo de investigación empírica no tema é a que atopamos en [González-Gómez et al. \(2013\)](#), onde os autores se centraron na rexión de Andalucía e realizando un estudos, coa metodoloxía DEA, dos servizos chegaron á conclusión de que a xestión privada ou público-privada é máis eficiente ca pública, ata que se teñen en conta factores ambientais, onde pasa a non haber diferenzas significativas para as tres formas de administración. Noutra análise, feita na mesma rexión, e que pode consultarse en [Picazo-Tadeo \(2009\)](#), conclúese que a eficiencia do servizo de augas é maior en áreas densamente poboadas e o sector privado é significativamente máis eficiente manexando factores de produción concretos, como a man de obra.

Como vemos, temos resultados varios, dependentes da área de estudo concreta e, do modelo e variables que se tomen para a realización da mesma.

1.1.2. O prezo dos servizos

Un argumento a favor da non privatización do servizo de augas que atopamos na literatura é o menor prezo das tarifas a pagar polo usuario. Co cal, o prezo dos servizos tamén é un factor a comparar. Porén, cómpre aclarar que debido á titularidade pública da auga, esta non ten prezo en si mesma, a tarifa consiste nos servizos relacionados con este recurso, non co recurso en si.

No punto anterior, comparamos ambos sectores seguindo o esquema habitual estudado na literatura sobre a súa eficiencia. Sen embargo, tamén existen outro tipo de comparacións que teñen que ver co prezo dos servizos ofrecidos. Antes de revisar a literatura sobre este punto, expoñeremos un dato obxectivo. Segundo [AEAS \(2022\)](#), no 2022, o prezo medio do uso en fogares da auga era de $1.97\text{€}/\text{m}^3$, co cal o 0.9% da factura das familias correspondíase con este pago.

Como se comenta en [Martínez-Espiñeira et al. \(2009\)](#), en España existe unha tendencia en dividir a tarifa en dúas partes. Unha é fixa, que pode variar coa aprobación dos concellos e da Comisión de Prezos de cada comunidade autónoma, e outra correspóndese cun compoñente volumétrico. Ademais, o prezo desta tarifa é altamente variable segundo a rexión de España na que nos atopemos, o que mostra a falta de pautas que regulen o seu establecemento. Sendo Cataluña e Murcia as comunidades máis caras e Galicia e Castela e León as máis baratas, como se pode ver, con datos do 2014, en [Calancha et al. \(2018\)](#). Na Figura 1.1, elaborada con datos do Instituto Nacional de Estatística, [INE \(2022\)](#), temos que, para datos do ano 2022, as comunidades que presentaron prezos máis elevados foron Cataluña e Islas Baleares e as máis económicas Asturias e Castela e León. Podemos observar, tamén, o consumo medio de auga nos fogares nese mesmo ano. Presentando Cantabria o maior e País Vasco o menor gasto medio de auga, en litros por habitante e día.

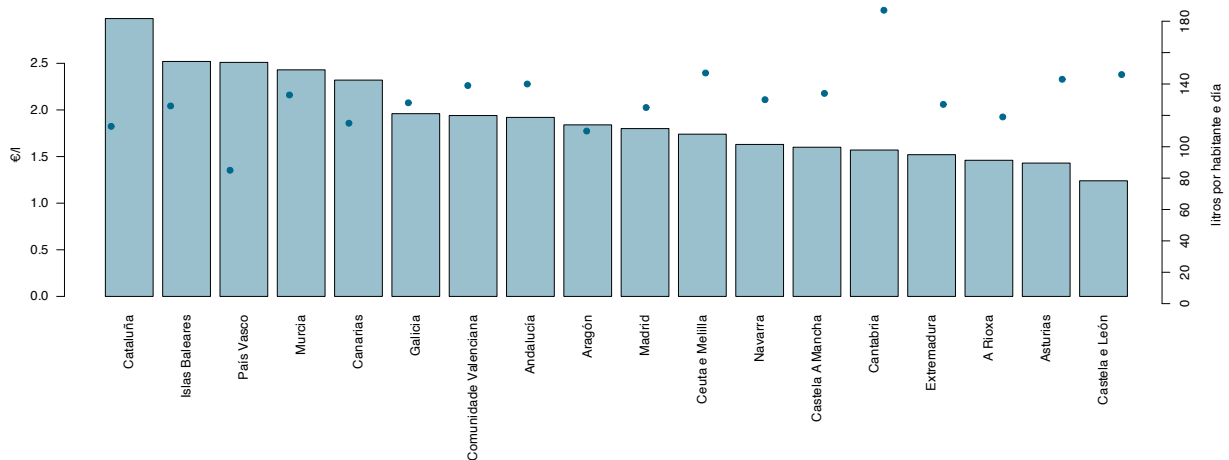


Figura 1.1: Gráfico de barras do prezo (€/litro) do coste da auga, xunto co consumo medio de auga nos fogares (litros por habitante e día). Ambos ordeados segundo a comunidade autónoma (CCAA).

Poderíamos pensar que esta diferenza é debida ás condicións xeográficas da comunidade, ao tratarse dun país con diferentes climas e condicións de seca. Sen embargo, isto non parece ser suficiente para xustificar esa diferenza, pois ao comparar entre a propia comunidade tamén atopamos discrepancias entre as distintas provincias. Por exemplo, empregando os datos recollidos en [FACUA \(2023\)](#), para contadores do mesmo calibre, neste caso de 13 milímetros, temos que o prezo total mensual en A Coruña é de 13.73€, en Lugo 9.78€, en Ourense 8.23€ e en Pontevedra 15.02€. Sendo xestións públicas nas dúas primeiras cidades (Emalcsa e Concello de Lugo) e privadas nas restantes (Viaqua en ambas).

A xestión dos recursos hídricos require dun gran investimento e implica altos costes operativos, non só para manter as infraestruturas, senón tamén para adaptalas a unhas lexislacións variantes,

as cales, cada vez fan máis fincapé nunha boa calidade da auga. Neste contexto, as administracións, especialmente as públicas, atópanse con dificultades debido á escaseza de beneficios xerados. Non obstante, as entidades privadas dispoñen de máis recursos para poder levar a cabo estas melloras técnicas, o que, en ocasións, pode verse reflectido nun prezo máis elevado das tarifas.

En [Martínez-Espiñeira et al. \(2009\)](#), os autores buscan ver se a xestión privada do servizo de augas implica un prezo máis elevado para os consumidores, para iso obteñen información de 53 municipios de máis de 100000 habitantes ou que son capitais de provincia, onde as tarifas son non uniformes entre eles. Empregando un método baseado na máxima verosimilitude, *full-information maximum-likelihood*¹, conclúese que a densidade poboacional ten unha correlación positiva co prezo da factura da auga, o que pode deberse a que en cidades cunha alta poboación os costes de distribución son maiores. Tamén, atópanse probas significativas de que os prezos das xestións privadas ou público-privadas son maiores que no caso das públicas. A partir destes resultados, os autores conclúen que as firmas privadas tenden a buscar clientes en áreas onde os ingresos sexan máis estables e elevados. Ademais, a localización, a densidade poboacional e os ingresos exercen unha influencia na tarifa. Non obstante, os autores advirten que temos que ter en conta que o elevado prezo das privadas, en comparación co sector público, pode deberse a diferenzas de coste e calidade do servizo que nesa análise non se ten en conta.

Outro exemplo de análise empírica en España atopámolo en [García-Valiñas et al. \(2013\)](#), onde tomando datos de 386 municipios de Andalucía (195 deles abastecidos por compañías públicas, 83 privadas e 75 público-privadas), os autores conclúen que os prezos son máis elevados cando os municipios externalizan o servizo. Sen embargo, son as empresas público-privadas as que alcanzan unha maior tarifa ao ter a compoñente fixa máis elevada, que os autores xustifican por un posible maior investimento nas infraestruturas para obter unha mellor calidade.

1.1.3. A calidade da auga

Outro elemento que permite cualificar a xestión do servizo de augas é o referente á calidade da auga resultante entre os distintos tipos de administracións. Como se comenta en [González-Gómez et al. \(2014\)](#), os requerimentos impostos pola Unión Europea na calidade da auga foron un incentivo para a privatización do servizo, pois as entidades privadas teñen máis facilidade para obter recursos que repercutan nunha mellora da calidade. Aínda que non atopamos ningún artigo que tente discutir esta cuestión en España, podemos poñer un exemplo en Portugal, onde as condicións legais son similares ao país de interese, empregando unha serie de indicadores clave de rendemento (KPIs, polas súas siglas en inglés) que teñen en conta o nivel de cobertura, servizo ao cliente, erros no servizo, eficiencia enerxética, perdas de auga e o cumprimento dos requirimentos legais. Como pode verse en [Cunha Marqués e Simões \(2020\)](#), o sector privado ofrece unha mellor calidade de servizo ao ter un mellor comportamento en conxunto dos KPIs. Aínda que isto, igual que os dous aspectos anteriores, depende dos datos concretos e non podemos concluír de forma xeral que xerencia é mellor.

Podemos exemplificar tamén a comparación de servizos públicos ou privados respecto a calidade da auga, cun exemplo nos Estados Unidos, véxase en [Kosec e Wallsten \(2005\)](#). Nesta publicación, emprégase o número de violacións da normativa da calidade de auga estadounidense, entre outros datos, dunha gran mostra de sistemas de auga. Só no ano 2003 existían 53245 activos, e este estudo recolle datos de 1997 a 2003. Con eses datos e empregando unha regresión cunha distribución Binomial Negativa, os autores obteñen que ao existir unha interacción entre as variables de poboación e explotación do servizo, non existen diferenzas significativas entre a explotación pública ou privada.

Concluimos que nos tres factores que temos en conta para analizar que xestión é a máis axeitada: eficiencia, prezo da tarifa e calidade da auga; atopamos argumentos a favor e en contra de ambos tipos de administracións na literatura. Neste traballo, realizaremos unha análise empírica para comparar as administracións do servizo de augas en Galicia, centrando a nosa atención no primeiro deles.

¹A diferenza da estimación por máxima verosimilitude, onde só se usa unha mostra dos datos, a estimación por *full-information maximum-likelihood* emprega todos os datos dispoñibles.

1.2. O ciclo integral da auga

Na revisión das referencias máis próximas, trátase a comparación entre diferentes formas de dirección do servizo de augas. Non obstante, cómpre saber a que nos estamos a referir co servizo de augas, é dicir, que xestionan exactamente esas empresas ou municipios. Trátase das etapas do denominado *ciclo integral da auga*.

A modo de resumo, entendemos como ciclo integral da auga o recorrido que fai a auga desde a súa captación na natureza ata que é apta para o consumo humano nos fogares, e, tamén, o camiño que esta percorre para volver a integrarse, unha vez que foi depurada, na natureza. Podemos esquematizar este recorrido, seguindo as pautas de [Augas de Galicia \(2022\)](#) e coa Figura 1.2, obtida de [Aigües de Barcelona \(2023\)](#), como segue:

1. **Captación** ou recollida de auga dende diversas fontes, tanto dende augas superficiais como subterráneas. É dicir, obter da natureza o volume de auga requirido para abastecer á poboación de interese e garantir o correcto funcionamento das actividades que precisen dela. Esta auga recollida será almacenada e transportada ata a seguinte fase. Aquí ten lugar o traballo de explotación de presas ou encoros.
2. **Tratamento** ou potabilización da auga bruta para o consumo humano. Este paso realízase en plantas de potabilización Estacións de Tratamento de Auga Potable (ETAP). Entre os tratamentos que se levan a cabo podemos destacar a filtración ou a cloración, para a desinfección das augas ata que estas presenten parámetros dentro dos límites aceptables para o consumo.
3. **Almacenamento** da auga purificada mediante depósitos para o seu posterior transporte ata o seu destino final.
4. **Distribución** da auga tratada. Mediante unha rede de distribución e centrais de bombeo pódese realizar o transporte de augas desde os depósitos de almacenamento, situados en distintos lugares das urbes, ata os fogares ou industrias que precisen un abastecemento de auga continuo.
5. **Consumo**. Unha vez que a auga foi potabilizada e distribuída, é apta para o seu consumo doméstico ou noutras actividades.
6. **Saneamento** da auga empregada para a súa correcta recollida. O uso da auga implica unha contaminación con substancias externas, polo que se precisa dunha rede de saneamento que permita transportar as augas residuais a plantas de depuración para así volver a integrarse na natureza. Esta auga residual recóllese mediante un sistema de sumidoiros de onde se transporta ata a seguinte fase.
7. **Depuración** da auga residual recollida na fase anterior. Este proceso lévase a cabo en Estacións Depuradoras de Augas Residuais (EDAR), que teñen o fin de eliminar ou reducir contaminantes nestas augas usadas prexudiciais para a súa volta á natureza, de xeito que se produza o menor impacto posible no medio ambiente.
8. **Vertido** das augas residuais depuradas. A auga tratada reincorpórase ao medio, deste xeito garántese a preservación do medio hídrico. Tamén pode ser que a auga depurada se reutilice para o rego, industria ou outras actividades.



Figura 1.2: Representación do ciclo integral da auga coas súas fases ordeadas como segue: captación, tratamento, almacenamento, distribución, consumo, saneamento, depuración e vertido.

Neste traballo centraremos só na etapa de depuración dado o seu impacto tanto económico como medioambiental. En concreto, analizaremos a xestión das EDARs, pública ou privada, en termos da súa eficiencia acadada.

1.3. As estacións depuradoras de augas residuais

Antes de presentar a metodoloxía que empregaremos para comparar a eficiencia entre as administracións e describir dos datos que empregaremos para o estudo, explicaremos, brevemente, cal é o traballo dunha Estación Depuradora de Augas Residuais (EDAR). Para iso, usaremos a información proporcionada polo Ministerio para a Transición Ecolóxica e o Reto Demográfico a través da información dispoñible na súa páxina [MITECO \(2024\)](#) e da atopada en [Augas de Galicia \(2022\)](#).

Como consecuencia do uso humano da auga potable, esta pasa a ser auga residual e, segundo a súa orixe, podemos clasificala en:

- Auga residual doméstica. É a producida nos fogares como resultado de actividades domésticas. Adoitan ser augas contaminadas, principalmente, por materia orgánica, restos de aceites, xabóns,...
- Auga residual industrial. É a obtida por actividades comerciais e industriais. Neste caso os contaminantes poden ser orgánicos ou inorgánicos.
- Auga de infiltración. É a procedente do subsolo e chega á rede de saneamento a través dun sistema de canalización defectuoso.
- Auga de chuva. É a contaminada principalmente por sólidos de arrastre.
- Auga residual agrícola. É a producida por actividades agrícolas.
- Outras augas de escorrentía, como as resultantes do regadío.

A reincorporación destas augas residuais directamente, tería consecuencias para os seres vivos dependentes dos recursos hídricos. Co cal, para garantir a calidade da auga de retorno, estas deben pasar por un proceso de depuración co obxectivo de eliminar o maior número de contaminantes posibles, ata acadar os cumprimentos establecidos na lexislación correspondente. Segundo o medio acuático no que se produza o vertido, a zona onde está instalada a EDAR e o tamaño do grupo urbano que xera a auga residual serán tratamentos de depuración máis ou menos esixentes.

Neste contexto, podemos definir unha planta de depuración como o conxunto de instalacións que ten como obxectivo conseguir, partindo de augas residuais, unha auga de mellor calidade, reducindo a súa contaminación a través de tratamentos e procesos que conseguen auga con límites aceptables para a súa reincorporación ao medio receptor, eliminándose sólidos, materia orgánica ou inorgánica e nutrientes das augas residuais. As EDAR tamén permiten reusar os residuos resultantes da depuración, como lodos, para outros fins como a reutilización agrícola ou a valorización enerxética.

A procedencia da auga residual e os contaminantes asociados permítenos establecer unha clasificación entre os distintos tipos de depuradoras.

- **Depuradora biolóxica.** A auga residual é doméstica, polo que a contaminación que presenta é, fundamentalmente orgánica, contendo sólidos e nutrientes (nitróxeno e fósforo). Nas depuradoras biolóxicas téntase eliminar ou estabilizar a materia orgánica empregando microorganismos, que tamén axudan á eliminación de sólidos e nutrientes, nalgúns casos. Finalmente, sepáranse da auga mediante procesos de decantación.

Nestas depuradoras pódense producir distintos procesos segundo o traballo que realicen os microorganismos empregados. Por exemplo, existen procesos aerobios (nos que se precisa osíxeno), procesos anaerobios (sen osíxeno), nitrificación (prodúcese nitrato), desnitrificación e eliminación de fósforo, podendo ser esta última por vía química (mediante produtos químicos) ou vía biolóxica (o fósforo é absorbido polos microorganismos).

- **Depuradora físico-química.** A auga residual tratada adoita ser industrial, tendo tamén contaminantes inorgánicos a maiores, aínda que tamén pode ser doméstica. Neste caso, a descontaminación prodúcese engadindo reactivos químicos que se eliminarán mediante procesos de flotación ou precipitación. Nestas depuradoras, tamén se pode complementar a depuración con tratamentos biolóxicos posteriores.

Podemos dividir o traballo dunha estación depuradora, EDAR, nas seguintes liñas, aínda que non todas as instalacións teñen que dispoñer de todas as etapas:

1. **Liña de auga.** Nesta teñen lugar os tratamentos necesarios nas augas residuais. Poden ser divididos en catro niveis.
 - **Pretratamento.** Consiste nun tratamento físico onde se eliminan materias sólidas. Neste nivel participan varios elementos: desbaste (eliminación de grosos non solubles, de gran tamaño), eliminación de areas ou sólidos de menor tamaño para evitar sedimentos nos canles, desengraxado (eliminación de líquidos non mesturables coa auga) e homoxeneización dos caudais.
 - **Tratamento primario.** Consiste nunha decantación para a eliminación de pequenas partículas que non foron eliminadas durante o pretratamento.
 - **Tratamento secundario.** Neste nivel téntase a eliminación de materia orgánica da auga resultante do tratamento primario. Para elo, empréganse bacterias ou microorganismos para reducir, non só materia orgánica, senón tamén nutrientes como o nitróxeno ou o fósforo. No reactor biolóxico os microorganismos pódense manter nun cultivo fixo, onde son fixados a un soporte. É a auga a que circula a través del, ou nun cultivo en suspensión, onde os microorganismos se atopan en suspensión na auga polo que é necesario separalos para poder manter unha concentración de biomasa.
 - **Tratamento terciario.** Correspóndese con tratamentos físico-químicos empregados para afinar algunhas características do resultado do tratamento secundario co fin de adecualo ao seu uso final.
2. **Liña de fangos.** Nesta área trátanse os lodos, un subproduto do tratamento de augas residuais. Engloba os seguintes procesos.

- **Espesado.** Nel téntase reducir o volume dos fangos eliminando parte da auga que os contén.
- **Estabilización.** Lévese a cabo a destrución e/ou transformación da materia orgánica atopada nos fangos, mediante un proceso de dixestión cuxo resultado son contaminantes e biogás, que pode ser queimado ou aproveitado como enerxía.
- **Deshidratación.** Nesta parte elimínase, con medios físicos, a maior cantidade de auga dos fangos que sexa posible, facéndoos máis manexables ao diminuír considerablemente o seu volume.
- **Secado térmico.** Emprégase enerxía térmica para secar os fangos ata o nivel que se requira.

Na Figura 1.3, tomada da páxina web de [Augas de Galicia \(2022\)](#), podemos ilustrar estas dúas primeiras liñas.

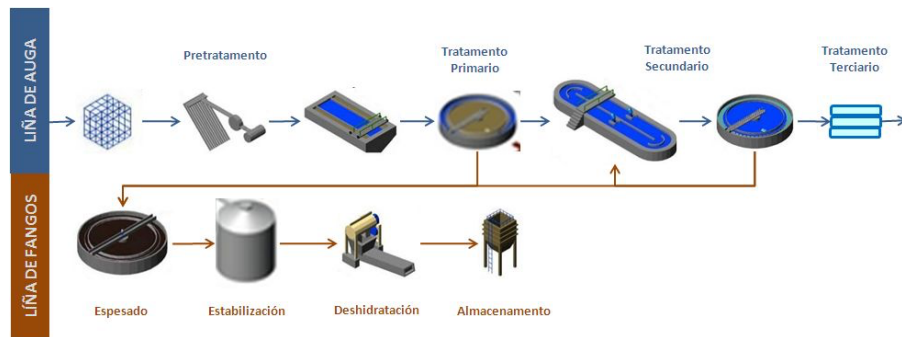


Figura 1.3: Liñas de auga e fangos dunha estación depuradora de augas residuais. Ilústranse as fases de cada unha das liñas.

De feito, segundo os datos consultados no [INE \(2022\)](#), sobre o destino destes fangos en España, no ano 2022, temos que 81.7% dos fangos xerados nas depuradoras se destinaron á agricultura ou xardinería, un 7.9% ao aproveitamento enerxético e un 10.3% foron enviados ao vertedeiro. Máis concretamente, temos que en Galicia nese mesmo ano 2022, só o 84.4% dos fangos foron reutilizados, empregándose para actividades agrícolas.

3. **Liña de gas.** Como se adiantou antes, durante a liña de fangos prodúcese unha dixestión anaerobia que ten como resultado o biogás, o cal se pode aproveitar para producir enerxía térmica ou eléctrica, tanto para a súa venda como para o propio consumo da planta depuradora para a realización das súas actividades.

Capítulo 2

O enfoque *Data Envelopment Analysis*: os problemas DEA

No capítulo anterior explicamos que o noso obxectivo será realizar un estudo da eficiencia das EDARs públicas e privadas. Para elo, precisaremos dunha metodoloxía matemática que nos permita asignar unha medida de eficiencia a cada depuradora. Neste capítulo, introducimos os problemas DEA que, a través da programación lineal, permitirannos acadar os resultados buscados.

O estudo da eficiencia en problemas de decisión multiaxente é unha área recorrente para a comparación do rendemento de empresas ou organizacións pertencentes ao mesmo sector. Para elo, resultan relevantes os termos de eficiencia e produtividade que poden ser abordados tanto desde unha perspectiva da Economía Aplicada como da propia Investigación de Operacións. Para poder desempeñar a súa actividade produtiva, as entidades precisan dunha serie de recursos, que denominaremos *inputs*, que se consomen ou se empregan para a obtención dunha serie de bens (materiais ou inmateriais) finais, que denominaremos *outputs*. Os problemas DEA nacen como unha técnica que permiten avaliar a eficiencia destas. Co cal, se consideramos que a eficiencia pode ser interpretable como a relación entre esas entradas e saídas, temos que unha empresa será *mellor* que outra se consumindo os mesmos inputs é capaz de xerar máis outputs ou, doutro xeito, xerar os mesmos outputs consumindo menos recursos.

No que segue, a cada unha das empresas ou organizacións que queremos comparar denominarémola unidade produtiva de toma de decisións, *Decision Making Unit* (DMU). Así, se expresamos esta situación cunha formulación matemática, temos que se supoñemos un conxunto de m inputs e s outputs requiridos para cada DMU, os mesmos para todas as DMUs, sendo así comparables, o conxunto Φ de produción que caracteriza as DMUs é

$$\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} \mid x \text{ produce } y\}.$$

Entón, se denotamos por $N = \{1, \dots, n\}$ o conxunto das n DMUs dispoñibles, cada k -ésima unidade está caracterizada por un punto $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}_+^{m+s}$, a partir dos cales definimos o conxunto dos posibles puntos de produción (*Production Possibility Set*) como segue

$$PPS = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} \mid x \text{ pode producir } y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} \mid y = f(x)\},$$

onde f é a función de produción que relaciona inputs con outputs. Unhas das propiedades deste último conxunto é que $\Phi \subseteq PPS$.

Ademais, cómpre mencionar que, como veremos no que segue, dependendo do contexto no que nos atopemos, a idea de eficiencia da lugar a distintas interpretacións e, polo tanto, xorden as distintas formulacións dos problemas DEA.

A modo de exemplo, empregamos o artigo de [Cooper et al. \(2009\)](#). Nel, os autores ilustran a metodoloxía DEA para avaliar a eficiencia dunha mostra de xogadores de baloncesto da ACB, a

principal liga profesional de baloncesto en España. Nesta publicación, tense que as DMUs serían os 172 xogadores da mostra dispoñible. Porén, os autores dividen esta mostra segundo a posición que ocupe cada xogador no equipo. Así, por exemplo, para os bases consideramos unha mostra de 41 xogadores. Desta maneira, empregando como outputs unhas variables que miden a calidade do xogo, como poden ser as asistencias ou os roubos, chegamos a unha cuantificación da eficacia de cada xogador en comparacións coa dos seus compañeiros. É dicir, para poder avaliar a eficiencia do seu xogo, comparárase este con todos os demais. Polo tanto, para obter a eficiencia dos n xogadores precisaríamos resolver n problemas DEA.

Neste capítulo faremos un percorrido, cronolóxico, das orixes dos problemas DEA, que temos resumido na Figura 2.1. Tal como se observa, non foi ata a publicación de *The Measurement of Productive Efficiency*, pode consultarse en Farrell (1957), cando se estableceu o concepto de fronteira eficiente, tamén coñecida como fronteira de produción. Nesta atopábanse as DMUs que tiñan mellores resultados, podendo servir como referencia para comparar coas demais. Charnes et al. (1978), deixan de asumir que a fronteira de produción eficiente é coñecida, co cal debe ser estimada mediante un problema de programación linear, dando lugar a orixe dos problemas DEA. Ata ese momento, os modelos DEA contaban con retornos de escala constantes, é dicir, un aumento proporcional dos inputs implica o mesmo nos outputs. Porén, isto cambia ao introducir os problemas DEA con retornos de escala variables, véxase en Banker et al. (1984). A investigación en DEA continúa evolucionando, con novas formulacións e aplicacións que melloran a capacidade de análise da eficiencia en diferentes contextos. Isto permite atopar na literatura aplicacións destes métodos para a cuantificación da eficiencia en numerosos ámbitos.

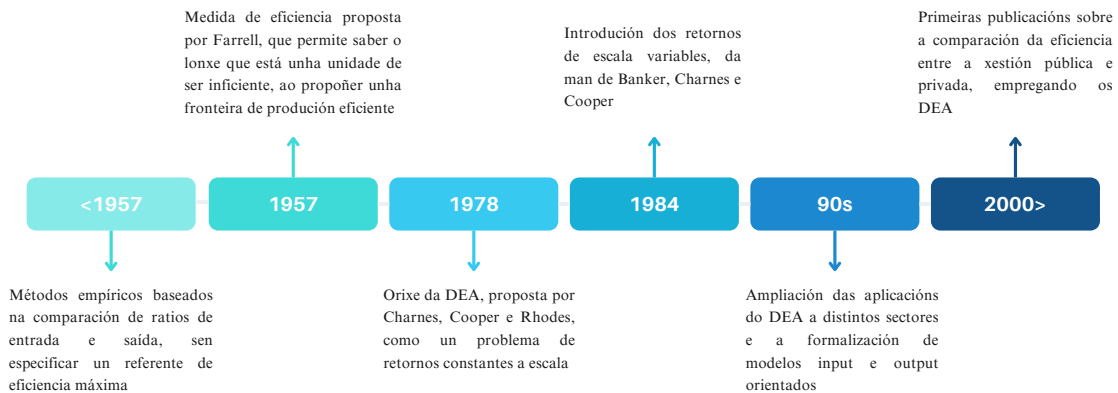


Figura 2.1: Liña temporal da evolución na investigación en problemas DEA.

2.1. O concepto de eficiencia

Nesta sección plantexaremos a medida de eficiencia que precisamos como método para poder medir e cuantificar a eficiencia sobre as DMUs co obxectivo da súa comparación. Neste contexto, debemos destacar o traballo do economista británico Farrell (1957), cuxo propósito recaía na obtención dunha medida satisfactoria da eficiencia produtiva pero tendo en conta todos os inputs. Ata o momento, a medición da eficiencia estaba baseada en técnicas que non permitían o manexo de múltiples inputs e outputs, o que imposibilitaba a tarefa de identificar claramente as fontes da ineficiencia. El mesmo definía eficiencia como a capacidade que posúe unha unidade para producir o máximo output a partir dun conxunto dado de inputs.

Para ilustrar as súas ideas, como se pode ver tamén en Blasco e Coll (2006), propuxo un exemplo onde unha DMU só ten en conta dous inputs para un único output, establecendo una serie de supostos:

1. A DMU realiza a súa produción baixo condicións de retornos constantes a escala, é dicir, o

incremento porcentual de outputs e inputs é o mesmo. Isto permite representar a información nunha isocuantas².

2. A función de produción eficiente é coñecida, co cal tamén o é o output eficiente que se pode obter de calquera combinación de inputs. Daquela, a fronteira de produción, que se refire ao máximo output teórico alcanzable por un conxunto de DMUs dados uns inputs, é coñecida. Esta constrúese a partir das unidades con mellor relación input-output, é dicir, con maior eficiencia. Mentres que os puntos fóra dela serán as DMUs ineficientes, que poderían mellorar a súa eficiencia.
3. O incremento dun input por unidade de output dun factor implica unha eficiencia técnica máis baixa, pois temos unha isocuantas convexa cara a orixe con pendente non positiva.

Con estes supostos, Farrell (1957) descompón a eficiencia global en eficiencia técnica e asignativa, definindo as mesmas co seguinte exemplo: temos catro DMUs (A , B , C e D), das cales só se obtén un output, que denotaremos y , a partir de dous inputs, x_1 e x_2 . Na Figura 2.2, represéntase a isocuantas unidade das DMUs coa curva II' , que representa as combinacións de dous factores que unha DMU eficiente usa para producir unha unidade de output. Deste xeito, todas as DMUs ineficientes serán aquelas que estean por enriba da curva, é dicir, da fronteira de produción.

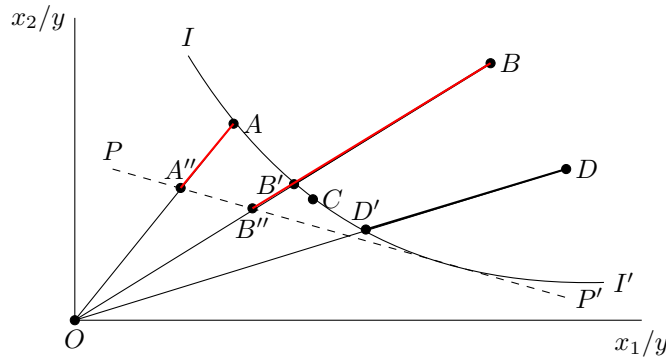


Figura 2.2: Exemplificación para a definición da eficiencia técnica e asignativa a partir do comportamento das DMUs A , B , C e D . Representábase a isocuantas, curva II' , e a liña isocoste, PP' .

Entón, a **eficiencia técnica** é a capacidade dunha unidade para obter o máximo output a partir dun conxunto dado de inputs, obtida ao comparar o valor observado de cada unidade co valor óptimo definido pola isocuantas. Así, por exemplo a eficiencia técnica de D sería o cociente entre a distancia á orixe da proxección de D na isocuantas, D' , e a distancia á orixe de D , é dicir, $\frac{OD'}{OD}$. Analogamente se razoaría para B . Polo tanto, canto máis ineficiente sexa a unidade máis próximo a cero será o valor, mentres que canto máis próximo sexa a 1 máis eficiente será, é o caso de A e C que son DMUs eficientes, fixémonos que están sobre a fronteira de produción que Farrell supoñía coñecida.

En cambio, a **eficiencia prezo ou asignativa** é a capacidade dunha unidade para usar os distintos inputs en proporcións óptimas dados os seus prezos relativos. Na Figura 2.2, vemos a liña isocoste, punteada, onde todas as combinacións de inputs teñen un mesmo coste, é dicir, as DMUs sobre PP' presentan eficiencia asignativa. Neste caso, temos que a puntuación de eficiencia prezo de A , por exemplo, é o cociente da distancia á orixe da proxección da DMU A , neste caso, sobre a liña isocoste, A'' , e a distancia á orixe de A ou, o que é o mesmo, $\frac{OA''}{OA}$. Se esa operación resulta distinta de 1 diremos que A non é eficiente en prezos.

²No campo da economía, unha isocuantas é unha curva que presenta as combinacións dos recursos cos cales se pode obter a mesma cantidade de produto. Presenta tres características básicas: é convexa na orixe, ten unha pendente negativa e as isocuantas a distintos niveis de produción non se cruzan.

Co cal, a combinación destes dous tipos de eficiencia resultan na eficiencia produtiva total, que pode calcularse como o cociente entre a lonxitude da liña que une a proxección da DMU da liña de isocoste coa orixe, entre a distancia da unidade seleccionada á orixe. Polo tanto pode escribirse como o produto da eficiencia técnica e asignativa, Por exemplo, no caso da unidade B , a súa eficiencia global sería

$$\frac{OB''}{OB} = \frac{OB'}{OB} \cdot \frac{OB''}{OB'}.$$

Deste xeito e, ilustrándoo cun exemplo práctico, Farrell propón unha medición gráfica da eficiencia, sendo así un pioneiro ao tratarse de ser a primeira forma práctica de medir a eficiencia, diferenciar dous tipos (técnica ou prezo) e cuantificar o lonxe que estaba unha unidade de ser eficiente.

2.2. A xénese da DEA cos modelos CRS

Na sección anterior describimos a proposta de Farrell no que, aínda que non desenvolveu explicitamente un modelo DEA, si sentou as bases para a definición dos mesmos. Unha das maiores limitacións que tiña o traballo do economista británico era o suposto de que a fronteira de produción debe asumirse coñecida. Porén, na práctica, é necesario estimala.

A súa estimación pódese realizar empregando métodos paramétricos, supoñendo que a fronteira é unha función cuxos parámetros se estiman a partir dos datos (como é o caso da Análise Estocástica de Fronteira), ou outros métodos non paramétricos. Nestes últimos, non se asume unha forma funcional para a fronteira, pero si supoñemos que no conxunto de posibles puntos de produción está o $(0, 0)$, con 0 recursos non producimos nada, e que se para un determinado input producimos unha cantidade de output, con máis input produciremos ese mesmo output.

Os métodos non paramétricos baséanse, fundamentalmente, na programación matemática como recurso para estimar a fronteira. Ademais, dependendo de se temos datos constantes coñecidos ou variables aleatorias, podemos diferenciar entre métodos non paramétricos deterministas ou estocásticos, respectivamente. A Análise Envoltente de Datos (en inglés *Data Envelopment Analysis*) foi descrita por [Charnes et al. \(1978\)](#). Nesa publicación, propónse esta metodoloxía, un método non paramétrico, determinista e baseado na programación matemática, que é considerada unha das aportacións máis importantes neste campo.

Os autores propuxeron o uso da programación matemática como ferramenta para medir a eficiencia. O seu traballo ten como idea principal a comparación de DMUs con base a fronteira eficiente para a medición da súa eficiencia, igual que se facía en [Farrell \(1957\)](#).

Polo tanto, [Charnes et al. \(1978\)](#) introduce o concepto do problema DEA, tal e como se coñece na actualidade, que permite cuantificar a eficiencia dun conxunto de DMUs, as anteriormente consideradas unidades de toma de decisións, empregando as entradas e saídas destas unidades. Xa vimos que, ata o momento, a avaliación da eficiencia realizábase como un cociente entre as distancias á fronteira. Sen embargo, isto non é adecuado se temos múltiples inputs e outputs á vez.

Na publicación, os autores dan a súa propia definición de eficiencia relativa dunha DMU. Esta establécese como o cociente ponderado por uns pesos, determinados pola solución do problema, entre a suma de outputs e a suma dos inputs. É dicir, neste traballo establécese o seguinte problema que

permite cuantificar a eficiencia dunha DMU

$$\begin{aligned}
 \text{maximizar : } h_0 &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \\
 \text{suxeito a : } &\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \leq 1; \quad k = 1, \dots, n, \\
 &u_r, v_i \geq 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Temos entón que a eficiencia dunha DMU mídese como o cociente no óptimo do problema descrito en (2.1). Polo tanto, debemos resolver este problema para cada unha das n unidades, cuxa función obxectivo elixe os pesos que fan máxima a eficiencia da unidade a avaliar, a DMU₀, e temos unha restrición por cada unha das restantes, co cal non haberá ningunha DMU con eficiencia maior que 1. Consideraremos a unidade como eficiente se esta ten unha puntuación de 1, co cal non existen outras DMUs que, empregando menos inputs, poidan producir máis outputs. En caso contrario, a puntuación da unidade será menor que 1 e esta dirase que é ineficiente. Ademais, se denotamos a eficiencia dunha DMU por h_0 , poderemos denotar a súa ineficiencia por $1 - h_0$. Así, empregando os valores óptimos dos pesos u_r e v_i , que maximizan a eficiencia de cada DMU comparándoa coas demais, constrúese, estímase, a fronteira eficiente que Farrell xa supoñía coñecida.

Entón, podemos formular (2.1) de xeito equivalente, pero, neste caso, cuantificando a ineficiencia. Así, xorde a seguinte formulación,

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar : } f_0 &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \\
 \text{suxeito a : } &\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \geq 1; \quad k = 1, \dots, n, \\
 &u_r, v_i \geq 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Non obstante, como o problema en (2.2) é non convexo e non linear, ao non ter nin unha función obxectivo nin restricións convexas ou lineais. Os autores propoñen reformulalo en termos dun problema de programación linear ordinario como o seguinte

$$\begin{aligned}
 \text{maximizar : } &z_0 \\
 \text{suxeito a : } &-\sum_{k=1}^n y_{rk} \lambda_k + y_{r0} z_0 \leq 0; \quad r = 1, \dots, s, \\
 &\sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \leq x_{i0}; \quad i = 1, \dots, m, \\
 &\lambda_k \geq 0; \quad k = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

cuxa solución óptima, z_0^* , coincidirá coa solución óptima de (2.2), f_0^* , e relacionase coa solución óptima de (2.1), como $h_0^* = 1/z_0^*$.

A metodoloxía DEA trata entón, de atopar un punto de maior eficiencia, co cal se poidan comparar o resto de unidades, suxeito a que ningunha outra unidade pode ser eficientemente superior cos mesmos inputs e outputs.

Deste xeito, [Charnes et al. \(1978\)](#) propoñen unha medida obxectiva para cuantificar a eficiencia das DMUs e clasificalas en función de se son ou non eficientes, sendo esta eficiencia obtida como resultado dun problema de programación matemática.

2.3. O modelo DEA VRS

Dentro da análise DEA, xorden dúas alternativas naturais, que explicaremos con máis detalle en seccións posteriores, e que son os métodos de retornos constantes de escala (CRS, polas súas siglas en inglés, ou CCR) e os métodos de retornos variables de escala (VRS, polas súas siglas en inglés, ou BCC). No primeiro, asúmese que un incremento nos inputs producen un incremento proporcional nos outputs.

A formulación plantexada na sección anterior de acordo con [Charnes et al. \(1978\)](#), supoñía retornos constantes a escala (CRS). Isto resulta axeitado cando as unidades son de tamaños similares ou operan en escalas similares. Sen embargo, os retornos de escala variables (VRS) permiten máis flexibilidade entre inputs e outputs, sendo así máis idóneos se as DMUs son de distinto tamaño ou operan en distintas escalas. Estes últimos foron introducidos na metodoloxía DEA, por primeira vez en [Banker et al. \(1984\)](#), usando como punto de partida a proposta en [Charnes et al. \(1978\)](#).

Estas novas ideas plasmáronse na formulación do modelo proposto en [Banker et al. \(1984\)](#), sendo este

$$\begin{aligned}
 \text{maximizar : } & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0} - u_0}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \\
 \text{suxeito a : } & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} - u_0}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \leq 1; \quad k = 1, \dots, n, \\
 & u_r, v_i \geq 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Se u_r^* , v_i^* e u_0^* son os valores que maximizan a función obxectivo da formulación en (2.4), podemos deducir que dado un punto óptimo os retornos a escala están presentes nel, dependendo do valor de u_0^* , pois se este é positivo, teremos retornos a escala crecentes, o incremento porcentual do output é maior que o incremento porcentual dos inputs. Analogamente, se u_0^* é negativo teremos retornos decrecentes a escala, os outputs crecen proporcionalmente máis lentamente que os inputs. Se vale cero estamos no caso dos retornos constantes a escala, de feito se substituímos u_0 por cero en (2.4), temos o modelo DEA CCR visto ao problema en (2.1). Así, o DEA BCC permítenos, ademais de avaliar a eficiencia dunha unidade, identificar cando esta opera baixo retornos de escala crecentes ou decrecentes.

Como dixemos ao principio da sección, cando avaliamos DMUs de distinto tamaño ou con escalas distintas é aconsellable empregar modelos BCC, pois estes poden capturar ineficiencias debidas á escala ao identificar se a unidade precisa mellorar o seu uso de inputs (técnica) ou axustar a súa escala de operación (escala). Co cal, a proposta en (2.4) estendeu a análise DEA ao permitir que os retornos de escala varíen, o que reflexa mellor a realidade das unidades.

A idea de eficiencia de escala, xunto coa eficiencia técnica, permitíranos entender como se avalía o rendemento dunha DMU. Recordemos que a eficiencia técnica era a capacidade dunha DMU para

converter os inputs en outputs, en comparación coas mellores prácticas observadas. Esta pódese dividir en eficiencia técnica pura, a obtida co modelo VRS, que reflexa como de ben a DMU emprega os seus recursos sen considerar se a escala na que traballa é óptima. E, tamén, en eficiencia técnica global, a obtida co modelo CRS, onde se considera tanto a xestión interna da DMU como a súa operación en escala óptima. Deste xeito, como a puntuación dos modelo VRS serán maiores aos dos CRS, se unha DMU é eficiente baixo as condicións do primeiro pero non baixo ás do segundo, dirase que a DMU non é eficiente en escala. Isto leva a definir a eficiencia de escala dunha DMU, que nos indica se esta opera a nivel óptimo de produción, que queda determinada polo cociente

$$\text{Eficiencia de escala} = \frac{\text{Eficiencia técnica CRS}}{\text{Eficiencia técnica VRS}}.$$

Polo tano, [Charnes et al. \(1978\)](#) describen un modelo para cuantificar unha eficiencia técnica global, un incremento en todos os recursos implica un aumento proporcional nas saídas, co cal avalíanse á vez a eficiencia técnica e de escala. Porén, cando Banker introduce as súas ideas, os novos modelos, formulados en [Banker et al. \(1984\)](#), estiman separadamente a eficiencia técnica, se os recursos se empregan axeitadamente para maximizar as saídas, da de escala, se a DMU está operando na escala de produción correcta. Isto supuxo unha importante evolución na Análise Envoltente de Datos.

2.4. Clasificacións básicas dos modelos DEA

Unha vez presentados os conceptos básicos que definen os problemas DEA preséntase unha clasificación habitual dos mesmos. Os modelos DEA poden clasificarse en función de tres factores básicos: en termos de retornos de escala, xa sexan constantes ou variables, modelos radiais ou non radiais, e modelos orientados aos inputs ou orientados aos outputs.

2.4.1. A clasificación baseada en retornos de escala

En canto a primeira clasificación, cabe destacar que xa se describiron as diferentes formulacións que xorden baixo este criterio. Temos dous tipos: retornos de escala constantes ou variables que podemos formular matematicamente como

$$f(c \cdot X) = c^t f(X),$$

onde f é a función denominada fronteira de produción, X un vector de inputs e c un escalar.

Así, se $t = 1$, temos **retornos de escala constantes (CRS ou CCR)**. Neste caso, o incremento porcentual do input é igual ao do output. Ademais, considérase que unha DMU pode acadar a produtividade das DMUs eficientes, independentemente do seu tamaño. Como resultados, calcúlase unha eficiencia global, pois para avaliar unha unidade tense como unidades de referencia todas as restantes.

Sen embargo, se $t > 1$, serán retornos de escala crecentes. Os outputs medran proporcionalmente máis rapidamente que os inputs. E en caso contrario, con $t < 1$ e serían decrecentes. Naturalmente, estes dous últimos casos engloban os **rendementos de escala variables (VRS ou BCC)**. Neste caso, as unidades de tamaño diferente ás eficientes poden non ser capaces de conseguir a produtividade destas. Desta maneira, cuantifícase a eficiencia técnica, cada DMU é comparada coas do seu tamaño.

Recordemos que as formulacións dadas en (2.3) e en (2.4) encádranse nos problemas CRS e VRS, respectivamente.

2.4.2. A clasificación baseada na medida de eficiencia proporcionada

Neste tipo de problemas, outro dos factores é o tipo de medida de eficiencia que proporcionan. Así distinguimos dúas clases de problemas:

- **Modelo radial**, no cal a medida da eficiencia baséase nun crecemento ou decrecemento proporcional de todos os inputs ou outputs á vez. Unha desvantaxe destes é que non permiten observar se existen recursos que se empreguen de xeito máis eficiente que outros.

- **Modelo non radial**, que captura información necesaria para poder axustar as DMUs con só os inputs e outputs ineficientes, sen modificar o resto deles. É dicir, os recursos e as saídas non se reducen/incrementan proporcionalmente. Co cal estos modelos son máis flexibles e máis detallados cando temos unha unidade que presenta ineficiencia só nalgúns inputs ou outputs.

As formulacións que se empregan neste estudo correspóndense a modelos radiais. Tamén as mencionadas en seccións anteriores, (2.3) e (2.4).

2.4.3. A clasificación baseada na orientación do modelo

O último factor en base ao que clasificar os modelos DEA é a orientación que estes presentan. Así xorden dúas alternativas:

- **Modelos input orientados** ou con orientación de entrada. Dado un nivel de outputs, búscase reducir os inputs, é dicir, unha unidade será non eficiente se é posible diminuír os seus inputs sen alterar os outputs. Tamén se coñece como orientación de entrada, pois unha DMU acadará a eficiencia da unidade de referencia reducindo os recursos que emprega. Esta orientación resulta de utilidade cando os inputs poden controlarse directamente e os outputs trátanse como fixos ou dados.

Este tipo de modelos é o que se estableceu como exemplo inicial de formulación DEA en [Charnes et al. \(1978\)](#).

- **Modelos output orientados** ou con orientación de saída. O seu obxectivo é maximizar os outputs sen incrementar os inputs, é dicir, unha unidade será ineficiente se é posible incrementar as súas saídas sen empregar máis recursos. Resulta axeitado cando as unidades non poden modificar os seus recursos, pero buscan mellorar os seus outputs coas entradas dispoñibles.

Logo, se comparamos a produción observada coa óptima para un nivel de input, estamos orientando cara o output. En caso contrario, se fixado un nivel de output, comparamos un nivel de recursos gastados, o modelo mide a eficiencia cara o input. Vexámolo cun exemplo. Na Figura 2.3, temos representadas tres unidades, A , B e C , as dúas primeiras eficientes ao estaren sobre a fronteira de produción, cos seus respectivos niveis de inputs, x_A e x_C , e outputs, y_B e y_C . Xa vimos, que para cuantificar a eficiencia técnica de C , a unidade ineficiente, pois xa sabemos que a das outras dúas será 1, temos que medir a distancia de C á fronteira de produción.

Agora ben, se queremos calcular a eficiencia técnica orientada ao input, relacionaremos C coa DMU eficiente A , co cal

$$ET_{oi} = \frac{x_A}{x_C},$$

que representa a proporción de recursos que emprega A con respecto C para un mesmo nivel de output.

Analogamente, para calcular a eficiencia técnica orientada cara a saída, temos que

$$ET_{oo} = \frac{y_C}{y_A},$$

é a proporción de produtos que a empresa C produce con respecto a A , para un mesmo nivel de recursos.

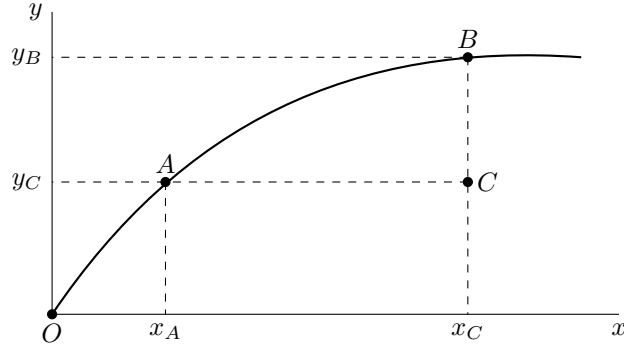


Figura 2.3: Representación para a medida da eficiencia segundo a orientación do modelo. Sitúanse as DMUs A e B eficientes, sobre a fronteira eficiente, curva grossa, e a DMU C non eficiente, sinalando os seus respectivos inputs e outputs.

Concluimos entón que, dependendo das unidades consideradas, da natureza das variables que afectan a eficiencia e do obxectivo a establecer, podemos diferenciar modelos empregados na DEA con retornos de escala constantes ou variables, radiais ou non radiais, e con orientacións de entrada ou de saída, respectivamente.

2.4.4. Os modelos DEA clásicos

No que segue, presentaremos os modelos radiais máis clásicos co propósito de comprobar como as diferentes hipóteses asumidas sobre os modelos impactan na súa formulación matemática. Para máis detalles pódese consultar as seguintes referencias, das cales empregaremos as formulacións dadas nelas, Vila (2003) e en Cooper et al. (2007). Sexa $N = \{1, \dots, n\}$ o conxunto das n DMUs a avaliar e sexan x_{ik} o input i -ésimo, con $i = 1, \dots, m$, e y_{rk} o output r -ésimo, con $r = 1, \dots, s$, para a DMU k , con $k \in N$.

Entón, á hora de estudar a eficiencia das DMUs temos que resolver un problema para cada unidade, obtendo os pesos que maximizan a súa eficiencia e que serán empregados polas restantes DMUs. Así, cada unidade compara a súa produtividade coa do resto, empregando para elo os pesos cos cales a súa eficiencia é a mellor.

DEA CRS input orientado

Recordemos que nas orixes da metodoloxía DEA, en Charnes et al. (1978), empregábase un modelo de retornos constantes de escala, CRS, e input orientado, en termos dun problema de programación lineal onde a súa representación para cuantificar a ineficiencia se pode ver en (2.3). Sen embargo, se queremos cuantificar a eficiencia, podemos escribilo do seguinte xeito, que segue sendo lineal,

$$\begin{aligned}
 \text{maximizar : } & \sum_{r=1}^s u_{r0} y_{r0} \\
 \text{suxeito a : } & \sum_{r=1}^s u_{r0} y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{ik} \leq 0; \quad k = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{i0} = 1; \\
 & v_{i0} \geq \epsilon; \quad i = 1, \dots, m, \\
 & u_{r0} \geq \epsilon; \quad r = 1, \dots, s,
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde ϵ é un número real estritamente maior que cero e o subíndice 0 representa a DMU₀ que se está a avaliar. Cómpre recordar que para o cómputo das eficiencias das n DMUs debemos resolver n problemas independentes. Temos un problema de $n + 1$ restricións e $s + m$ restrición de cotas, onde as n primeiras restricións proveñen de linealizar a condición de que todas as unidades teñen unha eficiencia menor ou igual a 1, do problema descrito en (2.1). A seguinte restrición permite asegurar que se optimiza a eficiencia ao maximizar as saídas. O problema de programación linear en (2.5) denomínase como modelo DEA input orientado en forma multiplicativa, onde se maximiza a eficiencia maximizando as saídas.

O conxunto dos pesos óptimos, $(\mathbf{v}_0^*, \mathbf{u}_0^*)$, a solución óptima deste modelo DEA para a DMU₀, son os pesos máis favorables para ela, no sentido de que maximizan a función obxectivo. v_{i0}^* é o peso óptimo para o input i e expresa a importancia relativa desa variable na avaliación da eficiencia: a maior v_{i0}^* , maior será a influencia do input i para a DMU₀ avaliada. Analogamente, para o output r empregamos o valor de u_{r0}^* . Co cal, estes multiplicadores óptimos permitirannos identificar que inputs e outputs teñen máis impacto da avaliación da eficiencia dunha DMU considerada.

Ademais, o problema dual asociado, cuxa solución óptima coincide coa do seu primal, pode escribirse como segue. Así, obtemos a expresión do modelo CRS input orientado en forma envolvente,

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar : } & \theta_0 - \epsilon \left[\sum_{i=1}^m s_i + \sum_{r=1}^s t_r \right] \\
 \text{suxeito a : } & \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} = \theta_0 x_{i0} - s_i; \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{rk} = y_{r0} + t_r; \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \lambda_k \geq 0; \quad k = 1, \dots, n, \\
 & s_i \geq 0; \quad i = 1, \dots, m, \\
 & t_r \geq 0; \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \theta_0 \text{ non restrinxida,}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde temos n variables λ_k que se corresponden coas n primeiras restricións de (2.5), e a variable θ_0 coa restante, que é a condición de igualdade. As variables positivas s_i e t_r , coñecidas como variables de folgura, correspóndense coas cotas.

Este modelo CRS input orientado é invariante fronte a translacións de saídas, é dicir, os problemas obtidos despois das translacións para cada DMU teñen a mesma solución óptima na forma envolvente do modelo, co cal na multiplicativa tamén, que antes de aplicar a translación.

É máis, podemos afirmar que este modelo é invariante respecto ás unidades de medida na dimensión das entradas, é dicir, se cambiamos a escala a calquera dimensión dos inputs, a solución obtida é a mesma.

DEA CRS output orientado

Partindo do modelo ratio establecido por Charnes et al. (1978) e descrito en (2.1) obtivemos un modelo DEA CRS input orientado en forma multiplicativa maximizando o numerador da función obxectivo. Logo, se agora minimizamos o denominador e mantemos o numerador constante, temos que o modelo DEA CRS output orientado en forma multiplicativa expresámolo, de xeito similar ao exposto en (2.5), como

$$\begin{aligned}
\text{minimizar : } & \sum_{i=1}^m v_{i0}x_{i0} \\
\text{suxeito a : } & -\sum_{i=1}^m v_{i0}x_{ik} + \sum_{r=1}^s u_{r0}y_{rk} \leq 0; \quad k = 1, \dots, n, \\
& \sum_{r=1}^s u_{r0}y_{r0} = 1; \\
& v_{i0} \geq \epsilon; \quad i = 1, \dots, m, \\
& u_{r0} \geq \epsilon; \quad r = 1, \dots, s,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde a función obxectivo representa o inverso da eficiencia relativa da DMU₀, co cal sempre será maior ou igual a un. Analogamente ao caso anterior, poderíamos formular tamén este modelo na súa forma envolvente.

Neste caso, o DEA CRS output orientado, é invariante por translacións de entradas e invariante fronte ás unidades de medida das saídas.

DEA VRS input orientado

Como xa comentamos, os modelos VRS resultan axeitados cando as unidades de toma de decisións coas que estamos traballando presentan un tamaño distinto ou operan de distintas escalas. É por isto que precisaremos engadir unha variable, ξ , ou unha restrición, que lle indique ao modelo que a unidade que está a ser avaliada só se debe comparar con outras que sexan similares a ela e non con todas as dispoñibles.

Partindo da formulación envolvente do DEA CRS input orientado, descrito en (2.6), basta con engadir a restrición

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1.$$

Deste xeito, a proxección da unidade de interese efectúase nun hiperplano formado polas DMUs similares a ela. En xeral, obteremos máis unidades eficientes que no modelo CRS input orientado.

Entón, o problema dual asociado exprésase da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\text{maximizar : } & \sum_{r=1}^s u_{r0}y_{r0} - \xi_0 \\
\text{suxeito a : } & \sum_{r=1}^s u_{r0}y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_{i0}x_{ik} + \xi_0 \leq 0; \quad k = 1, \dots, n, \\
& \sum_{i=1}^m u_{i0}x_{i0} = 1; \\
& v_{i0} \geq \epsilon; \quad i = 1, \dots, m, \\
& u_{r0} \geq \epsilon; \quad r = 1, \dots, s, \\
& \xi_0 \text{ non restrinxida,}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

onde u_{i0} e v_{r0} son os vectores directores do hiperplano que constrúe a fronteira eficiente.

Este modelo será invariante fronte a translacións das saídas e respecto ás unidades de medida das entradas, do mesmo xeito que no DEA CRS input orientado.

DEA VRS output orientado

De maneira análoga ao caso anterior, temos que o modelo DEA VRS output orientado en forma envolvente pode expresarse como

$$\begin{aligned}
\text{maximizar : } & \gamma_0 + \epsilon \left[\sum_{i=1}^m s_i + \sum_{r=1}^s t_r \right] \\
\text{suxeito a : } & \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} = x_{i0} - s_i; \quad i = 1, \dots, m, \\
& \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{rk} = \gamma_0 y_{r0} + t_r; \quad r = 1, \dots, s, \\
& \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, \\
& \lambda_k \geq 0; \quad k = 1, \dots, n, \\
& s_i \geq 0; \quad i = 1, \dots, m, \\
& t_r \geq 0; \quad r = 1, \dots, s, \\
& \gamma_0 \text{ non restrinxida,}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

que ten por formulación dual a seguinte,

$$\begin{aligned}
\text{minimizar : } & \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{i0} - \xi_0 \\
\text{suxeito a : } & \sum_{r=1}^s u_{r0} y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{ik} + \xi_0 \leq 0; \quad k = 1, \dots, n, \\
& \sum_{r=1}^s u_{r0} y_{r0} = 1; \\
& v_{i0} \geq \epsilon; \quad i = 1, \dots, m, \\
& u_{r0} \geq \epsilon; \quad r = 1, \dots, s, \\
& \xi_0 \text{ non restrinxida,}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

que é invariante fronte translacións de inputs e cambios nas unidades de medida dos outputs en consideración.

2.5. Aplicacións prácticas da metodoloxía DEA

Como se pode observar, a meirande parte das novas formulacións que xorden na literatura DEA son deseñadas para abordar o problema de medir a eficiencia das DMUs en diversos contextos. A continuación, e tras describir algunhas das formulacións DEA máis básicas, ilustramos as súas aplicacións enumerando diferentes referencias neste contexto.

No propio artigo [Charnes et al. \(1978\)](#), temos un exemplo de estudo empírico no sector educativo, empregando, como xa dixemos, un DEA CRS con orientación de entrada.

No sector financeiro, por exemplo no artigo [Berger e Humphrey \(1997\)](#) onde o obxectivo é avaliar a eficiencia das institucións financeiras en 21 países, empregando a técnica paramétrica de Análise Estocástica de Fronteira pero tamén a análise non paramétrica DEA. Por poñer un exemplo en España, temos que en [Faura et al. \(2012\)](#) considéranse 43 Caixas de Aforros do sistema bancario español como DMUs e, mediante un DEA VRS, obsérvase que existen 9 entidades que se sitúan na fronteira

de produción. Este artigo tamén mostra como esta metodoloxía se pode completar con outras, neste caso, coa Análise de Componentes Principais. Neste aspecto, tamén podemos engadir o traballo [Martín \(2021\)](#). Nel, para avaliar a eficiencia dunha mostra de xogadores de baloncesto, dispóñense de 17 posibles outputs, o autor decide reducir a dimensión dos mesmos aplicando unha Análise de Componentes Principais, tendo, así, tres compoñentes que emprega como únicos outputs.

Tamén noutros cotextos, como para cuantificar a eficiencia de granxas, como en [Theodoridis e Psychoudakis \(2008\)](#), empregando un DEA VRS orientado aos outputs para estimar a eficiencia técnica dunha mostra de granxas en Grecia. Ou no sector farmacéutico podemos atopar aplicacións da metodoloxía DEA. Por exemplo, en [González-Saiz e García-Valderrama \(2012\)](#), quíxose medir a eficiencia de tratamentos con opiáceos, con datos simulados, onde se emprega un DEA CRS con orientación aos outputs.

Atopamos aplicacións no sector da pesca, en Galicia, no traballo [Figuroa \(2017\)](#). Neste caso, empregando a metodoloxía DEA, nun primeiro estudo, tómanse 62 lonxas galegas como DMUs usando como inputs as especies autóctonas e a cantidade media de camiións usados semanalmente, e outputs a cantidade de produto anual. Obtense, entón, a eficiencia de cada lonxa mediante un DEA VRS input orientado. É máis, nun segundo estudo, as DMUs pasan a ser 9 áreas de costa da rexión o que permite unha visión máis global dos resultados.

Nos capítulos posteriores, centrarémonos na xestión dunha única parte do ciclo da auga, a depuración das augas residuais, concretamente na xestión dunha mostra de estacións depuradoras en Galicia. Polo tanto, as seguintes referencias servirannos de base para o noso estudo, xa que as aplicacións do método DEA que nos interesarán a nós neste traballo son aquelas que se encadran na prestación de servizos de auga urbana. Xa comentamos, no capítulo anterior, algunhas mostras que se atopan na literatura para comparar a administración pública e privada en España. Aínda que podemos estudar algúns traballos referentes a este tema noutros países.


Temos un exemplo en Italia, [Storto \(2013\)](#), onde se establece un DEA VRS output orientado para comparar a eficiencia de 21 operadores de auga público-privados fronte a 32 públicos, deducindo que as primeiras son máis eficientes. Tamén en Brasil, [Constantino et al. \(2022\)](#), onde usando un enfoque paramétrico, tamén a Análise Estocástica de Fronteira, e non paramétrico, un DEA CCR, se compara a eficiencia de 43 provedores de augas, 34 públicos e 9 privados que operan nos 95 municipios máis grandes do Brasil, chegando á conclusión de que non hai diferenzas significativas entre ambas administracións, en canto o sistema de sumidoiros.

Neste apartado, comentamos tan só algúns exemplos da aplicación das formulacións DEA básicas vistas en distintos contextos. Non obstante, existen outros tipos de modelos DEA máis complexos, como pode ser o modelo aditivo ou con restricións nos pesos, para máis información pode consultarse [Vila \(2003\)](#). O que permite aplicar este tipo de metodoloxías a unha gran variedade de situacións. Polo tanto, ademais dos sectores mencionados, poderíamos atopar exemplos no campo da loxística, medio ambiente, sanidade,...

Capítulo 3

A xestión eficiente da auga: estudo empírico

Unha vez establecido o problema da xestión da auga, no Capítulo 1, e exposta a metodoloxía a considerar, no Capítulo 2, tentaremos responder á cuestión da eficiencia de xestión da auga en Galicia. En concreto, analizaremos o funcionamento dun conxunto de estacións depuradoras de augas residuais (EDAR) en termos da súa eficiencia. Para este fin, botaremos man dunha mostra de EDARs situadas en Galicia.

O noso estudo estruturarase como segue. Na primeira sección explicaremos os datos dos que dispoñemos, nomeando cada variable e explicando en que consiste cada unha delas. Na segunda, aplicaremos diferentes propostas da metodoloxía DEA a eses datos e comentaremos algunhas cuestións que tivemos en conta á hora de realizar a implementación no software estatístico .

Aínda que, como veremos na descrición dos datos, en Galicia hai un gran número de EDARs, este estudo só terá en conta aquelas cuxa xestión recaía en mans públicas e na empresa privada Viaqua. Ademais, nesta análise, entenderemos que unha depuradora é eficiente se o é en termos de redución de contaminantes presentes na auga residual. Isto é, as EDARs serán calificadas como eficientes se se obtéñen eficiencias relativas de 1 á hora de obter unha auga tratada con menores niveis de substancias tóxicas.

3.1. Descrición dos datos

Como xa avanzabamos, o noso estudo empírico empregará unha mostra de plantas depuradoras localizadas en Galicia. Segundo [Augas de Galicia \(2022\)](#), existen 148 EDARs en funcionamento de máis de 2000 h. eq., é dicir, depuradoras deseñadas para tratar augas residuais que foron xeradas por unha poboación de 2000 persoas ou o equivalente en carga contaminante, aproximadamente. Destas plantas de depuración, que recordemos, cuxa titularidade recae en mans do concello no que están adheridas, 37 teñen unha xerencia pública, 3 delas son mixtas e as 108 restantes están a cargo de entidades privadas. Na Figura 3.1 podemos ver a distribución destas pola rexión, segundo o seu tipo de administración.

De feito, aínda que en Galicia atopámonos con 22 compañías privadas entre as que se reparte a administración das EDAR, existen catro delas que destacaremos polo elevado número de estacións que xestionan e, polo tanto, pola gran cantidade de poboación á que dan subministro. No mapa da Figura 3.2, podemos observar a localización destas catro grandes empresas. En primeiro lugar, temos *Aqualia*, pertencente ao *Grupo FCC*, que xestiona 11 depuradoras a súa maioría na provincia de Pontevedra. Tamén as empresas galegas *GESECO AUGAS, S.A.*, con 13 depuradoras nas provincias de A Coruña, Pontevedra e Ourense, ou *Espina & Delfín S.L.*, a maioritaria en Galicia, xestionando 31 estacións. Finalmente e, na que nos centraremos de agora en adiante, *Viaqua Gestión Integral de Aguas de*

Galicia, S.A. filial da compañía catalá *Grupo AGBAR* e pertencente á multinacional francesa *Veolia Environment, S.A.*. Esta compañía xestiona 25 depuradoras en Galicia repartidas nas catro provincias, ademais de administrar conxuntamente coa Deputación de Ourense dúas das tres plantas depuradoras mixtas que, para o noso estudo, consideraremos que forman parte de *Viaqua*, coma se fosen só privadas.

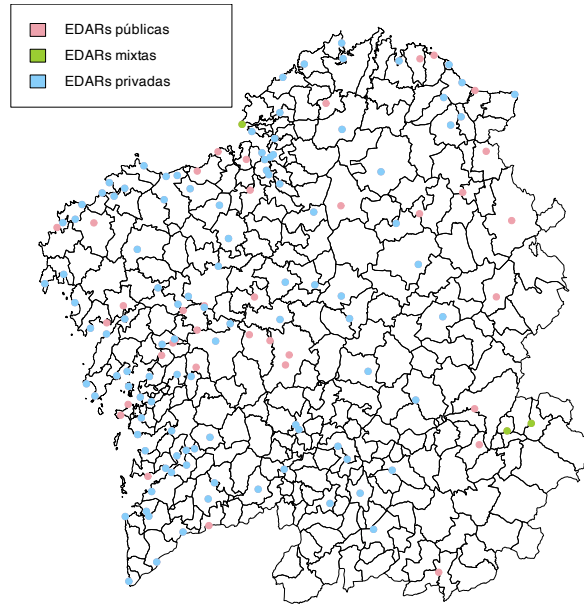


Figura 3.1: Localización das EDARs segundo a súa xestión (públicas, privadas ou mixtas) en Galicia.

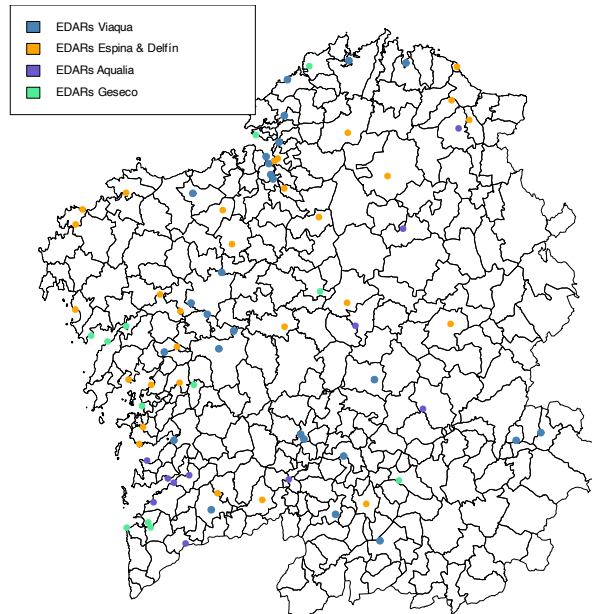


Figura 3.2: Representación das EDARs privadas en Galicia pertencentes ás catro empresas máis relevantes do sector.

Teremos que para cada EDAR dispoñeremos de datos propios para cada unha das variables que se mencionarán a continuación. Cómpre mencionar que, aínda que se dispoñía de acceso á base de datos da privada Viaqua, todos os datos referentes á concentración de contaminantes das depuradoras foron obtidos de [Augas de Galicia \(2023\)](#). Deste xeito, resultan medidas máis homoxéneas, no referente á toma de mostras, entre as depuradoras públicas e privadas.

Nun primeiro momento falaremos só das variables cunha única medición, é dicir, para cada EDAR dispoñeremos dun só valor da variable considerada, estas son as seguintes.

- **Densidade.** Esta variable fai referencia á densidade poboacional medida en hab/km^2 . Mediante esta variable cuantificaremos o promedio de habitantes por km^2 en cada concello da rexión de interese onde se localiza unha EDAR. Na Figura 3.3, represéntase, por grupos, a densidade poboacional dos concellos de Galicia. Este mapa realizouse cos datos publicados na web do Instituto Galego de Estatística, [IGE \(2022\)](#). A inclusión desta variable terá relevancia no estudo, pois unha maior concentración da poboación implicaría unha maior cantidade de residuos que se verten nas augas.

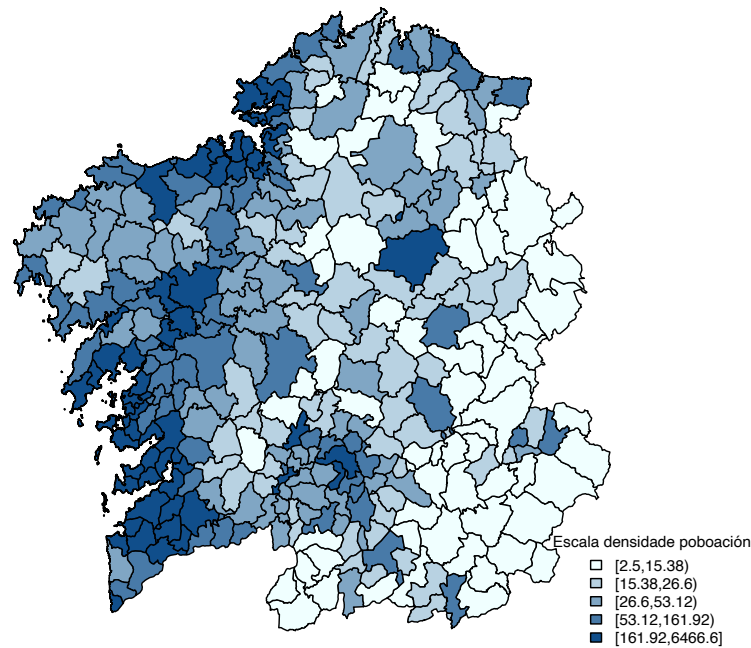


Figura 3.3: Distribución da densidade poboacional dos concellos en Galicia.

Dende unha perspectiva puramente estatística, se facemos unha breve análise descritiva desta variable, vemos, na Figura 3.4, que a densidade desta variable se acumula nos primeiros intervalos, é dicir, abundan máis os concellos con densidades poboacionais baixas. Isto tamén o podemos ver no boxplot onde o terceiro cuartil está entre os 200 e 400 hab/km^2 . No Apéndice A podemos ver valores numéricos concretos. Tamén, observamos algúns datos atípicos que fan referencia a depuradoras como a denominada *Bens*, que agrupa os concellos de Cambre, A Coruña, Oleiros, Arteixo e Culleredo. Ademais doutras EDARs situadas en municipios cunha gran concentración de poboación. Estes resultados son análogos aos que podiamos intuír co mapa da Figura 3.3.

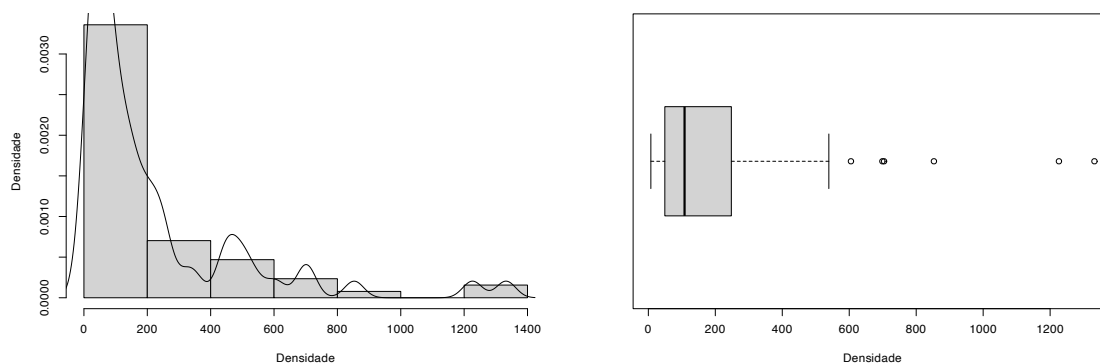


Figura 3.4: Histograma, á esquerda, e boxplot, á dereita, da variable **Densidade**.

- Afiliados.** Esta variable fai referencia á porcentaxe de afiliados á seguridade social en actividades industriais, segundo o seu concello de residencia. Igual ca no caso anterior, estes datos tamén foron obtidos no Instituto Galego de Estatística e poden consultarse en [IGE \(2023\)](#). Do mesmo xeito que con **Densidade**, tomamos só aqueles municipios onde se sitúen depuradoras pertencentes a nosa mostra. Engadimos esta variable, pois non só as actividades domésticas axudan a producir augas residuais, tamén o fan as actividades industriais. Polo tanto, serviranos como unha medida destas accións.

Do mesmo xeito que no caso anterior, na Figura 3.5 podemos ver que a frecuencia desta variable é maior en torno ao intervalo 10-15%. Vemos tamén algúns datos onde o porcentaxe de habitantes que se dedican a actividades industriais no concello é maior do esperado.

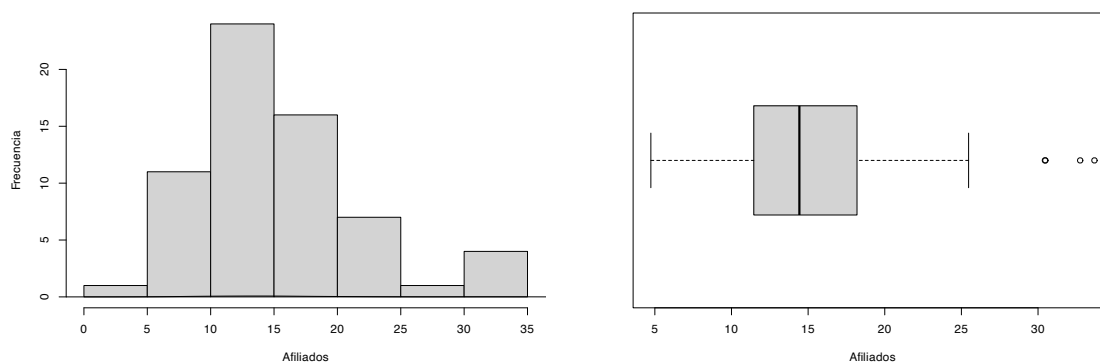


Figura 3.5: Histograma, á esquerda, e boxplot, á dereita, da variable **Afiliados**.

- Poboación.equivalente.** Esta variable é a unidade de medida empregada para medir a carga contaminante equivalente, en termos de poboación, da auga residual que a depuradora é capaz de tratar. Deste xeito, poderemos describir o tamaño dunha EDAR considerada. Aínda que a poboación equivalente inclúe augas residuais domésticas e industriais, defínese un habitante equivalente como a cantidade de DBO, demanda biolóxica de osíxeno, producida por unha persoa, xeralmente establecida en 60g de DBO5, DBO medida nun período de tempo concreto, ao día. Facendo unha análise descritiva gráfica, na Figura 3.6, observamos que a gran maioría das de-

puradoras teñen unha poboación equivalente de 2000 a 100000 h.eq., pero que existen algunhas superiores como a de *Os Praceres*, no concello de Pontevedra, con 200000 h.eq. ou a de *Bens* con 670000 h.eq.

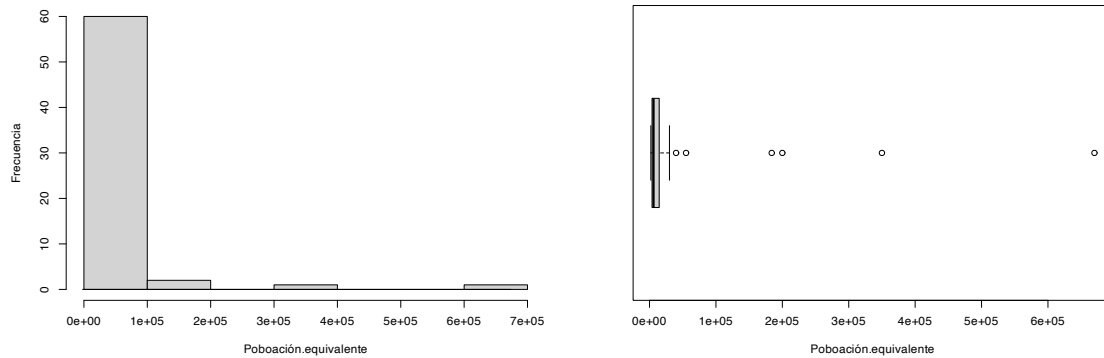


Figura 3.6: Histograma, á esquerda, e boxplot, á dereita, da variable `Poboación.equivalente`.

- **Caudal.medio.** Esta variable refírese ao promedio da cantidade de auga residual que entra nunha planta para a súa depuración. Neste caso mídese en metros cúbicos por día, $m^3/día$. Esta medida permite reflectir a carga hidráulica media que unha EDAR é capaz de tratar nun mesmo día.

Representando o histograma e boxplot correspondentes, que pode verse na Figura 3.7, obtemos resultados análogos aos anteriores, pois ambas variables miden, en certa maneira, o tamaño dunha EDAR. De feito, `Poboación.equivalente` e `Caudal.medio` presentan unha correlación elevada, pero manteremos as dúas na noso estudo pois representan distintos matices, dentro da problemática da auga. Mentres que a primeira reflicte o tamaño da poboación, en canto a habitantes e actividade económica que xera as augas residuais, a segunda cuantifica a cantidade efectiva de auga residual tratada.

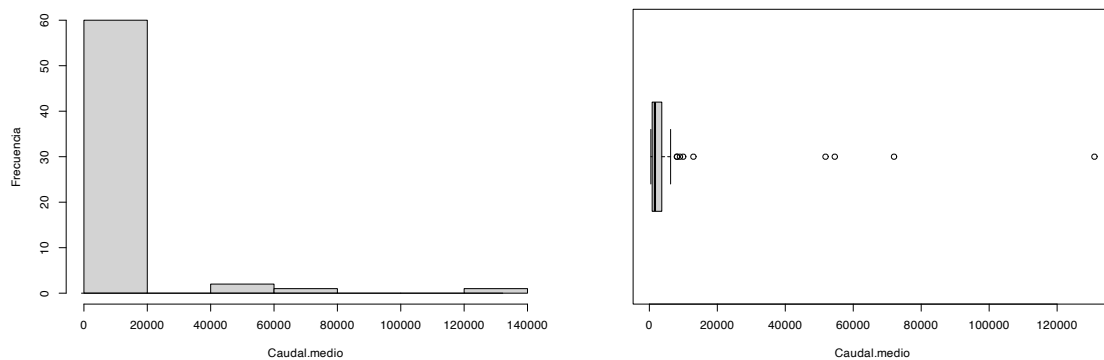


Figura 3.7: Histograma, á esquerda, e boxplot, á dereita, da variable `Caudal.medio`.

Ata o momento, definimos variables cunha única observación por EDAR e fixemos, unha breve, unha análise descritiva. Outras medidas numéricas de dispersión e posición das variables poden consultarse no Apéndice A. A continuación, definiremos variables das que obtemos tres observacións distintas

por depuradora: medicións de entrada, de saída e de rendemento. Estas farán referencia á cantidade de contaminantes que presenta a auga residual en distintos momentos do proceso de depuración. As variables de entrada medirán a cantidade de cada substancia presente nas augas residuais que entran á depuradora, as de saída os contaminantes das augas unha vez que son tratadas e, finalmente, teremos unha variable que cuantifica o rendemento a partir destes datos. Neste caso, como as medicións que temos son trimestrais, do ano 2023, poderase observar toda a análise descritiva realizada, tanto gráfica como numérica, no Apéndice A. A lista de variables a considerar detállase a continuación.

- **mes.** Esta variable fai referencia á materia en suspensión nas augas (MES), medida en *mg/l*. É dicir, establece a cantidade de partículas, orgánicas ou inorgánicas, sólidas, en miligramos, que están suspendidas nun litro de auga. Esas partículas poden ser de distintos tamaños, dende diámetros de $10^{-9}m$ ata ser recoñecibles a simple vista. En termos de augas residuais, a materia en suspensión referirase a partículas de terra, restos de materia orgánica ou inorgánica e outras substancias. Para eliminar a MES, as EDARs dispoñen de tratamentos de sedimentación, filtración ou flotación por aire disolto.

- **dbo.** Esta variable describe a demanda biolóxica de osíxeno, medida en *mg/l*. Mais concretamente, medirá a cantidade de osíxeno disolto que os microorganismos, das depuradoras biolóxicas, requiren para descompoñer a materia orgánica presente nas augas residuais. Na literatura, moitas veces denomínase este contaminante co nome de DBO5, que non é máis que unha cantidade de osíxeno pero medida durante cinco días.

- **dqo.** Neste caso, a variable describe a demanda química de osíxeno, medida en *mg/l*. Similar a DBO, pero neste caso non só será a medida da cantidade de osíxeno necesario para degradar a materia orgánica, senón tamén a inorgánica das augas residuais. Deste xeito, será una variable con valores sempre superiores á anterior.

- **nt.** Trátase dunha medida da cantidade de nitróxeno total, en *mg/l*, presente nas augas residuais antes e despois do tratamento.

- **pt.** A variable correspóndese coa medida da cantidade de fósforo total, en *mg/l*, presente nas augas que chegan e saen da EDAR.

Estes valores de contaminantes deben estar regulados, nas augas tratadas, para o seu correcto vertido no medio de orixe. Segundo a Directiva 91/271/CEE, unha normativa europea que regula o tratamento das augas residuais, e que pode consultarse na páxina web do Ministerio para a Transición Ecolóxica e o Reto Demográfico, [MITECO \(2023\)](#), podemos resumir os niveis máximos permitidos na lexislación para poder verter as augas residuais unha vez que son tratadas na Táboa 3.1. Nesta táboa tamén vemos a porcentaxe mínima de redución que se debe acadar na planta segundo o seu caudal medio.

Parámetro	Concentración	Porcentaxe mínima de redución segundo o caudal medio
DBO	25 mg/l	70-90 % (se as augas residuais foron depuradas con tratamento secundario), 20 % (con tratamento primario) e 40 % (con depuradoras situadas en alta montaña, > 1500m)
DQO	125 mg/l	75 %
MES	35 mg/l e 60 mg/l (EDARs de 2000 -10000 h.eq. en alta montaña)	90 % e 50 % (con tratamento primario)
NT	15 mg/l (10000-100000h.eq.)e 10 mg/l (> 100000h.eq.)	70-80 %
PT	2 mg/l	80 %

Táboa 3.1: Á esquerda a concentración máxima permitida para os vertidos e, á dereita, a porcentaxe mínima de redución de contaminantes, procedentes de depuradoras de augas residuais urbanas, segundo o tipo e a ubicación da EDAR.

Nesta lexislación tamén se especifica o número de mostras anuais a tomar, segundo o tamaño da EDAR, ademais de indicar a cantidade delas que se permiten que sexan non conformes. Así, por exemplo, para as máis pequenas, de menos de 10000 h.eq., realizaranse catro mostras anuais, das que só unha pode incumprir a normativa. Mentres que para depuradoras de entre 10000 e 50000 h.eq., débense tomar doce mostras anuais, das cales só dúas poden non cumprir os requisitos da táboa anterior. Finalmente, para aquelas de máis de 50000 h.eq. tómanse vinte e catro mostras anuais, das que, como máximo, poden non ser conformes doce.

3.2. Medindo a eficiencia das EDARs usando a metodoloxía DEA

Unha vez presentados os datos cos cales realizaremos a nosa análise empírica, pasaremos ao seguinte paso que é a aplicación da metodoloxía DEA para a cuantificación da eficiencia das EDARs involucradas. Segundo a notación propia dos problemas DEA, as EDARs constituirán en adiante as unidades de toma de decisións, as DMUs, baseándose nos inputs e outputs que se describirán no que segue.

3.2.1. Comparación entre a xestión pública e privada

O noso principal obxectivo é realizar unha comparación da eficiencia entre as estacións depuradoras a mans da administración pública e aquelas xestionadas pola entidade privada Viaqua. Na Figura 3.8 podemos situar as EDARs públicas, en cor rosa, e as dirixidas por Viaqua, en cor azul. Daquela, a nosa mostra consistirá en 37 depuradoras que contan cun directivo público e 27 cun privado, entre estas últimas teremos en conta as dúas depuradoras mixtas, facendo un total de 64 EDARs e, polo tanto, de 64 DMUs no problema DEA que resulte.

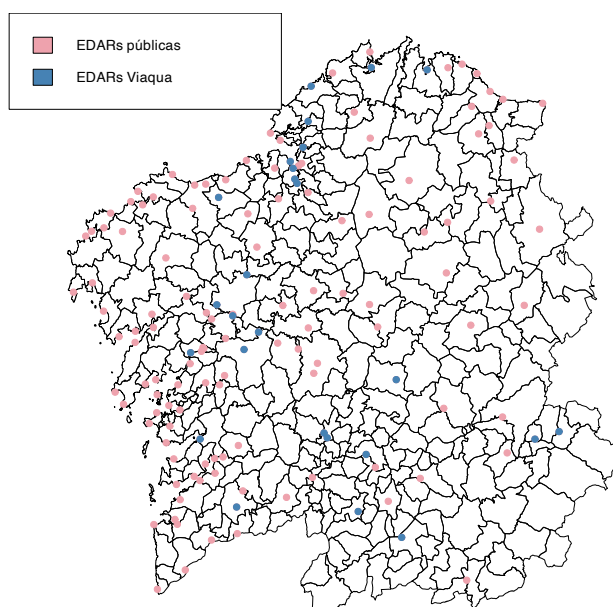


Figura 3.8: Localizacións das EDARs consideradas de acordo coa súa xestión: administración pública (rosa) e privada xestionada por Viaqua (azul).

Variables empregadas

Para a aplicación da metodoloxía DEA precisaremos, ademais de especificar as DMUs, que neste caso e como xa dixemos serán as depuradoras, clasificar as variables segundo sexan de entrada ou de saída. Consideraremos que as primeiras, denominadas tamén inputs, estarán constituídas polas variables *Densidade*, *Afiliados*, *Poboación.equivalente*, *Caudal.medio* e tamén as referidas ás medicións dos contaminantes (*mes*, *dbo*, *dqo*, *nt* e *pt*) nas augas de entrada á depuradora, recordemos que estas cinco últimas varían dun trimestre a outro. Deste xeito, as restantes variables, correspondentes á cantidade de contaminantes presentes nas augas tratadas e o rendemento alcanzado pola planta, tamén distintas dun trimestre a outro, formarán o conxunto das variables de saída ou outputs.

Como explicamos na descrición das variables, dispónse de valores promedios para cada un dos trimestres do ano 2023. Neste estudo, aplicaremos a metodoloxía DEA para cada trimestre pois, como pode verse en profundidade no Apéndice A, mediante a análise descritiva, existen diferencias notables entre os distintos trimestres, acadándose valores máis altos de todos os contaminantes, nas augas de entrada, sobre todo durante o terceiro trimestre (xullo, agosto e setembro). Como consecuencia, tamén temos valores altos nas augas tratadas. De feito, na Figura 3.9, represéntanse as correlacións lineais entre todas as variables, tamén as medidas dentro do mesmo trimestre. Observamos que, aínda que no primeiro, segundo e cuarto trimestre podemos captar un patrón, o terceiro sepárase do agardado.

Isto pode explicarse tendo en conta que nos estamos a referir a meses que van de xullo a setembro, é dicir, no verán. Nesta época do ano, é usual que moitas actividades agrícolas e de ocio aumenten, xerando un maior uso da auga e, polo tanto, unha maior cantidade de residuos que se acumula nela. Debemos ter en conta tamén os movementos da poboación, como os derivados do turismo, que poden facer tamén que haxa máis residuos. Ademais da actividade humana, as altas temperaturas deses meses poden acelerar certos procesos biolóxicos aumentando, así, a cantidade de materia orgánica e nutrientes presentes na auga residual.

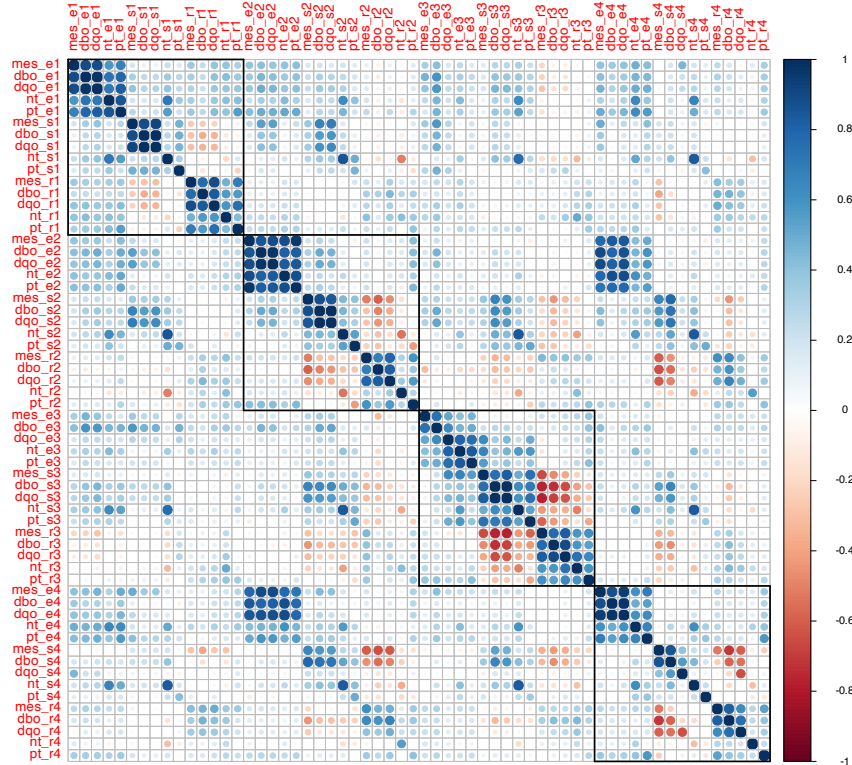


Figura 3.9: Representación das correlacións lineais entre todas as variables de estudo dos catro trimestres do ano 2023.

Por outra banda, na descrición dos datos do Apéndice A, vemos que parecen existir algunhas EDARs atípicas, pois os valores das variables asociadas aos contaminantes, nas augas residuais de entrada, se separan do esperado, tal e como se ve nos boxplots obtidos. Cómpre mencionar que isto pode ser debido a que non se tomaron as medicións correspondentes en igualdade de condicións, dunha depuradora a outra, pois mesmo as condicións meteorolóxicas do día de toma de mostra, poden alterar a concentración nas augas residuais.

É máis, se facemos unha análise un pouco máis profunda para ver que depuradoras son as anómalas. Temos que, para os catro trimestres, a maioría delas repítense, sendo nas públicas: *Touro*, *A Fonsagrada*, *Río Lea* e *Bens*; e nas privadas: *Valdoviño*, *Xinzo de Limia*, *Betanzos*, *Sigüeiro*, *Ourense* e *Dodro-Bexo*. Isto leva a preguntarnos se debemos eliminar esas observacións atípicas, imputalas pola media da variable correspondente ou traballar con eses datos. No noso caso, traballaremos con eses valores. Para respaldar esta decisión, empregamos a representación en árbore da Figura 3.10, un dendrograma obtido tras a realización dunha análise clúster en dous grupos segundo as variables dos contaminantes de entrada. Estes conglomerados verifican que son o máis distintos posible entre eles respecto das variables consideradas. Porén, dentro de cada un, agrúpanse depuradoras homoxéneas entre si respecto aos valores dos inputs, cada observación contida neles é parecida a todas as incluídas nese mesmo clúster, co cal obtemos grupos homoxéneos de DMUs con niveis de recursos comparables. Daquela, observamos, en azul máis escuro, que as EDARs anómalas forman parte do mesmo conglomerado. Temos, entón, que eses valores extremos forman un grupo separado pero consistente, co cal non se trata de erros nos datos senón dun reflexo de características similares entre esas depuradoras.

Baseándonos nisto, optamos por non eliminar nin imputar eses datos, garantindo así unha representación fiel da heteroxeneidade do sistema. Como a proposta da DEA é unha metodoloxía non

paramétrica, pode manexar valores anómalos, reflectindo nos resultados tanto as características xerais dos datos como as particularidades deste clúster de atípicos.

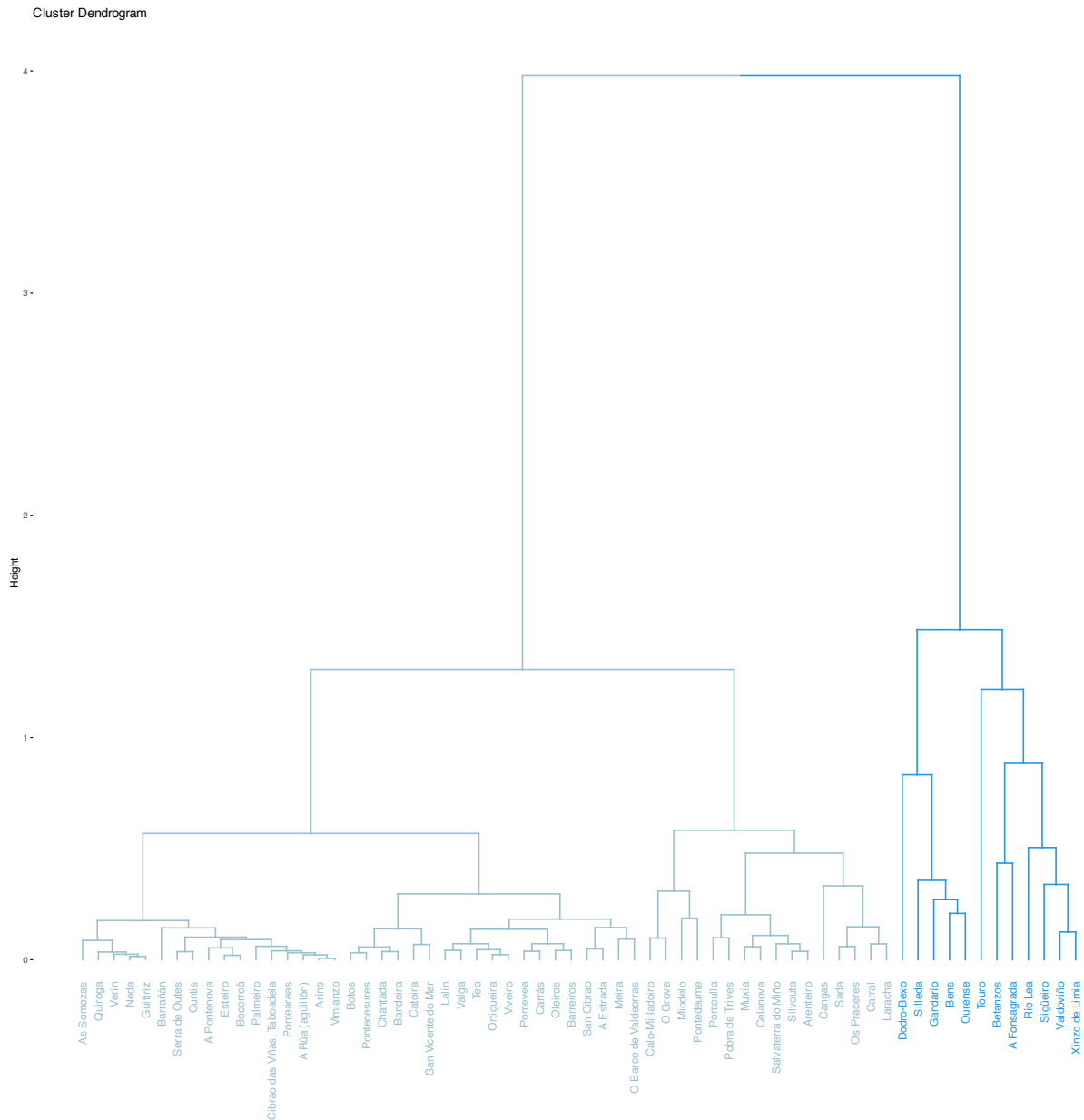



Figura 3.10: Dendrograma clúster, de 2 grupos, segundo as variables de entrada, referidas aos contaminantes presentes nas augas residuais.

3.2.2. Implementación do modelo

Neste apartado, falaremos dalgunhas consideracións que se tomaron ao implementar a metodoloxía DEA en cada trimestre á hora de dar resposta ao problema que nos ocupa.

Recordemos que dependendo do obxectivo do estudo a realizar e a natureza das variables dispoñibles, plantéxanse distintos modelos DEA, tal e como vimos no Capítulo 2. É por iso, que, aínda

que empregaremos modelos radiais, utilizaremos as formulacións dos problemas DEA CRS (descritos en (2.5), para o input orientado, e en (2.7), no caso output orientado) e VRS (coa formulación input orientada en (2.8) e output orientada (2.10)). Xa que, como se comenta en [González-Gómez et al. \(2013\)](#), o estándar é empregar modelos input orientados, aínda que tamén atopamos estudos, como o mencionado [Storto \(2013\)](#), onde se emprega a orientación cara os outputs.

Para a correcta implementación dos modelos utilizaremos o software estatístico . Existe unha librería, `deaR` cuxo manual pode consultarse en [Coll-Serrano et al. \(2023\)](#), específica para a resolución destes modelos. Porén, faremos, por simplicidade, unha implementación paso por paso dos distintos problemas de programación linear. Resolvendo os que resulten coa librería `lpSolve`, o seu manual pode verse en [Csárdi e Berkelaar \(2024\)](#), xa que non require da modificación de arquivos a unha clase concreta como a anterior, e permite acceder a elementos do problema máis axilmente.

Como o noso obxectivo é aplicar a metodoloxía DEA aos datos dos que dispoñemos, temos que aplicar un preprocesado deles, facer algunhas modificacións, pois estes inclúen datos nulos e negativos, como se deixa ver na análise descritiva do Apéndice A. Porén, como vimos, ao comezo do Capítulo 2, o conxunto de produción que caracteriza ás DMUs, Φ , só contempla a probabilidade de duplas estritamente maiores que cero en ambas compoñentes, é dicir, inputs e outputs deben verificar esa propiedade para todas as DMUs. En consecuencia, facemos un reescalado para situar todos os datos dentro do intervalo $[1, 2]$, co obxectivo de estar baixo os supostos que permiten aplicarles a metodoloxía DEA.

Sen embargo, no noso caso, faremos unha modificación máis nos datos. Consideraremos para os outputs que miden só a cantidade de contaminantes da auga tratada a súa inversa, é dicir, tomaremos $(\text{output})^{-1}$. Para facer esta transformación temos que ter en conta a natureza das variables ás que lla estamos aplicando, neste caso serían `mes_e1`, `dbo_e1`, `dqo_e1`, `nt_e1`, `pt_e1` e as análogas para os tres trimestres restantes. Estas variables, tal e como se recolleron, son indesexables para o noso contexto. Interéсанos que acaden os valores máis baixos posible, xa que ten sentido que canto máis baixo sexa no nivel de substancias tóxicas presente na auga tratada máis eficiente sexa a planta depuradora.

Agora ben, para realizar esta transformación, ademais de considerar a natureza dos datos, debemos ter en conta o que desexamos avaliar. Así, para os modelos DEA CRS e VRS output orientados, onde queremos maximizar os outputs sen incrementar os inputs, interéсанos facer a inversa, pois valores máis altos desta significarán menor presenza de contaminantes na auga depurada. Para o caso dos DEA, CRS e VRS, input orientados, a transformación non é necesaria, pois aquí buscamos minimizar os inputs para obter unha cantidade fixa de outputs. Porén, manteremos esa operación, xa que tamén non interesa lograr o menor nivel de contaminantes por unidade de input. Así, facendo esta transformación inversa conseguimos converter eses factores do noso problema nas hipóteses axeitadas, tal e como se pode consultar tamén en [Knox et al. \(1995\)](#) ou [García-Rubio et al. \(2009\)](#), entre outros.


Capítulo 4

Resultados e discusión sobre a eficiencia das EDARs en Galicia

Nos capítulos anteriores establecíamos as bases teóricas que xustificarán o estudo empírico e presentamos os datos empregados para tal fin. A continuación, expoñeremos os resultados da nosa análise realizada baixo a metodoloxía DEA por trimestres e, a partir deles, estableceremos unha clasificación das EDAR empregando a denominada eficiencia cruzada. Isto serviranos para poder realizar unha análise comparativa entre as depuradoras da nosa mostra e para acadar o obxectivo do noso estudo. Este centrarase en analizar a eficiencia da xestión pública fronte a xestión privada.

Finalmente, e para rematar este capítulo discutiremos, brevemente, os nosos resultados e comentaremos algunhas limitacións que presenta este traballo.

4.1. A análise DEA das EDARs: o caso trimestral

Nesta primeira sección presentamos os resultados, por trimestre, da aplicación dos distintos modelos DEA aos nosos datos. Nas táboas recollerase a medida da eficiencia relativa que obtivemos por depuradora. Desta forma sacaremos unha porcentaxe de instalacións eficientes segundo o seu tipo de administración, xa sexa público ou privado. Ademais, como se fai tamén en [García-Sánchez \(2006\)](#), aplicaremos o test non paramétrico de Mann-Whitney, ou proba de suma de rangos de Wilcoxon para mostras independentes. O manual desta función de  pode consultarse en [Hothorn e Hornik \(2022\)](#). Deste xeito, poderemos comparar dúas mostras independentes. Neste caso corresponderanse coas eficiencias das EDARs públicas e privadas, e determinar se proveñen da mesma poboación ou se unha delas presenta valores maiores que outra, sistematicamente. Co cal, este contraste permitirá chequear a hipótese de que as distribucións das dúas mostras son iguais, dito de outro xeito contrastaremos o seguinte test de hipóteses,

$$\begin{cases} H_0 : \text{Ambas formas de xestión, pública e privada teñen o mesmo nivel de eficiencia,} \\ H_1 : \text{A xestión pública e privada non teñen o mesmo nivel de eficiencia.} \end{cases}$$

4.1.1. Primeiro trimestre

Con datos relativos ao primeiro trimestre do ano 2023, correspondentes aos meses de xaneiro a marzo, obtemos, aplicando un modelo DEA CRS input orientado (2.5) os resultados dados na Táboa 4.1. Podemos comprobar que 19 EDARs privadas son eficientes, é dicir, o 70.37% das depuradoras xestionadas por Viaqua son eficientes. O mesmo número obtivemos para as depuradoras públicas. Non obstante, este representa só un 51.35% das EDARs xestionadas por este tipo de entidades.

36 CAPÍTULO 4. RESULTADOS E DISCUSIÓN SOBRE A EFICIENCIA DAS EDARS EN GALICIA

EDAR	Tipo	CRS IO	CRS OO	VRS IO	VRS OO	EDAR	Tipo	CRS IO	CRS OO	VRS IO	VRS OO
<i>As Somozas</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ponteceures</i>	Público	0.9885	1.01159	1.0000	1.0000
<i>Barrañán</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Salvaterra do Miño</i>	Público	0.9878	1.0124	0.9982	1.0124
<i>Bens</i>	Público	0.8961	1.1159	0.9845	1.0011	<i>San Vicente do Mar</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Calo-Milladoiro</i>	Público	0.9985	1.0015	1.0000	1.0000	<i>Silleda</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Carral</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Valga</i>	Público	0.9886	1.0116	1.0000	1.0000
<i>Esteiro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Aríns</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Muzía</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Betanzos</i>	Privado	0.9901	1.0101	1.0000	1.0000
<i>Oleiros</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Dodro-Bexo</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Pontevea</i>	Público	0.9936	1.0065	0.9938	1.0000	<i>Gandarío</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Serra de Outes</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Laracha</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Teo</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Miodelo</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Touro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Neda</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Vimianzo</i>	Público	0.9919	1.0082	0.9986	1.0072	<i>Ortigueira</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>A Fonsagrada</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Pontedeume</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>A Pontenova</i>	Público	0.9532	1.0491	1.0000	1.0000	<i>Ponteulla</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Barreiros</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Sada</i>	Privado	0.9905	1.0096	0.9912	1.0017
<i>Becerreá</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Silvouta</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Guitiriz</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Sigüeiro</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Meira</i>	Público	0.9632	1.0382	0.9943	1.0367	<i>Valdoviño</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Palmeiro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Chantada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Quiroga</i>	Público	0.9894	1.0107	1.0000	1.0000	<i>Viveiro</i>	Privado	0.9858	1.0143	0.9875	1.0131
<i>Río Lea</i>	Público	0.9733	1.0274	0.9985	1.0060	<i>A Rúa (Aguillón)</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>San Cibrao</i>	Público	0.8869	1.1275	0.9914	1.1274	<i>Arenteiro</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Pobra de Trives</i>	Público	0.9791	1.0213	1.0000	1.0000	<i>Carrás</i>	Privado	0.9878	1.0123	0.9885	1.0053
<i>Verín</i>	Público	0.9958	1.0042	1.0000	1.0000	<i>Celanova</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Bandeira</i>	Público	0.91019	1.0987	1.0000	1.0000	<i>O Barco de Valdeorras</i>	Privado	0.9991	1.0009	1.0000	1.0000
<i>Botos</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ourense</i>	Privado	0.9189	1.0882	1.0000	1.0000
<i>Cangas</i>	Público	0.9887	1.0114	1.0000	1.0000	<i>San Cibrao das Viñas, Taboadela</i>	Privado	0.9921	1.0079	0.9994	1.0031
<i>Catoira</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Xinzo de Limia</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Cuntis</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>A Estrada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Lalín</i>	Público	0.9296	1.0757	0.9779	1.0702	<i>Os Praceres</i>	Privado	0.9561	1.0459	1.0000	1.0000
<i>O Grove</i>	Público	0.9606	1.0409	1.0000	1.0000	<i>Ponteareas</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Táboa 4.1: Resultados, para o primeiro trimestre, nos modelos DEA sinalados: CRS input orientado, (2.5), CRS output orientado, (2.7), VRS input orientado, (2.8), e output orientado, (2.10).

Ademais, aplicando o test de Mann-Whitney temos un p-valor de 0.4852, superior aos niveis de significación habituais. Ao 1, 5 e 10 %, non teriamos probas estatisticamente significativas para rexeitar H_0 , así a administración pública e privada, no primeiro trimestre e co modelo considerado, non

presentan diferenzas significativas de comportamento en termos de eficiencia entre elas.

Para o modelo DEA CRS output orientado (2.7) obtemos o mesmo número de EDARs eficientes e, polo tanto a mesma porcentaxe. Pois, como estamos tratando con modelos con retornos constantes a escala, a fronteira eficiente é a mesma tanto no input como no output orientado. O que varía é a cuantificación para as DMUs non eficientes, tal como se pode ver na Táboa 4.1. En consecuencia, o p-valor do test de Mann-Whitey tamén varía, pois toma como mostras independentes os valores da eficiencia das privadas e das públicas. Porén, as conclusións son as mesmas que no caso anterior, ao obter un p-valor igual a 0.1328.

Agora ben, consideramos as propostas de [Banker et al. \(1984\)](#). Os resultados con respecto ao modelo DEA VRS input e output orientado móstranse, tamén, na Táboa 4.1.

Así, para o primeiro caso, o do input orientado, temos 23 DMUs con eficiencia 1 nas privadas. Desta forma, temos que o 85.18 % das mesmas son eficientes. Mentres que as EDARs públicas eficientes foron 29, o 78.38 %. Sen embargo, para o output orientado temos 23 privadas eficientes tamén, pero o número das públicas ascende a 30, o 81.08 %. Como estamos con modelos con retornos variables a escala, as DMUs poden operar baixo retornos crecentes, constantes ou decrecentes, tendo así unha fronteira máis flexible. Co cal, a orientación do modelo afecta a como se proxectan as DMUs na fronteira de eficiencia, obtendo clasificacións distintas. Pese a todo, os p-valores para o test de Mann-Whitney foron de 0.8900 e de 0.5174, polo tanto tampouco temos probas estatisticamente significativas para rexeitar a hipótese nula, é dicir, a xestión pública e privada teñen o mesmo nivel de eficiencia, en ambos casos.

Polo tanto, para os datos relativos aos primeiros meses do ano, para ningunha formulación DEA resultou significativa a diferenza de comportamento, en termos de eficiencia, da xestión pública e privadas das depuradoras na nosa mostra. En seccións posteriores veremos se isto segue a cumprirse no resto do ano 2023.

4.1.2. Segundo trimestre

Como veremos a continuación, para os meses de abril a xuño, o segundo trimestre do 2023, a clasificación realizada nos meses previos varía. Na Táboa 4.2 presentanse os resultados de aplicar os modelos DEA CRS input e output orientado, respectivamente, aos datos relativos ao segundo trimestre. Obtemos así, 14 EDARs privadas eficientes, o 51.85 %, e 22 públicas, o 59.46 %. Ademais, os p-valores do test de Mann Whitney foron 0.5007 e 1, respectivamente, co cal non temos probas para afirmar que haxa diferenzas significativas entre os niveis de eficiencia das entidades públicas e privadas con estes modelos.

Implementando o DEA VRS input orientado, temos, tal e como se ve na Táboa 4.2, que 16 depuradoras privadas son eficientes (o que representa o 50.26 % das mesmas) e 27 das públicas (o 72.97 %). Obtemos un p-valor de 0.97, o que nos permite sacar conclusións análogas ás anteriores. Finalmente, para o modelo DEA VRS output orientado os resultados son 17 privadas e 27 públicas eficientes, o 62.96 % e o 72.97 %, respectivamente. Igual que antes, obtemos un p-valor maior aos niveis de significación habituais, 0.4666, co cal as conclusións neste caso son análogas.

38 CAPÍTULO 4. RESULTADOS E DISCUSIÓN SOBRE A EFICIENCIA DAS EDARS EN GALICIA

EDAR	Tipo	CRS IO	CRS OO	VRS IO	VRS OO	EDAR	Tipo	CRS IO	CRS OO	VRS IO	VRS OO
<i>As Somozas</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ponteceures</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Barrañán</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Salvaterra do Miño</i>	Público	0.8194	1.2204	0.9970	1.2156
<i>Bens</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>San Vicente do Mar</i>	Público	0.9798	1.0206	0.9944	1.0163
<i>Calo-Milladoiro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Silleda</i>	Público	0.9946	1.0054	0.9977	1.00331
<i>Carral</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Valga</i>	Público	0.9918	1.0082	1.0000	1.0000
<i>Esteiro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Aríns</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Muría</i>	Público	0.8981	1.1135	1.0000	1.0000	<i>Betanzos</i>	Privado	0.9736	1.0271	0.9753	1.0103
<i>Oleiros</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Dodro-Bexo</i>	Privado	0.9611	1.0405	0.9988	1.0348
<i>Pontevea</i>	Público	0.9856	1.0146	0.9974	1.0112	<i>Gandarío</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Serra de Outes</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Laracha</i>	Privado	0.9946	1.0055	0.9946	1.0000
<i>Teo</i>	Público	0.9922	1.0078	0.9948	1.0072	<i>Miodelo</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Touro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Neda</i>	Privado	0.9903	1.0098	1.0000	1.0000
<i>Vimianzo</i>	Público	0.9761	1.0244	0.9987	1.0114	<i>Ortigueira</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>A Fonsagrada</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Pontedeume</i>	Privado	0.9695	1.0315	0.9871	1.0188
<i>A Pontenova</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ponteulla</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Barreiros</i>	Público	0.9710	1.0298	1.0000	1.0000	<i>Sada</i>	Privado	0.9978	1.0022	1.0000	1.0000
<i>Becerreá</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Silvouta</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Guitiriz</i>	Público	0.9898	1.0103	1.0000	1.0000	<i>Sigüeiro</i>	Privado	0.9958	1.0042	0.9976	1.0034
<i>Meira</i>	Público	0.9741	1.0266	0.9945	1.0264	<i>Valdoviño</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Palmeiro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Chantada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Quiroga</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Viveiro</i>	Privado	0.9806	1.0197	0.9886	1.0193
<i>Río Lea</i>	Público	0.9914	1.0086	0.9984	1.0083	<i>A Rúa (Aguillón)</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>San Cibrao</i>	Público	0.9853	1.0149	0.9937	1.0140	<i>Arenteiro</i>	Privado	0.9819	1.0183	0.9846	1.0093
<i>Pobra de Trives</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Carrás</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Verín</i>	Público	0.9821	1.0181	1.0000	1.0000	<i>Celanova</i>	Privado	0.9933	1.0067	0.9973	1.0059
<i>Bandeira</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>O Barco de Valdeorras</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Botos</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ourense</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Cangas</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>San Cibrao das Viñas, Taboadela</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Catoira</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Xinzo de Limia</i>	Privado	0.9835	1.0167	0.9838	1.0009
<i>Cuntis</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>A Estrada</i>	Privado	0.9951	1.0049	0.9966	1.0046
<i>Lalín</i>	Público	0.9144	1.0935	0.9858	1.0908	<i>Os Praceres</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>O Grove</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ponteareas</i>	Privado	0.9987	1.0013	0.9993	1.0008

Táboa 4.2: Resultados, para o segundo trimestre, nos modelos DEA sinalados: CRS input orientado, (2.5), CRS output orientado, (2.7), VRS input orientado, (2.8), e output orientado, (2.10).

Polo tanto, pese a que as medidas da eficiencia cambiaron con respecto ao trimestre anterior, os resultados xerais seguen a ser os mesmos: non existen diferenzas significativas, baixo calquera dos problemas DEA empregados, entre os niveis de eficiencia de ambos tipos de administracións.

4.1.3. Terceiro trimestre

Nesta sección analizaremos o que acontece nos meses de xullo a setembro do 2023 onde, recordemos, se intuían valores máis elevados das variables referentes aos contaminantes que nos trimestres restantes.

EDAR	Tipo	CRS IO	CRS OO	VRS IO	VRS OO	EDAR	Tipo	CRS IO	CRS OO	VRS IO	VRS OO
<i>As Somozas</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ponteceures</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Barrañán</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Salvaterra do Miño</i>	Público	0.9335	1.0712	0.9970	1.0677
<i>Bens</i>	Público	0.9278	1.0778	0.9343	1.0045	<i>San Vicente do Mar</i>	Público	0.9791	1.0213	0.9922	1.0185
<i>Calo-Milladoiro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Silleda</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Carral</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Valga</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Esteiro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Aríns</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Muzía</i>	Público	0.8079	1.2378	0.9997	1.1338	<i>Betanzos</i>	Privado	0.9864	1.0137	1.0000	1.0000
<i>Oleiros</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Dodro-Bezo</i>	Privado	0.9740	1.0266	0.9994	1.0154
<i>Pontevea</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Gandaría</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Serra de Outes</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Laracha</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Teo</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Miodelo</i>	Privado	0.9983	1.0017	1.0000	1.0000
<i>Touro</i>	Público	0.7732	1.2933	1.0000	1.0000	<i>Neda</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Vimianzo</i>	Público	0.8240	1.2136	0.9972	1.2115	<i>Ortigueira</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>A Fonsagrada</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Pontedeume</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>A Pontenova</i>	Público	0.9450	1.0581	0.9996	1.0406	<i>Ponteulla</i>	Privado	0.97107	1.0298	1.0000	1.0000
<i>Barreiros</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Sada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Becerreá</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Silvouta</i>	Privado	0.9912	1.0088	0.9955	1.0088
<i>Guitiriz</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Sigueiro</i>	Privado	0.9579	1.0438	0.9958	1.0429
<i>Meira</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Valdoviño</i>	Privado	0.9748	1.0258	0.9938	1.0237
<i>Palmeiro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Chantada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Quiroga</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Viveiro</i>	Privado	0.9693	1.0316	0.9735	1.0100
<i>Río Lea</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>A Rúa (Aguillón)</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>San Cibrao</i>	Público	0.9837	1.0166	0.9949	1.0151	<i>Arenteiro</i>	Privado	0.98095	1.0195	0.9809	1.0083
<i>Pobra de Trives</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Carrás</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Verín</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Celanova</i>	Privado	0.9887	1.0114	0.9960	1.0102
<i>Bandeira</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>O Barco de Valdeorras</i>	Privado	0.9994	1.0005	1.0000	1.0000
<i>Botos</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ourense</i>	Privado	0.9578	1.0440	1.0000	1.0000
<i>Cangas</i>	Público	0.9887	1.0114	1.0000	1.0000	<i>San Cibrao das Viñas, Taboadela</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Catoira</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Xinzo de Limia</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Cuntis</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>A Estrada</i>	Privado	0.9921	1.0079	0.9931	1.0071
<i>Lalín</i>	Público	0.9151	1.0928	0.9817	1.0916	<i>Os Praceres</i>	Privado	0.9689	1.0321	0.9815	1.0042
<i>O Grove</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ponteareas</i>	Privado	0.9907	1.0094	0.9911	1.0015

Táboa 4.3: Resultados, para o terceiro trimestre, nos modelos DEA sinalados: CRS input orientado, (2.5), CRS output orientado, (2.7), VRS input orientado, (2.8), e output orientado, (2.10).

Para os modelos DEA CRS input e output orientados, os resultados completos preséntanse na Táboa 4.3. Obtemos 12 privadas eficientes, o 44.44 %, e 27 eficientes dentro do grupo das públicas, o 72.97 %. Neste, caso temos p-valores de 0.0381, para o input orientado, e de 0.283, para o output orientado. Co cal, semella que para o primeiro modelo, poderíamos aceptar a hipótese nula da igualdade de eficiencia entre ambos grupos. Para un nivel de significación do 1 % e, para o 5 e 10 % teríamos probas estatisticamente significativas para rexeitar a H_0 , logo existirían diferenzas significativas ente os niveis de eficiencia das administracións públicas e privadas.

Agora ben, para o caso dos DEA VRS aplicados aos datos do terceiro trimestre temos que, para o input orientado, os resultados poden verse na Táboa 4.3. O 62.96 % das privadas son eficientes (un total de 17), e un 78.37 % (29 depuradoras) no caso das públicas. Para o caso output orientado, temos os mesmos resultados, neste caso. Aínda que, para o modelo con orientación de entrada o p-valor no test de Mann-Whitney é de 0.05304 e, para o de orientación de saída, é de 0.6153, polo tanto, para niveis de significación do 5 % non temos probas estatisticamente significativas para rexeitar que se acaden valores similares de eficiencias con ambas administracións.

No terceiro trimestre do ano 2023, observamos por primeira vez diferenzas significativas nas medidas de eficiencia entre a xestión pública e a privada. Así, a discrepancia no valor das variables que se apreciaba na Figura 3.9 traducíuse nunha conclusión diferente respecto aos dous trimestres anteriores.

4.1.4. Cuarto trimestre

Finalmente, realizamos unha análise semellante para o último trimestre do ano 2023. Dispoñemos dos datos correspondentes aos últimos meses do ano 2023 e aplicaremos as mesmas metodoloxías que nas seccións previas. Os resultados obtidos móstranse e detállanse a continuación.

Para os DEA CRS, na Táboa 4.4 os resultados do modelo orientado ás entradas e para o orientado ás saídas, 18 privadas e 24 públicas poden calificarse como eficientes, o que se corresponde cun 66.66 % e un 64.86 % do total das EDARs en cada grupo, respectivamente. En ambos casos, obtemos p-valores compatibles coa aceptación da igualdade entre as eficiencias de ambas xestións, en canto a distribución das mesmas, sendo estes de 0.6293 e de 0.8527.

Finalmente, para os modelos con retornos variables de escala temos 22 EDARs privadas e 26 públicas eficientes, no caso input orientado, o que corresponde cun 81.48 % e un 70.27 %, respectivamente. Porén, no caso output orientado, os resultados ascenden ao ter 23 privadas, un 85.18 %, e 30 públicas, o 81.08 %. Analogamente ao caso anterior, aceptamos a hipótese nula H_0 en ambos modelos ao ter p-valores de 0.9642 e de 0.0771, para un nivel de significación do 5 %.

En resumo, observando os resultados trimestrais, só no terceiro trimestre obtemos conclusións diferentes. Fixado un nivel de significación do 5 %, non temos probas estatisticamente significativas para rexeitar a semellanza de comportamentos, en termos de eficiencia, das depuradoras xestionadas por entidades públicas e privadas.

EDAR	Tipo	CRS IO	CRS OO	VRS IO	VRS OO	EDAR	Tipo	CRS IO	CRS OO	VRS IO	VRS OO
<i>As Somozas</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ponteceures</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Barrañán</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Salvaterra do Miño</i>	Público	0.9413	1.0623	0.9973	1.0610
<i>Bens</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>San Vicente do Mar</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Calo-Milladoiro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Silleda</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Carral</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Valga</i>	Público	0.9995	1.0005	0.9995	1.0000
<i>Esteiro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Aríns</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Muxía</i>	Público	0.9411	1.0626	0.9998	1.0440	<i>Betanzos</i>	Privado	0.9654	1.0358	0.9693	1.0084
<i>Oleiros</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Dodro-Bezo</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Pontevea</i>	Público	0.9899	1.0102	0.9899	1.0000	<i>Gandarío</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Serra de Outes</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Laracha</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Teo</i>	Público	0.9906	1.0095	0.9907	1.0000	<i>Miodelo</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Touro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Neda</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Vimianzo</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ortigueira</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>A Fonsagrada</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Pontedeume</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>A Pontenova</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ponteulla</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Barreiros</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Sada</i>	Privado	0.9862	1.0139	1.0000	1.0000
<i>Becerreá</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Silvouta</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Guitiriz</i>	Público	0.9573	1.0446	0.9994	1.0097	<i>Sigüeiro</i>	Privado	0.9942	1.0058	0.9964	1.0039
<i>Meira</i>	Público	0.9939	1.0061	0.9951	1.0061	<i>Valdoviño</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Palmeiro</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Chantada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Quiroga</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Viveiro</i>	Privado	0.9710	1.0298	0.9719	1.0089
<i>Río Lea</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>A Rúa (Aguillón)</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>San Cibrao</i>	Público	0.9781	1.0223	0.9923	1.0184	<i>Arenteiro</i>	Privado	0.9966	1.0034	0.9966	1.0000
<i>Pobra de Trives</i>	Público	0.9856	1.0146	1.0000	1.0000	<i>Carrás</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Verín</i>	Público	0.9360	1.0683	0.9940	1.0649	<i>Celanova</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Bandeira</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>O Barco de Valdeorras</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Botos</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Ourense</i>	Privado	0.9539	1.0483	0.9623	1.0066
<i>Cangas</i>	Público	0.9952	1.0048	1.0000	1.0000	<i>San Cibrao das Viñas, Taboadela</i>	Privado	0.9937	1.0063	1.0000	1.0000
<i>Catoira</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>Xinzo de Limia</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Cuntis</i>	Público	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	<i>A Estrada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Lalín</i>	Público	0.9241	1.0821	0.9853	1.0711	<i>Os Praceres</i>	Privado	0.9644	1.0368	1.0000	1.0000
<i>O Grove</i>	Público	0.9973	1.0027	0.9980	1.0000	<i>Ponteareas</i>	Privado	0.9903	1.0097	1.0000	1.0000

Táboa 4.4: Resultados, para o cuarto trimestre, nos modelos DEA sinalados: CRS input orientado, (2.5), CRS output orientado, (2.7), VRS input orientado, (2.8), e output orientado, (2.10).

4.2. Benchmarking das EDARs

Na sección anterior cuantificamos a eficiencia individual, a denominada como relativa, de cada depuradora mediante unha análise baseada na metodoloxía DEA, onde para cada trimestre avaliamos os catro modelos DEA habituais. Porén, estas medidas calculadas tamén nos poden servir para realizar un *benchmarking*, ou análise comparativa, das DMUs. Para elo, empregaremos de novo a técnica clúster seleccionando os puntos de referencia para as EDARs que peor desempeño teñen segundo o noso estudo. Unha análise similar á que veremos neste apartado pódese seguir en detalle en [Wu et al. \(2010\)](#).

Recordemos que a metodoloxía DEA orixinal, inicialmente introducida en [Charnes et al. \(1978\)](#), consiste en obter valores de eficiencia relativa de unidades homoxéneas en base a variables de entrada e de saída, onde a eficiencia defínese como un ratio dunha suma ponderada de outputs e unha suma ponderada de inputs. Non obstante, coa análise DEA tamén podemos calcular o que se coñece como eficiencia cruzada, ou *cross efficiency*, o que nos permitirá obter un ranking das unidades de toma de decisións que, neste caso, son as depuradoras. A eficiencia relativa do DEA permítenos obter unha clasificación das EDARs segundo sexan ou non eficientes, pero non nos serve para elaborar unha clasificación das mesmas. Isto é debido a que as DMUs eficientes non se lles pode asignar unha orde xa que o modelo límitase a clasificalas. Ademais, como en cada problema de programación lineal estamos calculando uns pesos particulares para cada DMU, que son os que optimizan a súa eficiencia, o que dificulta a comparación obxectiva entre elas.

Non obstante, para o cálculo da eficiencia cruzada empregaremos os pesos óptimos calculados para todas as DMUs, non só os particulares de cada unha. Deste xeito, obtemos medidas máis obxectivas para poder comparalas. Por último, para o cálculo final da eficiencia cruzada levaremos a cabo un promedio para cada EDAR. Isto permitirá ordenar todas as depuradoras de xeito único e establecer un *ranking*.

Tras calcular as eficiencias cruzadas, o paso seguinte será empregar unha análise de conglomerados ou clúster, para identificar os puntos de referencia, as consideradas como *benchmarks*, das depuradoras que peor execución mostren. Deste xeito, como as EDARs similares respecto inputs e outputs se atopan no mesmo clúster, igual que vimos na Figura 3.10 para o caso dos inputs, a depuradora coa máxima puntuación no grupo considerado será o punto de referencia de mellora para as demais EDARs do seu clúster.

Esta análise comparativa poderíamos facela en todos os trimestres, aínda que, a modo de ilustración só a explicitaremos no primeiro e terceiro. Isto xustifícase polo feito de que se corresponden aos dous trimestres con maiores variacións, como se intuía na figura das correlacións lineais, Figura 3.9. Ademais empregaremos só o modelo DEA CRS input orientado, o orixinalmente proposto por [Charnes et al. \(1978\)](#), para ambos casos.

4.2.1. Cálculo das eficiencias cruzadas

O primeiro paso para poder obter unha clasificación das DMUs será calcular as súas eficiencias cruzadas. Así, partindo da implementación do modelo DEA descrito en (2.5), temos que para cada DMU obtemos, a parte do valor da función obxectivo no óptimo, a súa eficiencia relativa, un conxunto de pesos óptimos. Estes son os multiplicadores, é dicir, os valores das variables para os cales se acada o óptimo. Con eles, podemos calcular a eficiencia cruzada d – *ésima* da DMU $_k$, con $k = 1, \dots, n$, coa fórmula

$$E_{dk} = \frac{\sum_{r=1}^s \mu_{rd}^* y_{rk}}{\sum_{i=1}^m \omega_{id}^* x_{ik}}, \quad d, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.1)$$

onde para a d – *ésima* DMU avaliada, μ_{rd}^* é o peso óptimo asociado ao output r e ω_{id}^* o multiplicador correspondente ao input i . Recordemos que x_{ik} é o input i – *ésimo* e y_{rk} o output r – *ésimo*, ambos

asociados á DMU_k . Coa ecuación (4.1), obtemos unha matriz de eficiencias cruzadas $(E)_{d \times k}$, con $d, k \in \{1, \dots, n\}$, cuxa media por columnas, é dicir,

$$\bar{E}_k = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n E_{dk}, \quad (4.2)$$

será a puntuación de eficiencia cruzada da DMU_k – *ésima*.

EDAR	Tipo	Eficiencia relativa	Eficiencia cruzada	Clasificación	EDAR	Tipo	Eficiencia relativa	Eficiencia cruzada	Clasificación
<i>As Somozas</i>	Público	1.0000	0.9093	27	<i>Ponteceures</i>	Público	0.9885	0.8155	51
<i>Barrañán</i>	Público	1.0000	0.8878	35	<i>Sabaterra do Miño</i>	Público	0.9878	0.8851	38
<i>Bens</i>	Público	0.8961	0.6415	64	<i>San Vicente do Mar</i>	Público	1.0000	0.9526	9
<i>Calo-Milladoiro</i>	Público	0.9985	0.9058	29	<i>Silleda</i>	Público	1.0000	0.8537	44
<i>Carral</i>	Público	1.0000	0.9253	19	<i>Valga</i>	Público	0.9886	0.8959	34
<i>Esteiro</i>	Público	1.0000	0.9336	15	<i>Aríns</i>	Privado	1.0000	0.9658	5
<i>Muxía</i>	Público	1.0000	0.9194	24	<i>Betanzos</i>	Privado	0.9900	0.8162	50
<i>Oleiros</i>	Público	1.0000	0.9605	7	<i>Dodro-Bexo</i>	Privado	1.0000	0.7812	56
<i>Pontevea</i>	Público	0.9936	0.9221	22	<i>Gandarío</i>	Privado	1.0000	0.9070	28
<i>Serra de Outes</i>	Público	1.0000	0.9764	2	<i>Laracha</i>	Privado	1.0000	0.9022	33
<i>Teo</i>	Público	1.0000	0.9661	4	<i>Miodelo</i>	Privado	1.0000	0.8746	41
<i>Touro</i>	Público	1.0000	0.7553	58	<i>Neda</i>	Privado	1.0000	0.6873	62
<i>Vimianzo</i>	Público	0.9919	0.91780	25	<i>Ortigueira</i>	Privado	1.0000	0.9566	8
<i>A Fonsagrada</i>	Público	1.0000	0.8017	54	<i>Pontedeume</i>	Privado	1.0000	0.9279	17
<i>A Pontenova</i>	Público	0.9532	0.7878	55	<i>Ponteulla</i>	Privado	1.0000	0.9398	11
<i>Barreiros</i>	Público	1.0000	0.9709	3	<i>Sada</i>	Privado	0.9905	0.8794	39
<i>Becerreá</i>	Público	1.0000	0.9918	1	<i>Silvouta</i>	Privado	1.0000	0.8518	45
<i>Guitiriz</i>	Público	1.0000	0.8281	49	<i>Sigüeiro</i>	Privado	1.0000	0.8111	52
<i>Meira</i>	Público	0.9632	0.8569	42	<i>Valdoviño</i>	Privado	1.0000	0.8472	46
<i>Palmeiro</i>	Público	1.0000	0.9347	12	<i>Chantada</i>	Privado	1.0000	0.9617	6
<i>Quiroga</i>	Público	0.9894	0.8747	40	<i>Viveiro</i>	Privado	0.9858	0.9051	30
<i>Río Lea</i>	Público	0.9733	0.7057	60	<i>A Rúa (Aguillón)</i>	Privado	1.0000	0.9475	10
<i>San Cibrao</i>	Público	0.8869	0.6726	63	<i>Arenteiro</i>	Privado	1.0000	0.9246	20
<i>Pobra de Trives</i>	Público	0.9791	0.8288	48	<i>Carrás</i>	Privado	0.9878	0.9210	23
<i>Verín</i>	Público	0.9958	0.6955	61	<i>Celanova</i>	Privado	1.0000000	0.9338	14
<i>Bandeira</i>	Público	0.9102	0.7585	57	<i>O Barco de Valdeorras</i>	Privado	0.9990	0.9048	31
<i>Botos</i>	Público	1.0000	0.9223	21	<i>Ourense</i>	Privado	0.91893	0.7278	59
<i>Cangas</i>	Público	0.9887	0.9100	26	<i>San Cibrao das Viñas, Taboadela</i>	Privado	0.9921	0.9036	32
<i>Catoira</i>	Público	1.0000	0.9305	16	<i>Xinzo de Limia</i>	Privado	1.0000	0.8545	43
<i>Cuntis</i>	Público	1.0000	0.8853	37	<i>A Estrada</i>	Privado	1.0000	0.9277	18
<i>Lalín</i>	Público	0.9296	0.8435	47	<i>Os Praceres</i>	Privado	0.9561	0.8031	53
<i>O Grove</i>	Público	0.9606	0.8869	36	<i>Ponteareas</i>	Privado	1.0000	0.9341	13

Táboa 4.5: Eficiencias relativas e cruzadas para o modelo DEA CRS input orientado (2.5), no primeiro trimestre do ano 2023. Engádese tamén a clasificación das EDARs segundo a súa eficiencia cruzada.

Deste xeito, na Táboa 4.5 móstranse os resultados das eficiencias cruzadas para cada EDAR e a súa clasificación, para o primeiro trimestre. Esta táboa indícanos que a EDAR de *Becerreá*, unha DMU considerada como eficiente, ten a puntuación máis alta, de 0.9918, co cal se clasifica como a depuradora co mellor desempeño, con respecto ás demais. A segunda sería *Serra de Outes*, tamén eficiente segundo o modelo DEA CRS e a última *Bens*, ineficiente. Ademais, tamén observamos que depuradoras que na análise previa eran eficientes, como *Neda*, obtiveron unha baixa posición no ranking, posición 62, co cal tivo un peor desempeño que outras depuradoras ineficientes consideradas na avaliación do DEA. A explicación deste suceso, como comentabamos antes, recae en que para o cálculo da eficiencia cruzada de *Neda*, neste caso, tivéronse en conta os multiplicadores óptimos das demais DMUs. Porén, cando se calculou a súa eficiencia relativa só se consideraron aqueles que maximizaran a súa eficiencia. Daquela, se eses pesos que se están usando para calcular a súa eficiencia cruzada non a favorecen, o seu promedio pode diminuír. Así como pode suceder o contrario para unha DMU eficiente, por exemplo, para *San Cibrao*, que está un posto por enriba na clasificación, cuxa puntuación de eficiencia relativa era de 0.8869.

Analogamente, para o terceiro trimestre obtemos os resultados dados na Táboa 4.6. Neste caso, a primeira depuradora da clasificación pasa a ser *Chantada*, seguida das EDARs de *Meira* e *Esteiro*, as tres eficientes segundo o DEA. Mentres que a última do ranking pasa a ser *Touro*. Observamos, ao igual que anteriormente, unha DMU eficiente no DEA, como é caso de *Barreiros*, obtén unha baixa posición na clasificación, máis concretamente o posto 60.

EDAR	Tipo	Eficiencia relativa	Eficiencia cruzada	Clasificación	EDAR	Tipo	Eficiencia relativa	Eficiencia cruzada	Clasificación
<i>As Somozas</i>	Público	1.0000	0.8134	54	<i>Pontecesures</i>	Público	1.0000	0.9066	39
<i>Barrañán</i>	Público	1.0000	0.9586	6	<i>Salvaterra do Miño</i>	Público	0.9335	0.8379	52
<i>Bens</i>	Público	0.9278	0.6648	61	<i>San Vicente do Mar</i>	Público	0.9791	0.8616	49
<i>Calo-Milladoiro</i>	Público	1.0000	0.9306	23	<i>Silleda</i>	Público	1.0000	0.9555	9
<i>Carral</i>	Público	1.0000	0.8689	48	<i>Valga</i>	Público	1.0000	0.9277	26
<i>Esteiro</i>	Público	1.0000	0.9784	3	<i>Aríns</i>	Privado	1.0000	0.9584	7
<i>Muxía</i>	Público	0.8079	0.6175	63	<i>Betanzos</i>	Privado	0.9864	0.9265	28
<i>Oleiros</i>	Público	1.0000	0.9596	5	<i>Dodro-Bezo</i>	Privado	0.9740	0.8478	50
<i>Pontevea</i>	Público	1.0000	0.9508	12	<i>Gandarío</i>	Privado	1.0000	0.9636	4
<i>Serra de Outes</i>	Público	1.0000	0.9289	24	<i>Laracha</i>	Privado	1.0000	0.9286	25
<i>Teo</i>	Público	1.0000	0.9576	8	<i>Miodelo</i>	Privado	0.9983	0.9393	20
<i>Touro</i>	Público	0.7732	0.5430	64	<i>Neda</i>	Privado	1.0000	0.9362	21
<i>Vimianzo</i>	Público	0.8240	0.6607	62	<i>Ortigueira</i>	Privado	1.0000	0.8875	44
<i>A Fonsagrada</i>	Público	1.0000	0.8772	46	<i>Pontedeume</i>	Privado	1.0000	0.9399	19
<i>A Pontenova</i>	Público	0.9450	0.7967	57	<i>Ponteulla</i>	Privado	0.9711	0.9262	29
<i>Barreiros</i>	Público	1.0000	0.7016	60	<i>Sada</i>	Privado	1.0000	0.9253	30
<i>Becerreá</i>	Público	1.0000	0.9117	36	<i>Silvouta</i>	Privado	0.9912	0.8441	51
<i>Guitiriz</i>	Público	1.0000	0.9541	10	<i>Sigüeiro</i>	Privado	0.9579	0.7939	58
<i>Meira</i>	Público	1.0000	0.9854	2	<i>Valdoviño</i>	Privado	0.9748	0.8989	40
<i>Palmeiro</i>	Público	1.0000	0.9464	14	<i>Chantada</i>	Privado	1.0000	0.9927	1
<i>Quiroga</i>	Público	1.0000	0.8727	47	<i>Viveiro</i>	Privado	0.9693	0.8899	41
<i>Río Lea</i>	Público	1.0000	0.8093	55	<i>A Rúa (Aguillón)</i>	Privado	1.0000	0.9411	18
<i>San Cibrao</i>	Público	0.9837	0.8878	43	<i>Arenteiro</i>	Privado	0.9809	0.9187	34
<i>Pobra de Trives</i>	Público	1.0000	0.9126	35	<i>Carrás</i>	Privado	1.0000	0.9479	13
<i>Verín</i>	Público	1.0000	0.9071	38	<i>Celanova</i>	Privado	0.9887	0.9357	22
<i>Bandeira</i>	Público	1.0000	0.9511	11	<i>O Barco de Valdeorras</i>	Privado	0.9994	0.8885	42
<i>Botos</i>	Público	1.0000	0.9428	16	<i>Ourense</i>	Privado	0.9578	0.7686	59
<i>Cangas</i>	Público	0.9887	0.9207	33	<i>San Cibrao das Viñas, Taboadela</i>	Privado	1.0000	0.9437	15
<i>Catoira</i>	Público	1.0000	0.9267	27	<i>Xinzo de Limia</i>	Privado	1.0000	0.9217	31
<i>Cuntis</i>	Público	1.0000	0.8779	45	<i>A Estrada</i>	Privado	0.9921	0.9417	17
<i>Lalín</i>	Público	0.9151	0.8027	56	<i>Os Pruceres</i>	Privado	0.9689	0.8211	53
<i>O Grove</i>	Público	1.0000	0.9109	37	<i>Ponteareas</i>	Privado	0.9907	0.9217	32

Táboa 4.6: Eficiencias relativas e cruzadas para o modelo DEA CRS input orientado (2.5), no terceiro trimestre do ano.

4.2.2. Unha análise comparativa

Na metodoloxía DEA, as DMUs eficientes son aquelas que maximizan a relación entre inputs e outputs. Como vimos, correspóndense coas que están sobre a fronteira eficiente. Mentres as DMUs ineficientes miden a súa eficiencia en relación coa distancia a esa fronteira, é dicir, en relación coas DMUs eficientes. Dito doutro xeito, para unha DMU ineficiente, o DEA selecciona un conxunto de

referencia formado por DMUs eficientes que contribúen a definir o seu nivel de ineficiencia. Para elo as eficientes combínanse linealmente para formar un obxectivo alcanzable, *target*, para a DMU ineficiente. Ese *target* non é máis que a proxección da ineficiente sobre a fronteira eficiente, calculado como a suma do produto entre as DMUs de referencia e os pesos asignados polo DEA aos seus inputs e outputs. Finalmente, cabe dicir que ese *target* que unha DMU ineficiente debe acadar para ser eficiente, indica canto se deben reducir os seus inputs, se o modelo é input orientado, ou canto se deben incrementar os outputs, se é output orientado.

Sen embargo, como se menciona en Wu et al. (2010), esa DMU ineficiente e o seu conxunto de referencia poden que non teñan prácticas similares. Desta maneira, empregando a análise por conglomerados, podemos clasificar as DMUs, de xeito máis preciso, en grupos homoxéneos dentro deles e heteroxéneos entre eles. Con esta metodoloxía podemos identificar puntos de referencia, *benchmarks*, para as peores EDARs, en canto ao desempeño de cada unha.

Basta calcular o coeficiente de correlación entre os pares de columnas da matriz de eficiencias cruzadas. Así, unha correlación positiva elevada indica que esas dúas DMUs son similares respecto dos seus inputs e outputs, co cal terán un desempeño parecido se son avaliadas cos pesos óptimos de outras DMUs. Usando esta matriz de correlacións como base para o clúster, conseguimos conglomerados con DMUs similares, como os que veremos a continuación. Ademais, o punto de referencia de cada grupo será a EDAR co valor máximo da media das columnas da matriz de correlacións asociado.

Daquela, no primeiro trimestre temos os seis grupos formados que se indican na Táboa 4.7, onde se resaltan as *benchmarks* de cada grupo. Así, teremos que as EDARs de referencia para cada clúster serán *Bandeira*, *Calo-Milladoiro*, *Laracha*, *Teo*, *A Pontenova* e *Río Lea*, respectivamente. A distancia entre esos grupos móstranse na Figura 4.1, onde pode verse a que distancia se fusionan as DMUs en clústers. Temos así que as distancias máis pequenas indican que as EDARs fusionadas eran máis similares entre si, mentres que as distancias grandes indican que as depuradoras eran máis diferentes.

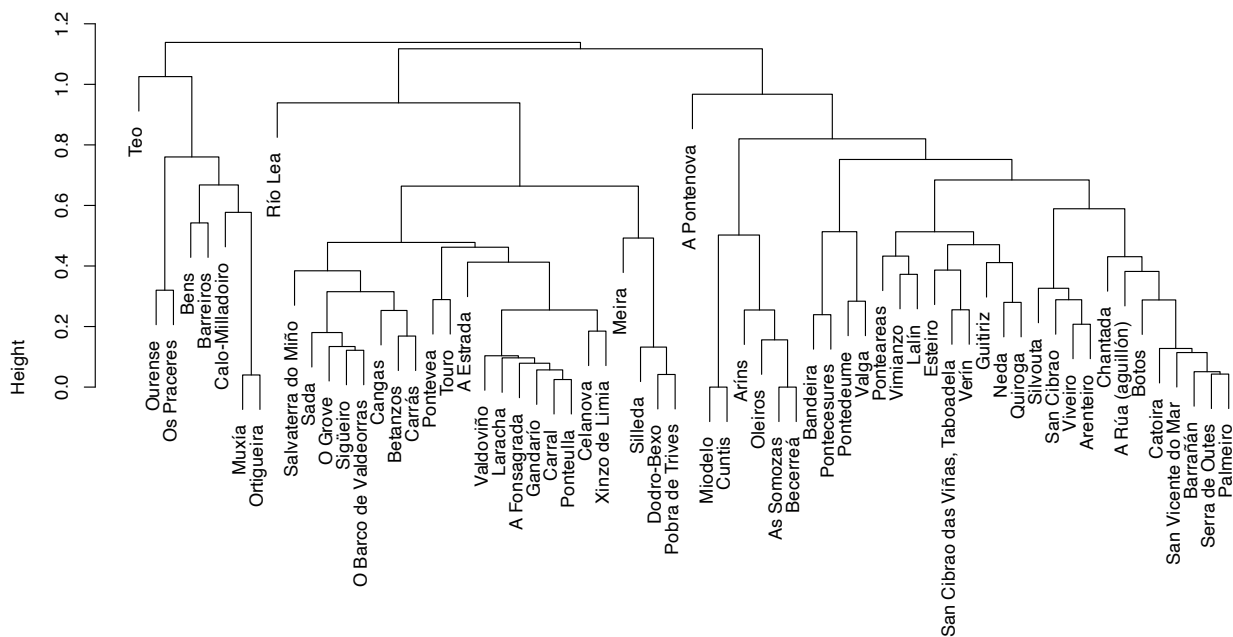


Figura 4.1: Dendrograma resultante de aplicar a técnica clúster coas eficiencias cruzadas, referentes ao primeiro trimestre. No eixo vertical móstranse as distancias de fusión entre as EDARs.

clúster 1	clúster 2	clúster 3	clúster 4	clúster 5	clúster 6
<i>Aríns</i> (0.8650989)	<i>Bens</i> (0.8366826)	<i>Bentanzos</i> (0.9422226)	<i>Teo</i> (0.8196791)	<i>A Pontenova</i> (0.892165)	<i>Río Lea</i> (0.9196024)
<i>As Somozas</i> (0.8384048)	<i>Calo-Milladoiro</i> (0.8813441)	<i>Carral</i> (0.9516521)			
<i>Barrañán</i> (0.8481321)	<i>Muxía</i> (0.8561115)	<i>Dodro-Bezo</i> (0.9163695)			
<i>Esteiro</i> (0.8692863)	<i>Ortigueira</i> (0.8563191)	<i>Gandarío</i> (0.9510351)			
<i>Miodelo</i> (0.8584570)	<i>Barreiros</i> (0.8263333)	<i>Laracha</i> (0.9530534)			
<i>Neda</i> (0.8607185)	<i>Ourense</i> (0.8744950)	<i>Ponteulla</i> (0.9516980)			
<i>Oleiros</i> (0.8512637)	<i>Os Praceres</i> (0.8559668)	<i>Pontevea</i> (0.9474921)			
<i>Pontedeume</i> (0.9039335)		<i>Valdoviño</i> (0.9478317)			
<i>Serra de Outes</i> (0.8538648)		<i>A Fonsagrada</i> (0.9474921)			
<i>Silvouta</i> (0.8658165)		<i>Meira</i> (0.8927197)			
<i>Vimianzo</i> (0.8836659)		<i>Carrás</i> (0.9513059)			
<i>Becerreá</i> (0.8384048)		<i>Celanova</i> (0.9440502)			
<i>Chantada</i> (0.8606001)		<i>O Barco de Valdeorras</i> (0.9303814)			
<i>Guitiriz</i> (0.8516126)		<i>Pobra de Trives</i> (0.9145481)			
<i>Palmeiro</i> (0.8506752)		<i>Xinzo de Limia</i> (0.9442519)			
<i>Quiroga</i> (0.8648550)		<i>A Estrada</i> (0.9211506)			
<i>San Cibrao</i> (0.8783895)		<i>Cangas</i> (0.9378586)			
<i>Viveiro</i> (0.8831829)		<i>O Grove</i> (0.9381177)			
<i>A Rúa (Aguillón)</i> (0.8663751)		<i>Salvaterra do Miño</i> (0.9355804)			
<i>Arenteiro</i> (0.8753716)		<i>Silleda</i> (0.9132868)			
<i>San Cibrao das Viñas, Taboada</i> (0.8536489)					
<i>Verín</i> (0.8560450)					
<i>Bandeira</i> (0.9136191)					
<i>Botos</i> (0.8723643)					
<i>Catoira</i> (0.8502412)					
<i>Cuntis</i> (0.8584570)					
<i>Lalín</i> (0.8738352)					
<i>Ponteareas</i> (0.8754120)					
<i>Pontecesures</i> (0.9050287)					
<i>San Vicente do Mar</i> (0.8556871)					
<i>Valga</i> (0.9020594)					

Táboa 4.7: EDARs agrupadas por conglomerados para o primeiro trimestre. Entre paréntese o valor da media da matriz de correlacións.

Analogamente, para o terceiro trimestre, como se ve na Táboa 4.8, as depuradoras de referencia serán *Touro*, *As Somozas*, *Ponteulla*, *Muxía*, *Becerreá* e *Chantada*, respectivamente. Na Figura 4.2, observamos a representación nun dendograma da distancia de fusión en clústers das depuradoras, correspondéndose coa clasificación da táboa mencionada.

48 CAPÍTULO 4. RESULTADOS E DISCUSIÓN SOBRE A EFICIENCIA DAS EDARS EN GALICIA

clúster 1	clúster 2	clúster 3	clúster 4	clúster 5	clúster 6
<i>Aríns</i> (0.9031988)	<i>As Somozas</i> (0.7822717)	<i>Barrañán</i> (0.9097576)	<i>Muxía</i> (0.8978656)	<i>Becerreá</i> (0.8307564)	<i>Chantada</i> (0.8647732)
<i>Betanzos</i> (0.8999065)		<i>Bens</i> (0.9105977)	<i>Ortigueira</i> (0.8509039)		
<i>Calo-Milladorio</i> (0.9133712)		<i>Miodelo</i> (0.9344228)			
<i>Carral</i> (0.9181510)		<i>Neda</i> (0.9250256)			
<i>Dodro-Bexo</i> (0.9183672)		<i>Pontecume</i> (0.9222656)			
<i>Esteiro</i> (0.8965721)		<i>Ponteulla</i> (0.9447766)			
<i>Gandarío</i> (0.9051978)		<i>Pontevea</i> (0.9035914)			
<i>Laracha</i> (0.9183332)		<i>Serra de Outes</i> (0.9063605)			
<i>Oleiros</i> (0.9106356)		<i>Silvouta</i> (0.9118794)			
<i>Sada</i> (0.8932969)		<i>Meira</i> (0.9117177)			
<i>Sigüeiro</i> (0.9182138)		<i>Palmeiro</i> (0.8901031)			
<i>Teco</i> (0.9141960)		<i>Quiroga</i> (0.8898107)			
<i>Touro</i> (0.9248225)		<i>A Rúa (Aguillón)</i> (0.9177512)			
<i>Valdoviño</i> (0.9112269)		<i>Arenteiro</i> (0.9372729)			
<i>Vimianzo</i> (0.9240468)		<i>Carrás</i> (0.9183971)			
<i>A Fonsagrada</i> (0.8538605)		<i>Ourense</i> (0.8859469)			
<i>A Pontenova</i> (0.8736744)		<i>San Cibrao das Viñas, Taboadela</i> (0.9200782)			
<i>Barreiros</i> (0.8785178)		<i>Verín</i> (0.9174509)			
<i>Guitiriz</i> (0.8640112)		<i>A Estrada</i> (0.9369587)			
<i>Río Lea</i> (0.9087017)		<i>Bandeira</i> (0.9252743)			
<i>San Cibrao</i> (0.9121211)		<i>Cangas</i> (0.9327042)			
<i>Viveiro</i> (0.9180164)		<i>Catoira</i> (0.9221140)			
<i>Celanova</i> (0.9013553)		<i>Cuntis</i> (0.8903208)			
<i>O Barco de Valdeorras</i> (0.8951480)		<i>Lalín</i> (0.9299054)			
<i>Pobra de Trives</i> (0.8670862)		<i>O Grove</i> (0.9106194)			
<i>Xinzo de Limia</i> (0.8904542)		<i>Os Praceres</i> (0.9263091)			
<i>Botos</i> (0.9197140)					
<i>Ponteareas</i> (0.9152312)					
<i>Pontecesures</i> (0.9233483)					
<i>Salvaterra do Miño</i> (0.9217720)					
<i>San Vicente do Mar</i> (0.9236315)					
<i>Silleda</i> (0.9185361)					
<i>Valga</i> (0.9120707)					

Táboa 4.8: EDARs agrupadas por conglomerados para o terceiro trimestre. Entre paréntese o valor da media da matriz de correlacións.

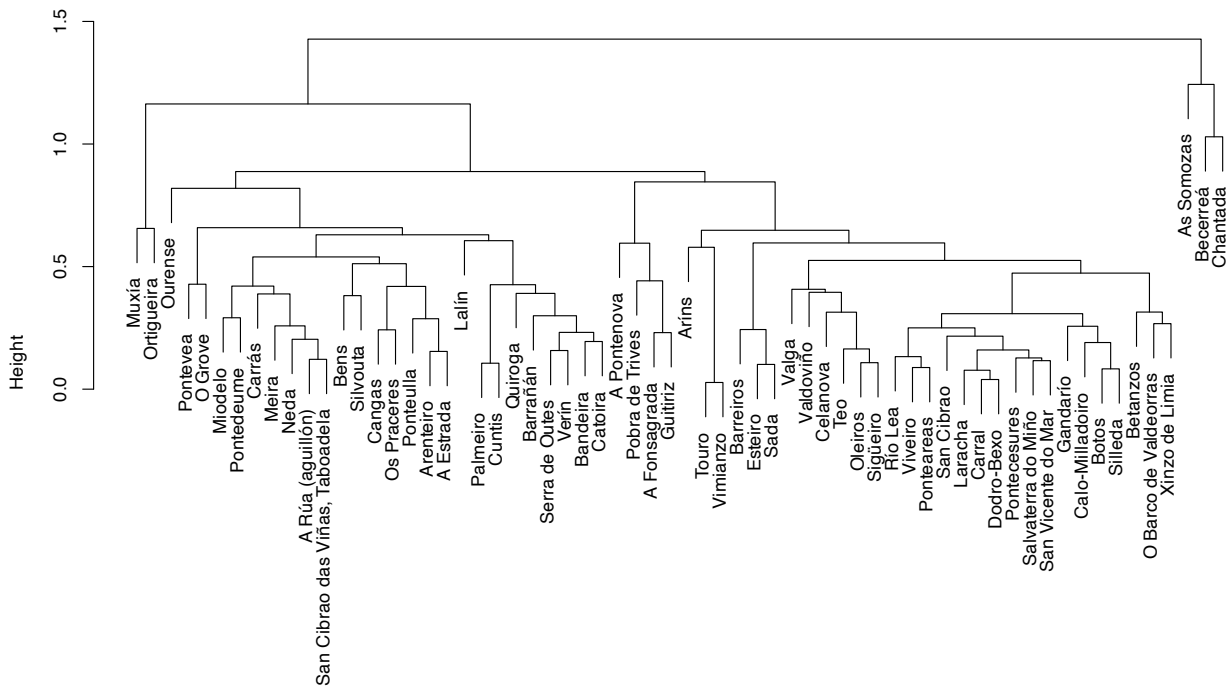


Figura 4.2: Dendrograma resultante de aplicar a técnica clúster coas eficiencias cruzadas, referentes ao terceiro trimestre. No eixo vertical móstranse as distancias de fusión entre as EDARs.

4.3. Discusión dos resultados

Unha vez que temos os resultados para cada trimestre e para cada modelo, podemos facer unha interpretación dos mesmos. Nesta sección, discutiremos os resultados obtidos, primeiro dentro dos trimestres e, despois, facendo unha comparación global, neste caso, do ano 2023. Finalmente, analizaremos tamén os resultados que obtivemos coa análise comparativa ou *benchmarking* das depuradoras do estudo.

4.3.1. Resultados trimestrais

En primeiro lugar, faremos unha interpretación dos resultados para o primeiro trimestre, sendo esta completamente análoga para os demais trimestres. Dividiremos esta discusión dos resultados en canto ao valor da función obxectivo, a eficiencia, e ás solucións óptimas, correspondentes aos pesos óptimos de cada DMU avaliada.

Interpretación da eficiencia

En cada trimestre obtivemos resultados de catro formulacións DEA distintos, os modelos CRS e VRS, e para cada un deles, as versións input e output orientado. Recordemos que en ambos casos tanto input como output orientado, a clasificación dunha DMU como eficiente implica un valor da súa eficiencia relativa igual a un. Porén, canto máis se alonxe o valor obtido de 1, máis ineficiente é a DMU. É máis, existe unha diferenza en canto á cuantificación da ineficiencia por parte dos modelos input orientados, onde sempre serán valores entre 0 e menores estritos que 1, e nos output orientados, maiores que 1.

Desta maneira, retomando os resultados do modelo CRS input orientado, na Táboa 4.1, temos que, por exemplo para a depuradora *Pobra de Trives*, cunha puntuación de 0.9791, significa que os seus

inputs pódense reducir proporcionalmente un 0.02% obténdose o mesmo nivel de outputs, é dicir, sen diminuír a calidade da auga tratada e o rendemento da EDAR. Sen embargo, no modelo CRS input orientado, véxase a Táboa 4.1, o valor de *Pobra de Trives* é de 1.0213. Podemos aumentar os seus outputs nun 0.02% sen consumir máis inputs. Así, vemos como a interpretación dos resultados varía segundo a orientación do modelo que contemplemos.

Continuando co mesmo exemplo e pasando á formulación DEA VRS, vemos na Táboa 4.1, para o input orientado e output orientado, que *Pobra de Trives* obtivo unha puntuación de 1. Desta forma, para este modelo si que se considera unha DMU eficiente. Esta diferenza débese a que no DEA CRS, as DMUs operan baixo rendementos constantes a escala, é dicir, un cambio proporcional nos inputs xera un cambio proporcional nos outputs. Porén, baixo rendementos variables a escala, DEA VRS, ese cambio proporcional nos inputs non significa, necesariamente, un cambio proporcional en outputs. Volvendo ao noso exemplo, como a puntuación da eficiencia para *Pobra de Trives* é de 1 para o VRS e menor a 1 para o CRS, concluímos que esta EDAR opera eficientemente dentro da súa escala pero non en escala óptima global.

Explicuemos isto con un pouco máis de detalle. Para elo centrarémonos nas formulacións DEA CRS e VRS input orientados. Cando introducimos as ideas da publicación [Banker et al. \(1984\)](#), no Capítulo 2, definimos a eficiencia técnica pura e de escala. Sendo as primeiras obtidas mediante a resolución dun modelo VRS, ignórase se a DMU está operando nunha escala óptima, só avalía como de ben emprega os recursos para producir outputs. Porén, a eficiencia de escala, que nos informa se a DMU está operando nunha escala óptima, é o cociente entre os resultados do modelo CRS e os VRS. Logo, se unha DMU é eficiente tanto no modelo CRS como VRS, esta é eficiente no senso de eficiencia técnica e de escala. Porén, se a puntuación no CRS é menor que no VRS, a diferenza débese á ineficiencia por escala. Este caso é o que acontece coa EDAR de *Pobra de Trives*, como a eficiencia do modelo CRS é menor que 1, isto indícanos que a depuradora non está operando na súa escala óptima, é dicir, pode que estea usando máis inputs dos necesarios, pero si que é eficiente no modelo VRS, co cal dentro da escala que está operando o fai de xeito eficiente. Isto danos a entender que a EDAR podería mellorar a súa eficiencia aumentando ou reducindo o seu tamaño. É dicir, aumentando a súa escala, tratando un maior caudal ou máis carga contaminante, ou en caso contrario, reducindo a súa escala, tratando menos caudal o con menos inputs, podería mellorar a súa eficiencia global.

Agora ben, se tomamos a EDAR de *Bens*, temos que esta é ineficiente nos modelos CRS, cuxos valores de eficiencia son 0.8961 e 1.1159, e nos VRS, 0.9845 e 1.0011, nos input e output orientados, respectivamente. Así, esta depuradora é ineficiente tanto pola súa xestión no uso dos recursos como por escala, ao non operar no seu tamaño máis eficiente. Daquela, para poder mellorar e poder empregar os inputs de xeito efectivo para lograr unha calidade da auga ou rendemento desexado, precisarase optimizar os procesos de tratamento.

Debemos recalcar que estas conclusións fan referencia só ao primeiro trimestre. Estas poden estudarse análogamente para os tres trimestres restantes aínda que, por simplicidade, foron omitidos.

Interpretación dos pesos óptimos

Finalmente, e tamén para os datos do primeiro trimestre resultantes de aplicar o modelo CRS input orientado, presentamos os multiplicadores óptimos para cada EDAR. Na Figura 4.3, mostramos un gráfico elaborado cos pesos óptimos, que indican a importancia relativa de cada input e output das depuradoras que resultaron eficientes para este caso. Así, temos que as cores máis escuras indican un peso maior da variable correspondente para a DMU considerada. Daquela, vemos que os inputs *Poboación.equivalente*, *mes_e1*, *dbo_e1* e *nt_e1* parecen ter moita relevancia á hora de clasificar unha EDAR como eficiente.

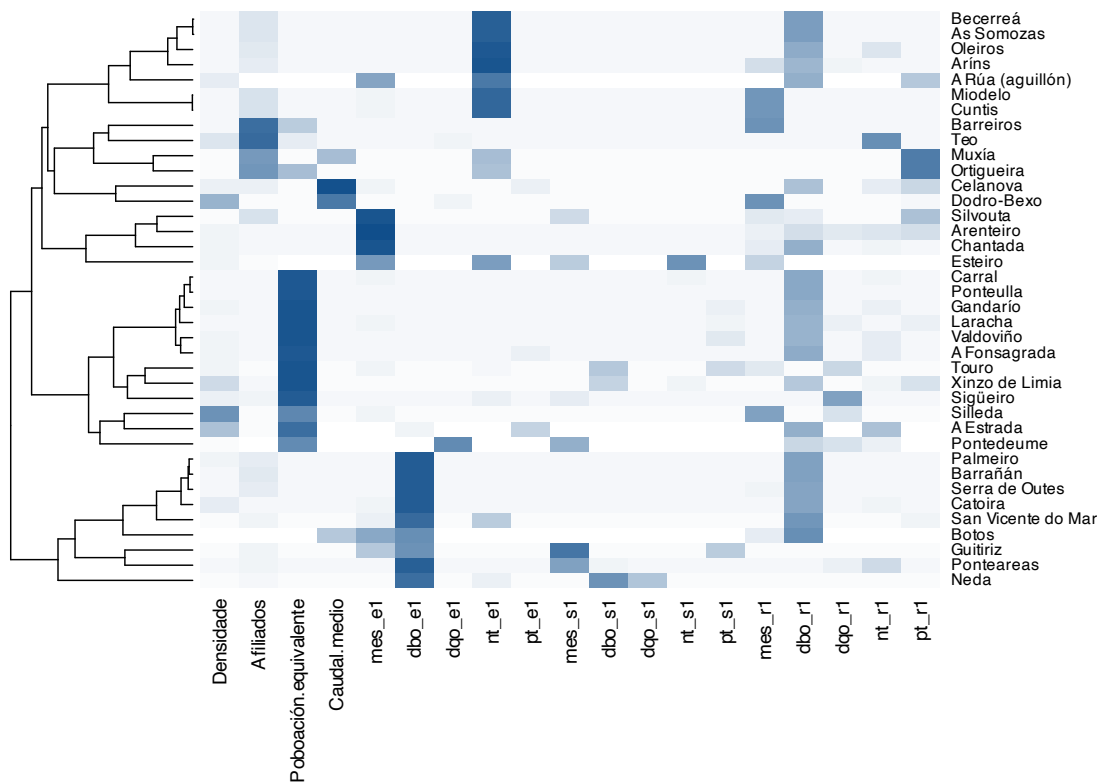


Figura 4.3: Mapa de calor dos pesos óptimos correspondentes a todas as EDARs eficientes. Á esquerda móstrase o dendrograma das depuradoras agrupadas segundo os seus multiplicadores.

Se agora facemos esa mesma representación pero diferenciando entre estacións públicas e privadas obtemos as gráficas da Figura 4.4. Nela vemos, á esquerda, a representación correspondente ás EDARs públicas e, á dereita, ás EDARs privadas. Semella que, de entre os inputs que mencionamos anteriormente, *Poboación.equivalente* e *mes_e1* son máis relevantes para clasificar unha EDAR como eficiente dentro das privadas. Sen embargo, nas públicas, as variables máis relevantes son *dbo_e1* e *nt_e1*.

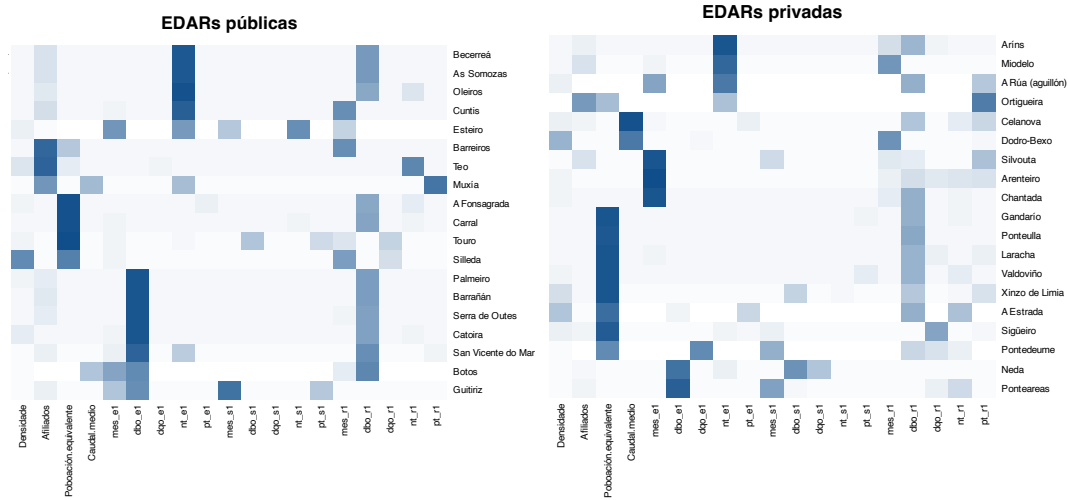


Figura 4.4: Mapa de calor dos multiplicadores óptimos relativos ás EDARs públicas, á esquerda, e privadas, á dereita.

A pesar disto, temos que ter en conta que estas representacións son relativas só aos datos mencionados, pois os pesos óptimos varían. De novo, teríamos interpretacións análogas para os demais trimestres derivadas dos correspondentes estudos.

4.3.2. Comparación entre trimestres

A continuación, se comparamos os resultados dos catro trimestres, pode verse un resumo deles na Táboa 4.9. Podemos ver que, pese a que existen casos onde o porcentaxe de depuradoras públicas é superior ao das privadas, estas diferenzas non son significativas. Cómpre destacar os resultados obtidos para o terceiro trimestre onde, recordemos, se esperaban resultados fóra do esperado. Como vemos na táboa, os p-valores de Mann-Whitney acada cantidades menores a 0.05 nalgúns casos. Logo, fixado un nivel de significación do 5%, temos probas estatisticamente significativas para rexeitar a diferenza entre a eficiencia pública e privada para os modelos CRS e VRS input orientado. De feito, os contastes realizados ata o momento tíñanse fronte unha hipótese alternativa *two-sided*. Sen embargo, se probamos, nesos dous casos, a enfrontar as seguintes hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \text{Ambas formas de xestión, pública e privada teñen o mesmo nivel de eficiencia,} \\ H_1 : \text{A eficiencia da xestión privada é menor que na pública.} \end{cases}$$

obtemos un p-valor de 0.0192, para o CRS input orientado, e de 0.0266, para o output orientado. Daquela, en ambos casos, temos probas estatisticamente significativas para rexeitar H_0 a favor da alternativa anterior. Desta forma, a eficiencia da xestión privada non só é distinta da pública, senón tamén inferior. Analogamente, se probamos coa alternativa contraria, obtemos p-valores moi superiores a 0.05, non rexeitando a igualdade de eficiencias entre ambas xestións.

Semella entón que a xestión pública é máis eficiente na temporada de verán. Fóra deses meses, non existen diferenzas significativas entre ambos tipos de administracións. Sen embargo, como veremos no seguinte apartado, onde falaremos das limitacións deste estudo, estas conclusións son para os nosos datos concretos, podendo ser moi diferentes para outros.

Trimestre	Modelo DEA	Privadas eficientes (%)	Públicas eficientes (%)	p-valor de Mann-Whitney
1º (Xaneiro-Febrero-Marzo)	CRS input orientado	51.35	70.37	0.4852
	CRS output orientado			0.1328
	VRS input orientado	85.18	78.38	0.8900
	VRS output orientado	85.18	81.08	0.5174
2º (Abril-Maio-Xuño)	CRS input orientado	51.85	59.46	0.5007
	CRS output orientado			1
	VRS input orientado	59.26	72.97	0.9700
	VRS output orientado	62.96	72.97	0.4666
3º (Xullo-Agosto-Setembro)	CRS input orientado	44.44	72.97	0.0381
	CRS output orientado			0.283
	VRS input orientado	62.96	78.38	0.0530
	VRS output orientado	62.96	78.38	0.6153
4º (Outubro-Novembro-Dicembro)	CRS input orientado	66.67	64.86	0.6293
	CRS output orientado			0.8527
	VRS input orientado	81.48	70.27	0.9642
	VRS output orientado	85.18	81.08	0.0771

Táboa 4.9: Resumo dos resultados obtidos no estudo das eficiencias relativas para os distintos modelos e trimestres, ademais dos p-valores obtidos.

Así mesmo, representando un diagrama de dispersión para cada trimestre, como o mostrado na Figura 4.5, temos para cada EDAR catro puntos representando a medida de eficiencia obtida con cada un dos modelos. Neste caso, observamos que esa medida de eficiencia está arredor de 1 en todos os trimestres producíndose, en xeral, pequenas perturbacións da mesma. Como estudamos nas táboas de resultados, moitas depuradoras eran ineficientes ao ter valores de eficiencia próximos a 1, co cal, na gráfica, non é fácil de observar esa non eficiencia. Se nos fixamos no rango das medidas da eficiencia, no eixo y de cada gráfica, temos que para o terceiro trimestre, se presentan os valores con rangos máis amplos. Entón, teriamos unha maior dispersión da cuantificación da eficiencia neste caso.

De feito, podemos observar mellor esta dispersión nos boxplots da Figura 4.6, onde para cada trimestre sinalado temos un boxplot segundo o tipo de xestión para os resultados da eficiencia obtidos no modelo CRS input orientado. De novo, obténdose resultados análogos para os restantes métodos DEA polo que se omiten. Temos, entón, que en termos do correspondente boxplot, o terceiro trimestre presenta, en ambos tipos de xestión, as caixas (rango intercuartílico) e o rango entre os bigotes (rango de valores), máis anchos. Polo tanto, temos unha maior dispersión das medidas de eficiencia neses meses.

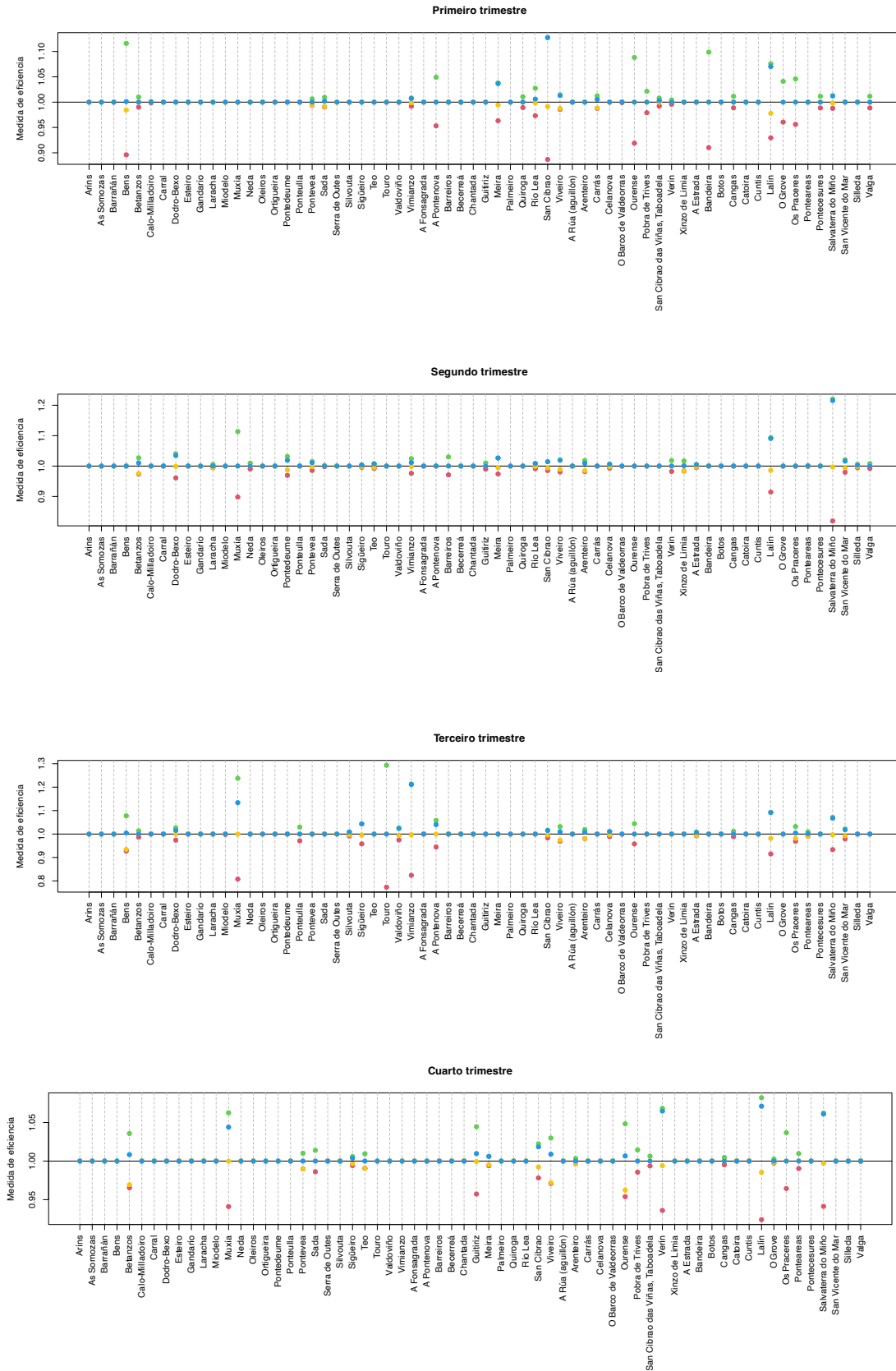


Figura 4.5: Gráfico de dispersión para os trimestres sinalados. En vermello o valor da eficiencia correspondente ao modelo CRS IO, en verde ó CRS OO, en amarelo o modelo VRS IO e en azul o VRS OO.

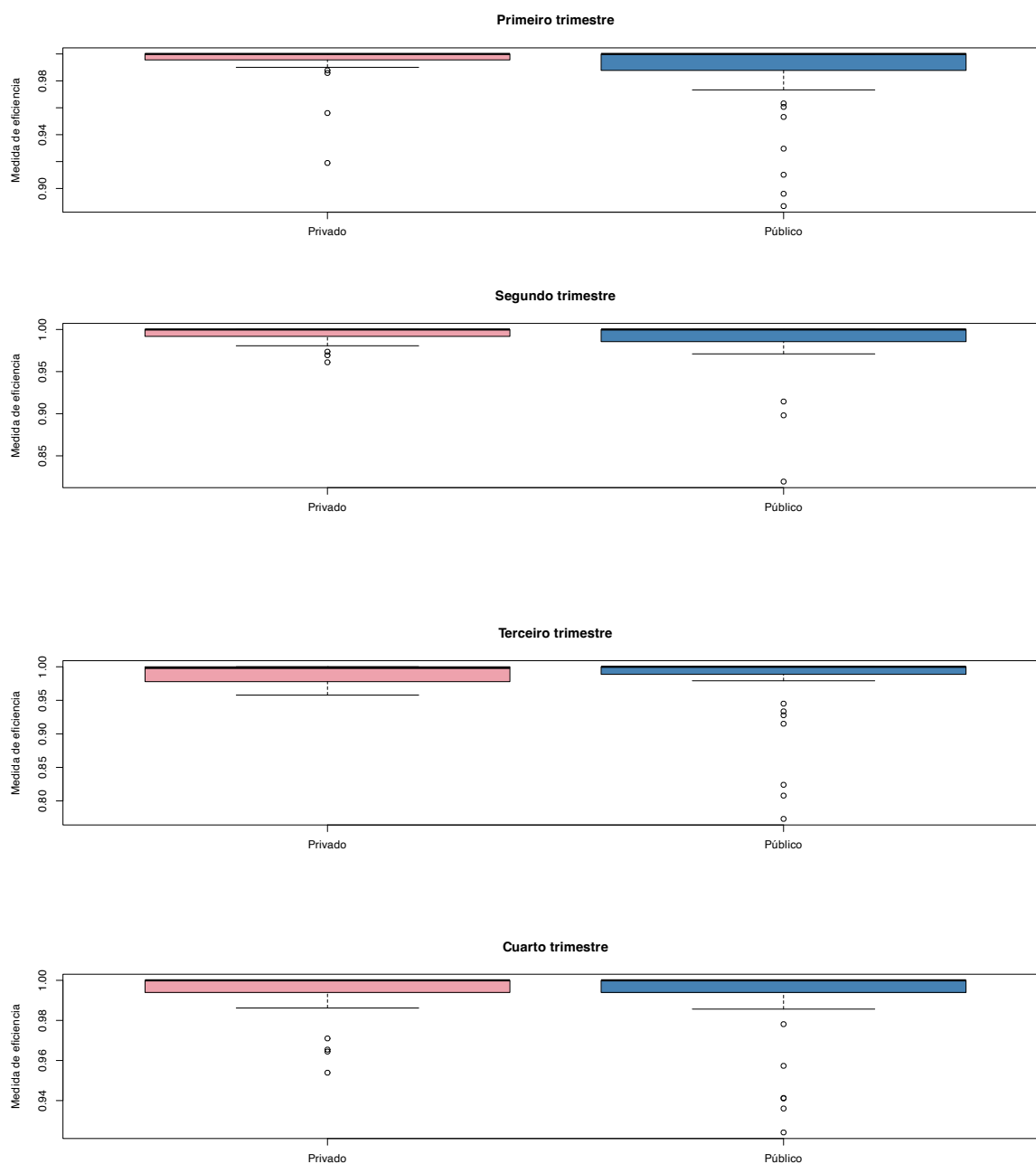


Figura 4.6: Boxplot da cuantificación da eficiencia segundo a xestión da EDAR, para os resultados do modelo CRS input orientado nos trimestres sinalados.

Podemos estudar tamén as medidas de posición e dispersión, de forma numérica, para os vectores formados pola eficiencia de cada tipo de xestión. Recollemos estes datos na Táboa 4.10, onde só se ilustra para os resultados obtidos co modelo DEA CRS input orientado con datos do primeiro trimestre. Observamos que a eficiencia das depuradoras da mostra en conxunto é en media dun 98.74 % operando, así, en niveis similares e próximos á fronteira eficiente, algo que xa intuíamos ao observar os resultados

desglosados (ver Táboa 4.1). Se agora analizamos os valores da media para as eficiencias individuais temos que as EDARs privadas semellan máis eficientes que as públicas. Aínda que a dispersión destas últimas é maior, indicando que poderían operar en entornos máis diversos. De feito, xa vimos que, neste caso, non existen diferenzas significativas entre ambos tipos de xestión.

	EDARs privadas	EDARs públicas	Todas
Media	0.9933	0.9831	0.9874
Mediana	1.0000	1.0000	1.0000
Rango intercuartílico	0.0044	0.0122	0.0113
Mínimo	0.9190	0.8869	0.8869
Máximo	1.0000	1.0000	1.0000
Desviación estándar	0.01747	0.0303	0.0260

Táboa 4.10: Medidas estatísticas dos resultados dos valores de eficiencia obtidos co modelo DEA CRS input orientado no primeiro trimestre.

Analogamente, se agora tomamos os datos do terceiro trimestre temos que a eficiencia da mostra conxunta baixa ata o 98.09%, a pesar de que a media da eficiencia nas privadas segue a ser máis alta ca nas públicas, a mediana, nestas últimas está na puntuación eficiente, ademais o seu rango intercuartílico é menor, tal é como se ve na Táboa 4.11. Isto podería explicar que o Test de Mann-Whitney establécese diferenzas significativas, entre as xestións, ao establecer os rangos na mostra.

	EDARs privadas	EDARs públicas	Todas
Media	0.9890	0.9751	0.9809
Mediana	0.9983	1.0000	1.0000
Rango intercuartílico	0.0222	0.0113	0.017
Mínimo	0.9578	0.7732	0.7732
Máximo	1.0000	1.0000	1.0000
Desviación estándar	0.0141	0.0570	0.0446

Táboa 4.11: Medidas estatísticas dos resultados dos valores de eficiencia obtidos co modelo DEA CRS input orientado no terceiro trimestre.

4.3.3. Resultados da análise comparativa

Se resumimos os resultados da clasificación obtidos na Táboa 4.5 e na Táboa 4.6, ambos para modelo CRS input orientado, no primeiro e terceiro trimestre do 2023, respectivamente, temos a Táboa 4.12. Nela expóñense as dez primeiras depuradoras da clasificación, onde vemos como o número de EDARs cunha xestión privada é similar ao da pública en ambos momentos do ano. Porén, no terceiro trimestre, as privadas son as que ocupan as posicións superiores no ranking.

1º Trimestre			3º Trimestre		
EDAR	Tipo	Clasificación	EDAR	Tipo	Clasificación
<i>Becerreá</i>	Público	1	<i>Chantada</i>	Privado	1
<i>Serra de Outes</i>	Público	2	<i>Meira</i>	Público	2
<i>Barreiros</i>	Público	3	<i>Esteiro</i>	Privado	3
<i>Teo</i>	Público	4	<i>Gadarío</i>	Privado	4
<i>Aríns</i>	Privado	5	<i>Oleiros</i>	Público	5
<i>Chantada</i>	Privado	6	<i>Barrañán</i>	Público	6
<i>Oleiros</i>	Público	7	<i>Aríns</i>	Privado	7
<i>Ortigueira</i>	Privado	8	<i>Teo</i>	Público	8
<i>San Vicente do Mar</i>	Público	9	<i>Silleda</i>	Público	9
<i>A Rúa (Aguillón)</i>	Privado	10	<i>Guitiriz</i>	Público	10

Táboa 4.12: Resumo dos resultados obtidos na análise comparativa das EDARs, en vermello destácanse as depuradoras privadas.

Finalmente, tras facer esa clasificación, recordemos que agrupamos as EDARs en clústeres segundo os seus pesos óptimos, para así poder establecer un punto de referencia para cada grupo. Os resultados disto, para o primeiro trimestre, mostrábase na Táboa 4.7, onde as depuradoras *benchmarks* eran *Laracha*, *Bandeira*, *Calo-Milladoiro*, *Teo*, *A Pontenova* e *Río Lea*, onde só a primeira delas ten unha xestión privada. Pese a isto, no verán, os puntos de referencia son *Touro*, *As Somozas*, *Ponteulla*, *Muxía*, *Becerreá* e *Chantada*, onde o número de depuradoras privadas ascenden a dúas, véxase a Táboa 4.8.

Recordemos que o Test de Mann-Whitney, cos resultados do terceiro trimestre para o modelo CRS input orientado, onde rexeitabamos a igualdade de eficiencias entre ambas xestións, permitíndonos xustificar unha maior eficiencia nas públicas. Non obstante, nesa análise comparativa vemos que, ao calcular as eficiencias cruzadas, son as EDARs privadas as que ocupan posicións superiores no ranking e as que engaden novos puntos de referencia. Isto é debido ás diferenzas entre a eficiencia relativa e cruzada comentadas. Semella que ao empregar os pesos óptimos das demais DMUs, e non só os da EDAR considerada, as privadas parecen ter un mellor rendemento.

De feito, se realizamos unha nova análise empregando, neste caso, cada unha das EDARs privadas e unha depuradora ficticia formada pola combinación das públicas, de xeito que as súas variables de entrada e saída correspondentes son resultado de realizar a media das EDARs públicas, tal e como se pode consultar en Kritikos (2017). Con este estudo obtemos resultados pouco satisfactorios para este último modelo de xestión, como se ve no Apéndice B. En conxunto, a xestión pública parece ter unha actuación moito peor que a privada, obtendo para o primeiro e terceiro trimestre, eficiencias moi próximas a 1 nas depuradoras privadas e baixas para o sistema público, para os modelos DEA CRS e VRS, ademais das súas variantes input e output orientadas. Sen embargo, estas conclusións téñense que interpretar con coidado pois refrense ás depuradoras públicas como un conxunto podendo perderse as súas características individuais.

4.4. Limitacións do estudo

Tras a presentación dos resultados obtidos no noso estudo en seccións anteriores, debemos mencionar algunhas das limitacións que presenta.

- Para comezar, vímonos na obriga de preprocesar os datos para situalos nos supostos requeridos para aplicar esta metodoloxía, pois para algunhas depuradoras dispoñiamos de datos de entrada iguais a cero. En consecuencia, asumíuse que o rendemento era cero tamén para evitar a división entre a variable de entrada nula. Sen embargo, isto non é de todo certo, xa que a EDAR non tiña nada de contrarrestar e, polo tanto, non é unha avaliación do rendemento correcta.
- Outro suposto que se fixo sobre os datos considerados para realizar esta análise foi asumir que dúas das tres depuradoras mixtas pertencían só a Viaqua, e a terceira delas non foi considerada por estar administrada por outra entidade privada. Deste xeito, no noso estudo, non se tiveron en conta a xerencia por parte de entidades mixtas. Ademais, só se tomaron datos relativos a depuradoras dunha capacidade maior ou igual a 2000 h.eq., polo que se ignoraron depuradoras dun menor tamaño.
- Outra gran limitación dos datos é que non se está a facer unha comparación exacta de ambos métodos de xestión (público fronte privado). Para poder levala a cabo, deberíamos dispoñer de datos medidos exactamente nas mesmas condicións. Este feito non é realista pois as mostras que se toman, pese a que sexan o mesmo día de cada mes, dependen das condicións meteorolóxicas e mesmo de se se realizou un vertido industrial en sumidoiros situados nas proximidades da depuradora.
- Por outra banda, para poder realizar este estudo dispoñíase da base de datos da compañía privada Viaqua. Porén, como xa dixemos, preferimos tomar só os datos proporcionados por Augas de Galicia, para que fose unha comparación o máis xusta posible. Polo tanto, pode que esteamos a tomar datos non tan exactos nin realistas para a administración privada.
- Non obstante, para comparar, de forma precisa, ambos sistemas de xestión das depuradoras, deberíamos ter en conta outras variables como inputs, ademais das xa dispoñibles. Nunha rexión como Galicia, onde existe unha gran dispersión de poboación é importante ter en conta que, por exemplo, a lonxitude da rede de saneamento ata unha EDAR non é a mesma para un fogar nunha cidade que para unha casa dunha aldea. Nesta última seguramente estea moito máis lonxe e, polo tanto, se requira de máis canalizacións.
- Tamén temos que ter en conta que as estacións depuradoras non dispoñen das mesmas infraestruturas, co cal nos estamos comparando por igual unhas moi complexas con outras máis sinxelas. Sen embargo, a contraposición coas entidades públicas supón un gran impedimento ao resultar moi complicado atopar esta clase de datos. De feito, no novo plan de Saneamento de Galicia, pódese consultar un resumo da primeira das fases en [Augas de Galicia \(2024\)](#), tense como obxectivo analizar e diagnosticar a situación do saneamento e depuración e Galicia, o que permitirá dispoñer duns datos máis completos sobre estas xestións públicas. Elaborando para elo unha serie de indicadores que permitan avaliar, de forma obxectiva os ámbitos do saneamento: a ordenación do territorio, as infraestruturas, o medio receptor e a gobernanza. Este novo plan permitirá realizar os cambios necesarios ante unha situación cambiante onde o cambio climático, con repentinas secas ou inundacións, e a aparición de novos contaminantes son cada vez máis relevantes.
- Finalmente, outra das grandes limitacións deste estudo radica na mesma metodoloxía que se emprega. A Análise Envoltante de Datos é altamente sensible ás modificacións nos datos. Isto significa que, ao engadir ou eliminar variables, tanto aos inputs coma aos outputs, ou mesmo modificamos algún dos seus valores, obteremos resultados distintos.

Por todo isto, cómpre recalcar que todo o descrito en apartados anteriores, tanto resultados como interpretacións, correspóndense a uns datos particulares, cunhas variables concretas e empregando formulacións dos problemas DEA específicas.

Capítulo 5

Conclusiones

A comezos deste traballo explicamos que a xestión da auga, un recurso esencial para a sociedade, require de sistemas eficientes que maximicen o uso dos recursos dispoñibles e minimize os posibles impactos negativos no medio receptor. Este traballo centrouse na avaliación da eficiencia do sistema das Estacións Depuradoras de Augas Residuais (EDARs). Para iso, partiuse da información proporcionada para unha mostra delas en Galicia, xestionadas tanto por administracións públicas coma privadas. Estipulamos así, como obxectivo ao que se intentou dar resposta en capítulos anteriores, a análise empírica da xestión, pública ou privada das EDAR en termos da súa eficiencia.

Para elo, establecíamos un procedemento de avaliación de eficiencia de cada unha das EDARs co obxectivo de clasificalas en eficientes ou non eficientes, usando a metodoloxía dos problemas DEA. Esta baséase en empregar uns recursos dispoñibles para a elaboración duns produtos, na avaliación da eficiencia de cada unha das unidades de toma de decisións, as xa noemadas DMUs nos problemas DEA. No noso caso, estas unidades foron as EDARs, e os inputs e outputs escolléronse de tal maneira que permitisen avaliar a eficiencia en función da calidade da auga tratada, tendo en conta os datos dispoñibles, sobre todo das entidades públicas.

Analogamente, a resultados de estudos similares realizados literatura sobre o tema, atopámonos ante resultados inconclusos. Tal e como vimos, as posibles conclusións dependen das variables consideradas, dos datos concretos e do modelo empregado. Recordemos que para un mesmo conxunto de datos, fixado un trimestre, os resultados eran diferentes en función do enfoque DEA considerado. Sen embargo, se podemos concluír que as diferenzas atopadas entre ambos tipos de xestión non foron significativas, salvo para a tempada de verán en modelos concretos. Nese caso, as EDARs públicas representaron unha maior eficiencia. Empregando os pesos óptimos obtidos cos modelos DEA puidemos establecer que EDARs poden actuar como puntos de referencia (*benchmark*) para outras. É dicir, dentro dun grupo, as EDARs poderían beneficiarse adoptando prácticas observadas nas instalacións que resultaron clasificadas como *benchmarks*.

Ademais, temos que ter en conta as limitacións deste traballo e que non se está a facer unha comparación xusta, ao non dispoñer dos datos precisos das entidades públicas. De cara a un futuro estudo, como mínimo, precisaríamos datos máis específicos das EDARs que permitan diferenciar o tipo de infraestrutura que dispón cada EDAR e da lonxitude da rede de saneamento. É máis, pese a que a análise DEA é unha ferramenta útil, empregada en numerosos contextos, a súa aplicación está suxeita a certos inconvenientes. Por exemplo, a calidade dos datos dispoñibles pode influír nos resultados obtidos. Tamén, nestes modelos non consideramos factores medioambientais ou regulacións legislativas, que poden afectar especificamente á medida da eficiencia dunha EDAR. Cabe mencionar tamén a imposibilidade de ter mostras de auga recollidas nas mesmas condicións exactas impide ter unha comparación completamente obxectiva.

Tal e como se menciona, para futuros estudos, ademais de ter en conta o novo plan de saneamento de Galicia, que pode consultarse un resumo deste en [Aguas de Galicia \(2024\)](#), deberíamos de incorporar factores externos, tanto xeográficos como climáticos. Por exemplo, sería lóxico ampliar a base de datos,

engadindo variables que poidan describir con precisión as características descritoras de cada EDAR. Tamén semella importante, polas desvantaxes da DEA, combinar esta metodoloxía con outras, como a Análise de Componentes Principais, ou mesmo comparala con técnicas paramétricas, como a Análise Estocástica de Fronteira, como vimos que se fai na literatura revisada neste traballo.

Con todo, é importante destacar a relevancia deste estudo polas súas implicacións sociais, económicas e loxísticas no uso eficiente dun recurso tan valioso como a auga. En particular, resulta esencial para garantir unha xestión óptima e sostible dos recursos hídricos dispoñibles. Aínda que con certas limitacións xa mencionadas, este traballo de fin de mestrado aspira a converterse nun punto de partida para futuras investigacións máis profundas neste ámbito, situando a investigación matemática ao servizo da sociedade.

Apéndice A

Análise descritiva

Ao longo do estudo empregamos unha serie de variables que dividimos, segundo a súa natureza nos problemas DEA, en variables de entrada, inputs, e de saída, outputs. Porén, antes da realización da análise, cómpre ter un bo entendemento destas variables. Con este obxectivo en mente, neste primeiro apéndice realízase unha análise descritiva tanto numérica como gráfica das variables empregadas no noso estudo empírico.

A.1. Variables de entrada

Nesta sección faremos unha análise descritiva, tanto gráfica como numérica, das variables que conforman os inputs das DMUs. Isto é, variables que son descritoras das diferentes EDARs consideradas.

Primeiro faremos unha descrición numérica das variables input, comezando por **Densidade**, **Afiliados**, **Poboación equivalente** e **Caudal.medio**, pois estas se empregarán nos catro trimestres por igual, ao seren medidas anuais ou constantes (como as referentes á capacidade dunha EDAR). Na Táboa A.1 temos un resumo desas variables onde, ademais de medidas de posición, temos tamén a desviación típica, como medida de dispersión. Observamos que a maior variabilidade acádase nas variables referentes á capacidade da depuradora.

Variable	Mínimo	1º Cuartil	Mediana	Media	3º Cuartil	Máximo	Desviación estándar
Densidade	7.50	51.00	108.20	215.30	243.70	1332.40	273.93
Afiliados	4.74	11.46	14.33	15.34	18.19	33.68	6.06
Poboación.equivalente	2000	3880	6000	31166	14250	670000	97178.49
Caudal.medio	440.00	833.80	1634.50	7232.60	3556.20	130982	20103.38

Táboa A.1: Análise descritiva numérica dos datos correspondentes ás variables indicadas.

A continuación, centrarémonos nas variables de entrada que si varían dun trimestre a outro. Temos na Táboa A.2 os datos referentes ao primeiro trimestre do ano 2023, de xaneiro a marzo, na Táboa A.3 o resumo para os meses de abril a xuño, na Táboa A.4 de xullo a setembro e, finalmente, na Táboa A.5, os tres meses restantes. As etiquetas **_e1**, **_e2**, **_e3** e **_e4** fan referencia ao primeiro, segundo, terceiro e cuarto trimestre, respectivamente.

Se nos fixamos na columna que mide a variabilidade, **Desviación estándar**, parece que, para o segundo e terceiro trimestre, temos datos máis variables. Tamén, presentan valores máximos máis elevados e medianas máis próximas ao terceiro cuartil que os dous trimestres restantes.

Variable	Mínimo	1º Cuartil	Mediana	Media	3º Cuartil	Máximo	Desviación estándar
mes_e1	9.00	31.75	69.67	148.55	172.00	850.00	191.59
dbo_e1	0.00	26.25	76.67	125.42	161.50	740.00	147.51
dqo_e1	16.67	72.75	184.50	303.48	350.67	2088.00	375.12
nt_e1	0.00	9.568	16.68	21.49	28.59	102.63	16.96
pt_e1	0.20	1.31	1.99	2.94	3.54	12.38	2.65

Táboa A.2: Análise descritiva numérica dos datos dos contaminantes durante o primeiro trimestre do ano 2023.

Variable	Mínimo	1º Cuartil	Mediana	Media	3º Cuartil	Máximo	Desviación estándar
mes_e2	10.00	47.50	94.00	204.40	152.80	3218.70	468.29
dbo_e2	5.00	103.60	160.00	231.00	224.00	2173.30	343.14
dqo_e2	23.33	222.67	345.50	496.90	502.58	4889.33	737.39
nt_e2	5.13	19.77	28.93	37.67	39.04	339.90	43.86
pt_e2	0.27	2.35	3.57	5.07	5.64	42.33	6.34

Táboa A.3: Análise descritiva numérica dos datos dos contaminantes durante o segundo trimestre do ano 2023.

Variable	Mínimo	1º Cuartil	Mediana	Media	3º Cuartil	Máximo	Desviación estándar
mes_e3	5.33	53.25	102.00	163.55	192.08	1390.00	221.67
dbo_e3	0.00	120.00	200.20	230.60	279.00	1226.70	201.12
dqo_e3	0.00	250.00	476.20	609.10	648.00	5262.30	770.99
nt_e3	3.10	29.18	39.84	49.50	54.10	314.67	44.03
pt_e3	0.36	3.30	4.54	6.89	7.73	48.56	7.77

Táboa A.4: Análise descritiva numérica dos datos dos contaminantes durante o terceiro trimestre do ano 2023.

Variable	Mínimo	1º Cuartil	Mediana	Media	3º Cuartil	Máximo	Desviación estándar
mes_e4	2.00	16.75	40.50	81.23	106.00	920.00	138.76
dbo_e4	0.00	12.00	41.00	81.65	98.75	1466.67	184.61
dqo_e4	0.00	40.00	112.80	216.10	233.20	3320.00	434.47
nt_e4	2.40	8.17	12.75	17.73	20.55	108.100	16.823
pt_e4	0.00	0.82	1.36	2.16	3.03	8.40	1.95

Táboa A.5: Análise descritiva numérica dos datos dos contaminantes durante o cuarto trimestre do ano 2023.

Para completar a análise descritiva presentamos o histograma e o diagrama de caixas das variables. Como vemos nas Figuras [A.1](#), [A.2](#), [A.3](#), [A.4](#) e [A.5](#) as frecuencias máis altas acádanse nos primeiros intervalos ao longo do ano. Porén, no segundo e terceiro trimestre obtemos valores extremos máis separados e medianas máis desprazadas cara o terceiro cuartil, tal e como nos pasaba nas análises numéricas.

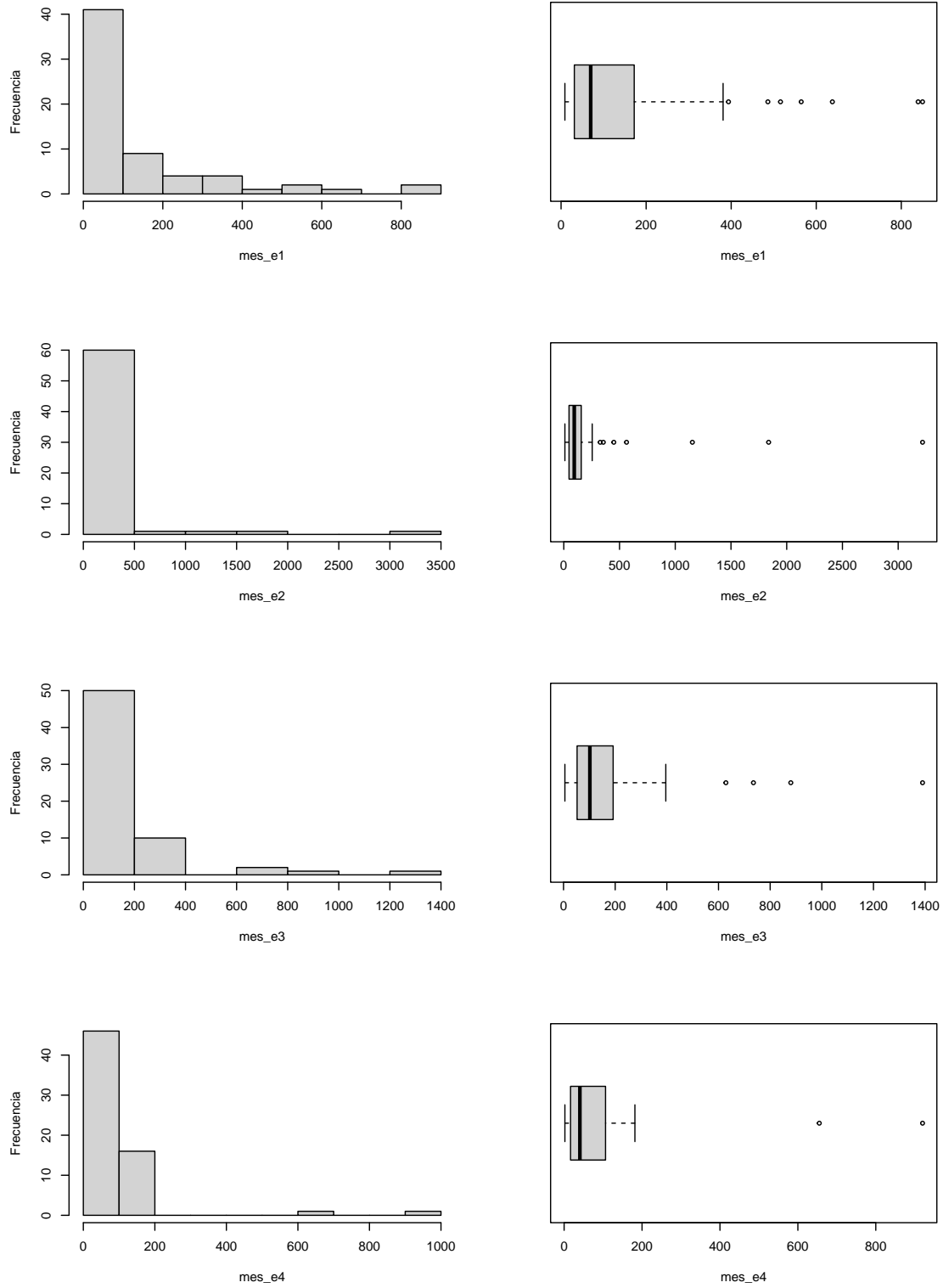


Figura A.1: Histogramas e boxplots das variáveis que medem a quantidade de matéria em suspensão, da água de entrada, nos quatro trimestres.

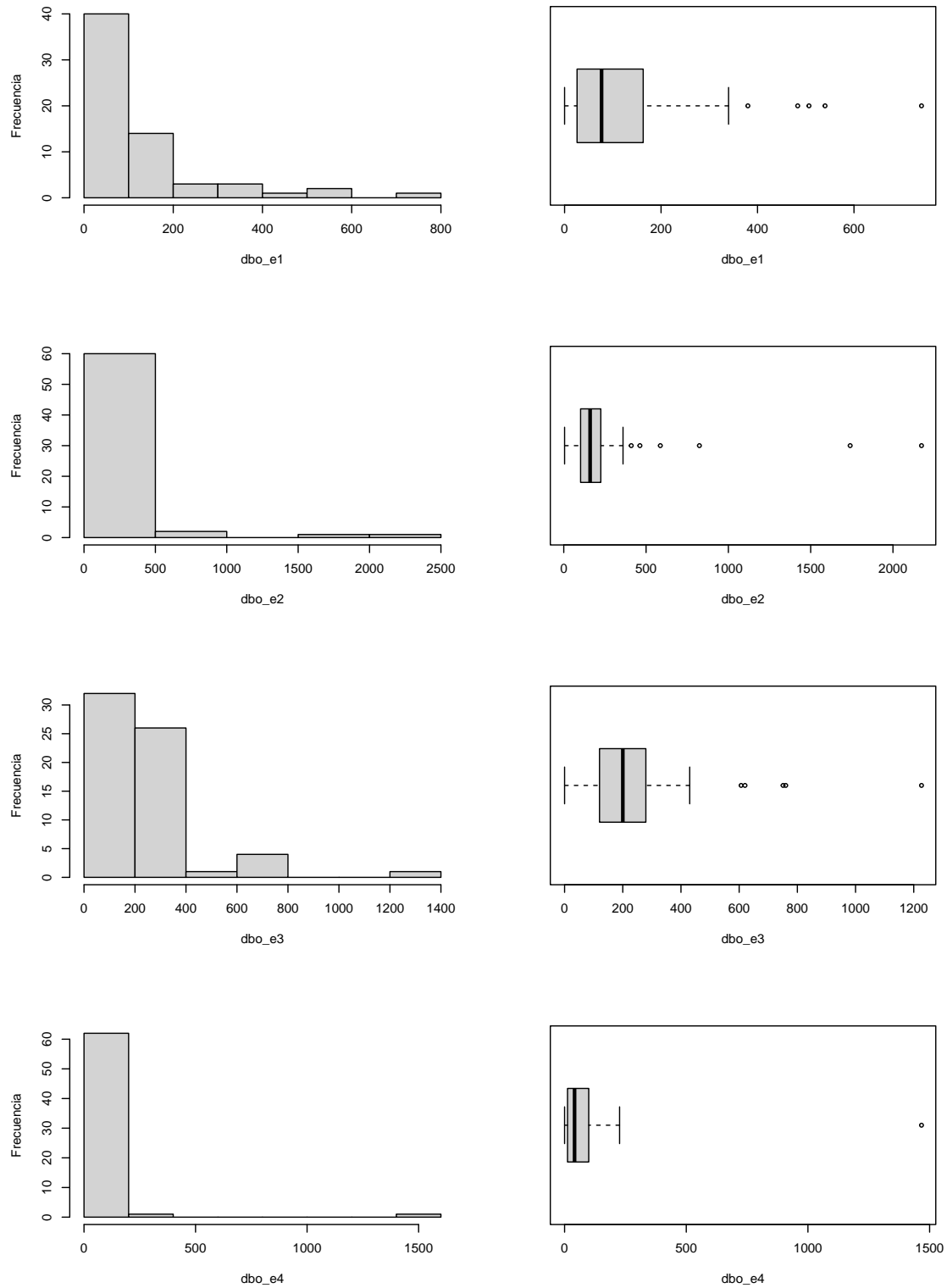


Figura A.2: Histogramas e boxplots das variables que miden a cantidade de DBO, na auga de entrada, nos catro trimestres.

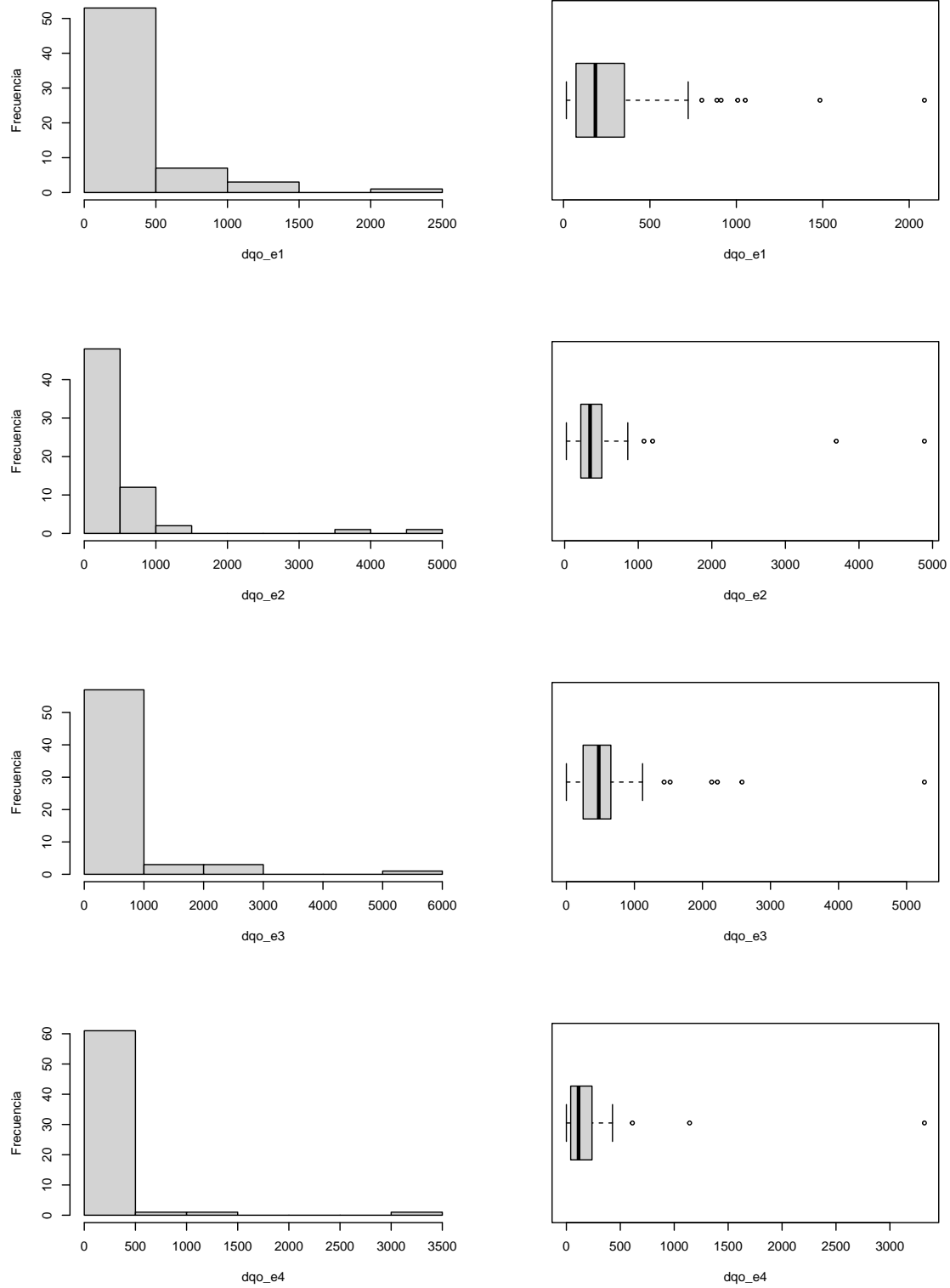


Figura A.3: Histogramas e boxplots das variables que miden a cantidade de DQO, na auga de entrada, nos catro trimestres.

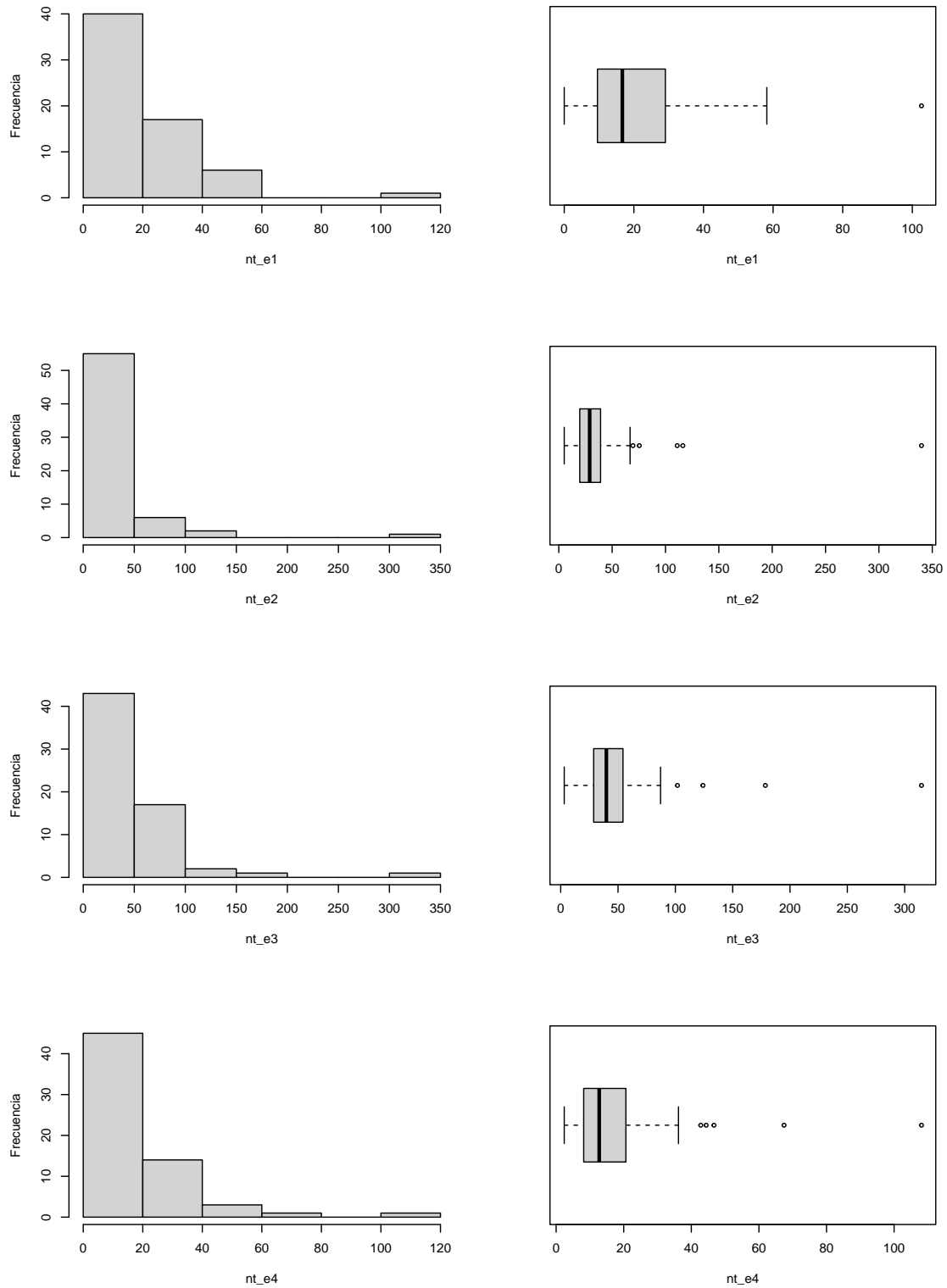


Figura A.4: Histogramas e boxplots das variables que miden a cantidade nitróxeno total, da auga de entrada, nos catro trimestres.

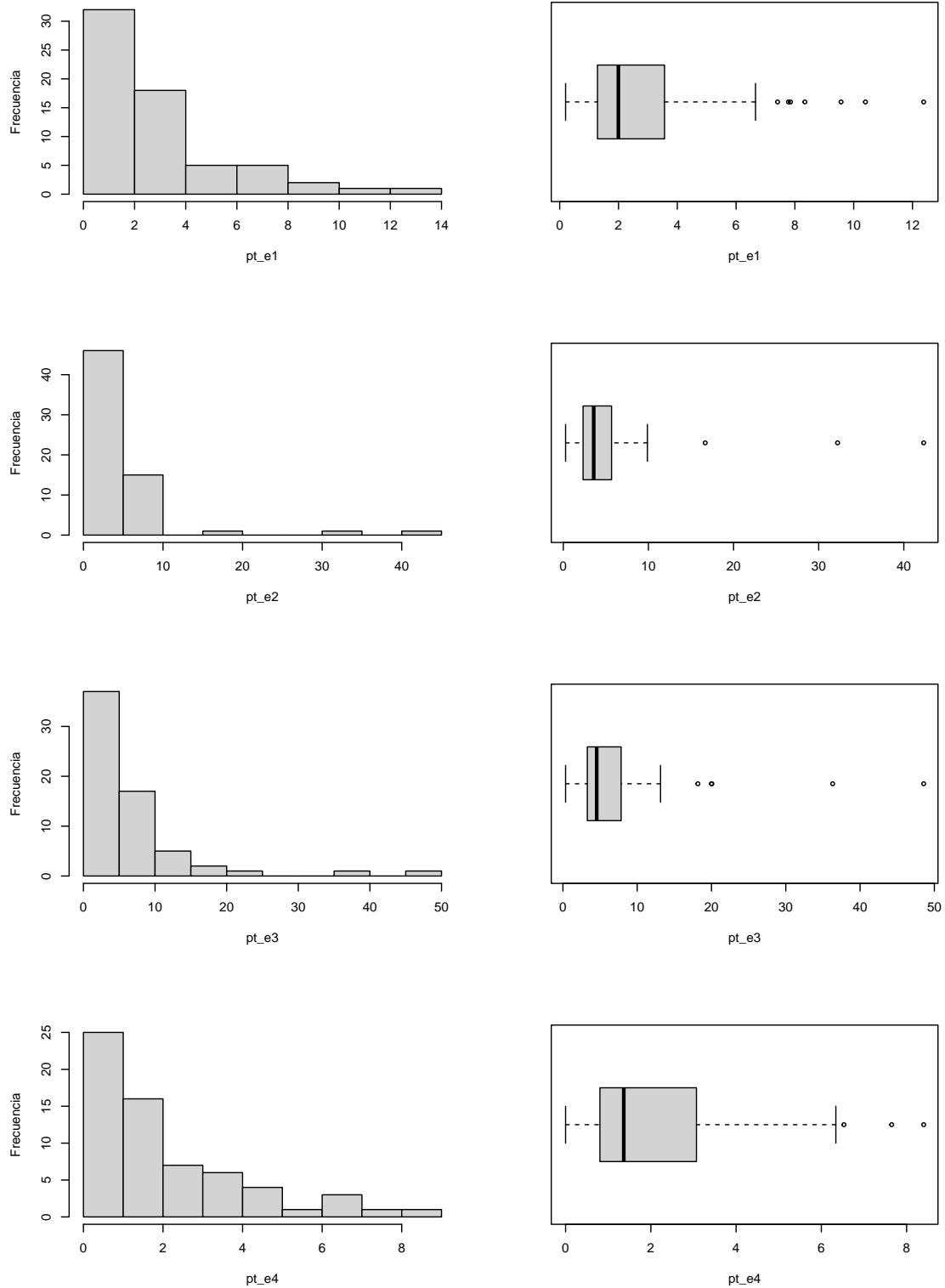


Figura A.5: Histogramas e boxplots das variables que miden a cantidade de fósforo total, da auga de entrada, nos catro trimestres.

Finalmente, como se ve na Figura A.6, as variables que miden o mesmo contaminante nos distintos trimestres non están altamente correlacionadas. Observamos correlacións máis altas, círculos máis grandes e escuros, entre algunhas variables medidas no mesmo trimestre.

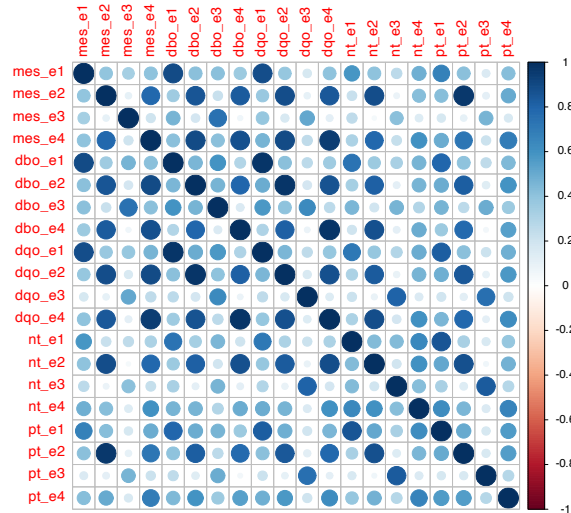


Figura A.6: Representación das correlacións lineais nas variables de entrada dos catro trimestres.

A.2. Variables de saída

De xeito análogo ao realizado na sección anterior, repetimos o proceso coas variables de saída, que son consideradas como outputs do noso problema DEA. Recordemos que son o nivel de contaminantes das augas residuais unha vez que son tratadas e o rendimento das depuradoras. Igual que nas variables de input, na Táboa A.7 e na Táboa A.8, podemos ver máis variabilidade nos datos que a presente nas Táboas A.6 e A.9. Este feito é lóxico pois tamén a tiñamos nas variables de entrada.

Variable	Mínimo	1º Cuartil	Mediana	Media	3º Cuartil	Máximo	Desviación estándar
mes_s1	1.00	6.00	8.00	13.72	11.75	183.00	23.54
mes_r1	-61.75	70.66	88.77	75.26	95.46	99.06	33.42
dbo_s1	0.00	0.00	3.33	12.01	11.08	185.00	30.55
dbo_r1	-100.00	83.34	96.20	79.98	100.00	100.00	37.33
dco_s1	0.00	15.25	22.00	38.21	32.33	471.00	70.76
dco_r1	-44.00	60.95	87.92	72.89	93.83	100.00	31.33
nt_s1	0.00	5.99	7.81	10.38	12.49	57.67	8.94
nt_r1	-78.26	19.94	42.60	40.76	69.42	100.00	34.95
pt_s1	0.08	0.59	0.865	1.06	1.43	3.18	0.65
pt_r1	-173.79	18.44	49.55	40.66	79.29	97.66	47.04

Táboa A.6: Análise descritiva numérica dos datos dos contaminantes durante o primeiro trimestre do ano 2023.

Variable	Mínimo	1º Cuartil	Mediana	Media	3º Cuartil	Máximo	Desviación estándar
mes_s2	1.00	5.00	8.66	17.05	16.41	173.67	26.02
mes_r2	-25.00	72.22	90.42	77.46	94.86	99.32	29.81
dbo_s2	0.00	0.00	3.33	19.19	9.75	300.00	50.87
dbo_r2	-11.11	93.51	97.86	90.03	100.00	100.00	22.56
dqo_s2	0.00	15.00	23.00	54.93	37.67	777.83	122.90
dqo_r2	-3.57	82.83	91.42	83.18	95.96	100.00	23.73
nt_s2	0.00	4.253	7.12	13.17	16.67	101.23	16.35
nt_r2	-204.24	37.28	67.64	54.39	85.28	100.00	50.05
pt_s2	0.31	0.878	1.45	1.79	2.45	5.07	1.15
pt_r2	-44.69	27.66	50.59	46.32	71.54	97.48	32.99

Táboa A.7: Análise descritiva numérica dos datos dos contaminantes durante o segundo trimestre do ano 2023.

Variable	Mínimo	1º Cuartil	Mediana	Media	3º Cuartil	Máximo	Desviación estándar
mes_s3	0.00	5.00	10.00	30.21	23.33	438.67	65.42
mes_r3	-189.13	62.55	89.17	67.41	95.76	100.00	53.61
dbo_s3	0.00	0.00	8.83	30.41	20.00	353.33	64.96
dbo_r3	-65.63	84.7	95.37	81.44	100.00	100.00	36.02
dqo_s3	0.00	19.75	27.84	81.72	46.17	794.33	156.71
dqo_r3	-48.95	78.94	90.98	79.51	95.06	100.00	29.74
nt_s3	0.00	5.77	9.63	18.51	10.97	150.30	23.95
nt_r3	-45.16	31.36	71.71	57.63	85.28	100.00	36.87
pt_s3	0.26	1.07	2.16	2.48	3.34	10.11	1.91
pt_r3	-102.52	26.18	49.22	45.10	78.58	97.82	41.29

Táboa A.8: Análise descritiva numérica dos datos dos contaminantes durante o terceiro trimestre do ano 2023.

Variable	Mínimo	1º Cuartil	Mediana	Media	3º Cuartil	Máximo	Desviación estándar
mes_s4	1.67	6.00	8.00	13.24	13.75	100.00	15.73
mes_r4	-346.15	49.14	78.25	44.36	91.10	99.24	85.02
dbo_s4	0.00	0.00	0.00	7.97	8.08	133.33	19.57
dbo_r4	-110.53	80.38	98.61	71.75	100.00	100.00	51.34
dqo_s4	0.00	4.75	14.34	36.23	28.25	853.00	109.73
dqo_r4	-150.15	70.51	88.42	66.5	96.51	100.00	52.23
nt_s4	0.00	4.18	6.63	8.48	9.19	70.40	9.64
nt_r4	-442.19	12.21	43.36	28.62	74.16	100.00	82.55
pt_s4	0.21	0.47	0.74	0.89	1.17	3.33	0.59
pt_r4	-157.14	2.95	48.59	32.81	69.68	95.48	52.02

Táboa A.9: Análise descritiva numérica dos datos dos contaminantes durante o cuarto trimestre do ano 2023.

Nas Figuras [A.7](#), [A.8](#), [A.9](#), [A.10](#) e [A.11](#) obtemos resultados moi similares aos anteriores, parecen ser consecuencia da auga residual que entrou na depuradora.

Agora ben, se facemos os gráficos para as variables que miden o rendemento da depuradora, tamén considerados como outputs. Temos que para as Figuras [A.12](#), [A.13](#), [A.14](#) obtemos resultados similares, frecuencias máis altas nos porcentaxes máis altos do rendemento e alcánzanse rendementos peores no terceiro e cuarto trimestre. Para as restantes Figuras [A.15](#) e [A.16](#), a frecuencia non se acumula tanto nos últimos intervalos senón que tamén obtemos frecuencias altas para outros porcentaxes intermedios, polo que parece que as depuradoras teñen maior dificultade para a eliminación total destes contaminantes.

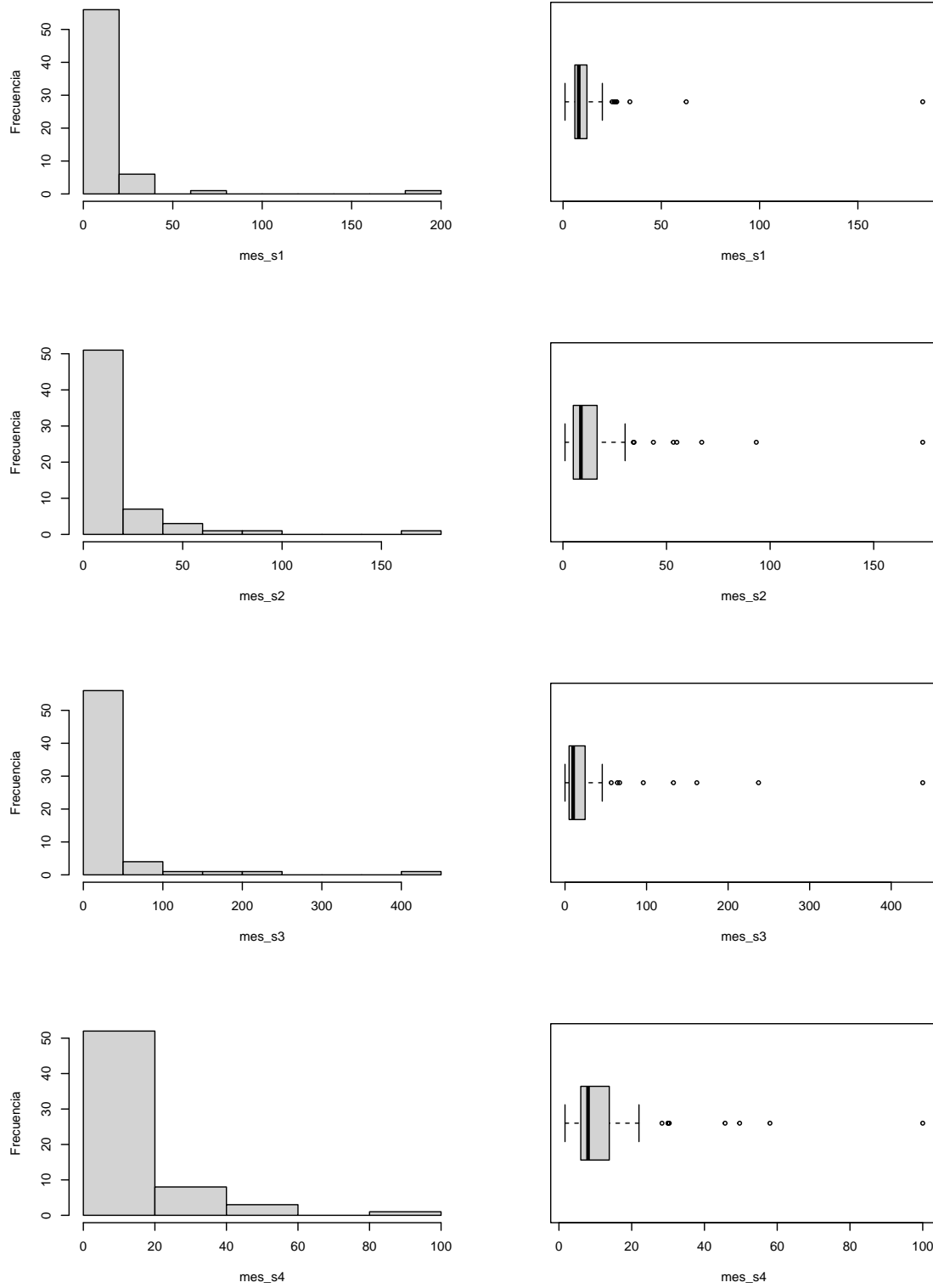


Figura A.7: Histogramas e boxplots das variables que miden a cantidade de materia en suspensión, da auga tratada, nos catro trimestres.

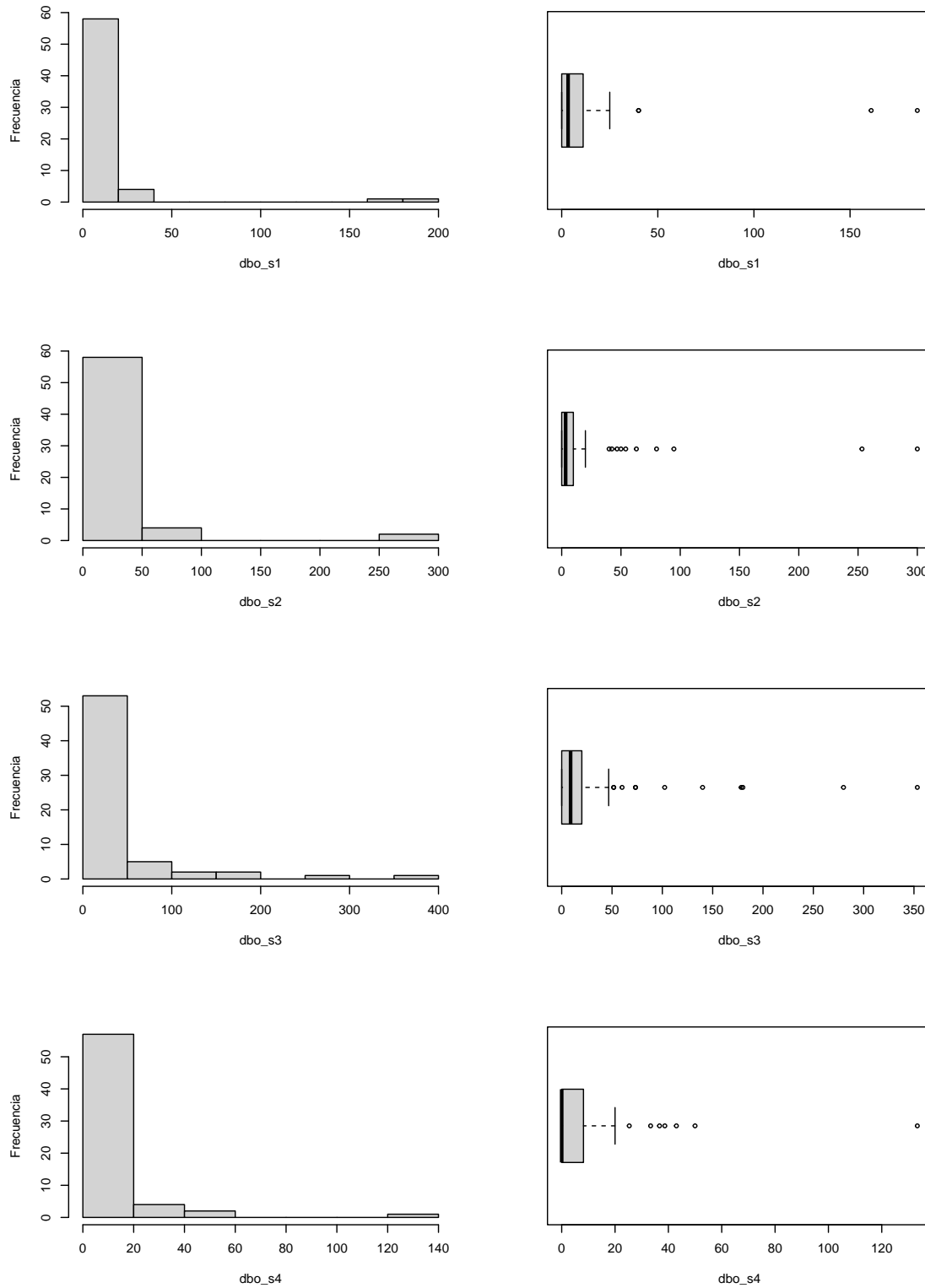


Figura A.8: Histogramas e boxplots das variables que miden a cantidade de DBO, da auga de tratada, nos catro trimestres.

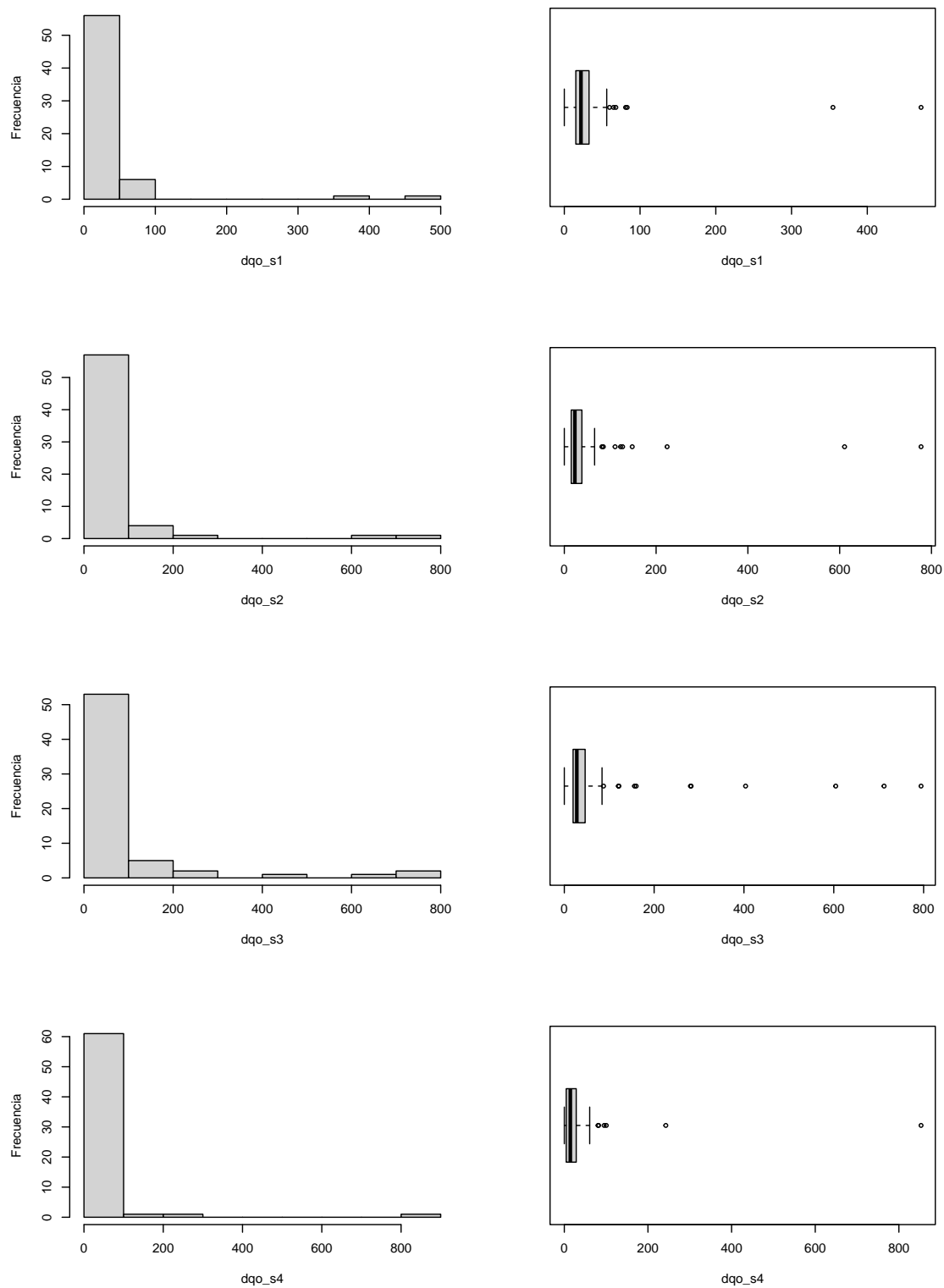


Figura A.9: Histogramas e boxplots das variables que medem a quantidade de DQO, da agua de tratada, o nos catro trimestres.

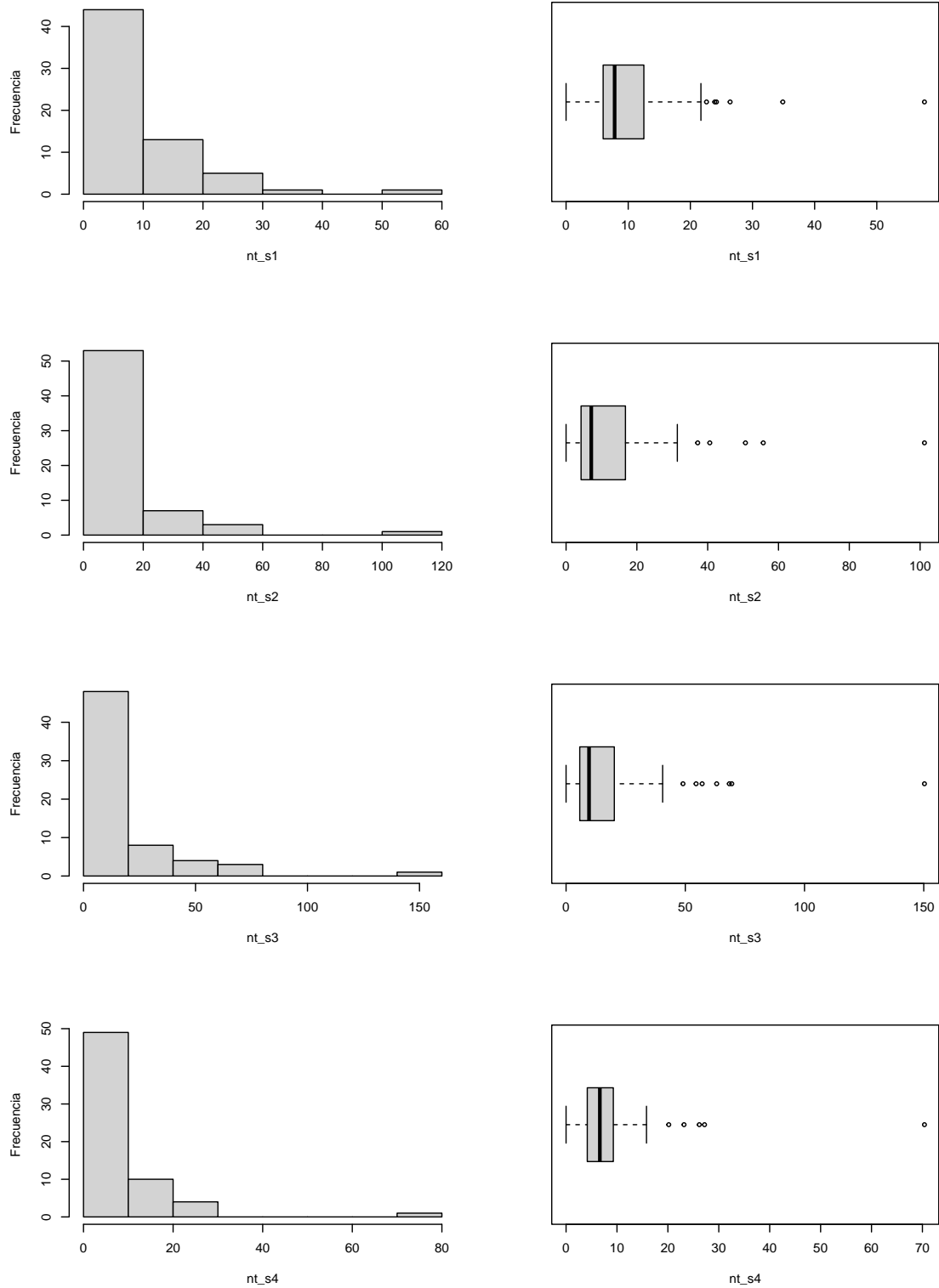


Figura A.10: Histogramas e boxplots das variables que miden a cantidade nitróxeno total, da auga de tratada, nos catro trimestres.

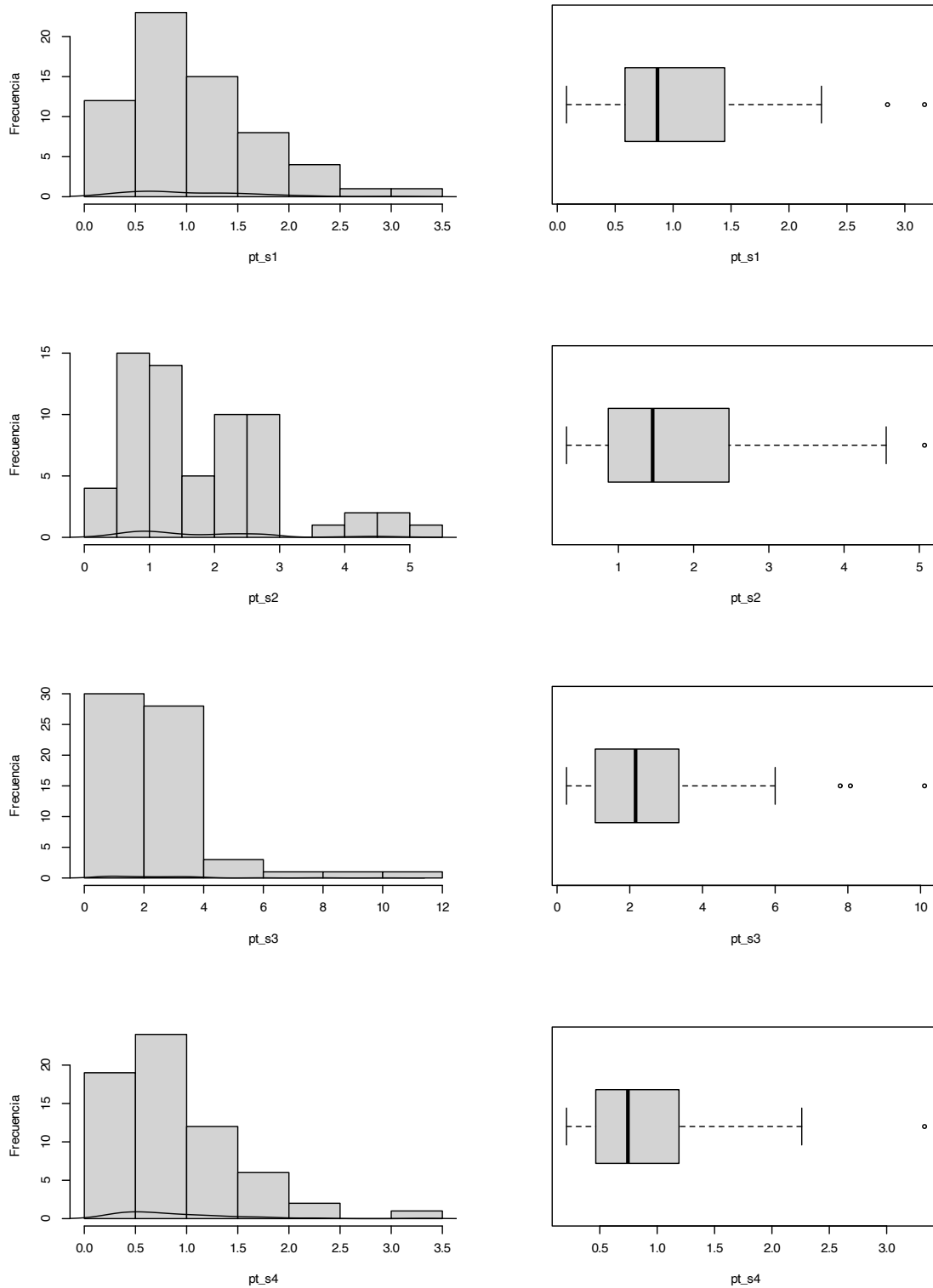


Figura A.11: Histogramas e boxplots das variables que miden a cantidade de fósforo total, da auga de tratada, nos catro trimestres.

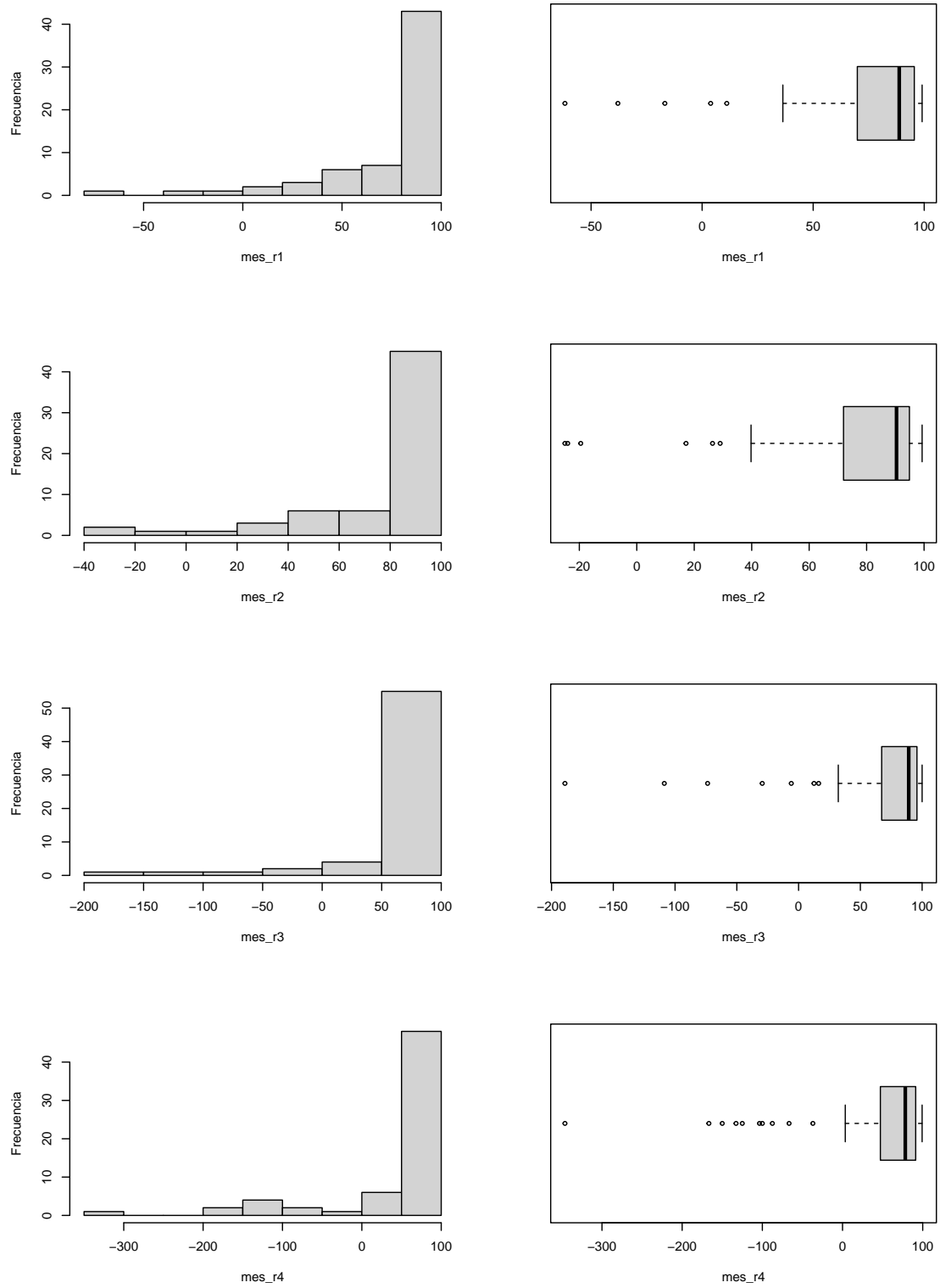


Figura A.12: Histogramas e boxplots das variables que miden o rendemento da depuradora para a eliminación da materia en suspensión nos catro trimestres.

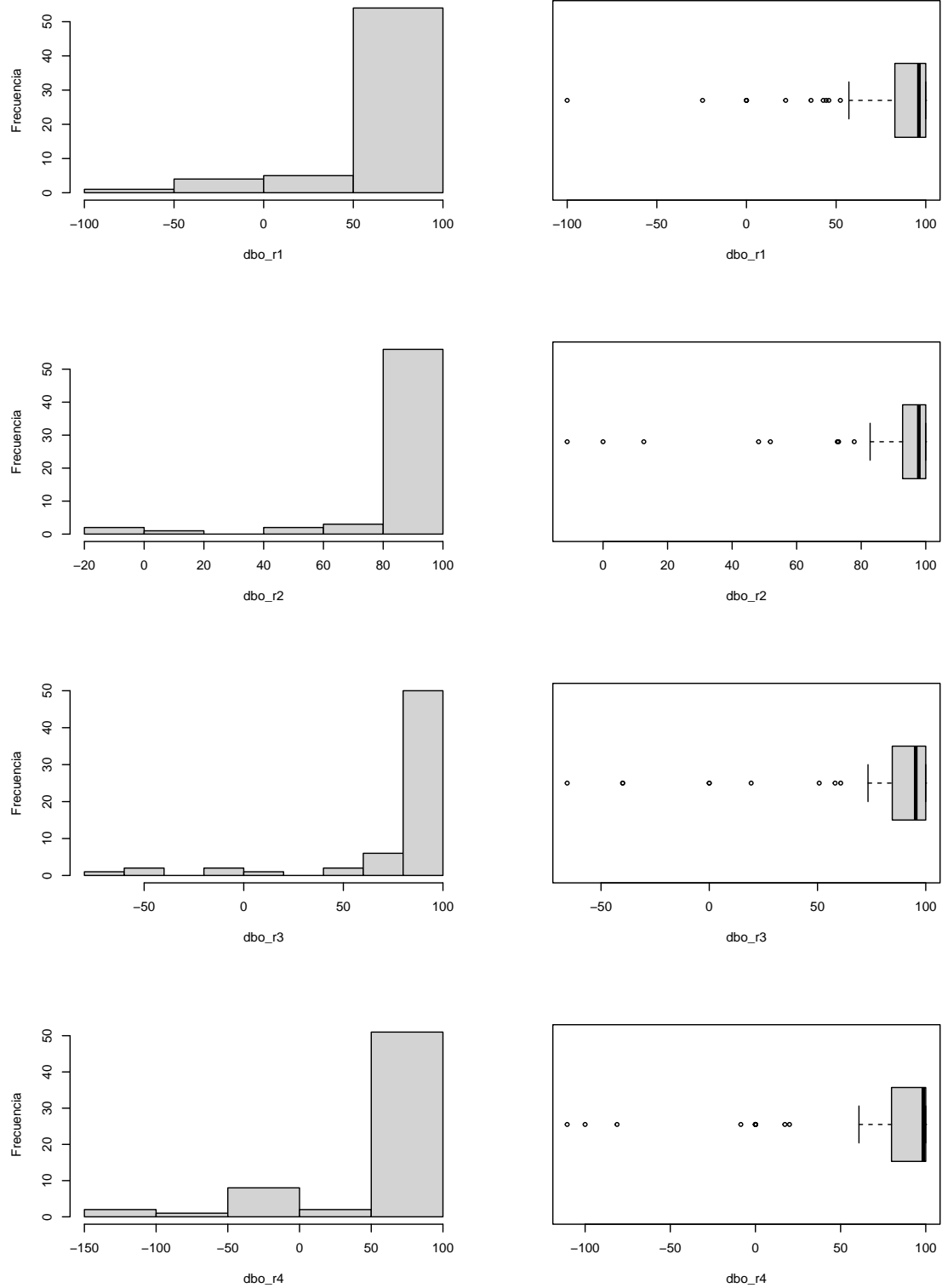


Figura A.13: Histogramas e boxplots das variables que miden o rendemento da depuradora para a eliminación de DBO nos catro trimestres.

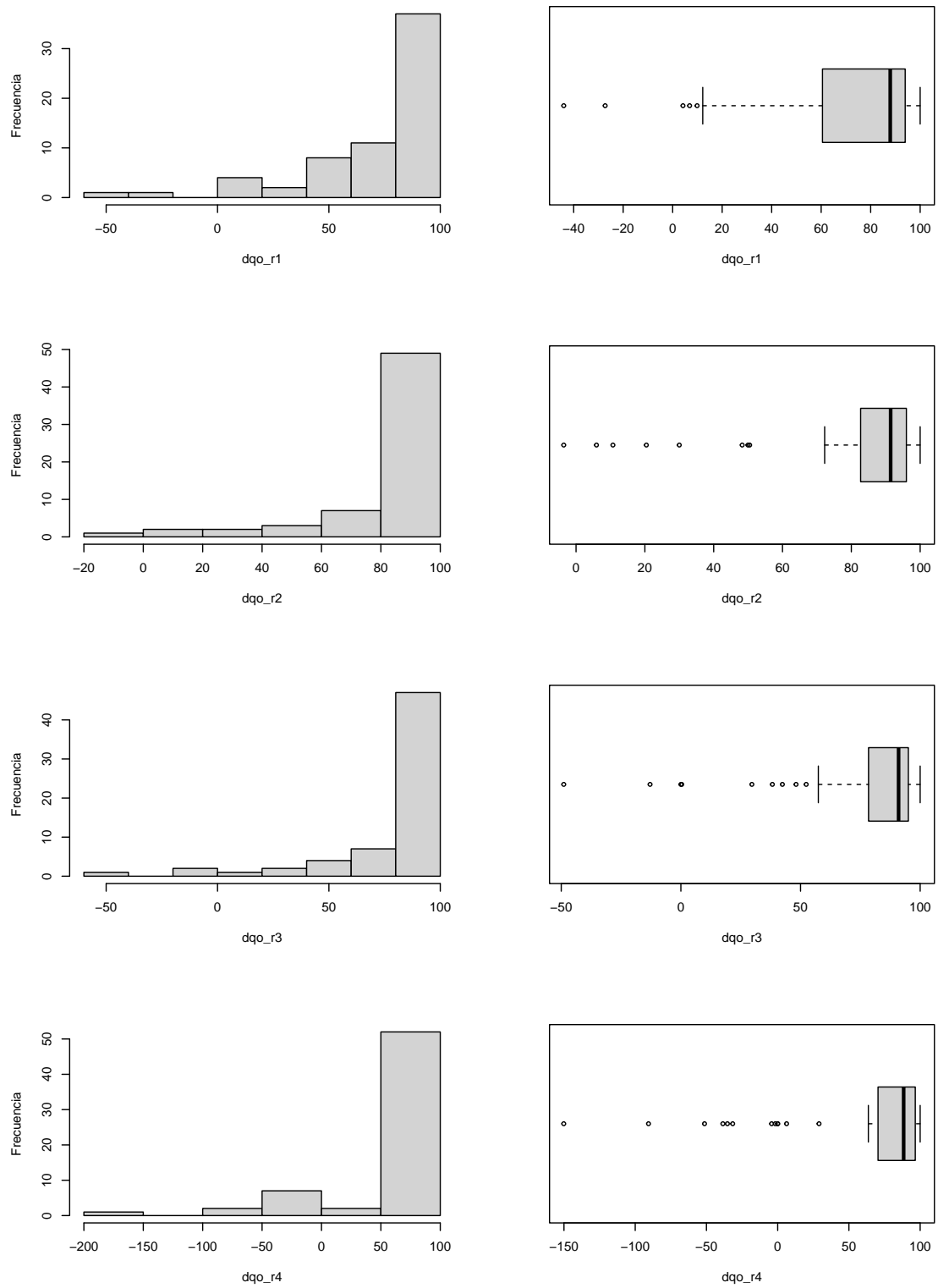


Figura A.14: Histogramas e boxplots das variables que miden o rendemento da depuradora para a eliminación de DQO nos catro trimestres.

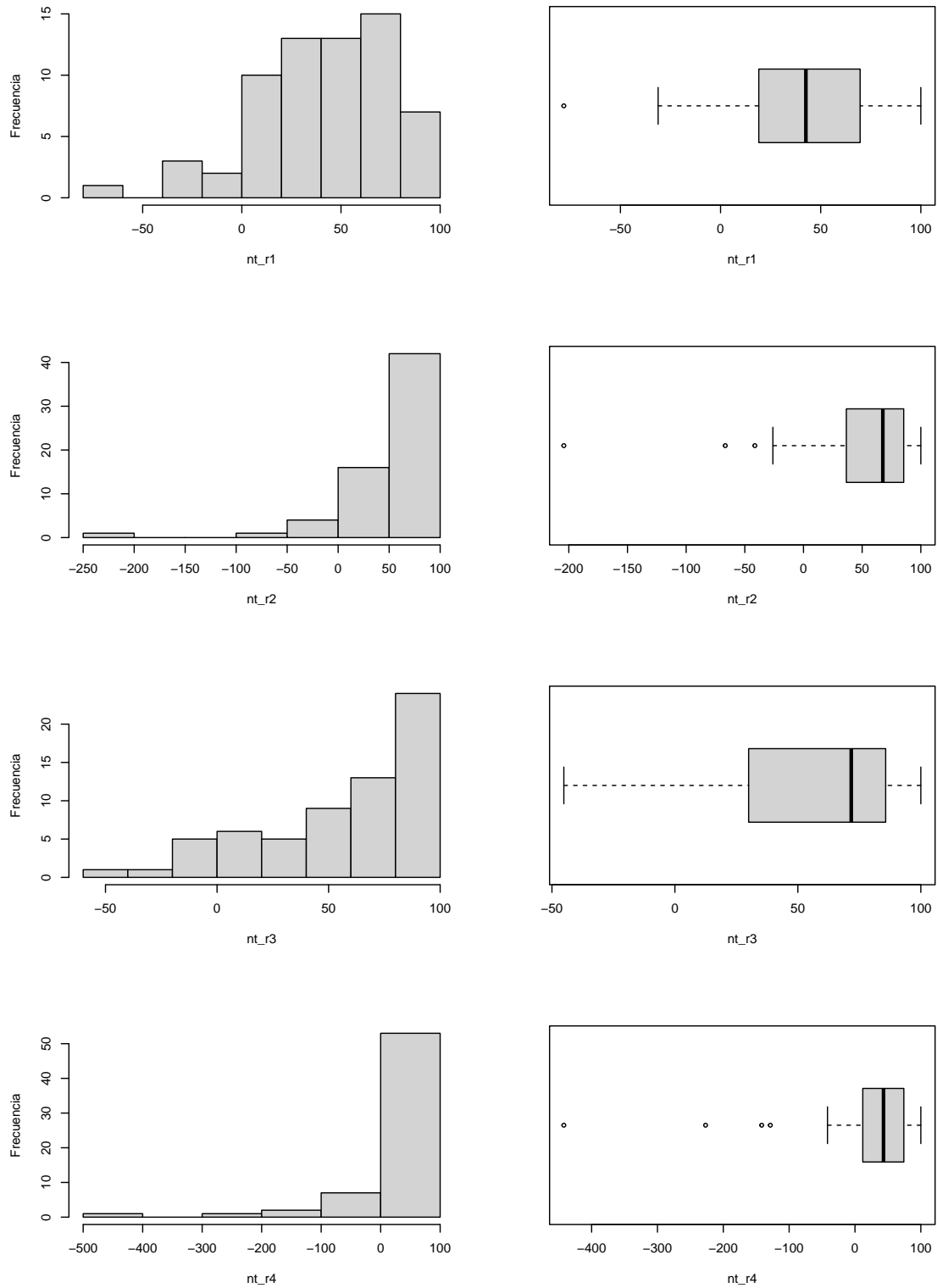


Figura A.15: Histogramas e boxplots das variables que miden o rendemento da depuradora para a eliminación nitróxeno total nos catro trimestres.

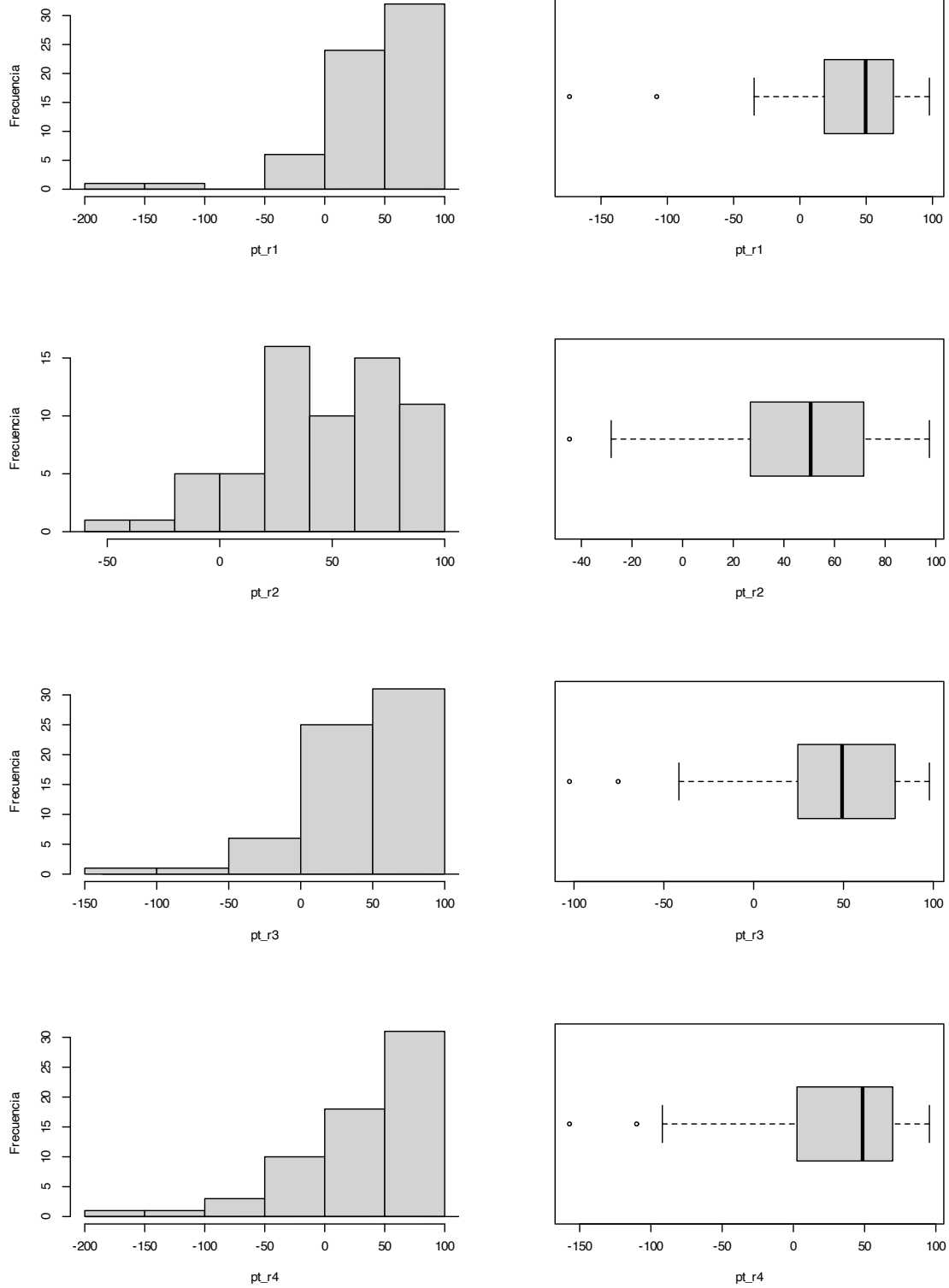


Figura A.16: Histogramas e boxplots das variables que miden o rendemento da depuradora para a eliminación de fósforo total nos catro trimestres.

Finalmente, obtemos as correlacións dos outputs na Figura A.17. Se nos fixamos nas correlacións da mesma variable para os distintos trimestres só son altas no caso do nitróxeno. Para as demais, parece ser que non se garda unha relación linear entre os trimestres.

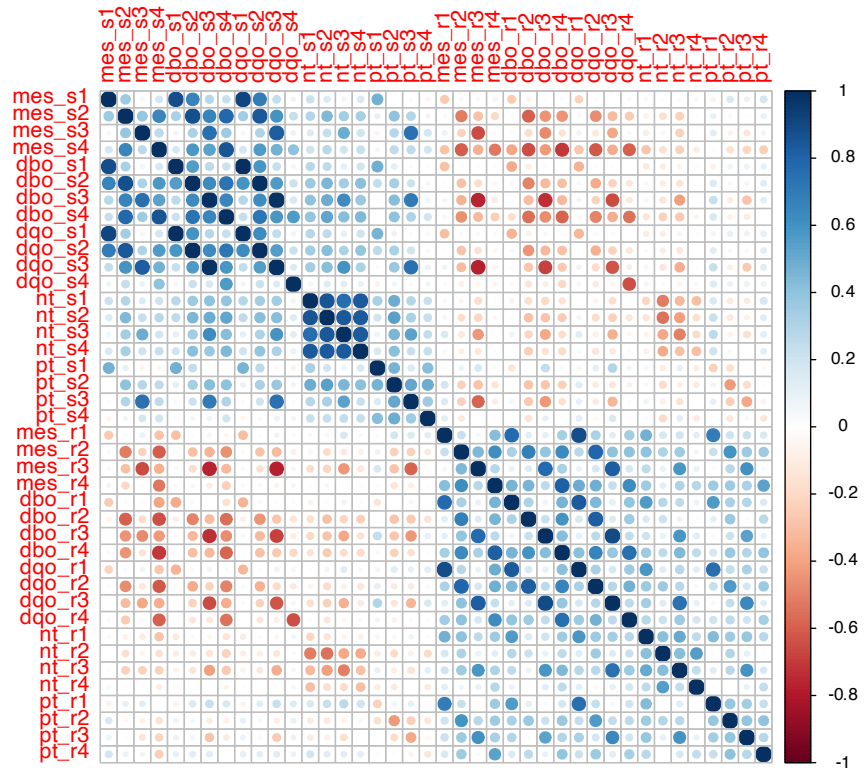


Figura A.17: Representación das correlacións lineais nas variables de entrada dos catro trimestres.

Apéndice B

Sistema público fronte EDARs privadas

Co obxectivo de complementar o noso estudo das eficiencias tanto das depuradoras públicas como privadas, presentamos nesta sección unha comparación dos resultados obtidos distinguindo entre as EDARs privadas e o sistema público.

A continuación faremos unha análise DEA, con datos do primeiro e terceiro trimestre, onde as DMUs serán todas as EDARs privadas, consideradas anteriormente, e unha nova EDAR pública ficticia. Esta última, foi construída combinando todas as depuradoras de xestión pública nunha soa. É dicir, tal e como se pode consultar en [Kritikos \(2017\)](#), os inputs e outputs correspondentes a esta EDAR ficticia son resultado de aplicar a media as variables de entrada e saída das depuradoras públicas. Deste xeito, podemos facernos unha idea dunha comparación entre o sistema público e das EDARs privadas.

Do mesmo xeito que fixemos no noso estudo, aquí tamén expoñeremos os resultados para os catro modelos DEA nas súas diferentes versións, CRS e VRS, e para cada un deles input e outputs orientados. Cómpre mencionar que se tiveron en conta as mesmas consideracións para a implementación deste modelo en [R](#), que as mencionadas ao longo do traballo.

B.1. Primeiro trimestre

Para os datos relativos aos primeiros meses do ano, temos que a medida de eficiencia da EDAR pública ficticia está moi por debaixo das demais para todos os modelos considerados. Na Táboa [B.1](#) temos os resultados para os diferentes problemas DEA CRS e VRS, ademais das súas variacións input e output orientadas.

EDAR	Tipo	CRS IO	CRS OO	VRS IO	VRS OO
<i>Aríns</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Dodro-Bexo</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Laracha</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Neda</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Pontedeume</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Sada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Sigüeiro</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Chantada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>A Rúa (Aguillón)</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Carrás</i>	Privado	0.9997	1.0002	1.0000	1.0000
<i>O Barco de Valdeorras</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>San Cibrao das Viñas, Taboadela</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>A Estrada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Ponteareas</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Betanzos</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Gandarío</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Miodelo</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Ortigueira</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Ponteulla</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Silvouta</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Valdoviño</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000000
<i>Viveiro</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Arenteiro</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Celanova</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Ourense</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Xinzo de Limia</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Os Praceres</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>EDAR ficticia</i>	Público	0.4973	2.0109	0.5059	1.0416

Táboa B.1: Resultados obtidos, para o primeiro trimestre do ano 2023, coas formulacións DEA CRS IO, (2.5), CRS OO, (2.7), VRS IO, (2.8), y VRS OO, (2.10). Considerando como DMUs as depuradoras xestionadas por Viaqua e unha ficticia pública.

B.2. Terceiro trimestre

Tal e como se realizou no apartado anterior, os resultados para o terceiro trimestre, do ano 2023, preséntanse a continuación. Na Táboa B.2 obsérvanse as medidas da eficiencia para as distintas formulacións dos modelos DEA CRS e VRS, ademais das súas variacións input e output orientados.

EDAR	Tipo	CRS IO	CRS OO	VRS IO	VRS OO
<i>Aríns</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Dodro-Bezo</i>	Privado	0.9891	1.0109	1.0000	1.0000
<i>Laracha</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Neda</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Pontedeume</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Sada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Sigüeiro</i>	Privado	0.9561	1.0459	0.9981	1.0396
<i>Chantada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>A Rúa (Aguillón)</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Carrás</i>	Privado	0.9997	1.0002	1.0000	1.0000
<i>O Barco de Valdeorras</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>San Cibrao das Viñas, Taboadela</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>A Estrada</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Ponteareas</i>	Privado	0.9970	1.0029	0.9976	1.0023
<i>Betanzos</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Gandarío</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Miodelo</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Ortigueira</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Ponteulla</i>	Privado	0.9953	1.0005	1.0000	1.0000
<i>Silvouta</i>	Privado	0.9955	1.0045	0.9996	1.0045
<i>Valdoviño</i>	Privado	0.9949	1.0051	0.9902	1.005117
<i>Viveiro</i>	Privado	0.9825	1.0178	0.9902	1.0114
<i>Arenteiro</i>	Privado	0.9969	1.0030	0.9982	1.0023
<i>Celanova</i>	Privado	0.9975	1.0025	1.0000	1.0000
<i>Ourense</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Xinzo de Limia</i>	Privado	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
<i>Os Praceres</i>	Privado	0.9953	1.0047	0.9975	1.0044
<i>EDAR ficticia</i>	Público	0.4583	2.1821	0.5034	1.1225

Táboa B.2: Resultados obtidos, para o terceiro trimestre do ano 2023, coas formulacións DEA CRS IO, (2.5), CRS OO, (2.7), VRS IO, (2.8), y VRS OO, (2.10). Considerando como DMUs as depuradoras xestionadas por Viaqua e unha ficticia pública.

Bibliografía

- Asociación Española de Abastecimiento y Saneamiento (2022). *Resultados del XVII Estudio Nacional de Suministro de Agua Potable y Saneamiento en España 2022. Datos sobre los servicios de agua en España*. AEAS, Madrid.
- Aigües de Barcelona (2023). *La gestión del ciclo integral del agua*. <https://www.aiguesdebarcelona.cat/es/web/guest/el-agua-en-tu-ciudad/como-se-gestiona-el-agua/la-gestion-del-ciclo-integral> Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Augas de Galicia (2022). *Ciclo integral da auga*. https://augasdegalicia.xunta.gal/seccion-tema/c/Control_depuradoras_augas_residuais?content=/Portal-Web/Contidos_Augas_Galicia/Seccions/Depuracion-augas-residuais/seccion.html&std=ciclo-integral-da-auga.html Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Augas de Galicia (2022). *Control de depuradoras de augas residuais*. https://augasdegalicia.xunta.gal/tema/c/Control_depuradoras_augas_residuais Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Augas de Galicia (2024). *Novo plan de Saneamento de Galicia en elaboración*. https://augasdegalicia.xunta.gal/tema/c/Planificacion_do_saneamento Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Augas de Galicia (2023). *Resultados anlíticos*. https://augasdegalicia.xunta.gal/seccion-tema/c/Control_depuradoras_augas_residuais?content=/Portal-Web/Contidos_Augas_Galicia/Seccions/EDAR-2000-Galicia/seccion.html&std=resultados-analiticos.html Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Augas de Galicia (2022). *Saneamento e Depuración*. <https://augasdegalicia.xunta.gal/saneamento-e-depuracion> Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Banker, R.D., Charnes, A. e Cooper, W.W. (2022). *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis*. *Management Science*, 30(9): 1078-1092.
- Berger, A. N. e Humprey, D.B. (1997). *Efficiency of financial institutions: International survey and directions for future research*. *European Journal of Operational Research*, 98: 175-212.
- Blasco, O.M. e Coll, V. (2020). *Evaluación de la eficiencia mediante el análisis evolvente de datos. Introducción a los modelos básicos*. Universidad de Valencia.
- Calancha, F., Estévez, J., Fernández, C. e Otero, S.F. (2018). *La gestión del agua en España. Análisis y retos del ciclo urbano del agua*. PricewaterhouseCoopers (PwC) Asesores de negocios, S.L. <https://www.pwc.es/es/publicaciones/energia/assets/gestion-agua-2018-espana.pdf>. Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Cordobés, R. (2019). *Uno de cada cuatro tramos de río de Galicia presentan contaminación*. *La Voz de Galicia*. <https://www.lavozdegalicia.es/noticia/galicia/2019/08/02/cuatro-tramos-rio-galicia-costa-contaminados/00031564768516171991341.htm>. Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Csárdi, G. e Berkelaar, M. (2024). *Package 'lpSolve'*. <https://cran.r-project.org/web/packages/lpSolve/lpSolve.pdf>. Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Charnes, A., Cooper, W.W. e Rhodes, E. (1978). *Measuring the efficiency of decision making units*. *European Journal of Operational Research*, 2: 429-444. North-Holland Publishign Company.
- Coll-Serrano, V., Bolos, V. e Benitez Suarez, R. (2023). *Package 'dear'*. <https://cran.r-project.org/web/packages/dear/dear.pdf>. Accedido a 2 de xaneiro de 2025.

- Constantino, M., Corrêa Magalhães Filho, F. J., Miranda Tabak, B., de Moraes Lima, P. e de Souza Pereira, M. (2022). *Sanitation and water services: Who is the most efficient provider public or private? Evidences for Brasil*. Socio-Economic Planning Sciences, 79.
- Cooper, W.W., Ruiz, J.L. e Sirvent, I. (2009). *Selecting non-zero weights to evaluate effectiveness of basketball players with DEA*. European Journal of Operational Research, 195: 563-574.
- Cooper, W. W., Seiford, L.M. e Tone, K. (2007). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Springer Science+Business Media, LLC, New York.
- Cunha Marqués, R. e Simões, P. (2020). *Revising the Comparison of Public and Private Water Service Provision: An Empirical Study in Portugal*. Water 2020, 12(5), 1477.
- FACUA-Consumidores en Acción (2023). *Estudio sobre las tarifas del suministro domiciliario de agua en 57 ciudades españolas*. <https://facua.org/es/documentos/agua2023.pdf>. Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Fanlo, A. (2002). *La gestión del agua en España: Experiencias pasadas, Retos futuros*. Lección inaugural de apertura del curso académico 2001-2002 de la Universidad de La Rioja.
- Farrell, M.J. (1957). *The Measurement of Productive Efficiency*. Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General), 120(3):253-290.
- Faura Martínez, U., Gómez Gallego, J.C., Pérez Cárceles, M.C. e Gómez García, J. (2012). *Comparación de rankings de eficiencia mediante análisis de componentes principales y DEA*. Estadística Española 178(54): 357-373.
- Figuroa García, A. (2017). *An application of the DEA (Data Envelopment Analysis) non-parametrical model to a real case: Efficiency and productivity in the fishing economic sector in Galicia*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de La Laguna.
- García-Sánchez, I.M. (2006). *Efficiency measurement in Spanish local government: the case of municipal water services*. Review of Policy Research, 23(2): 355-371.
- García-Rubio, M.A., González-Gómez, F. e Guardiola, J. (2009). *La gestión del servicio de abastecimiento de agua en las ciudades: ¿empresa pública o privada?*. XVI Encuentro de Economía Pública. Granada.
- García-Valiñas, M.A., González-Gómez, F. e Picazo-Tadeo, A.J. (2013). *Is the price of water of residential use related to provider ownership? Empirical evidence from Spain*. Utilities Policy 24(1): 59-69.
- Government of the Netherlands (2024). *Water management in The Netherlands*. <https://www.government.nl/topics/water-management/water-management-in-the-netherlands>. Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- González-Gómez, F., García-Rubio, M.A., Alcalá-Olid, F. e Ortega-Díaz, M.I. (2013). *Outsourcing and Efficiency in the Management of Rural Water Services*. Water Resour Manage, 27(3): 731-747.
- González-Gómez, F., García-Rubio, M.A. e González Martínez, J. (2014). *Beyond the public-private controversy in urban water management in Spain*. Utilities Policy, Elsevier, 31: 1-9.
- González-Saiz, F. e García-Valderrama, T. (2012). *Medida de la eficiencia técnica de programas de tratamiento con opiáceos: utilidad del modelo Data Envelopment Analysis (DEA)*. Trastornos adictivos, 14(3): 79-88.
- Hothorn, T. e Hornik, K. (2022). *Package ?exactRankTests?*. <https://cran.r-project.org/web/packages/exactRankTests/exactRankTests.pdf>. Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Instituto Galego de Estatística. (2022). *Poboación, entidades e densidade*. https://www.ige.gal/web/mostrar_actividade_estadistica.jsp?idioma=es&codigo=0501&num_pag=16. Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Instituto Galego de Estatística. (2023). *Porcentaxe de afiliacións á Seguridade Social en alta laboral segundo o concello de residencia da persoa afiliada e o sector de actividade*. [https://www.ige.gal/igebdt/selector.jsp?OP=1&B=1&M=&COD=10340&R=9915\[all\]&C=T\[1:0\];1\[1:3:4:5\]&F=&S=&c=0204033002](https://www.ige.gal/igebdt/selector.jsp?OP=1&B=1&M=&COD=10340&R=9915[all]&C=T[1:0];1[1:3:4:5]&F=&S=&c=0204033002). Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Instituto Nacional de Estadística. (2022). *Estadística sobre el Suministro y Saneamiento del Agua*. <https://www.ine.es/dyngs/Prensa/es/ESSA2022.htm>. Accedido a 2 de xaneiro de 2025.

- Instituto Nacional de Estadística. (2022). *Destino de los lodos generados por comunidades y ciudades autónomas, tipo de destino y periodo*. <https://www.ine.es/jaxi/Datos.htm?tpx=53453>. Accedido a 2 de xaneiro de 2025.
- Knox Lovell, C.A., Pastor, J.T. e Turner, J.A. (1995). *Measuring macroeconomic performance in the OECD: A comparison of European and non-European countries*. *European Journal of Operational Research*, 87: 507-518.
- Kosec, K. e Wallsten, S. (2005). *Public or Private Drinking Water? The Effects of Ownership and Benchmark Competition on U.S. Water System Regulatory Compliance and Household Water Expenditures*. AEI-Brookings Joint Center for Regulatory Studies, 5, Washington (DC).
- Kritikos, M. N. (2017). *A full ranking methodology in data envelopment analysis based on a set of dummy decision making units*. *Expert Systems With Applications* 77: 211-225.
- Martín Villares, P. (2021). *Evaluación de la eficiencia de los jugadores de la NBA utilizando Análisis Envoltante de Datos*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Valladolid.
- Martínez-Espiñeira, R., García-Valiñas, M.A. e González-Gómez, F. (2009). *Does private management of water supply services really increase prices? An empirical analysis in Spain*. *Urban Studies* 46(4): 923-945.
- Ministerio para la Transición Ecológica y el Reto Demográfico. (2024). *Estación depuradora de aguas residuales (EDAR)*. <https://www.miteco.gob.es/es/agua/temas/saneamiento-depuracion/sistemas/edar.html>. Accedido 2 de xaneiro de 2025.
- Ministerio para la Transición Ecológica y el Reto Demográfico. (2023). *Directiva 91/271/CEE. Sobre el Tratamiento de las Aguas Residuales Urbanas. Manual de interpretación y elaboración de informes*. https://www.miteco.gob.es/content/dam/miteco/es/agua/publicaciones/03_Manual_Directiva_91_271_CEE.tcm30-214069.pdf. Accedido 2 de xaneiro de 2025
- Picazo-Tadeo, A.J., Sáez-Fernández, J. e González-Gómez, F. (2009). *The role of environmental factors in water utilities' technical efficiency. Empirical evidence from Spanish companies*. *Applied Economics*, 41(5): 615-628.
- Storto, C. (2013). *Are Public-Private Partnerships a Source of Greater Efficiency in Water Supply? Results of a Non-Parametric Performance Analysis Relating to the Italian Industry*. *Water*, 5: 2058-2079.
- Theodoridis, A. M. e Psychoudakis, A. (2008). *Efficiency measurement in Greek dairy farms: Stochastic frontier vs. data envelopment analysis*. *International Journal of Economic Sciences and Applied Research*, Kavala Institute of Technology, Kavala, 1(2): 53-66.
- Thomas, S., Hall, D., Lethbridge, J., Lobina, E., Popov, V., Corral, V. e Van Niekerk, S. (2012). *Why Water is a Public Service: Exposing the Myths of Privatization*. Public Services International Research Unit, University of Greenwich, London.
- Vila Caro, G. (2003). *Análisis por envoltura de datos (DEA) nuevos modelos y aplicaciones*. Tesis, Universidad de Sevilla.
- Wu, J., Liang, L. e Song, M. (2010). *Performance Based clustering for Benchmarking of Container Ports: An Application of DEA and cluster Analysis Technique*. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(6): 709-722.