



Universidade de Vigo

Trabajo Fin de Máster

---

# **Análisis de la incertidumbre en la determinación de la resistencia de roca intacta y su influencia en el modelo no lineal de Hoek-Brown.**

---

Denis Barros Caballero

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2025-2026



## Propuesta de Trabajo Fin de Máster

<p><b>Título en galego:</b> Análise da incerteza na determinación da resistencia de rocha intacta e a súa influencia no modelo non lineal de Hoek-Brown.</p>
<p><b>Título en español:</b> Análisis de la incertidumbre en la determinación de la resistencia de roca intacta y su influencia en el modelo no lineal de Hoek-Brown.</p>
<p><b>English title:</b> Uncertainty analysis in the determination of intact rock strength and its influence on the Hoek-Brown nonlinear failure criterion.</p>
<p><b>Modalidad:</b> Modalidad A</p>
<p><b>Autor/a:</b> Denis Barros Caballero, Universidade de Vigo</p>
<p><b>Director/a:</b> Jacobo de Uña Álvarez, Universidade de Vigo; Ignacio Pérez Rey, Universidade de Vigo</p>
<p><b>Tutor/a:</b> No aplica, ; ,</p>
<p><b>Breve resumen del trabajo:</b>  El trabajo analiza estadísticamente el criterio de Hoek-Brown aplicado a diferentes ensayos triaxiales sobre granito Blanco Mera. Se comparan métodos de estimación, se calculan intervalos de confianza mediante wild bootstrap y se identifican las configuraciones experimentales óptimas para minimizar el error de estimación de los parámetros del modelo.</p>
<p><b>Recomendaciones:</b></p>
<p><b>Otras observaciones:</b></p>



Don Jacobo de Uña Álvarez, Catedrático de Universidad de la Universidad de Vigo, don Ignacio Pérez Rey, Profesor ayudante Doctor de la Universidad de Vigo, informan que el Trabajo Fin de Máster titulado

**Análisis de la incertidumbre en la determinación de la resistencia de roca intacta y su influencia en el modelo no lineal de Hoek-Brown.**

fue realizado bajo su dirección por don Denis Barros Caballero para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, dan su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Vigo, a 03 de junio de 2026.

El director:  
Don Jacobo de Uña Álvarez

El director:  
Don Ignacio Pérez Rey

El/la autor/a:  
Don Denis Barros Caballero

---

**Declaración responsable.** Para dar cumplimiento a la Ley 3/2022, de 24 de febrero, de convivencia universitaria, referente al plagio en el Trabajo Fin de Máster (Artículo 11, [Disposición 2978 del BOE núm. 48 de 2022](#)), **el/la autor/a declara** que el Trabajo Fin de Máster presentado es un documento original en el que se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones relativas al uso de material de apoyo desarrollado por otros/as autores/as:

- Todas las fuentes usadas para la elaboración de este trabajo han sido citadas convenientemente (libros, artículos, apuntes de profesorado, páginas web, programas,...)
- Cualquier contenido copiado o traducido textualmente se ha puesto entre comillas, citando su procedencia.
- Se ha hecho constar explícitamente cuando un capítulo, sección, demostración,... sea una adaptación casi literal de alguna fuente existente.

Y, acepta que, si se demostrara lo contrario, se le apliquen las medidas disciplinarias que correspondan.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Aspectos más relevantes de la mecánica de rocas</b>	<b>3</b>
2.1. Fuentes de incertidumbre en mecánica de rocas	3
2.1.1. Efecto de escala	4
2.1.2. Heterogeneidad mineralógica	4
2.2. Variabilidad en los ensayos de laboratorio y su tratamiento estadístico	5
<b>3. Datos, modelo y objetivos</b>	<b>7</b>
3.1. Objetivos específicos	7
3.2. Material y procedencia de los datos	7
3.3. Ensayos de laboratorio	9
3.3.1. Ensayo de compresión simple	9
3.3.2. Ensayo de compresión triaxial	9
3.4. El modelo de Hoek-Brown para roca intacta	10
<b>4. Estudio del modelo de Hoek-Brown</b>	<b>13</b>
4.1. Estudio exploratorio por grupos	13
4.1.1. Ajuste no lineal por mínimos cuadrados	13
4.1.2. Verificación de los supuestos del modelo	14
4.1.3. Selección de la Zona 5 para los análisis posteriores	15
4.2. Linealización de la ecuación de Hoek-Brown	16
4.2.1. Transformación algebraica	16
4.2.2. Implicaciones sobre la estructura de los errores	17
4.2.3. Verificación empírica sobre los datos de la Zona 5	18
4.3. Validación mediante simulación de Monte Carlo	19
4.3.1. Generador de datos y calibración	19
4.3.2. Comparación del modelo no lineal frente a la linealización	19
4.3.3. Efecto del tamaño muestral reducido	20
<b>5. Intervalos de confianza y de predicción</b>	<b>23</b>
5.1. Método Delta	24
5.1.1. Fundamento teórico	24
5.1.2. Aplicación a los datos de la Zona 5	25
5.2. Simulaciones Bootstrap	25
5.2.1. Fundamento y variante wild	25
5.2.2. Distribución bootstrap de los parámetros	26
5.2.3. Intervalos de confianza bootstrap	28
5.3. Comparación de los métodos	29

5.3.1. Intervalo de predicción mediante wild bootstrap . . . . .	30
5.4. Conclusiones del capítulo . . . . .	31
<b>6. Influencia del diseño muestral</b> . . . . .	<b>33</b>
6.1. Modelo de simulación . . . . .	33
6.1.1. Procedimiento de simulación . . . . .	33
6.1.2. Métricas de evaluación . . . . .	34
6.2. Pruebas exploratorias . . . . .	34
6.3. Estudio de simulación sistemático . . . . .	35
6.3.1. Escenario 1: proporción entre los dos niveles de $\sigma_3$ . . . . .	35
6.3.2. Escenario 2: magnitud del valor máximo de $\sigma_3$ . . . . .	36
6.3.3. Escenario 3: tamaño muestral . . . . .	36
6.4. Fundamento teórico: conexión con el diseño óptimo de experimentos . . . . .	37
6.4.1. Análisis en el caso lineal . . . . .	37
6.4.2. Extensión al modelo de Hoek-Brown . . . . .	38
6.4.3. Proporción teóricamente óptima . . . . .	39
6.5. Conclusiones del capítulo . . . . .	39
<b>7. Caso de estudio propuesto: campaña experimental optimizada sobre granito Blanco Mera</b> . . . . .	<b>43</b>
7.1. Motivación y objetivos del caso de estudio . . . . .	43
7.2. Diseño experimental propuesto . . . . .	44
7.2.1. Material y procedencia . . . . .	44
7.2.2. Configuración de los ensayos . . . . .	44
7.2.3. Protocolo de ensayo . . . . .	45
7.3. Análisis estadístico previsto . . . . .	45
7.3.1. Ajuste del modelo y verificación de supuestos . . . . .	45
7.3.2. Intervalos de confianza y de predicción . . . . .	45
7.3.3. Comparación con campañas anteriores . . . . .	46
7.4. Resultados esperados y criterios de éxito . . . . .	46
7.5. Recursos necesarios y viabilidad . . . . .	46
7.6. Extensiones posibles . . . . .	47
<b>8. Conclusiones y líneas de investigación futura</b> . . . . .	<b>49</b>
8.1. Sobre el ajuste del modelo y la linealización . . . . .	49
8.2. Sobre los métodos de construcción de intervalos de confianza . . . . .	49
8.3. Sobre el diseño óptimo de los ensayos triaxiales . . . . .	50
8.4. Sobre la variabilidad entre campañas . . . . .	51
8.5. Limitaciones del estudio . . . . .	51
8.6. Líneas de investigación futura . . . . .	51
<b>A. Código R</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>71</b>

# Resumen

## Resumen en español

El criterio de rotura de Hoek-Brown es el modelo de referencia en mecánica de rocas para caracterizar la resistencia de la roca intacta a partir de ensayos derivados de la investigación sobre el comportamiento mecánico de rocas. Se trata de un criterio de rotura empírico de uso común en el ámbito de la mecánica de rocas y en la ingeniería geomecánica o de macizos rocosos. La base del criterio es sobre roca intacta (brittle failure of intact rock), aunque el criterio se extendió a otros escenarios. Este trabajo analiza sus propiedades estadísticas en condiciones de muestreo reducido, aplicado a ensayos sobre granito de dos micas, denominado comercialmente Blanco Mera. Se demuestra, teóricamente y mediante simulación de Monte Carlo, que la linealización habitual de la ecuación viola los supuestos de normalidad y homocedasticidad e introduce sesgo en los estimadores, por lo que el ajuste no lineal directo debe ser el procedimiento de referencia. Se calculan intervalos de confianza y de predicción al 95 % mediante el método delta y el wild bootstrap, concluyendo que este último es más robusto al no requerir normalidad de los parámetros estimados ni homocedasticidad de los errores. Finalmente, un estudio de simulación sistemático identifica la configuración experimental óptima: distribuir los ensayos en proporción 60/40 entre confinamiento nulo y el nivel máximo disponible, con un tamaño muestral de 20–30 probetas, maximiza la precisión de las estimaciones. Este resultado se justifica teóricamente mediante el criterio D-óptimo de diseño de experimentos.

## English abstract

The Hoek-Brown failure criterion is the reference model in rock mechanics for characterizing the strength of intact rock from laboratory testing. It is an empirical failure criterion widely used in rock mechanics and geomechanical engineering. The criterion was originally developed for intact rock (brittle failure of intact rock) and subsequently extended to other scenarios. This work analyses its statistical properties under small sample conditions, applied to triaxial tests on two-mica granite, commercially known as Blanco Mera. It is demonstrated, both theoretically and through Monte Carlo simulation, that the common linearization of the Hoek-Brown equation violates the assumptions of normality and homoscedasticity and introduces bias in the parameter estimates; direct nonlinear least squares fitting should therefore be the reference procedure. Confidence and prediction intervals at the 95 % level are computed using the delta method and the wild bootstrap, concluding that the latter is more robust as it requires neither normality of the estimated parameters nor homoscedasticity of the errors. Finally, a systematic simulation study identifies the optimal experimental configuration: distributing tests in a 60/40 proportion between zero confinement and the maximum available confining pressure, with a sample size of 20–30 specimens, maximises the precision of the parameter estimates. This result is theoretically justified through the D-optimality criterion from the theory of optimal experimental design.



# Capítulo 1

## Introducción

La mecánica de rocas es una disciplina cuya práctica descansa, de manera inevitable, sobre la incertidumbre. A diferencia de otros materiales de ingeniería, cuya fabricación permite controlar composición y microestructura, las rocas son materiales naturales cuyas propiedades resultan de procesos geológicos desarrollados a lo largo de millones de años. Esta condición les confiere una variabilidad intrínseca que ningún protocolo de muestreo puede eliminar por completo y que constituye el punto de partida conceptual de este trabajo.

Caracterizar la resistencia de una roca exige llevarla hasta la rotura, lo que se suele llevar a cabo mediante el empleo de probetas o muestras en el laboratorio. Los ensayos de compresión uniaxial y de compresión triaxial son los procedimientos más habituales para ello: registran la tensión máxima que soporta la probeta —la tensión principal mayor  $\sigma_1$ — bajo distintos niveles de presión de confinamiento, que representan la tensión principal menor,  $\sigma_3$ . A partir de estas parejas  $(\sigma_3, \sigma_1)$  se ajusta la curva que conforma el criterio de rotura, que relaciona ambas tensiones mediante una función que caracteriza el comportamiento resistente del material.

El criterio de rotura de Hoek-Brown, propuesto originalmente por Hoek y Brown en 1980 [2], es hoy el estándar de referencia en mecánica de rocas para rocas intactas y macizos rocosos. Su expresión, de naturaleza no lineal, supone en la práctica ajustar dos parámetros —la resistencia a compresión simple  $\sigma_c$  y el parámetro adimensional  $m$ — a partir de los datos experimentales. Esta estimación se realiza casi universalmente mediante mínimos cuadrados no lineales, un procedimiento bien asentado en teoría estadística pero cuyas propiedades en muestras pequeñas raramente se analizan en la literatura geomecánica.

Y precisamente aquí reside el problema central que motiva este trabajo: los ensayos de laboratorio en mecánica de rocas son destructivos, costosos y, en muchas ocasiones, escasos. Es habitual disponer de tan solo una decena o veintena de probetas para ajustar el modelo de Hoek-Brown. En estas condiciones, las propiedades asintóticas que garantizan la bondad de los estimadores de mínimos cuadrados no lineales —y, con ellos, la validez de los intervalos de confianza derivados— dejan de estar aseguradas. Las aproximaciones asintóticas pueden fallar; las distribuciones de los estimadores pueden alejarse de la normalidad; y los intervalos de confianza calculados de forma rutinaria pueden resultar demasiado estrechos o sesgados, con consecuencias directas sobre la seguridad de los diseños geotécnicos que de ellos dependen.

La estadística dispone de herramientas específicas para afrontar este tipo de situaciones. El método delta permite propagar la incertidumbre de los parámetros estimados hasta obtener una banda de confianza para la curva ajustada, apoyándose en una aproximación de primer orden mediante el desarrollo de Taylor. El remuestreo de tipo bootstrap, en sus variantes clásica y wild [9], ofrece una alternativa libre de supuestos distribucionales que resulta especialmente adecuada cuando no se puede garantizar la normalidad de los residuos ni la homocedasticidad de los errores. La comparación rigurosa de ambas familias de métodos en el contexto del ajuste de Hoek-Brown puede resultar, por sí misma, una contribución de interés tanto estadístico como geomecánico.

A las cuestiones de inferencia se añade una segunda dimensión del problema, de naturaleza experimental: ¿cómo deben distribuirse los ensayos triaxiales para que los parámetros del modelo queden estimados con la mayor precisión posible? En la práctica, el ingeniero de campo elige los niveles de confinamiento  $\sigma_3$  de forma intuitiva o siguiendo convenciones heredadas. Sin embargo, la teoría del diseño óptimo de experimentos proporciona criterios formales para seleccionar esos niveles de manera que se minimice la incertidumbre de estimación [13, 14]. La aplicación de este enfoque al modelo de Hoek-Brown —un modelo no lineal con dos parámetros y restricciones físicas sobre el dominio experimental— constituye la parte más original del presente trabajo.

El estudio se apoya en un conjunto de 111 ensayos triaxiales realizados sobre probetas de granito Blanco Mera, procedentes de una cantera gallega y recopilados a lo largo de varios años en distintas campañas experimentales [3, 4, 5, 6, 7]. Este material presenta una variabilidad típica de los granitos de grano medio: los coeficientes de variación de los ensayos de compresión simple se sitúan en torno al 15–20 %, valor que, unido al rango limitado presiones de confinamientos ensayados, justifica plenamente el análisis estadístico detallado que se propone.

El trabajo se organiza del siguiente modo. El Capítulo 2 revisa los aspectos de mecánica de rocas más relevantes para contextualizar el problema: la heterogeneidad y variabilidad intrínseca de las rocas, el efecto de escala y las limitaciones de los ensayos de laboratorio. El Capítulo 3 describe los datos utilizados y presenta el modelo de Hoek-Brown en la forma simplificada aplicable a rocas intactas. El Capítulo 4 aborda el ajuste del modelo: se analiza la posibilidad de linealizar la ecuación de Hoek-Brown, se comparan los resultados con el ajuste no lineal directo y se estudian los supuestos del modelo mediante simulación. El Capítulo 5 desarrolla el cálculo de intervalos de confianza y de predicción mediante el método delta y el bootstrap, comparando su comportamiento sobre los datos reales. El Capítulo 6 estudia la influencia del diseño muestral —número de ensayos, niveles de confinamiento y su distribución— sobre la precisión de las estimaciones, a través de un amplio estudio de simulación, y presenta la conexión teórica con los criterios de diseño óptimo de experimentos. Finalmente, el Capítulo 8 recoge las conclusiones generales y propone líneas de investigación futura.

Todo el análisis estadístico ha sido realizado en R [18], utilizando los paquetes `nls`, `nlraa` [8], `nlstools`, `nortest`, `car`, `boot` y `ks`, entre otros. El código completo se incluye en el Apéndice A.

## Capítulo 2

# Aspectos más relevantes de la mecánica de rocas

La mecánica de rocas es el término empleado para describir la disciplina científica que estudia, de forma teórica y aplicada, el comportamiento mecánico de las rocas y de los macizos rocosos cuando son sometidos a cargas o modificaciones de su entorno. Su objeto de estudio abarca desde la roca intacta a escala de laboratorio hasta el macizo rocoso a escala de obra, pasando por todos los niveles intermedios en los que la presencia de discontinuidades altera de forma sustancial la respuesta del material [2].

Esta disciplina es fundamental para la minería y la ingeniería civil, ya que ambas actividades modifican el estado de esfuerzos y la estructura interna de los macizos rocosos. El diseño de excavaciones subterráneas, taludes, túneles o cimentaciones sobre roca requiere conocer con suficiente precisión los parámetros de resistencia y deformabilidad del material. Sin embargo, obtener esa información es costoso, lento y, en muchos casos, inevitablemente impreciso. Comprender por qué es así resulta esencial para interpretar correctamente cualquier análisis estadístico que se aplique a los datos geomecánicos, y constituye el propósito de este capítulo.

### 2.1. Fuentes de incertidumbre en mecánica de rocas

A diferencia de los materiales de construcción fabricados industrialmente, las rocas son el producto de procesos geológicos que operan a distintas escalas temporales y espaciales. Esta condición de origen les confiere una variabilidad estructural y composicional que se manifiesta en todas las propiedades mecánicamente relevantes: resistencia, deformabilidad, permeabilidad y tenacidad, entre otras. Las fuentes de incertidumbre que afectan a la mecánica de rocas pueden agruparse en tres categorías.

La primera categoría engloba las **fuentes intrínsecas al material**. Las rocas están formadas por agregados de minerales cuyas proporciones y distribución espacial varían incluso dentro de una misma litología. La orientación preferente de los cristales, el tamaño de grano, el grado de cementación y la presencia de microfisuras previas condicionan la resistencia de la roca intacta y generan dispersión en los resultados de cualquier campaña de ensayos. A esto se añade la complejidad estructural a escala mesoscópica y macroscópica: fracturas, diaclasas, estratos y fallas introducen planos de debilidad cuya geometría y propiedades son difícilmente caracterizables de forma exhaustiva [19].

La segunda categoría corresponde a las **limitaciones de los métodos de caracterización**. Los ensayos de laboratorio, por mucho que sigan recomendaciones sugeridas por la ISRM (*International Society for Rock Mechanics and Rock Engineering*), presentan restricciones inherentes. Las probetas ensayadas son muestras de pequeño volumen que pueden no ser representativas del conjunto de la formación. El proceso de extracción, transporte y preparación de las muestras puede inducir microfisuras que alteren los resultados. Los ensayos son destructivos, lo que impide repetirlos sobre la misma probeta, y su coste económico limita el número de réplicas disponibles. En consecuencia, el tamaño

muestral con el que se trabaja en mecánica de rocas es, con frecuencia, notablemente inferior al que se requeriría para garantizar estimaciones precisas [20].

La tercera categoría recoge la **variabilidad inducida por el estado tensional y las condiciones ambientales**. El comportamiento mecánico de la roca no es una propiedad intrínseca fija: depende de factores como puede ser la presión de confinamiento, la temperatura, el grado de saturación y la velocidad de carga durante el ensayo. Un mismo material puede mostrar resistencias aparentes muy distintas según las condiciones del ensayo, lo que introduce una fuente adicional de incertidumbre cuando se pretende extrapolar los resultados de laboratorio a las condiciones reales de la obra.

Las tres categorías descritas actúan de forma simultánea y se superponen, de modo que la dispersión observada en los datos de laboratorio recoge contribuciones de todas ellas. Esta realidad tiene una implicación directa sobre el análisis estadístico: cualquier modelo ajustado a datos geomecánicos debe incorporar explícitamente esa incertidumbre, tanto en la estimación de los parámetros como en la construcción de intervalos de confianza y de predicción.

### 2.1.1. Efecto de escala

Uno de los fenómenos más estudiados en mecánica de rocas es la dependencia de la resistencia con el tamaño de la muestra ensayada, conocida como efecto de escala [3]. Su origen se encuentra en la distribución espacial de defectos y discontinuidades en el material: a medida que aumenta el volumen de roca considerado, crece la probabilidad de que dicho volumen contenga un defecto de mayor tamaño o una discontinuidad que controle la rotura.

Este comportamiento tiene implicaciones directas para la interpretación de los ensayos de laboratorio. Las probetas ensayadas representan únicamente la roca intacta a pequeña escala, con una densidad de defectos inferior a la del macizo real. La Figura 2.1 ilustra cómo la representatividad del volumen ensayado cambia con la escala: desde la probeta de laboratorio, sin apenas discontinuidades, hasta el macizo rocoso, en el que las juntas y fracturas controlan el comportamiento global. La extrapolación directa de los parámetros obtenidos en laboratorio a la escala de obra requiere, por tanto, correcciones adicionales que en el presente estudio no se aplican, dado que el objeto de análisis se ciñe exclusivamente a resultados basados en ensayos de laboratorio en probetas del mismo tamaño obtenidos a escala de laboratorio.

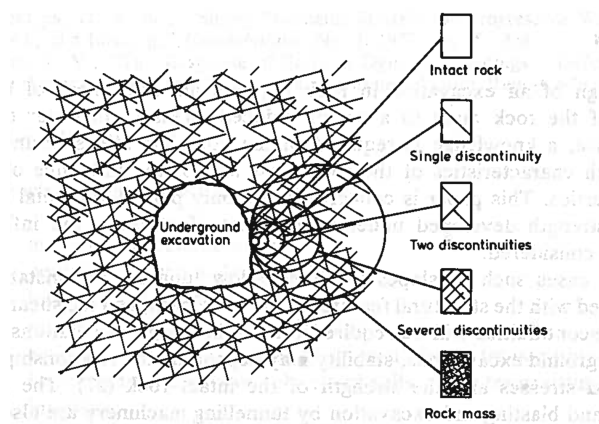


Figura 2.1: Concepto de cambios de escala en un mismo macizo rocoso [2].

### 2.1.2. Heterogeneidad mineralógica

La heterogeneidad de las rocas a escala mineralógica constituye otra fuente relevante de variabilidad en los ensayos de laboratorio. Las rocas ígneas, como el granito que se estudia en este trabajo, están

compuestas por varios minerales —cuarzo, feldespato y mica en el caso del granito Blanco Mera— cuyas proporciones y distribución espacial no son uniformes. La resistencia local depende de la orientación de los planos de clivaje de los cristales, del tamaño de grano y de la proporción relativa de cada mineral, factores que varían de probeta a probeta incluso cuando todas proceden de la misma cantera y del mismo nivel litológico.

Como se aprecia en la Figura 2.2, la textura del granito Blanco Mera muestra zonas de concentración de algunos minerales (como la biotita), alternadas con dominios más ricos en cuarzo y feldespato. Esta distribución irregular facilita la nucleación y propagación de grietas a lo largo de planos de menor resistencia, haciendo que el fallo no se produzca de forma homogénea en la sección transversal de la probeta. El resultado práctico es que dos probetas aparentemente idénticas, extraídas a escasos centímetros de distancia, pueden mostrar un comportamiento mecánico (por ejemplo en lo referente a la resistencia a la compresión simple) que difieren en un 15–25 %, en línea con los coeficientes de variación documentados para granitos en la literatura [19].

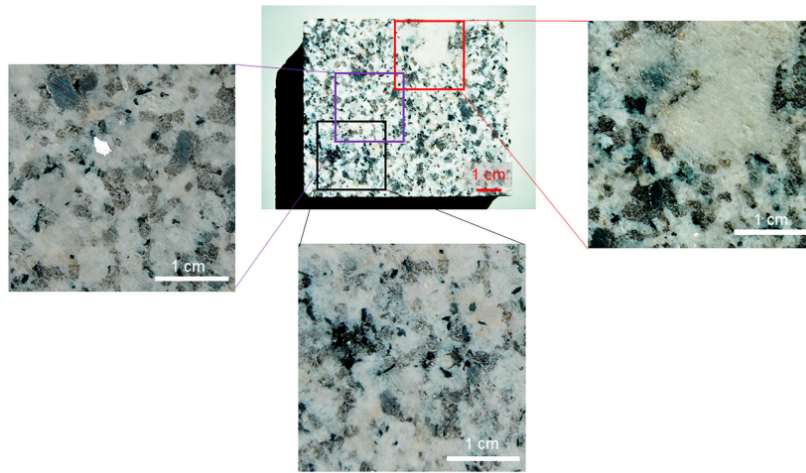


Figura 2.2: Corte de granito Blanco Mera, 8 cm de ancho y 7 cm de alto, en el que se aprecian las zonas heterogéneas (cristales de feldespato de tamaño centimétrico en la foto de la derecha mezclada con zonas más homogéneas) de la textura mineralógica [5].

## 2.2. Variabilidad en los ensayos de laboratorio y su tratamiento estadístico

Las consideraciones anteriores tienen una consecuencia directa sobre cómo debe abordarse el análisis de los datos obtenidos en laboratorio. Cuando se ajusta un criterio de rotura a un conjunto de pares  $(\sigma_3, \sigma_1)$ , los residuos del modelo no son simplemente ruido de medida: reflejan la variabilidad real del material, los efectos de escala entre probetas de distintos tamaños y las diferencias en el estado de microfisuración de cada muestra. Tratar esos residuos como errores puramente aleatorios e independientes es una simplificación necesaria para operar estadísticamente, pero conviene tenerla presente al interpretar los resultados.

En la práctica, los datos geomecánicos presentan con frecuencia tres características que complican el análisis estadístico clásico. En primer lugar, el tamaño muestral es reducido: en el presente estudio se dispone de 111 ensayos en total, pero distribuidos en cinco grupos temporales, lo que deja grupos con apenas 10–20 observaciones. En segundo lugar, los residuos del modelo de Hoek-Brown pueden mostrar heterocedasticidad —varianza no constante— ya que la dispersión de  $\sigma_1$  tiende a aumentar

con el nivel de confinamiento  $\sigma_3$ , un aspecto que se analiza en detalle en el Capítulo 4. En tercer lugar, el modelo es no lineal en sus parámetros, lo que invalida la aplicación directa de los resultados del análisis de regresión lineal.

Estos tres factores justifican el enfoque metodológico del presente trabajo: el uso de métodos de inferencia robustos —en particular el bootstrap— para construir intervalos de confianza que sean válidos incluso cuando los supuestos clásicos no se cumplen estrictamente, y el estudio sistemático de cómo el diseño experimental —la elección de los niveles de  $\sigma_3$ — afecta a la precisión de las estimaciones. Ambas cuestiones se desarrollan en los Capítulos 5 y 6, respectivamente.

## Capítulo 3

# Datos, modelo y objetivos

Este capítulo describe los datos experimentales utilizados a lo largo del trabajo, los ensayos de laboratorio de los que proceden y el modelo de Hoek-Brown en su forma simplificada para roca intacta, que constituye el objeto central del análisis estadístico. Se presentan asimismo los objetivos específicos del estudio y los criterios que han guiado la selección del subconjunto de datos empleado en los capítulos posteriores.

### 3.1. Objetivos específicos

El objetivo general del trabajo es analizar en profundidad el ajuste del modelo no lineal de Hoek-Brown desde una perspectiva estadística rigurosa. Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

1. Estudiar las implicaciones estadísticas de linealizar la ecuación de Hoek-Brown, en particular sobre los supuestos del modelo de regresión (normalidad y homocedasticidad de los residuos), y comparar los resultados con el ajuste no lineal directo.
2. Calcular intervalos de confianza para la curva ajustada mediante dos familias de métodos —el método delta y el remuestreo bootstrap— y comparar su anchura y cobertura en función de los supuestos que cada uno requiere.
3. Cuantificar la influencia del tamaño muestral y del diseño experimental —número de ensayos triaxiales y elección de los niveles de confinamiento  $\sigma_3$ — sobre la precisión de las estimaciones de  $m$  y  $\sigma_c$ , mediante un estudio de simulación de Monte Carlo.
4. Identificar la distribución de ensayos triaxiales que minimiza el error de estimación de los parámetros del modelo, estableciendo recomendaciones prácticas para el diseño de campañas experimentales en mecánica de rocas.

Estos objetivos responden a una necesidad real en la práctica geotécnica: los ensayos de laboratorio son costosos y destructivos, por lo que el número de probetas disponibles es habitualmente reducido. Comprender cómo esa limitación afecta a la incertidumbre de los parámetros del modelo, y cómo puede mitigarse mediante un diseño experimental adecuado, tiene implicaciones directas sobre la fiabilidad de los diseños geotécnicos que de ellos dependen.

### 3.2. Material y procedencia de los datos

El estudio se basa en un total de 111 ensayos de laboratorio realizados sobre probetas de granito Blanco Mera, un granito de grano medio-grueso extraído de una cantera situada en Galicia (España).

Se trata de una roca ígnea plutónica compuesta fundamentalmente por cuarzo, feldespato potásico, plagioclasa y biotita, con una resistencia a compresión simple moderadamente alta y una textura cristalina que favorece la variabilidad entre probetas, tal y como se discutió en la Sección 2.1.2.

Los datos proceden de cinco campañas experimentales independientes, llevadas a cabo por distintos grupos de investigación a lo largo de varios años [3, 4, 5, 6, 7]. Aunque todos los ensayos se realizaron sobre material procedente de la misma cantera y con la misma litología, las muestras no fueron extraídas exactamente del mismo punto ni en la misma fecha, lo que introduce una fuente adicional de variabilidad entre grupos.

Los 111 ensayos se distribuyen en 13 niveles de presión de confinamiento  $\sigma_3$ , comprendidos entre 0 y 15 MPa, con el detalle que se muestra en la Tabla 3.1. La mayor parte de los datos se concentra en los extremos del rango de confinamiento ( $\sigma_3 = 0$  y  $\sigma_3 \geq 10$  MPa), mientras que los niveles intermedios están menos representados. Esta distribución desigual puede tener consecuencias sobre la precisión del ajuste que serán objeto de análisis en el Capítulo 6.

Cuadro 3.1: Distribución de los 111 ensayos por nivel de confinamiento  $\sigma_3$  (MPa) y grupo de procedencia.

$\sigma_3$ (MPa)	$n$	Zona(s)
0	23	1, 3, 4
0,2	15	2, 5
2	8	1, 2
2,5	5	1
4	8	2, 4
5	9	2, 4, 5
6	7	1, 5
7,5	5	1
10	13	2, 4, 5
12	6	2
12,5	4	1
14	1	1
15	7	4, 5
<b>Total</b>	<b>111</b>	

Los datos se organizan en cinco grupos temporales denominados Zonas 1 a 5, cuyas características principales se resumen en la Tabla 3.2. La Zona 3 está formada exclusivamente por seis ensayos de compresión simple ( $\sigma_3 = 0$ ) y, al no incluir ningún ensayo triaxial con confinamiento, no permite ajustar por sí sola los dos parámetros del modelo de Hoek-Brown de forma independiente. Por este

motivo, la Zona 3 se excluye de todos los análisis individuales y únicamente contribuye al ajuste global cuando se utilizan todos los datos conjuntamente.

Cuadro 3.2: Resumen por zonas: número de ensayos, rango de  $\sigma_3$  y parámetros estimados del modelo de Hoek-Brown mediante mínimos cuadrados no lineales.

Zona	$n$	$\sigma_3$ (MPa)	$\hat{m}$	$\hat{\sigma}_c$ (MPa)	Error residual estándar
Todas*	105	0–15	37,57	118,63	22,77
1	31	0–14	51,14	115,22	15,94
2	28	0,2–12	39,69	118,84	14,93
4	22	0–15	40,83	109,84	23,48
5	24	0,2–15	27,28	126,34	25,79

\* Excluyendo la Zona 3.

La dispersión de los valores de  $m_i$  entre zonas —que oscila entre 27,28 y 51,14— es llamativa y merece una reflexión. El parámetro  $m_i$  del criterio de Hoek-Brown para granitos intactos se sitúa típicamente en el rango  $m_i \in [25, 33]$  según la base de datos de Hoek y Brown [31], con valores de referencia de  $m_i \approx 32$  para granitos de grano grueso. Los valores obtenidos en las Zonas 1 y 2 (51,14 y 39,69, respectivamente) superan este rango, lo que sugiere que esos grupos contienen probetas con una resistencia relativa mayor a altos confinamientos, posiblemente por diferencias en la microestructura o en el protocolo de ensayo entre campañas. Esta disparidad entre zonas justifica tratarlas de forma independiente en los análisis de incertidumbre, en lugar de asumir que todos los datos pertenecen a una población homogénea.

Los análisis estadísticos detallados de los Capítulos 5 y 6 se centran en la **Zona 5**, que es la que presenta los parámetros estimados más consistentes con los valores de referencia para el granito Blanco Mera y que ofrece una distribución de  $\sigma_3$  razonablemente amplia (0,2–15 MPa), con 24 observaciones. Esta elección se justifica con mayor detalle en la Sección 4.1.3 del Capítulo 4.

### 3.3. Ensayos de laboratorio

Las probetas son sometidas a dos tipos de ensayo, de acuerdo con las recomendaciones establecidas por la ISRM [32]: el ensayo de compresión simple o uniaxial y el ensayo de compresión triaxial.

#### 3.3.1. Ensayo de compresión simple

En el ensayo de compresión simple se aplica una carga axial creciente sobre una de las caras de la probeta (normalmente la cara inferior), sin la celda de Hoek-Franklin, es decir, a un confinamiento lateral nulo ( $\sigma_3 = 0$ ). La carga se incrementa de forma controlada hasta que se produce la rotura de la probeta, registrándose la carga máxima soportada. El cociente entre esa carga máxima y la sección transversal de la probeta proporciona la resistencia a compresión simple  $\sigma_c$ , que coincide con el parámetro homónimo del modelo de Hoek-Brown (Figura 3.1).

#### 3.3.2. Ensayo de compresión triaxial

En el ensayo de compresión triaxial, además de la carga axial, se aplica una presión de confinamiento lateral  $\sigma_3$  constante que envuelve lateralmente la probeta. Esta presión se genera mediante una cámara de presión hidráulica —la celda de Hoek-Franklin (*Hoek-Franklin's cell*)— que se presuriza con agua

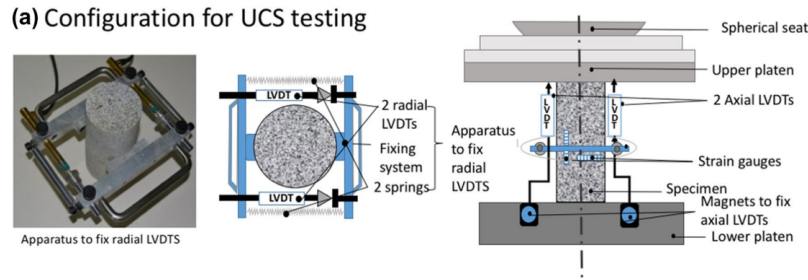


Figura 3.1: Configuración del ensayo de compresión simple uniaxial. Imagen tomada de [6].

hasta el nivel de confinamiento deseado. Una vez estabilizada la presión lateral, la carga axial se incrementa progresivamente hasta la rotura, registrándose la tensión axial máxima  $\sigma_1$  (Figura 3.2). El ensayo triaxial proporciona, por tanto, el par  $(\sigma_3, \sigma_1)$  que constituye el dato básico para el ajuste del criterio de Hoek-Brown.

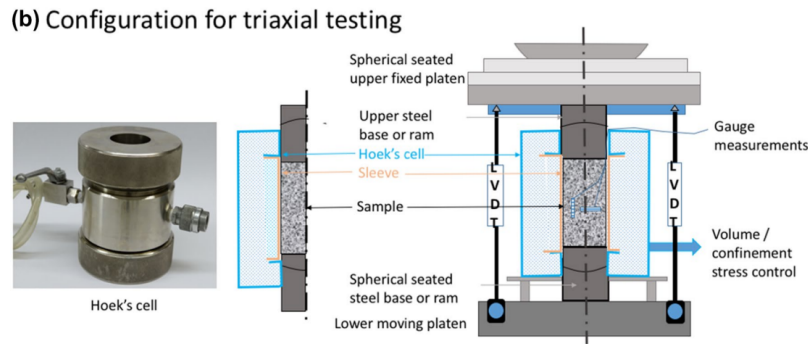


Figura 3.2: Configuración del ensayo de compresión triaxial con celda de Hoek. Imagen tomada de [6].

Desde el punto de vista estadístico, cada par  $(\sigma_3, \sigma_1)$  constituye una observación. El nivel de confinamiento  $\sigma_3$  actúa como variable independiente (fijada por el diseño del ensayo), mientras que  $\sigma_1$  es la variable de respuesta, sujeta a la variabilidad del material y a los errores de medida. Esta estructura es análoga a la de un modelo de regresión no lineal con errores aditivos, que es precisamente el marco estadístico utilizado en este trabajo.

### 3.4. El modelo de Hoek-Brown para roca intacta

El criterio de rotura de Hoek-Brown fue propuesto inicialmente por Hoek y Brown en 1980 [2] como un modelo empírico capaz de describir el comportamiento resistente de macizos rocosos en función del estado de esfuerzos. Su formulación generalizada, presentada por Hoek et al. en 2002 [31], expresa la envolvente de rotura en el espacio de tensiones principales como:

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 + \sigma_{ci} \left( m_b \frac{\sigma'_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (3.1)$$

donde  $m$ ,  $s$  y  $a$  son parámetros que dependen de las características del macizo rocoso y se obtienen a partir del índice GSI (*Geological Strength Index*). En el caso particular de roca intacta ensayada en laboratorio, el macizo no presenta discontinuidades relevantes a la escala de la probeta, por lo que los parámetros toman los valores límite  $s = 1$  y  $a = 0,5$ . La Ecuación 3.1 se simplifica entonces a:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} \sqrt{m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + 1} \quad (3.2)$$

donde  $m_i$  es el parámetro de Hoek-Brown para la roca intacta, adimensional y característico de cada litología. El significado físico de los parámetros es el siguiente:

$\sigma_1$  : tensión principal mayor en el momento de la rotura (MPa). Es la variable de respuesta medida en el ensayo.

$\sigma_3$  : tensión de confinamiento aplicada durante el ensayo (MPa). Es la variable independiente, fijada por el operador.

$\sigma_{ci}$  : resistencia a compresión simple uniaxial de la roca intacta (MPa). Corresponde al valor de  $\sigma_1$  cuando  $\sigma_3 = 0$  y constituye uno de los dos parámetros a estimar.

$m_i$  : parámetro adimensional de Hoek-Brown que caracteriza la fricción interna del material. Para el granito, los valores de referencia publicados por Hoek y Brown se sitúan en el rango  $m_i \in [25, 33]$  [31]. Un valor mayor de  $m_i$  implica un mayor incremento de resistencia con el confinamiento, es decir, un ángulo de fricción interna más elevado.

La Ecuación 3.2 es no lineal en los parámetros  $m$  y  $\sigma_c$ : ambos aparecen de forma acoplada bajo la raíz cuadrada. Esto implica que su estimación no puede realizarse mediante regresión lineal ordinaria sin una transformación previa de la ecuación, y que las propiedades estadísticas de los estimadores son más complejas que en el caso lineal. Estas implicaciones se desarrollan con detalle en el Capítulo 4.

Los resultados del modelo se representan habitualmente en el plano  $(\sigma_3, \sigma_1)$ , con  $\sigma_3$  en el eje de abscisas y  $\sigma_1$  en el eje de ordenadas. La curva de Hoek-Brown tiene forma de parábola creciente y cóncava, con valor  $\sigma_1 = \sigma_c$  para  $\sigma_3 = 0$  y pendiente decreciente conforme aumenta el confinamiento, lo que refleja el efecto endurecedor no lineal de la presión de confinamiento sobre la resistencia de la roca.



## Capítulo 4

# Estudio del modelo de Hoek-Brown

En este capítulo se aborda el ajuste estadístico del modelo de Hoek-Brown a los datos experimentales descritos en el Capítulo 3. El análisis se estructura en tres bloques. En primer lugar se realiza un estudio exploratorio de los datos por grupos, que incluye el ajuste no lineal por mínimos cuadrados y la verificación de los supuestos del modelo. En segundo lugar se estudia la linealización de la ecuación de Hoek-Brown, analizando sus implicaciones teóricas sobre la estructura de los errores. En tercer lugar se evalúa mediante simulación de Monte Carlo en qué medida la linealización viola los supuestos de normalidad y homocedasticidad, comparando el comportamiento de ambos enfoques.

### 4.1. Estudio exploratorio por grupos

#### 4.1.1. Ajuste no lineal por mínimos cuadrados

El ajuste del modelo de Hoek-Brown a los datos experimentales se realiza mediante mínimos cuadrados no lineales (NLS), minimizando la suma de cuadrados de los residuos:

$$(\hat{m}, \hat{\sigma}_c) = \arg \min_{m_i, \sigma_{ci}} \sum_{i=1}^n \left[ \sigma_{1,i} - \sigma_{3,i} - \sigma_{ci} \sqrt{m_i \frac{\sigma_{3,i}}{\sigma_{ci}} + 1} \right]^2 \quad (4.1)$$

En R el ajuste se realiza mediante la función `nls()` del paquete base [18], que implementa el algoritmo de Gauss-Newton:

```
nls(SigmaPico ~ Sigma3 + sc*sqrt(m*Sigma3/sc + 1),
data = zona,
start = list(m = 40, sc = 120))
```

Los valores iniciales se han elegido como estimaciones preliminares razonables para el granito Blanco Mera, asegurando la convergencia del algoritmo en todos los grupos analizados. En la Figura 4.1 se muestran los ajustes individuales para cada zona, excluyendo la Zona 3 por las razones expuestas en la Sección 3.2.

Los resultados numéricos del ajuste se recogen en el Cuadro 4.1. Las diferencias entre zonas en la estimación de  $m$  —que oscila entre 27,28 y 51,14— son notables y superan con creces la incertidumbre de estimación de cada ajuste individual. Esto indica que la variabilidad entre grupos no es atribuible únicamente al error de muestreo, sino que refleja diferencias reales en las propiedades mecánicas del material extraído en distintas campañas.

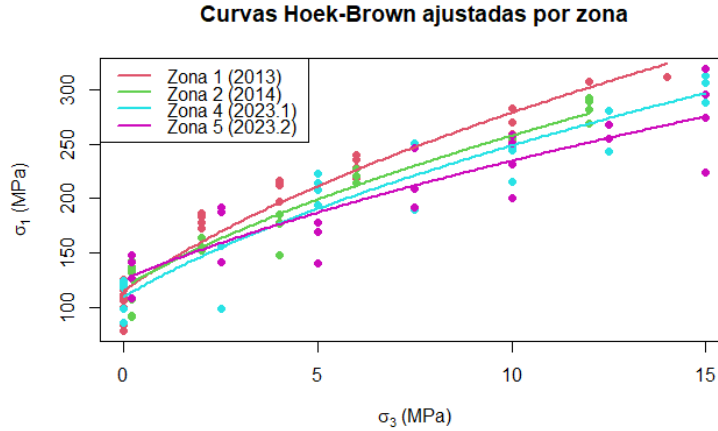


Figura 4.1: Curvas de Hoek-Brown ajustadas individualmente para cada zona (se excluye la Zona 3). La dispersión entre curvas refleja la variabilidad entre campañas experimentales.

Cuadro 4.1: Parámetros estimados del modelo de Hoek-Brown por mínimos cuadrados no lineales, errores estándar de los estimadores y error residual estándar por zona.

Zona	$m_i$	$\sigma_{ci}$	Error $m : i$	Error $\sigma_{ci}$	Error residual estándar
Todas*	37,57	118,63	2,43	3,70	22,77
1	51,14	115,22	3,76	4,29	15,94
2	39,69	118,84	3,34	4,35	14,93
4	40,83	109,84	6,20	9,46	23,48
5	27,28	126,34	5,14	10,91	25,79

\*Excluyendo la Zona 3.

#### 4.1.2. Verificación de los supuestos del modelo

El modelo de regresión no lineal asume que los residuos son independientes, idénticamente distribuidos y siguen una distribución normal con media cero y varianza constante:

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

La validez de estos supuestos condiciona la fiabilidad de los intervalos de confianza y de los contrastes de hipótesis sobre los parámetros. Se evalúan mediante pruebas formales y análisis gráfico.

##### Normalidad de los residuos

La normalidad se contrasta mediante el test de Lilliefors [21] y el test de Shapiro-Wilk [22], más potente para muestras pequeñas. Los p-valores obtenidos se recogen en el Cuadro 4.2.

La Zona 2 muestra indicios de no normalidad, especialmente con el test de Shapiro-Wilk ( $p = 0,010$ ), lo que sugiere la presencia de colas pesadas en la distribución de sus residuos. Las Zonas 1, 4 y 5 no

rechazan la normalidad en ningún caso, siendo la Zona 5 la que presenta los residuos más próximos a la normalidad. El conjunto global (Todas\*) rechaza la normalidad, resultado esperado al mezclar grupos con parámetros distintos.

Cuadro 4.2: P-valores de los tests de normalidad (Lilliefors y Shapiro-Wilk) y de homocedasticidad (Levene) de los residuos del ajuste NLS por zona.

Zona	Lilliefors	Shapiro-Wilk	Levene
Todas*	0,036	0,001	0,100
1	0,708	0,591	0,722
2	0,097	0,010	0,757
4	0,502	0,197	0,127
5	0,715	0,717	0,726

Los gráficos Q-Q de cada zona (Figura 4.2) confirman estas conclusiones: las Zonas 1 y 2 presentan desviaciones en las colas, mientras que la Zona 5 se ajusta razonablemente bien a la recta teórica.

### Homocedasticidad de los residuos

La homocedasticidad se evalúa visualmente y mediante el contraste de Breusch-Pagan [23], que detecta dependencia lineal de los residuos cuadráticos respecto a  $\sigma_3$ . El procedimiento consiste en:

1. Ajustar el modelo no lineal y extraer los residuos  $\hat{\varepsilon}_i$ .

2. Regresar  $\hat{\varepsilon}_i^2$  sobre  $\sigma_{3,i}$ :

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \lambda_0 + \lambda_1 \sigma_{3,i} + v_i \quad (4.3)$$

3. Si  $\lambda_1$  es significativo, existe heterocedasticidad lineal (los residuos crecen o decrecen sistemáticamente con  $\sigma_3$ ).

Los resultados se presentan en la Tabla 4.3. En ninguna zona el coeficiente  $\lambda_1$  es significativo, lo que indica ausencia de heterocedasticidad lineal. No obstante, la Figura 4.3 muestra indicios visuales de heterocedasticidad no lineal en las Zonas 1 y 2, con residuos más dispersos en los confinamientos intermedios. Esta discordancia entre el test formal y la inspección visual es coherente con la baja potencia del test de Breusch-Pagan con muestras pequeñas, ya que es un test asintótico cuya fiabilidad aumenta con el tamaño muestral [12].

#### 4.1.3. Selección de la Zona 5 para los análisis posteriores

Del análisis anterior se extraen dos conclusiones. En primer lugar, los datos globales no satisfacen la hipótesis de normalidad por la heterogeneidad entre zonas. En segundo lugar, la Zona 5 es la única que satisface simultáneamente todos los supuestos del modelo: normalidad de los residuos (Lilliefors:  $p = 0,715$ ; Shapiro-Wilk:  $p = 0,717$ ) y ausencia de heterocedasticidad lineal (Levene:  $p = 0,726$ ; Breusch-Pagan pendiente:  $p = 0,276$ ). Adicionalmente, sus parámetros estimados ( $\hat{m}_i = 27,28$ ,  $\hat{\sigma}_{ci} = 126,34$  MPa) son los más consistentes con los valores de referencia para el granito Blanco Mera reportados en la literatura [31].

Por estas razones, los Capítulos 5 y 6 utilizan exclusivamente los datos de la Zona 5. Sus parámetros estimados sirven asimismo como valores verdaderos en las simulaciones de Monte Carlo del Capítulo 6.

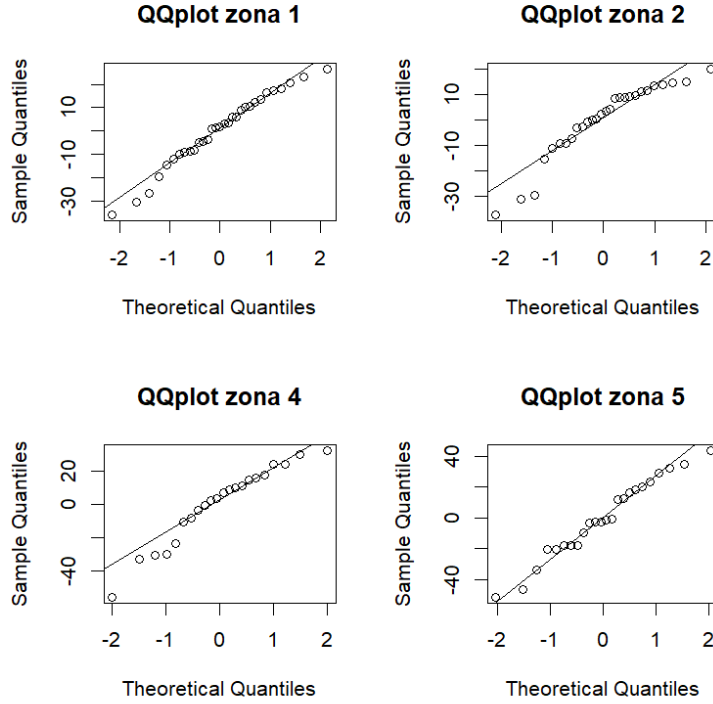


Figura 4.2: Gráficos Q-Q de los residuos del ajuste NLS para cada zona. La línea discontinua representa la distribución normal teórica.

## 4.2. Linealización de la ecuación de Hoek-Brown

### 4.2.1. Transformación algebraica

Linealizar la ecuación de Hoek-Brown tiene implicaciones teórico-prácticas importantes. Para linealizar se llevan a cabo las siguientes transformaciones. Partiendo de la forma simplificada para roca intacta y llamando  $y = \sigma_1$ ,  $x = \sigma_3$ ,  $a = \sigma_{ci}$  y  $b = m_i$ :

$$y = x + a\sqrt{\frac{bx}{a} + 1} \quad (4.4)$$

Restando  $x$  en ambos miembros y elevando al cuadrado:

$$(y - x)^2 = a^2 \left( \frac{bx}{a} + 1 \right) = abx + a^2 \quad (4.5)$$

Definiendo  $y' = (y - x)^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2$ ,  $a' = a^2 = \sigma_c^2$  y  $b' = ab = \sigma_c \cdot m$ , se obtiene el modelo linealizado:

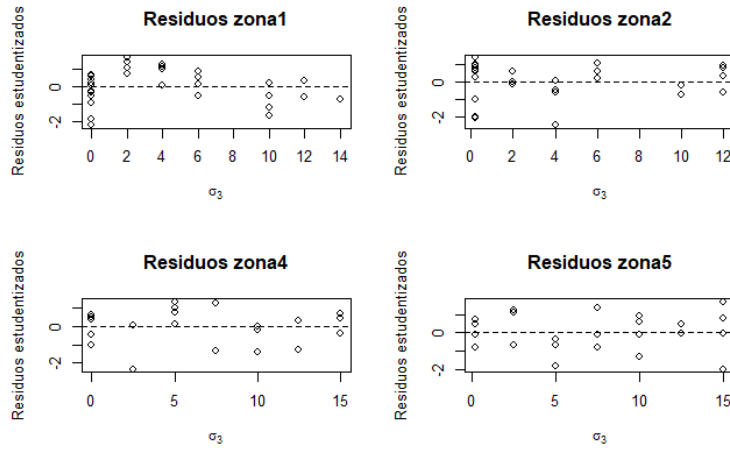
$$y' = a' + b'x \quad (4.6)$$

Una vez estimados  $\hat{a}'$  y  $\hat{b}'$  por regresión lineal ordinaria, los parámetros originales se recuperan mediante la transformación inversa:

$$\hat{\sigma}_{ci} = \sqrt{\hat{a}'}, \quad \hat{m}_i = \frac{\hat{b}'}{\hat{\sigma}_{ci}} \quad (4.7)$$

Cuadro 4.3: P-valor del intercepto y de la pendiente del test de Breusch-Pagan aplicado a los residuos NLS por zona.

Zona	P-valor intercepto	P-valor pendiente
Todas*	0,517	0,164
1	0,048	0,541
2	0,052	0,291
4	0,191	0,724
5	0,911	0,276

Figura 4.3: Residuos del ajuste NLS frente al nivel de confinamiento  $\sigma_3$  para cada zona. Las tendencias en las Zonas 1 y 2 sugieren posible heterocedasticidad no lineal.

#### 4.2.2. Implicaciones sobre la estructura de los errores

En el modelo no lineal original los residuos se modelan como errores aditivos con varianza constante:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} \sqrt{m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + 1} + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (4.8)$$

La variable transformada es  $y' = (\sigma_1 - \sigma_3)^2$ . A medida que  $\sigma_3$  aumenta,  $\sigma_1$  crece de forma más que proporcional debido a la curvatura del modelo, por lo que  $y'$  también es mayor. Para ver cómo afecta esto al error, se sustituye la Ecuación 4.8 en  $y'$  y se expande el cuadrado:

$$y' = \sigma_{ci}^2 \left( m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + 1 \right) + 2 \sigma_{ci} \sqrt{m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + 1} \varepsilon + \varepsilon^2 \quad (4.9)$$

El error del modelo linealizado es:

$$\varepsilon_{lineal} = 2 \sigma_{ci} \sqrt{m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + 1} \varepsilon + \varepsilon^2 \quad (4.10)$$

El coeficiente que multiplica a  $\varepsilon$  crece con  $\sigma_3$ , por lo que la dispersión de  $\varepsilon_{lineal}$  también aumenta con el confinamiento. Aunque el error original  $\varepsilon$  sea homocedástico, el error transformado no lo es. Este fenómeno se denomina **heterocedasticidad inducida por la transformación**.

Adicionalmente, la presencia del término  $\varepsilon^2$  introduce asimetría en la distribución de los residuos, ya que el cuadrado de una variable normal no sigue una distribución normal. Los supuestos de homocedasticidad y normalidad quedan así simultáneamente violados.

### 4.2.3. Verificación empírica sobre los datos de la Zona 5

Se aplica la transformación (Ecuación 4.6) a los datos de la Zona 5. La Figura 4.4 muestra la regresión lineal en la escala transformada (izquierda) y los residuos estudentizados frente a  $\sigma_3$  (derecha). El patrón de abanico que presentan los residuos —con dispersión creciente conforme aumenta  $\sigma_3$ — confirma visualmente la heterocedasticidad predicha teóricamente.

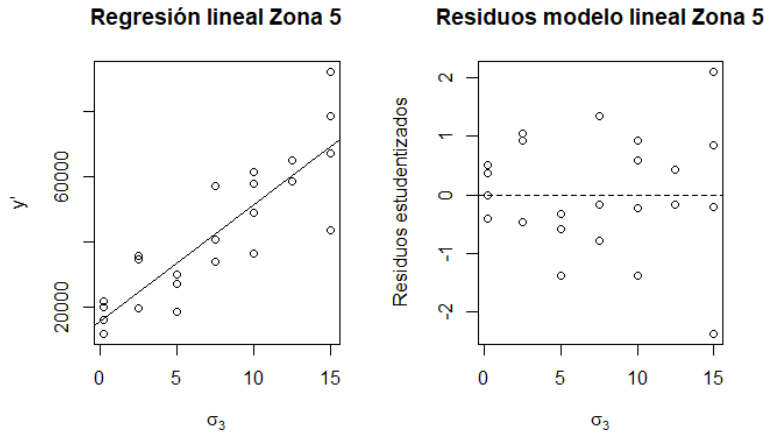


Figura 4.4: Regresión lineal de Hoek-Brown en escala transformada  $y'$  (izquierda) y residuos estudentizados frente a  $\sigma_3$  (derecha) para los datos de la Zona 5. El patrón de abanico evidencia la heterocedasticidad inducida por la transformación.

El test de Breusch-Pagan confirma formalmente esta heterocedasticidad: el p-valor asociado al coeficiente  $\lambda_1$  es 0,035, inferior al nivel de significación  $\alpha = 0,05$ .

A pesar de esta violación, los parámetros obtenidos por la vía lineal no difieren drásticamente de los estimados por NLS (Tabla 4.4). La discrepancia es moderada ( $\Delta\hat{\sigma}_c = 2,15$  MPa;  $\Delta\hat{m} = 1,73$ ), lo que sugiere que la linealización puede ser aceptable como estimación preliminar de los parámetros, pero no como base para el cálculo de intervalos de confianza, donde la estructura de los errores tiene un papel determinante.

Cuadro 4.4: Comparación de los parámetros estimados por el modelo no lineal (NLS) y por la linealización algebraica para los datos de la Zona 5.

Modelo	$\sigma_{ci}$	$m_i$
No lineal	126,34	27,28
Lineal	124,19	29,01

### 4.3. Validación mediante simulación de Monte Carlo

#### 4.3.1. Generador de datos y calibración

Para cuantificar con precisión las consecuencias de la linealización, se diseña un generador de datos sintéticos basado en el modelo de Hoek-Brown con los parámetros de la Zona 5 [26]. La calibración del generador se verifica comprobando que los p-valores del test de Breusch-Pagan siguen una distribución uniforme en  $[0, 1]$ , lo que es esperable bajo la hipótesis nula por la ley débil de los grandes números [26]. En cada simulación se generan  $n$  valores de  $\sigma_1$  según:

$$\sigma_{1,i} = \sigma_{3,i} + \sigma_c \sqrt{m \frac{\sigma_{3,i}}{\sigma_c} + 1} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (4.11)$$

con  $m_i = 27,28$ ,  $\sigma_{ci} = 126,34$  MPa y  $\sigma = 22$  MPa (desviación típica aproximada extraída del conjunto global de datos). Los valores de  $\sigma_3$  se distribuyen siguiendo la estructura real del experimento.

La calibración se verifica repitiendo el experimento 1 000 veces y comprobando que la distribución del p-valor del test de Breusch-Pagan sobre los residuos NLS sigue una distribución uniforme en  $[0, 1]$  (Figura 4.6), lo que confirma que bajo el modelo correctamente especificado el test no detecta heterocedasticidad más allá del nivel esperado por azar.

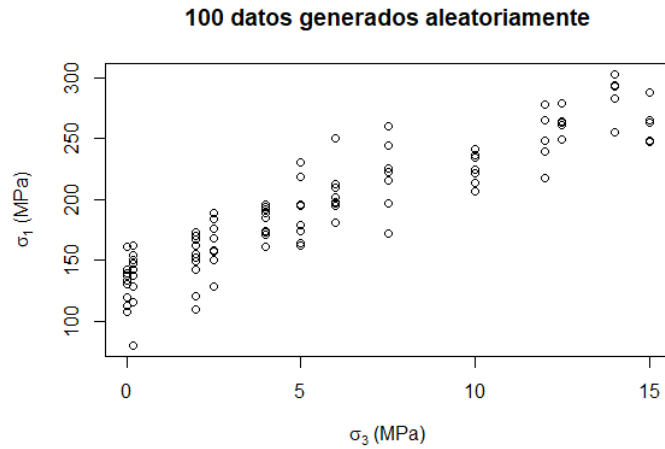


Figura 4.5: Ejemplo de una realización del generador de datos: 100 pares  $(\sigma_3, \sigma_1)$  simulados con los parámetros de la Zona 5.

#### 4.3.2. Comparación del modelo no lineal frente a la linealización

Se realizan 10 000 simulaciones. En cada una se ajusta tanto el modelo NLS como el modelo linealizado, y se aplican los tests de Lilliefors y Breusch-Pagan a los residuos de cada ajuste.

La Figura 4.7 muestra la distribución de los p-valores del test de Lilliefors. Para el modelo NLS la distribución es aproximadamente uniforme, con una tasa de rechazo cercana al 5% nominal. Para el modelo linealizado, la distribución se concentra en valores pequeños, indicando que la hipótesis de normalidad se rechaza en una proporción muy superior al 5%.

La Figura 4.8 muestra los resultados del test de Breusch-Pagan. En el modelo NLS la distribución es uniforme, confirmando la ausencia de heterocedasticidad. En el modelo linealizado, en cambio, la distribución se concentra en valores de p-valor cercanos a cero: la heterocedasticidad se detecta en casi la totalidad de las simulaciones.

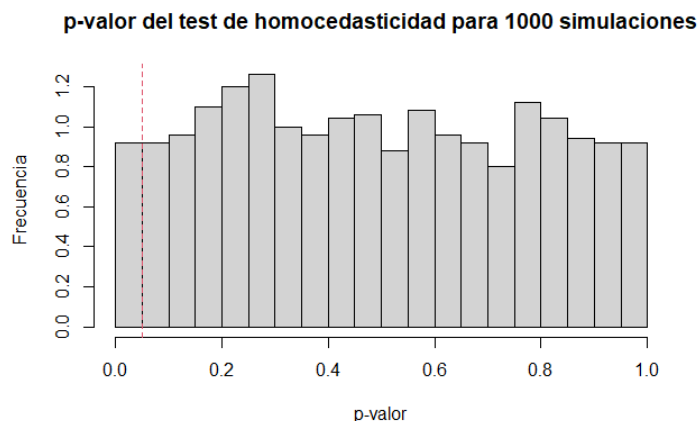


Figura 4.6: Distribución de los p-valor del test de Breusch-Pagan en 1000 simulaciones bajo el modelo no lineal correcto. La distribución uniforme confirma la calibración del generador.

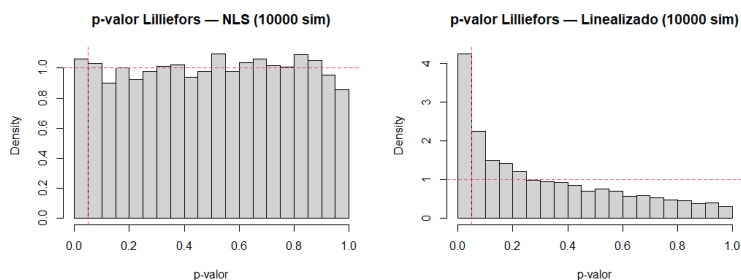


Figura 4.7: Distribución de los p-valor del test de normalidad de Lilliefors en 10000 simulaciones para el modelo NLS (izquierda) y el modelo linealizado (derecha).

La Figura 4.9 representa las regiones de densidad estimada al 95% de los pares  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$  obtenidos en las 10000 simulaciones para ambos métodos. La región del modelo NLS está centrada en los valores verdaderos, confirmando que los estimadores NLS son aproximadamente insesgados. La región del modelo linealizado está desplazada, evidenciando el sesgo introducido por la transformación.

### 4.3.3. Efecto del tamaño muestral reducido

En la práctica geotécnica el tamaño muestral habitual oscila entre 10 y 20 probetas. Para evaluar cómo afecta esta restricción a las conclusiones anteriores, se repite el estudio con  $n = 15$  observaciones por simulación, manteniendo la misma distribución de  $\sigma_3$ .

Con muestras pequeñas, la distribución de los p-valor del test de Lilliefors sobre los residuos NLS se aproxima más a la uniforme también en el caso linealizado (Figura 4.10), lo que refleja la pérdida de potencia del test para detectar la no normalidad cuando  $n$  es reducido. Sin embargo, el test de Breusch-Pagan sigue rechazando la homocedasticidad en la mayoría de las simulaciones del modelo linealizado (Figura 4.11).

La Figura 4.12 compara las regiones de densidad al 95% de los parámetros con  $n = 15$ . Aunque el sesgo del modelo linealizado se reduce respecto al caso con  $n = 100$ , la región de incertidumbre del modelo linealizado sigue siendo mayor que la del NLS, confirmando que la linealización no solo introduce sesgo sino también una mayor varianza de estimación.

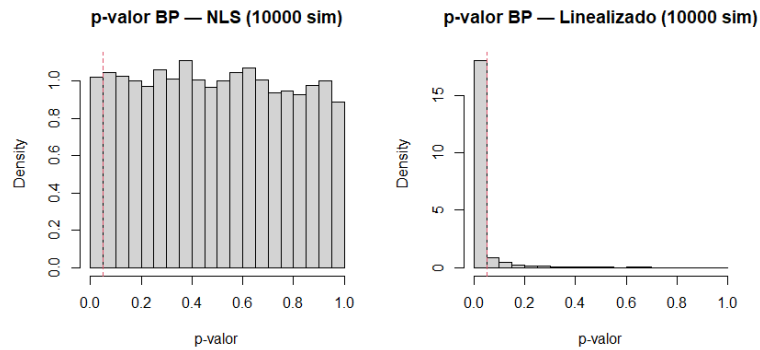


Figura 4.8: Distribución de los p-valores del test de Breusch-Pagan en 10 000 simulaciones para el modelo NLS (izquierda) y el modelo linealizado (derecha). El modelo linealizado viola sistemáticamente la homocedasticidad.

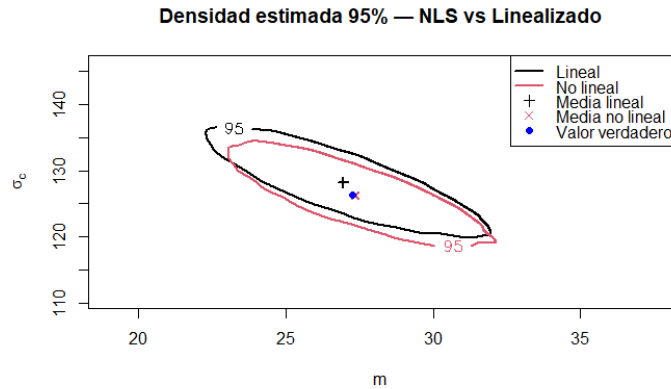


Figura 4.9: Densidad estimada (95 %) de los pares  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$  en 10 000 simulaciones para el modelo NLS (rojo) y el modelo linealizado (negro). El punto azul indica el valor teórico verdadero.

En resumen, la simulación confirma que la linealización de la ecuación de Hoek-Brown viola de forma sistemática los supuestos de normalidad y homocedasticidad de los residuos, introduce un sesgo en los estimadores de los parámetros y aumenta su varianza. El ajuste NLS directo debe ser el procedimiento de referencia, y es el que se emplea en los capítulos siguientes.

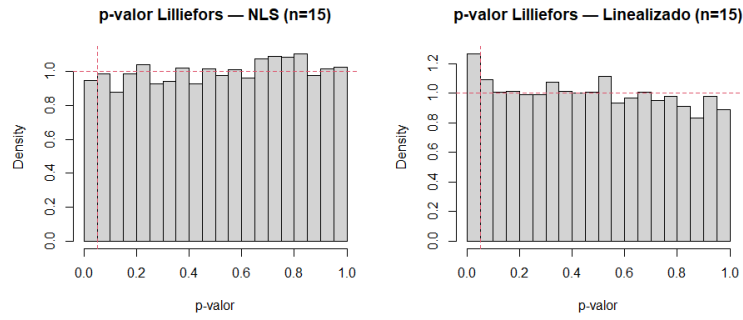


Figura 4.10: Distribución de los p-valores del test de Lilliefors con  $n = 15$  datos por simulación, para el modelo NLS (izquierda) y el linealizado (derecha).

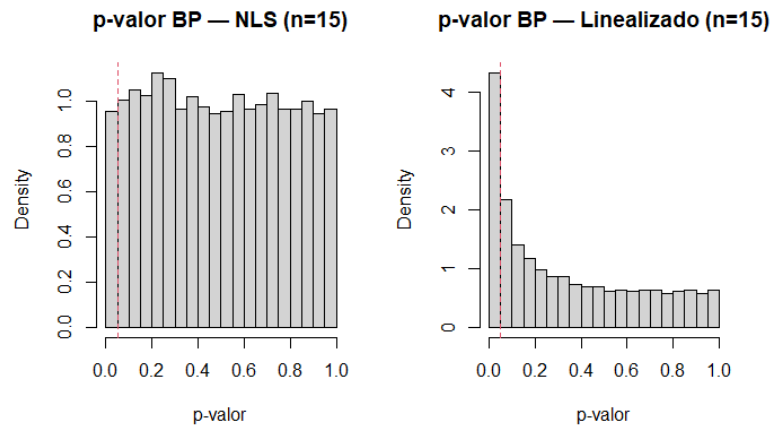


Figura 4.11: Distribución de los p-valores del test de Breusch-Pagan con  $n = 15$  datos por simulación. El modelo linealizado sigue violando la homocedasticidad en la mayoría de las simulaciones.

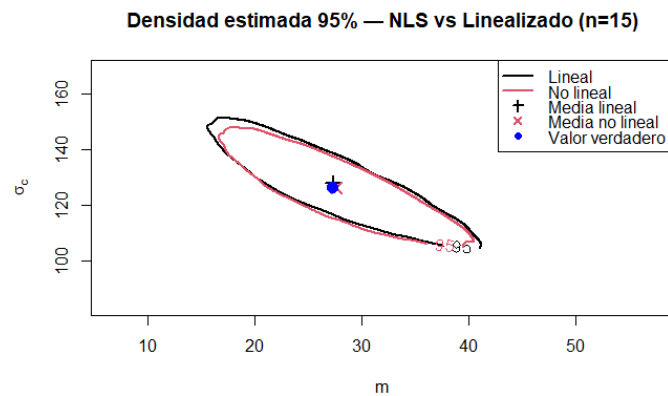


Figura 4.12: Densidad estimada (95%) de los parámetros con  $n = 15$  datos por simulación. A pesar de la reducción del sesgo, la varianza del modelo linealizado es mayor que la del NLS.

## Capítulo 5

# Intervalos de confianza y de predicción

Dada una muestra aleatoria simple  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , se llama intervalo de confianza para un parámetro  $\theta$  con nivel  $1 - \alpha$  a un intervalo aleatorio  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  tal que  $P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$  [27].

Los intervalos de confianza y de predicción son herramientas fundamentales para cuantificar la incertidumbre asociada al ajuste del modelo de Hoek-Brown. El **intervalo de confianza** (IC) delimita la región en la que se sitúa la curva de regresión media con una probabilidad dada; el **intervalo de predicción** (IP) delimita la región en la que debería encontrarse una nueva observación individual, e incorpora además la variabilidad aleatoria del material. En el contexto geotécnico, el intervalo de predicción es el de mayor relevancia práctica, ya que permite establecer cotas razonables para la resistencia de una probeta futura.

El cálculo de estos intervalos en modelos no lineales no es tan inmediato como en la regresión lineal clásica. La no linealidad de la ecuación de Hoek-Brown en sus parámetros impide aplicar directamente las expresiones analíticas del caso lineal, y obliga a recurrir a métodos de aproximación o remuestreo. Los principales enfoques disponibles son:

- **Aproximación asintótica:** calcula la matriz de varianza-covarianza de los parámetros mediante la matriz jacobiana, suponiendo normalidad asintótica. Solo proporciona intervalos de confianza y es una mera aproximación para muestras finitas. No se empleará en este trabajo.
- **Método delta:** usa la expansión de Taylor de primer orden del modelo para propagar la incertidumbre de los parámetros hasta la curva de predicción. Es computacionalmente eficiente pero asintótico. Se desarrolla en la Sección 5.1.
- **Bootstrap:** reajusta el modelo a múltiples muestras remuestreadas, construyendo los intervalos a partir de los percentiles empíricos de las predicciones. No requiere supuestos distribucionales estrictos. Se desarrolla en la Sección 5.2.
- **Simulaciones de Monte Carlo:** simula distribuciones de los parámetros y genera predicciones añadiendo errores aleatorios. Requiere conocer con suficiente precisión las distribuciones de los parámetros, lo que limita su aplicabilidad. No se empleará en este trabajo.

En las secciones siguientes se aplican el método delta y el bootstrap a los datos de la Zona 5, y sus resultados se comparan en la Sección 5.3.

## 5.1. Método Delta

### 5.1.1. Fundamento teórico

El método delta aproxima la varianza de una función de los parámetros estimados mediante una linealización de primer orden, apoyándose en el error cuadrático medio del estimador [12] y en las propiedades asintóticas de los estimadores de mínimos cuadrados no lineales [25]. Para el modelo de Hoek-Brown simplificado, la predicción de  $\sigma_1$  para un valor dado de  $\sigma_3$  es:

$$\hat{\sigma}_1 = \sigma_3 + \sqrt{\hat{m} \cdot \hat{\sigma}_c \cdot \sigma_3 + \hat{\sigma}_c^2} \quad (5.1)$$

que puede reescribirse en forma más compacta como:

$$\hat{\sigma}_1 = \sigma_3 + \hat{\sigma}_c \sqrt{\hat{m} \frac{\sigma_3}{\hat{\sigma}_c} + 1} \quad (5.2)$$

Las derivadas parciales de  $\hat{\sigma}_1$  respecto a los parámetros, evaluadas en  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$ , son:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{\sigma}_c \cdot \sigma_3}{\sqrt{\hat{m} \cdot \hat{\sigma}_c \cdot \sigma_3 + \hat{\sigma}_c^2}} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{m} \cdot \sigma_3 + 2\hat{\sigma}_c}{\sqrt{\hat{m} \cdot \hat{\sigma}_c \cdot \sigma_3 + \hat{\sigma}_c^2}} \quad (5.4)$$

El vector gradiente es:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial m} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_c} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

y la matriz de covarianza de los estimadores, obtenida del ajuste NLS, es:

$$\text{Cov}(\hat{m}, \hat{\sigma}_c) = \begin{pmatrix} \text{Var}(\hat{m}) & \text{Cov}(\hat{m}, \hat{\sigma}_c) \\ \text{Cov}(\hat{m}, \hat{\sigma}_c) & \text{Var}(\hat{\sigma}_c) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

La varianza aproximada de la predicción  $\hat{\sigma}_1$  para un valor fijo de  $\sigma_3$  es entonces:

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_1) \approx \nabla f^\top \cdot \text{Cov}(\hat{m}, \hat{\sigma}_c) \cdot \nabla f \quad (5.7)$$

donde  $\nabla f$  se evalúa en los valores estimados  $\hat{m}$ ,  $\hat{\sigma}_c$ .

El intervalo de confianza al  $100(1 - \alpha)\%$  para  $\hat{\sigma}_1$  es:

$$\hat{\sigma}_1 \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{\sigma}_1)} \quad (5.8)$$

donde  $z_{\alpha/2}$  es el cuantil de la distribución normal estándar (para  $\alpha = 0,05$ ,  $z_{0,025} \approx 1,96$ ).

El método delta aproxima la varianza de  $\hat{\sigma}_1$  mediante una linealización de primer orden de la función de regresión, y asume implícitamente que los estimadores  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$  siguen una distribución aproximadamente normal. En el modelo no lineal de Hoek-Brown esta aproximación no puede asegurarse con los tamaños muestrales habituales en mecánica de rocas: la normalidad de los estimadores es en todo caso asintótica y el análisis bootstrap del Capítulo 5.2.2 muestra que con  $n = 24$  la convergencia es aún insuficiente, manifestándose en una asimetría significativa de  $\hat{m}$  que los intervalos basados en el método delta no son capaces de capturar.

Nótese que la varianza de la predicción (Ecuación 5.7) depende de  $\sigma_3$  a través del gradiente  $\nabla f$ , por lo que la anchura del intervalo no es constante: aumenta en los extremos del rango de confinamiento, donde la curvatura del modelo es mayor y la información de los datos es más escasa.

### 5.1.2. Aplicación a los datos de la Zona 5

El cálculo del IC mediante el método delta se implementa en R de dos formas: manualmente, aplicando las ecuaciones anteriores con el cuantil normal  $z_{0,975} = 1,960$ ; y de forma automática mediante la función `predict2_nls` del paquete `nltraa` [8].

En el cálculo manual se evalúan las derivadas parciales en cada punto  $\sigma_3$  del rango  $[0, 15]$  MPa sobre un grid continuo de 100 puntos, se obtiene la varianza mediante la Ecuación 5.7 y se construye el intervalo con la Ecuación 5.8. El resultado se muestra en la Figura 5.1. Se observa que el IC es más estrecho en la zona central del rango de confinamiento, donde se concentran más datos, y se ensancha progresivamente hacia los extremos.

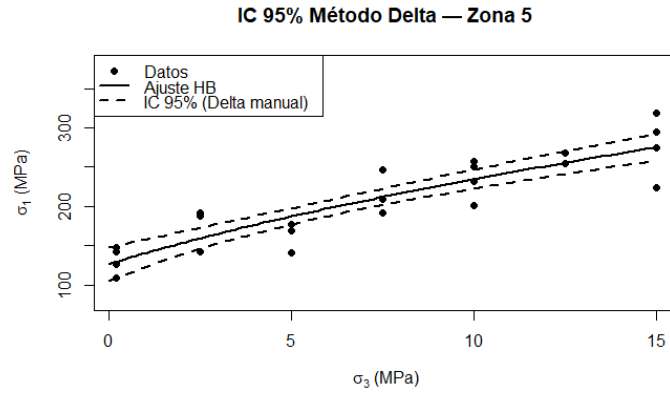


Figura 5.1: Intervalo de confianza al 95 % calculado mediante el método delta de forma manual para los datos de la Zona 5. Las líneas discontinuas representan los límites superior e inferior del IC.

La función `predict2_nls` emplea el cuantil  $\sqrt{p \cdot F_{p, n-p}(1 - \alpha)}$  en lugar del cuantil normal  $z_{\alpha/2}$ , siguiendo el método delta descrito en [11]. Para los datos de la Zona 5 esto se traduce en  $\sqrt{2 \cdot F_{2, 22}(0,95)} = 2,624$ , frente a  $z_{0,975} = 1,960$  del método manual. La diferencia es relevante: el cuantil  $F$  produce intervalos más anchos con cobertura simultánea sobre toda la curva, mientras que el cuantil normal solo garantiza cobertura para un valor fijo de  $\sigma_3$ .

La principal limitación del método delta es su carácter asintótico: la normalidad de los estimadores  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$  es solo una aproximación que mejora con el tamaño muestral. Con  $n = 24$  observaciones en la Zona 5, esta aproximación puede resultar insuficiente. Para cuantificar el efecto de esta limitación sobre la cobertura real de los intervalos, se realizó un estudio de simulación Monte Carlo que se describe en la Sección 5.3.

## 5.2. Simulaciones Bootstrap

### 5.2.1. Fundamento y variante wild

El bootstrap es un método de remuestreo que construye la distribución empírica de un estimador a partir de los propios datos, sin necesidad de asumir una distribución paramétrica concreta para los errores [10, 9]. En el contexto de la regresión no lineal, el bootstrap de residuos reajusta el modelo a múltiples réplicas de los datos obtenidas perturbando los residuos originales, y almacena los parámetros estimados en cada réplica.

En este trabajo se utiliza la variante **wild bootstrap** [9], implementada en R mediante la función `boot_nls` del paquete `nltraa` [8] con `resid.type = "wild"`. En lugar de remuestrear los residuos directamente, el wild bootstrap los perturba mediante un multiplicador aleatorio  $w_i$ :

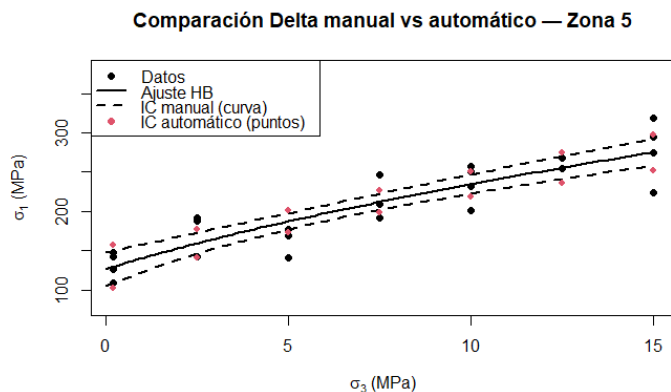


Figura 5.2: Comparación del intervalo de confianza al 95 % calculado de forma manual (líneas discontinuas) y mediante `predict2_nls` (puntos en rojo) para los datos de la Zona 5. La diferencia en anchura se debe al cuantil empleado: normal estándar en el manual, distribución  $F$  en el automático.

$$\hat{\varepsilon}_i^* = \hat{\varepsilon}_i \cdot w_i \quad (5.9)$$

donde  $w_i$  satisface  $E(w_i) = 0$  y  $\text{Var}(w_i) = 1$ . Esta construcción preserva la magnitud de cada residuo individual pero aleatoriza su signo y amplitud, manteniendo así la posible estructura heterocedástica de los errores. Esto hace que el wild bootstrap sea más robusto que el bootstrap clásico cuando no se puede garantizar la homocedasticidad, como ocurre en el presente caso (véase la Sección 4.1.2).

Existen tres variantes del multiplicador  $w_i$ , que difieren en sus propiedades distribucionales:

- **Mammen:** distribución discreta asimétrica que toma los valores  $-(\sqrt{5} - 1)/2 \approx -0,618$  y  $(\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1,618$  con probabilidades  $(\sqrt{5} + 1)/(2\sqrt{5}) \approx 0,724$  y  $(\sqrt{5} - 1)/(2\sqrt{5}) \approx 0,276$ , respectivamente. Es la variante teóricamente más recomendada [9].
- **Normal estándar:**  $w_i \sim N(0,1)$ . Menos recomendada en la práctica pero útil para comprobar la robustez de los resultados.
- **Rademacher:**  $w_i = \pm 1$  con probabilidad 1/2 cada uno. Es la opción por defecto de `boot_nls` y la empleada en este trabajo.

En todos los casos se generan  $R = 1000$  réplicas bootstrap, lo que proporciona una estimación suficientemente estable de los percentiles al 2,5 % y 97,5 % necesarios para el IC al 95 %.

### 5.2.2. Distribución bootstrap de los parámetros

Antes de calcular los intervalos, se examina la distribución empírica de los parámetros  $\hat{m}$  y  $\hat{\sigma}_c$  obtenidos en las 1000 réplicas bootstrap, con el fin de verificar si es razonable asumir normalidad de los estimadores (supuesto implícito en el método delta).

La Figura 5.3 muestra los histogramas de cada parámetro junto con la densidad normal ajustada. En ambos casos se aprecia una asimetría positiva, más pronunciada en  $\hat{m}$ , que sugiere desviación de la normalidad. El test de normalidad multivariable de Mardia [24] confirma este diagnóstico: a un nivel de significación del 5 %, el parámetro  $\hat{m}$  no puede considerarse marginalmente normal, mientras que  $\hat{\sigma}_c$  sí supera el test.

La distribución conjunta de los estimadores ( $\hat{m}$ ,  $\hat{\sigma}_c$ ) se analiza mediante el test de normalidad multivariante de Mardia, cuyo fundamento teórico se enmarca en la inferencia sobre poblaciones normales multivariantes [30].

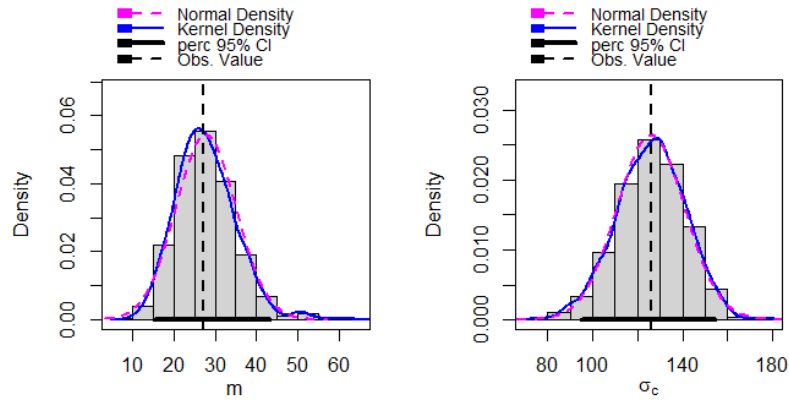


Figura 5.3: Densidad empírica de los parámetros  $\hat{m}$  (izquierda) y  $\hat{\sigma}_c$  (derecha) obtenidos en 1000 réplicas de wild bootstrap, junto con la densidad normal ajustada (línea roja). La asimetría de  $\hat{m}$  indica desviación de la normalidad.

La Figura 5.4 representa todas las parejas  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$  de las réplicas bootstrap en el plano de los parámetros. La nube de puntos tiene forma de álabes elongado con colas desplazadas hacia valores altos de  $m$ , lo que confirma la ausencia de normalidad bivalente (el test de Mardia lo rechaza). Esta correlación negativa entre los estimadores es característica del modelo de Hoek-Brown: un incremento en  $m$  tiende a ser compensado por una reducción en  $\sigma_c$  para mantener el ajuste a los datos.

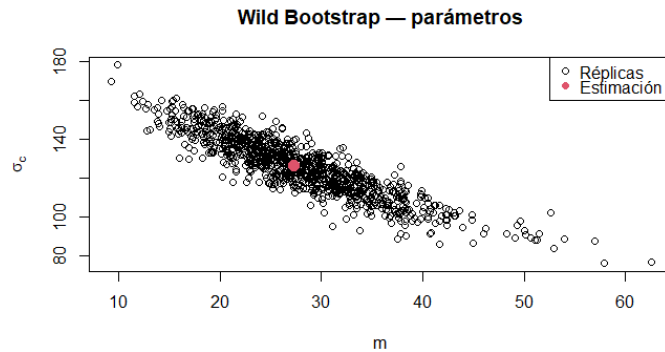


Figura 5.4: Pares  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$  obtenidos en 1000 réplicas de wild bootstrap (círculos) y valor medio (punto rojo). La forma de álabes refleja la correlación negativa entre los estimadores y la asimetría de la distribución de  $\hat{m}$ .

La asimetría significativa de  $\hat{m}$  observada en las réplicas bootstrap tiene una consecuencia directa sobre el método delta manual: al emplear el cuantil normal  $z_{\alpha/2}$  y asumir implícitamente normalidad de los estimadores mediante la linealización de primer orden, produce intervalos simétricos que no capturan esa asimetría, lo que se traduce en una cobertura simultánea inferior a la nominal. El método delta con cuantil  $F$  comparte el mismo supuesto de normalidad, pero al emplear un cuantil basado en la distribución  $F$  con  $p = 2$  grados de libertad en el numerador construye una banda que controla

el error de forma conjunta sobre el espacio de ambos parámetros  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$ , lo que le confiere mejores propiedades de cobertura simultánea. El wild bootstrap, al construir los intervalos directamente a partir de los percentiles empíricos de las réplicas, no necesita ningún supuesto distribucional sobre los estimadores y refleja de forma natural la distribución real de  $\hat{m}$ .

### 5.2.3. Intervalos de confianza bootstrap

A partir de las 1 000 réplicas se construye la región de densidad estimada al 95 % para los parámetros (Figura 5.5). Esta región, de forma elipsoidal pero asimétrica, representa la incertidumbre conjunta sobre  $(m, \sigma_c)$  sin necesidad de suponer normalidad bivalente.

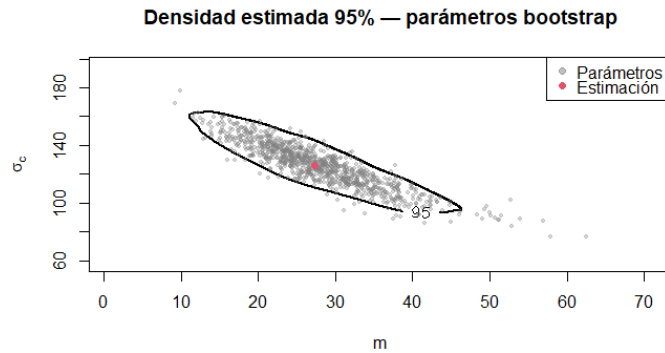


Figura 5.5: Región de densidad estimada al 95 % para los parámetros  $m$  y  $\sigma_c$  obtenida mediante wild bootstrap (1 000 réplicas). El punto rojo indica el valor medio de las réplicas.

Para la curva de Hoek-Brown, el IC al 95 % se construye representando todas las curvas generadas por los parámetros de las réplicas bootstrap y calculando los percentiles 2,5 % y 97,5 % de  $\hat{\sigma}_1$  en cada valor de  $\sigma_3$ . El resultado se muestra en la Figura 5.6: la banda sombreada recoge la variabilidad de las curvas bootstrap y las líneas discontinuas azules delimitan el IC al 95 %.

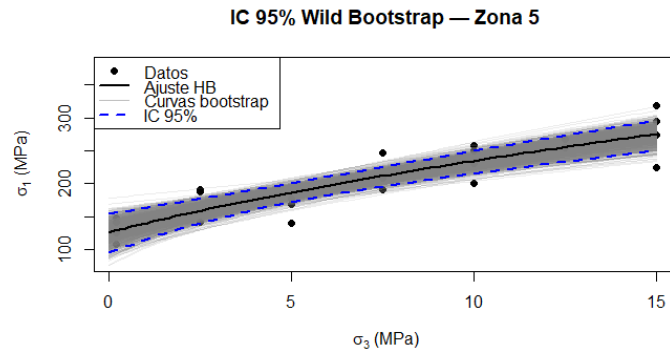


Figura 5.6: Intervalo de confianza al 95 % para la curva de Hoek-Brown mediante wild bootstrap (1 000 réplicas). La banda gris representa las curvas individuales de cada réplica y las líneas discontinuas azules delimitan el IC al 95 %.

Se observa que el IC bootstrap es asimétrico respecto a la curva ajustada: el límite superior es algo más amplio que el inferior, especialmente a confinamientos altos. Este comportamiento es coherente con la asimetría de la distribución de  $\hat{m}$ , que genera más incertidumbre en el extremo superior de la curva.

### 5.3. Comparación de los métodos

La Figura 5.7 superpone los IC al 95 % obtenidos con los tres procedimientos aplicados: el método delta manual, el método delta automático (`predict2_nls`) y el wild bootstrap.

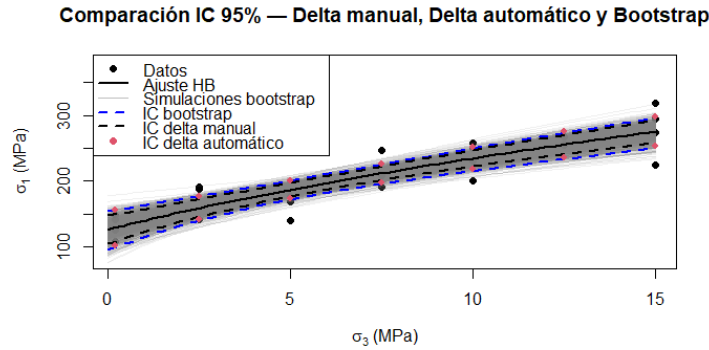


Figura 5.7: Comparación de los intervalos de confianza al 95 % para la curva de Hoek-Brown de la Zona 5 obtenidos mediante el método delta manual (línea discontinua negra), el método delta automático (puntos rojos) y el wild bootstrap (línea discontinua azul).

Visualmente, los tres métodos producen intervalos similares en la zona central del rango de confinamiento, donde los datos son más abundantes, y se ensanchan progresivamente hacia los extremos. El método delta manual produce los intervalos más estrechos, mientras que el método delta automático y el wild bootstrap son prácticamente coincidentes en anchura.

Para cuantificar objetivamente la precisión de cada método, se realizó un estudio de cobertura empírica mediante simulación Monte Carlo con  $N = 1000$  réplicas. En cada réplica se generó un conjunto de datos sintético con los parámetros verdaderos  $m = 27,275$  y  $\sigma_c = 126,337$  MPa y la misma estructura de confinamientos que la Zona 5, se ajustó el modelo de Hoek-Brown y se calcularon los tres IC al 95 %. La cobertura empírica se define como la proporción de réplicas en que el IC contiene la curva verdadera en *todos* los puntos del grid simultáneamente. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- **Método delta manual** (`qnorm`): cobertura del 83,0 %, muy inferior al valor nominal del 95 %. El cuantil normal  $z_{0,975} = 1,960$  asume normalidad asintótica de los estimadores  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$ , supuesto que con  $n = 24$  no se ha alcanzado, como evidencia la asimetría de la distribución bootstrap de  $\hat{m}$ . El cuantil resulta insuficiente para garantizar la cobertura nominal. La baja cobertura se explica fundamentalmente por el carácter no simultáneo que tiene este método.
- **Método delta automático** (`predict2_nls`): cobertura del 94,6 %, próxima al valor nominal. Ambos métodos delta comparten los mismos supuestos de primer orden y la misma aproximación lineal del gradiente, por lo que la mejora respecto al método manual no se explica por una mayor corrección conceptual. El cuantil  $\sqrt{p \cdot F_{p, n-p}(0,95)} = 2,624$ , diseñado para construir una banda de confianza simultánea sobre toda la curva, es un 34 % mayor que el cuantil normal, lo cual permite que este método sea exitoso.

- **Wild bootstrap:** cobertura del 95,1 %, la más próxima al valor nominal, y obtenida por las razones correctas. El bootstrap construye la distribución empírica de los estimadores sin asumir su normalidad asintótica ni la homocedasticidad de los errores, capturando directamente la asimetría de  $\hat{m}$  que los métodos delta no pueden reproducir. La cobertura simultánea observada puede ser una consecuencia empírica de la fuerte correlación entre los valores de la curva a distintos niveles de confinamiento, que comparten los mismos parámetros estimados  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$ , y no una garantía teórica del método.

Desde el punto de vista práctico, el wild bootstrap ofrece además la ventaja de representar la distribución conjunta de los parámetros estimados (Figura 5.5), proporcionando información sobre la incertidumbre que los métodos delta no ofrecen directamente.

Por todo lo anterior, el wild bootstrap se considera el método más adecuado para el cálculo de intervalos de confianza en el ajuste del modelo de Hoek-Brown con muestras de tamaño reducido, y es el que se empleará como referencia en el Capítulo 6.

### 5.3.1. Intervalo de predicción mediante wild bootstrap

El intervalo de confianza calculado en la sección anterior delimita la región en la que se sitúa la **curva media** del modelo con una probabilidad dada. Sin embargo, en la práctica geotécnica el interés no recae únicamente en la curva media, sino en predecir la resistencia  $\sigma_1$  que presentará una **nueva probeta** ensayada a un confinamiento  $\sigma_3$  determinado. Esta nueva observación estará sujeta tanto a la incertidumbre en los parámetros del modelo como a la variabilidad aleatoria propia del material.

Se calculan dos versiones del IP al 95 %, que difieren en el tratamiento del término de error de la nueva observación. En ambos casos los parámetros  $\hat{m}$  y  $\hat{\sigma}_c$  se mantienen fijos en los valores estimados del ajuste NLS original: no se trata de remuestrear los parámetros, sino de modelar la variabilidad de una nueva observación alrededor de la curva ajustada.

La primera versión asume normalidad del error individual:

$$\sigma_{1,\text{pred}}^{(b)}(\sigma_3) = \hat{\sigma}_1(\sigma_3) + \varepsilon^{(b)}, \quad \varepsilon^{(b)} \sim \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}^2) \quad (5.10)$$

La segunda es un IP wild bootstrap puro, en el que el término de error se construye reutilizando los residuos observados perturbados por un multiplicador de Rademacher independiente por punto, sin imponer ninguna forma paramétrica sobre la distribución del error:

$$\sigma_{1,\text{pred}}^{(b)}(\sigma_3) = \hat{\sigma}_1(\sigma_3) + \hat{\varepsilon}_j \cdot w^{(b)}, \quad w^{(b)} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Rademacher} \quad (5.11)$$

donde  $\hat{\sigma}_1(\sigma_3) = \sigma_3 + \hat{\sigma}_c \sqrt{\hat{m} \sigma_3 / \hat{\sigma}_c + 1}$  es la curva ajustada con los parámetros originales,  $\hat{\varepsilon}_j$  es el residuo observado en el nivel de  $\sigma_3$  evaluado, y  $w^{(b)}$  toma los valores  $\pm 1$  con probabilidad 1/2. En ambos casos el IP al 95 % se obtiene como los percentiles 2,5 % y 97,5 % de  $\sigma_{1,\text{pred}}^{(b)}$  sobre las  $R = 1000$  réplicas.

Nótese que la versión con error normal es inconsistente con la motivación del wild bootstrap, que es precisamente no imponer normalidad ni homocedasticidad. El IP wild puro es el único coherente con dicha motivación, aunque su calidad en los extremos del rango está limitada por la distribución irregular de los niveles de  $\sigma_3$  disponibles, que restringe la representatividad de los residuos reutilizados en esas zonas. Ambas versiones se presentan a efectos comparativos.

Los resultados se muestran en las Figuras 5.8 y 5.9. La diferencia en anchura entre el IC y el IP es apreciable en ambas versiones, especialmente en los extremos del rango de confinamiento, poniendo de manifiesto que el IC refleja únicamente una parte de la incertidumbre total relevante para el diseño geotécnico.

**Por qué es importante calcular el intervalo de predicción.** En el diseño geotécnico, la magnitud que condiciona la seguridad de una excavación o una cimentación no es la resistencia media del

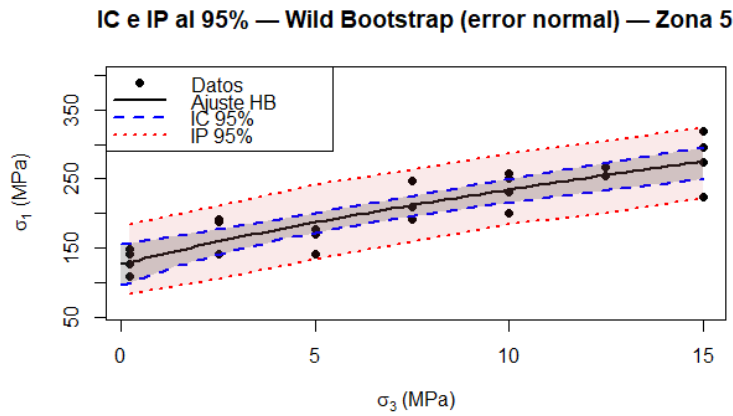


Figura 5.8: Intervalo de confianza (línea discontinua azul) e intervalo de predicción con error normal (línea discontinua roja) al 95 % para la curva de Hoek-Brown de la Zona 5. Los parámetros se mantienen fijos en los valores del ajuste original; la variabilidad refleja únicamente el error de una nueva observación.

macizo, sino la resistencia que cabe esperar en el punto más desfavorable. Utilizar únicamente el IC para tomar decisiones de diseño equivale a ignorar la variabilidad natural del material y conduce a diseños sistemáticamente no conservadores: una probeta real puede perfectamente situarse fuera del IC pero dentro del IP, y ese es precisamente el escenario que el ingeniero debe considerar.

En términos cuantitativos, el IC al 95 % garantiza que la curva media verdadera se encuentra dentro de la banda con probabilidad 0,95, pero no dice nada sobre dónde se situará una observación futura. El IP al 95 %, en cambio, garantiza que una nueva observación individual se encontrará dentro de la banda con esa misma probabilidad, asumiendo que el modelo está correctamente especificado. Esta distinción es especialmente relevante en mecánica de rocas, donde los coeficientes de variación del material son elevados y la dispersión individual de los ensayos puede ser grande incluso cuando la curva media está bien estimada.

## 5.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se han calculado y comparado los intervalos de confianza y de predicción para la curva de Hoek-Brown ajustada a los datos de la Zona 5, empleando el método delta y el wild bootstrap. Las principales conclusiones son las siguientes.

En primer lugar, el método delta y el wild bootstrap producen intervalos de confianza muy similares para el tamaño muestral disponible ( $n = 24$ ), lo que indica que la aproximación de primer orden del método delta es razonablemente precisa en este caso. No obstante, el bootstrap es teóricamente más riguroso porque no asume normalidad de los parámetros ni homocedasticidad de los errores, supuestos que el análisis del Capítulo 4 ha puesto en cuestión. La distribución bootstrap de los parámetros muestra una asimetría significativa en  $\hat{m}$ , con colas desplazadas hacia valores altos, que el método delta no captura.

En segundo lugar, el método delta manual produce intervalos más estrechos que los otros dos procedimientos debido al cuantil empleado: el cuantil normal  $z_{0,975} = 1,960$  es inferior tanto al cuantil  $F$  utilizado por el método automático como al cuantil empírico del bootstrap, lo que se traduce en una cobertura real del 83 % frente al 95 % nominal. Su uso es únicamente recomendable para intervalos

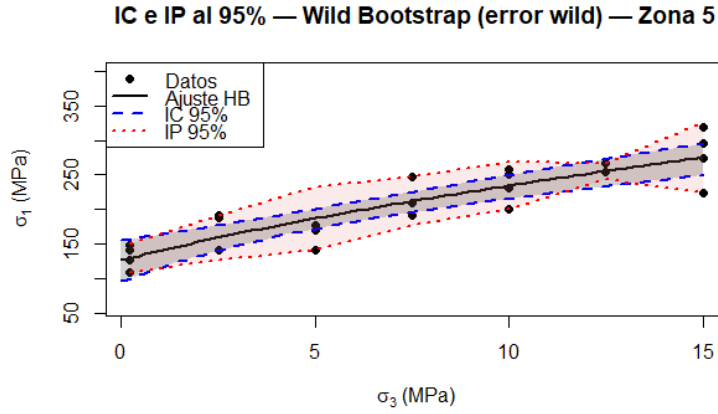


Figura 5.9: Intervalo de confianza (línea discontinua azul) e intervalo de predicción wild bootstrap puro (línea discontinua roja) al 95 % para la curva de Hoek-Brown de la Zona 5. El término de error se construye reutilizando los residuos observados perturbados por un multiplicador de Rademacher, sin imponer normalidad ni homocedasticidad.

de confianza para un valor fijo de  $\sigma_3$ .

En tercer lugar, el intervalo de predicción es sustancialmente más ancho que el intervalo de confianza, con diferencias que alcanzan varias decenas de MPa en los extremos del rango de confinamiento. Esta diferencia cuantifica la incertidumbre adicional asociada a la variabilidad intrínseca del material y pone de manifiesto que el IC solo refleja una parte de la incertidumbre total relevante para el diseño geotécnico. Se han calculado dos versiones del IP: una asumiendo normalidad del error de la nueva observación y otra mediante wild bootstrap puro. Ambas versiones del IP incorporan la incertidumbre paramétrica mediante wild bootstrap, diferenciándose en el tratamiento del término de error individual. Sin embargo, existe una inconsistencia en el IP con error normal: asumir  $\varepsilon^{(b)} \sim \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}^2)$  contradice la motivación principal del wild bootstrap, que es precisamente no imponer normalidad ni homocedasticidad de los errores. El IP wild bootstrap puro es, por tanto, el único coherente con dicha motivación, aunque su calidad en los ciertos valores de  $\sigma_3$  está limitada por la distribución irregular de dichos niveles disponibles y el reducido tamaño muestral. Esta limitación constituye una línea de mejora natural para trabajo futuro, en particular mediante la incorporación de ensayos adicionales en dichos rangos de confinamiento.

Finalmente, la correlación negativa observada entre los estimadores  $\hat{m}$  y  $\hat{\sigma}_c$  en la distribución bootstrap (Figura 5.5) es una característica estructural del modelo de Hoek-Brown que tiene implicaciones directas sobre el diseño experimental: si los niveles de  $\sigma_3$  están mal elegidos, esta correlación se intensifica y la incertidumbre conjunta de los parámetros aumenta considerablemente. Esta observación conecta directamente con el Capítulo 6, donde se estudia de forma sistemática cómo la elección de los niveles de confinamiento afecta a la precisión de las estimaciones.

# Capítulo 6

## Influencia del diseño muestral

A la hora de distribuir los ensayos de cara a una caracterización mecánica basada en ensayos de laboratorio, una de las principales cuestiones está asociada a la distribución de los ensayos en  $\sigma_3$ . Dado que son destructivos y costosos, es fundamental que los niveles de confinamiento  $\sigma_3$  elegidos sean informativos para estimar los parámetros del modelo de Hoek-Brown con la mayor precisión posible. En este capítulo se aborda esta cuestión mediante dos aproximaciones complementarias: un estudio de simulación de Monte Carlo que evalúa distintas configuraciones experimentales, y un análisis teórico que proporciona una justificación formal de los resultados empíricos observados.

### 6.1. Modelo de simulación

El generador de datos sigue la relación no lineal descrita en la Ecuación 4.11, con los valores verdaderos de los parámetros fijados en los estimados para la Zona 5:

$$m = 27,275, \quad \sigma_c = 126,337 \text{ (MPa)} \quad (6.1)$$

El término de error se genera como  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ , con  $\sigma = 16$  MPa, valor estimado a partir de los grupos de ensayos con  $\sigma_3 = 0$  MPa y  $\sigma_3 = 10$  MPa de la Zona 5, donde la variabilidad refleja principalmente la dispersión intrínseca del material bajo condiciones de carga fijas (véase la justificación en la Sección 5.3).

Para cada configuración experimental se generan  $n_{sim} = 1000$  réplicas independientes. En cada réplica se ajusta el modelo mediante mínimos cuadrados no lineales y se almacenan las estimaciones  $\hat{m}$  y  $\hat{\sigma}_c$ .

#### 6.1.1. Procedimiento de simulación

El procedimiento seguido en cada réplica es el siguiente:

1. Se fijan los valores verdaderos  $m = 27,275$  y  $\sigma_c = 126,337$  MPa.
2. Se genera el vector de confinamientos  $\sigma_3$  según la configuración experimental considerada.
3. Se generan los valores de  $\sigma_1$  añadiendo un error gaussiano de desviación típica  $\sigma = 16$  MPa.
4. Se ajusta el modelo NLS con valores iniciales  $m_0 = 40$ ,  $\sigma_{c,0} = 120$  MPa.
5. Se almacenan las estimaciones  $\hat{m}$  y  $\hat{\sigma}_c$ .

### 6.1.2. Métricas de evaluación

Para cada configuración experimental y cada parámetro  $\theta \in \{m, \sigma_c\}$  se calculan las siguientes métricas sobre las  $n_{sim}$  réplicas:

- **Media de las estimaciones**

$$\bar{\theta} = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{i=1}^{n_{sim}} \hat{\theta}_i \quad (6.2)$$

- **Error estándar de simulación**

$$SE(\theta) = \sqrt{\frac{1}{n_{sim} - 1} \sum_{i=1}^{n_{sim}} (\hat{\theta}_i - \bar{\theta})^2} \quad (6.3)$$

- **Sesgo**

$$Bias(\theta) = \bar{\theta} - \theta \quad (6.4)$$

- **Raíz del error cuadrático medio (RMSE)**

$$RMSE(\theta) = \sqrt{\frac{1}{n_{sim}} \sum_{i=1}^{n_{sim}} (\hat{\theta}_i - \theta)^2} \quad (6.5)$$

Para comparar configuraciones de forma global se define el índice:

$$Score = \sqrt{\left(\frac{RMSE_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{RMSE_{\sigma_c}}{\sigma_c}\right)^2} \quad (6.6)$$

Este índice es la distancia euclídea en el espacio de errores relativos de ambos parámetros. Al normalizar por los valores verdaderos, se pondera por igual la precisión en  $m$  y en  $\sigma_c$ , independientemente de su escala. Un valor de Score menor indica una configuración experimental más informativa.

## 6.2. Pruebas exploratorias

Como paso previo al estudio sistemático, se evalúan 16 configuraciones experimentales representativas (Tabla 6.1), con un total de 20 ensayos distribuidos entre distintos niveles de  $\sigma_3$ . El objetivo es identificar qué factores — rango de  $\sigma_3$ , número de niveles y distribución de los ensayos — tienen mayor impacto sobre el Score global antes de diseñar el estudio de simulación sistemático.

Los resultados del Score global para cada configuración se recogen en la Tabla 6.2. Del análisis de estas pruebas se extraen tres observaciones que orientan el estudio sistemático posterior.

En primer lugar, las configuraciones con solo dos niveles de  $\sigma_3$  concentrados en los extremos del rango obtienen los mejores Scores (P12: 0,09; P15: 0,07; P14: 0,08), mientras que las configuraciones con muchos niveles intermedios obtienen los peores (P6: 0,16; P4: 0,15). Esto sugiere que la dispersión del rango de  $\sigma_3$  es más relevante que el número de niveles.

En segundo lugar, el aumento del tamaño muestral (P7:  $n = 80$ ) reduce el Score de forma drástica (0,05), lo que confirma la importancia del número de ensayos.

En tercer lugar, la asimetría en la distribución de los ensayos entre los dos extremos influye en los resultados: las configuraciones con mayor peso relativo en  $\sigma_3 = 0$  (P9, P14, P15) superan a las que lo tienen en el extremo superior (P10).

Motivados por estas observaciones, el estudio sistemático siguiente se centra en configuraciones con únicamente dos niveles de  $\sigma_3$  (0 y un valor máximo  $\sigma_{3,\text{máx}}$ ), variando de forma controlada la proporción entre ambos, la magnitud del extremo superior y el tamaño muestral total.

Cuadro 6.1: Número de muestras en cada nivel de  $\sigma_3$  (MPa) para las 16 configuraciones exploratorias.

Prueba	0	0,2	2	4	5	6	10	15	25	45
P1	10	0	0	0	0	0	10	0	0	0
P2	10	0	0	0	5	0	5	0	0	0
P3	7	0	0	0	7	0	6	0	0	0
P4	5	0	5	0	0	5	5	0	0	0
P5	8	0	4	0	4	0	4	0	0	0
P6	4	0	3	3	3	3	4	0	0	0
P7	40	0	0	0	0	0	40	0	0	0
P8	6	0	2	2	2	2	6	0	0	0
P9	15	0	0	0	0	0	5	0	0	0
P10	5	0	0	0	0	0	15	0	0	0
P11	10	0	0	0	10	0	0	0	0	0
P12	10	0	0	0	0	0	0	10	0	0
P13	10	0	0	0	5	0	0	5	0	0
P14	15	0	0	0	0	0	0	0	5	0
P15	15	0	0	0	0	0	0	0	0	5
P16	0	15	0	0	0	0	5	0	0	0

## 6.3. Estudio de simulación sistemático

### 6.3.1. Escenario 1: proporción entre los dos niveles de $\sigma_3$

Se estudia el efecto de la proporción de ensayos asignada a cada nivel de  $\sigma_3$ , fijando  $\sigma_{3,\text{máx}} = 15$  MPa y el tamaño muestral total en  $n = 20$  ensayos. La proporción varía desde 5/95 (1 ensayo en  $\sigma_3 = 0$  y 19 en  $\sigma_3 = 15$ ) hasta 95/5 (19 en  $\sigma_3 = 0$  y 1 en  $\sigma_3 = 15$ ), en pasos del 5 %.

Los resultados se recogen en la Tabla 6.3 y se representan en la Figura 6.1. El Score global presenta un mínimo plano en la región 55/45–65/35, con el valor mínimo en la proporción 60/40 ( $Score = 0,09$ ). Las proporciones extremas (5/95 y 95/5) producen errores muy superiores ( $Score \approx 0,26$  y 0,17, respectivamente), lo que confirma que ambos extremos del rango de  $\sigma_3$  son necesarios para una estimación precisa de los dos parámetros.

La asimetría del mínimo respecto al 50/50 es coherente con la estructura del modelo:  $\sigma_c$  se identifica principalmente con los ensayos a  $\sigma_3 = 0$  (donde  $\sigma_1 \approx \sigma_c$ ), mientras que  $m$  requiere variación en  $\sigma_3$  para poder estimarse. Una proporción ligeramente mayor de ensayos a  $\sigma_3 = 0$  equilibra la información

disponible para ambos parámetros simultáneamente.

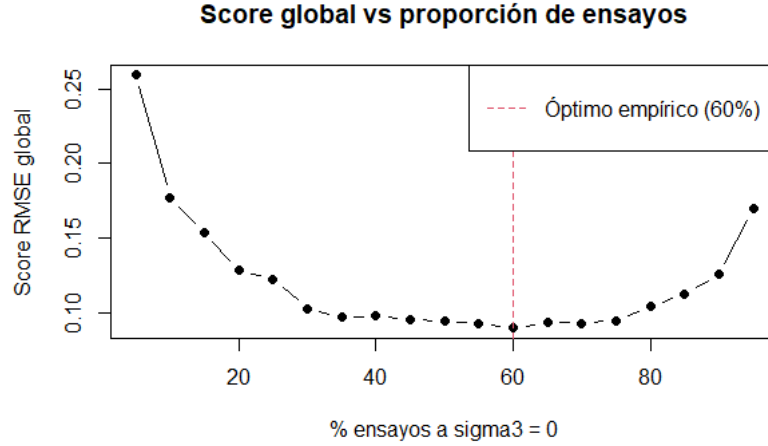


Figura 6.1: Score global en función de la proporción de ensayos a  $\sigma_3 = 0$  frente a  $\sigma_3 = 15$  MPa. El mínimo se alcanza en la región 55/45–65/35.

### 6.3.2. Escenario 2: magnitud del valor máximo de $\sigma_3$

Se analiza el efecto de la magnitud de  $\sigma_{3,\text{máx}}$ , manteniendo fija la proporción 60/40 (12 ensayos a  $\sigma_3 = 0$  y 8 a  $\sigma_{3,\text{máx}}$ ) y el tamaño muestral  $n = 20$ . El valor  $\sigma_{3,\text{máx}}$  varía entre 5 y 50 MPa.

La Figura 6.2 muestra la evolución del Score global. El error decrece de forma pronunciada al aumentar  $\sigma_{3,\text{máx}}$  desde 5 MPa hasta aproximadamente 20 MPa, a partir de donde la mejora se vuelve asintótica. Este comportamiento tiene una interpretación física directa: a mayor rango de confinamiento ensayado, mayor es la variación observable de la respuesta  $\sigma_1$ , lo que incrementa la información disponible para separar la contribución de  $m$  y  $\sigma_c$  al ajuste.

Sin embargo, en la práctica el rango de  $\sigma_3$  está limitado por las condiciones geológicas del problema (las tensiones confinantes en la obra real) y por la capacidad de la celda de Hoek disponible en el laboratorio. El resultado de este escenario indica que extender el rango de confinamiento hasta 20–25 MPa recoge la mayor parte del beneficio posible, y que incrementarlo más allá de 30 MPa aporta una mejora marginal que puede no justificar el coste adicional del ensayo.

### 6.3.3. Escenario 3: tamaño muestral

Se analiza el efecto del número total de ensayos  $n$ , variándolo entre 10 y 100 manteniendo  $\sigma_{3,\text{máx}} = 15$  MPa y la proporción 60/40. Dado que  $n$  varía, la distribución exacta de ensayos entre los dos niveles se redondea hacia la proporción 60/40 más próxima.

La Figura 6.3 muestra la evolución del Score. Como era de esperar, el error decrece al aumentar  $n$ , con una forma aproximadamente logarítmica: las ganancias son sustanciales al pasar de 10 a 30 ensayos, pero se van reduciendo progresivamente a partir de ahí. Este comportamiento es coherente con la teoría estadística, donde la varianza de los estimadores NLS es asintóticamente proporcional a  $1/n$ .

Desde el punto de vista práctico, este resultado sugiere que existe un número de ensayos a partir del cual el coste adicional de cada probeta no se justifica por la mejora en precisión obtenida. Para los

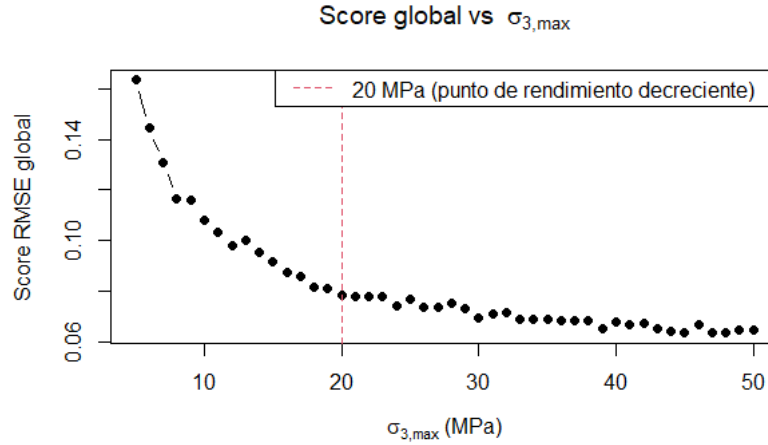


Figura 6.2: Score global en función del valor máximo de  $\sigma_3$  ( $n = 20$ , proporción 60/40, 1 000 réplicas). La mejora es pronunciada hasta  $\sigma_{3,\text{máx}} \approx 20$  MPa y asintótica a partir de ese valor.

parámetros del granito Blanco Mera, este punto de rendimiento decreciente se sitúa aproximadamente en torno a  $n = 30\text{--}40$  ensayos.

## 6.4. Fundamento teórico: conexión con el diseño óptimo de experimentos

Los resultados empíricos de las secciones anteriores muestran de forma consistente que las configuraciones óptimas concentran los ensayos en los extremos del rango de  $\sigma_3$ . En esta sección se proporciona una justificación teórica de este comportamiento, partiendo de un análisis en el caso lineal y extendiendo el razonamiento al modelo de Hoek-Brown.

### 6.4.1. Análisis en el caso lineal

Sea  $X$  una variable aleatoria con soporte en el intervalo  $[0, a]$ , con  $a > 0$ . Se definen:

$$\mu = E[X], \quad m_2 = E[X^2], \quad \text{Var}(X) = m_2 - \mu^2 \quad (6.7)$$

En el contexto de la regresión lineal simple  $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ , la varianza del estimador de la pendiente  $\hat{\beta}$  es inversamente proporcional a  $\text{Var}(X)$ . Minimizar la varianza de  $\hat{\beta}$  equivale, por tanto, a maximizar  $\text{Var}(X)$ .

Para variables acotadas en  $[0, a]$  se cumple la desigualdad de Popoviciu:

$$\text{Var}(X) \leq \frac{a^2}{4} = \mu(a - \mu) \Big|_{\mu=a/2} \quad (6.8)$$

con igualdad si y solo si  $X$  se concentra en los extremos  $\{0, a\}$  con probabilidades  $p$  y  $1 - p$ . En ese caso  $\text{Var}(X) = p(1 - p)a^2$ , que se maximiza para  $p = 1/2$ . La distribución óptima en el caso lineal es, por tanto, la distribución de dos puntos equiprobables en los extremos del intervalo.

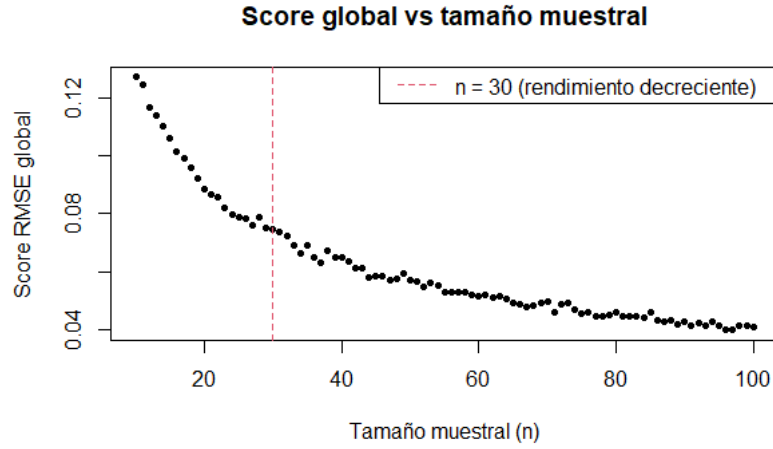


Figura 6.3: Score global en función del tamaño muestral  $n$  ( $\sigma_{3,\text{máx}} = 15$  MPa, proporción 60/40, 1 000 réplicas). La mejora sigue una ley aproximadamente logarítmica.

#### 6.4.2. Extensión al modelo de Hoek-Brown

En el modelo no lineal de Hoek-Brown, la calidad de la estimación depende de la matriz de información de Gauss-Newton:

$$I(m, \sigma_c) = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial m} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial m} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_c} \end{pmatrix} \Big|_{\sigma_{3,i}} \quad (6.9)$$

donde las derivadas parciales de  $f(\sigma_3; m, \sigma_c) = \sigma_3 + \sigma_c \sqrt{m\sigma_3/\sigma_c + 1}$  son:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\sigma_c \cdot \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_c^2 + m\sigma_c\sigma_3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_c} = \frac{m\sigma_3 + 2\sigma_c}{2\sqrt{\sigma_c^2 + m\sigma_c\sigma_3}} \quad (6.10)$$

Los términos de la matriz  $I$  contienen productos de estas derivadas, que son funciones de  $\sigma_3$ . El diseño D-óptimo [13] elige los puntos de soporte  $\sigma_{3,i}$  maximizando  $\det(I(m, \sigma_c))$ , lo que equivale a minimizar el volumen del elipsoide de confianza de los parámetros.

Aunque la expresión de  $\det(I)$  para el modelo de Hoek-Brown no admite una solución analítica cerrada, el análisis de los gradientes muestra que estos son funciones crecientes de  $\sigma_3$  en el intervalo de interés. Dado que la varianza de los estimadores es inversamente proporcional al determinante de  $I$ , y que este determinante crece con la dispersión de los puntos de diseño, el argumento del caso lineal (maximizar  $\text{Var}(\sigma_3)$ ) se traslada de forma análoga: la configuración óptima debe concentrar los puntos en los extremos del rango admisible.

Esto proporciona una base teórica al resultado empírico: la configuración 60/40 entre  $\sigma_3 = 0$  y  $\sigma_3 = \sigma_{3,\text{máx}}$  observada en la simulación corresponde a la distribución de dos puntos que aproxima el diseño D-óptimo del modelo de Hoek-Brown para los parámetros del granito Blanco Mera, con la asimetría 60/40 frente al 50/50 del caso lineal explicada por la no linealidad del modelo.

### 6.4.3. Proporción teóricamente óptima

El resultado empírico del Escenario 1 puede analizarse de forma exacta en el marco del diseño D-óptimo. Con dos niveles de  $\sigma_3$  (0 y  $a$ ) y  $n_0$  y  $n_a = n - n_0$  ensayos en cada uno, la matriz de información de Gauss-Newton es:

$$I(m, \sigma_c) = n_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n_a \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

donde  $\alpha = \frac{\sigma_c a}{2\sqrt{\sigma_c^2 + m\sigma_c a}}$  y  $\beta = \frac{ma + 2\sigma_c}{2\sqrt{\sigma_c^2 + m\sigma_c a}}$ .

La estructura de  $g(0) = (0, 1)^\top$  refleja que los ensayos a  $\sigma_3 = 0$  solo informan sobre  $\sigma_c$ : cuando no hay confinamiento, la derivada del modelo respecto a  $m$  es cero, porque  $m$  solo afecta a la respuesta cuando  $\sigma_3 > 0$ .

El determinante de la matriz de información resulta ser:

$$\det(I) = n_0 \cdot n_a \cdot \alpha^2 = n_0 \cdot (n - n_0) \cdot \frac{\sigma_c^2 a^2}{4(\sigma_c^2 + m\sigma_c a)} \quad (6.12)$$

Puesto que el factor  $\sigma_c^2 a^2 / [4(\sigma_c^2 + m\sigma_c a)]$  no depende de  $n_0$ , el diseño D-óptimo maximiza el producto  $n_0(n - n_0)$ , que alcanza su máximo en:

$$n_0^* = \frac{n}{2}, \quad n_a^* = \frac{n}{2} \quad (6.13)$$

La proporción teóricamente óptima es, por tanto, **50/50, independientemente de los valores de  $m$  y  $\sigma_c$ .**

Este resultado, aunque contraintuitivo respecto al 60/40 observado empíricamente, es coherente con él por dos razones. En primer lugar, la diferencia entre las proporciones 50/50 y 60/40 en la Tabla 6.3 es mínima: ambas producen un Score de 0,09, y el mínimo es plano en la región 50/50–70/30. En segundo lugar, el Score global no es equivalente al criterio D-óptimo: al ponderar por igual el error relativo de  $m$  y  $\sigma_c$ , desplaza ligeramente el óptimo empírico hacia más ensayos a  $\sigma_3 = 0$ , donde se concentra la información sobre  $\sigma_c$ . El diseño D-óptimo, en cambio, optimiza el volumen conjunto del elipsoide de confianza, lo que favorece exactamente el equilibrio 50/50.

En la práctica, ambos resultados convergen en la misma recomendación: distribuir los ensayos de forma aproximadamente equitativa entre  $\sigma_3 = 0$  y el nivel máximo de confinamiento disponible, evitando tanto la concentración excesiva en un solo nivel como el uso de múltiples niveles intermedios.

## 6.5. Conclusiones del capítulo

Los resultados de este capítulo permiten establecer recomendaciones concretas para el diseño de campañas de ensayos triaxiales sobre granito Blanco Mera, y generalizables cualitativamente a otras litologías con el mismo tipo de modelo de rotura.

En cuanto a la distribución de los ensayos, la configuración que minimiza el error global de estimación concentra los ensayos en dos únicos niveles de confinamiento:  $\sigma_3 = 0$  (ensayo de compresión simple) y  $\sigma_{3,\text{máx}}$  (nivel máximo disponible en el laboratorio), en una proporción aproximada de 60/40. El uso de múltiples niveles intermedios de  $\sigma_3$  no mejora la estimación y, en general, la empeora al dispersar los ensayos sin aumentar el rango efectivo de información.

En cuanto al valor máximo de confinamiento, los resultados muestran que extender  $\sigma_{3,\text{máx}}$  hasta 20–25 MPa recoge la mayor parte del beneficio posible. A partir de ese valor, la mejora es asintótica y el coste adicional del ensayo puede no estar justificado.

En cuanto al tamaño muestral, la reducción del error sigue una ley aproximadamente logarítmica. Las ganancias más sustanciales se producen al aumentar  $n$  de 10 a 30 ensayos; a partir de ahí, el rendimiento marginal de cada ensayo adicional disminuye notablemente.

Finalmente, el análisis teórico de la Sección 6.4 confirma que estos resultados empíricos tienen una base en la teoría del diseño óptimo de experimentos: la concentración de los puntos de diseño en los extremos del rango maximiza la información de Fisher y minimiza la varianza de los estimadores, tanto en el caso lineal como, de forma aproximada, en el modelo no lineal de Hoek-Brown.

Cuadro 6.2: Resultados del estudio exploratorio: métricas de precisión y Score global para las 16 configuraciones.

<b>Prueba</b>	$\bar{m}$	$\bar{\sigma}_c$	$SE_m$	$SE_{\sigma_c}$	$Bias_m$	$Bias_{\sigma_c}$	$RMSE_m$	$RMSE_{\sigma_c}$	<b>Score</b>
P1	27,45	126,14	2,80	5,06	0,18	-0,19	2,81	5,06	0,11
P2	27,45	126,17	3,29	5,00	0,18	-0,16	3,29	5,00	0,13
P3	27,54	126,07	3,54	5,92	0,26	-0,27	3,54	5,92	0,14
P4	27,58	126,03	3,75	6,10	0,30	-0,31	3,76	6,11	0,15
P5	27,48	126,16	3,67	5,17	0,20	-0,18	3,67	5,17	0,14
P6	27,62	126,01	4,24	6,79	0,34	-0,33	4,25	6,80	0,16
P7	27,32	126,27	1,36	2,48	0,05	-0,07	1,36	2,48	0,05
P8	27,54	126,07	3,59	6,00	0,26	-0,26	3,60	6,01	0,14
P9	27,37	126,25	3,23	4,11	0,09	-0,08	3,23	4,11	0,12
P10	27,65	125,84	3,36	7,13	0,37	-0,50	3,38	7,14	0,14
P11	27,54	126,14	4,32	5,06	0,26	-0,19	4,33	5,06	0,16
P12	27,42	126,14	2,28	5,06	0,15	-0,19	2,28	5,06	0,09
P13	27,41	126,18	2,73	4,91	0,14	-0,15	2,74	4,91	0,11
P14	27,34	126,25	1,99	4,11	0,06	-0,08	1,99	4,11	0,08
P15	27,33	126,25	1,57	4,11	0,05	-0,08	1,57	4,11	0,07
P16	27,38	126,24	3,37	4,32	0,11	-0,09	3,37	4,32	0,13

Cuadro 6.3: Resultados del estudio de proporciones ( $n = 20$ ,  $\sigma_{3,\text{máx}} = 15$  MPa, 1 000 réplicas).

<b>Proporción</b>	$\bar{m}$	$SE_m$	$Bias_m$	$RMSE_m$	$\bar{\sigma}_c$	$SE_{\sigma_c}$	$Bias_{\sigma_c}$	$RMSE_{\sigma_c}$	<b>Score</b>
5/95	28,23	6,10	0,96	6,18	125,37	15,99	-0,96	16,02	0,26
10/90	27,57	4,16	0,29	4,17	126,37	11,32	0,03	11,32	0,18
15/85	27,63	3,65	0,36	3,66	125,90	9,53	-0,43	9,53	0,15
20/80	27,38	3,04	0,11	3,04	126,47	8,02	0,14	8,02	0,13
25/75	27,43	2,92	0,15	2,92	126,27	7,42	-0,06	7,42	0,12
30/70	27,34	2,46	0,07	2,46	126,54	6,23	0,20	6,23	0,10
35/65	27,45	2,33	0,18	2,33	126,14	5,79	-0,20	5,79	0,10
40/60	27,28	2,36	0,01	2,36	126,43	5,67	0,10	5,67	0,10
45/55	27,37	2,32	0,10	2,32	126,35	5,37	0,02	5,36	0,10
50/50	27,53	2,31	0,26	2,32	125,96	5,04	-0,37	5,05	0,09
55/45	27,31	2,28	0,04	2,28	126,46	4,95	0,13	4,95	0,09
60/40	27,31	2,23	0,03	2,23	126,28	4,66	-0,06	4,66	0,09
65/35	27,42	2,36	0,14	2,37	126,12	4,33	-0,22	4,34	0,09
70/30	27,32	2,35	0,05	2,35	126,59	4,37	0,26	4,37	0,09
75/25	27,49	2,42	0,21	2,43	126,13	4,06	-0,21	4,06	0,09
80/20	27,27	2,69	-0,00	2,68	126,41	4,15	0,07	4,15	0,10
85/15	27,29	2,96	0,02	2,96	126,25	3,89	-0,08	3,89	0,11
90/10	27,52	3,32	0,25	3,33	126,31	3,62	-0,03	3,62	0,13
95/5	27,14	4,55	-0,13	4,55	126,32	3,74	-0,02	3,74	0,17

## Capítulo 7

# Caso de estudio propuesto: campaña experimental optimizada sobre granito Blanco Mera

Los capítulos anteriores han desarrollado un marco metodológico completo para el ajuste estadístico del modelo de Hoek-Brown: se han comparado métodos de estimación, se han calculado intervalos de confianza y de predicción mediante wild bootstrap, y se han identificado las configuraciones experimentales que minimizan el error de estimación de los parámetros. Sin embargo, todo el análisis se ha realizado sobre datos existentes, recopilados en distintas campañas independientes sin un diseño experimental previo orientado a la precisión estadística.

Este capítulo propone un caso de estudio concreto que permitiría validar experimentalmente las recomendaciones metodológicas de este trabajo. El objetivo es diseñar y ejecutar una nueva campaña de ensayos triaxiales sobre granito Blanco Mera siguiendo el diseño óptimo identificado en el Capítulo 6, y comprobar si los intervalos de confianza obtenidos son efectivamente más estrechos que los de las campañas anteriores con el mismo número de ensayos.

### 7.1. Motivación y objetivos del caso de estudio

La variabilidad observada entre las cinco zonas del conjunto de datos actual es llamativa: el parámetro  $m_i$  oscila entre 27,28 (Zona 5) y 51,14 (Zona 1), una diferencia que supera ampliamente la incertidumbre de estimación de cada zona individualmente. Parte de esta variabilidad es atribuible a diferencias reales entre campañas (distintos puntos de extracción, distintas fechas, posibles variaciones en el protocolo de ensayo), pero otra parte puede deberse a que ninguna de las campañas anteriores fue diseñada con criterios de optimización estadística: los niveles de  $\sigma_3$  y el número de ensayos en cada nivel fueron elegidos de forma intuitiva o siguiendo convenciones.

El caso de estudio propuesto persigue tres objetivos específicos:

1. **Validar empíricamente el diseño óptimo:** ejecutar una campaña con la distribución 60/40 entre  $\sigma_3 = 0$  y  $\sigma_3 = \sigma_{3,\text{máx}}$ , y comparar los intervalos de confianza resultantes con los de las campañas anteriores de tamaño muestral comparable.
2. **Verificar la estabilidad de los parámetros:** comprobar si una campaña diseñada con criterios estadísticos produce estimaciones de  $m_i$  y  $\sigma_{ci}$  más próximas a los valores de referencia para el granito Blanco Mera, reduciendo la dispersión entre grupos.
3. **Cuantificar el coste-beneficio del diseño óptimo:** determinar a partir de qué tamaño muestral la ganancia en precisión deja de justificar el coste adicional de cada ensayo, en términos

concretos para este material y este laboratorio.

## 7.2. Diseño experimental propuesto

### 7.2.1. Material y procedencia

Se propone utilizar granito Blanco Mera extraído de la misma cantera gallega de la que proceden los datos del presente estudio, garantizando así la comparabilidad con las campañas anteriores. Las probetas deberán ser extraídas en una única campaña de campo para evitar la variabilidad inter-campaña que afecta al conjunto de datos actual. Se recomienda extraer el material de un único banco de cantera, a la misma cota y orientación, para minimizar la variabilidad espacial de la roca.

Las probetas se prepararán siguiendo las recomendaciones de la ISRM [32]: diámetro nominal de 54 mm, relación longitud/diámetro de 2,0–2,5, y acabado superficial con desviación de planeidad inferior a 0,02 mm. Todas las probetas serán del mismo diámetro para eliminar el efecto de escala como fuente de variabilidad adicional [3].

### 7.2.2. Configuración de los ensayos

Basándose en los resultados del Capítulo 6, se propone la siguiente configuración experimental:

- **Dos únicos niveles de  $\sigma_3$ :**  $\sigma_3 = 0$  MPa (ensayo de compresión simple uniaxial) y  $\sigma_3 = 20$  MPa (nivel máximo). El valor de 20 MPa se elige porque, según el Escenario 2 del Capítulo 6, a partir de ese nivel la mejora en precisión es asintótica, y es un valor alcanzable con la celda de Hoek estándar disponible en la mayoría de laboratorios geomecánicos.
- **Proporción 60/40:** por cada 10 ensayos totales, 6 se realizarán a  $\sigma_3 = 0$  MPa y 4 a  $\sigma_3 = 20$  MPa. Esta proporción es coherente tanto con el resultado empírico de la simulación como con el diseño D-óptimo teórico (Sección 6.4.3).
- **Tres tamaños muestrales:** se propone ejecutar la campaña en tres bloques sucesivos de  $n = 10$ ,  $n = 20$  y  $n = 30$  ensayos (6+4, 12+8 y 18+12, respectivamente), de modo que pueda evaluarse empíricamente la curva coste-beneficio identificada en el Escenario 3. El diseño en bloques permite además analizar la estabilidad de las estimaciones al ir incorporando nuevos ensayos.

La Tabla 7.1 resume la distribución de ensayos para cada bloque.

Cuadro 7.1: Distribución de ensayos triaxiales en la campaña propuesta, organizada en tres bloques acumulativos.

Bloque	$\sigma_3 = 0$ MPa	$\sigma_3 = 20$ MPa	Total acumulado
1	6	4	10
2	6	4	20
3	6	4	30
<b>Total</b>	<b>18</b>	<b>12</b>	<b>30</b>

### 7.2.3. Protocolo de ensayo

Todos los ensayos se realizarán siguiendo las normas ISRM [32] para ensayos de compresión simple y triaxial. Los puntos más relevantes del protocolo son:

- **Velocidad de carga:** controlada en desplazamiento a 0,05 mm/min para los ensayos uniaxiales y 0,1 mm/min para los triaxiales, garantizando condiciones cuasi-estáticas.
- **Instrumentación:** Galgas laterales para determinar la deformación lateral de la probeta, lo que permitirá estimar también el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$  como variables secundarias.
- **Saturación:** todas las probetas se ensayarán en condición seca al aire, replicando las condiciones de los datos existentes y evitando la influencia de la presión de poros.
- **Registro:** se registrará la curva tensión-deformación completa hasta la rotura y en el postpico, permitiendo estimar la resistencia residual  $\sigma_r$  como variable adicional para caracterizar el comportamiento post-pico.

## 7.3. Análisis estadístico previsto

Una vez obtenidos los datos experimentales, el análisis estadístico seguirá el mismo flujo metodológico desarrollado en este trabajo, aplicado a los datos de la nueva campaña.

### 7.3.1. Ajuste del modelo y verificación de supuestos

Se ajustará el modelo de Hoek-Brown simplificado para roca intacta (Ecuación 3.2) mediante mínimos cuadrados no lineales, y se verificarán los supuestos de normalidad (Shapiro-Wilk [22]) y homocedasticidad (Breusch-Pagan [23]) de los residuos. Dado que todos los ensayos proceden de la misma campaña y el material es uniforme, se espera que la Zona 6 (denominación propuesta para esta nueva campaña) satisfaga los supuestos del modelo mejor que las zonas anteriores.

### 7.3.2. Intervalos de confianza y de predicción

Se calcularán los intervalos de confianza al 95 % mediante wild bootstrap ( $R = 1000$  réplicas) para cada uno de los tres bloques acumulativos ( $n = 10, 20$  y  $30$ ), lo que permitirá observar empíricamente cómo se estrechan los intervalos al aumentar el tamaño muestral siguiendo la configuración óptima.

El indicador principal de comparación será la **anchura media del IC al 95 %** a lo largo del rango de confinamiento  $[0, 20]$  MPa, definida como:

$$\bar{w} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K [IC_{\text{sup}}(\sigma_{3,k}) - IC_{\text{inf}}(\sigma_{3,k})] \quad (7.1)$$

donde  $\sigma_{3,k}$  son  $K$  puntos equiespaciados en  $[0, 20]$  MPa. Esta anchura media se comparará con la obtenida para la Zona 5 del conjunto de datos actual ( $n = 24$  ensayos con distribución de  $\sigma_3$  no optimizada), que sirve como línea base.

Se calculará también el intervalo de predicción al 95 % mediante el procedimiento descrito en la Sección 5.3.1, lo que permitirá establecer cotas de resistencia para el diseño geotécnico con cuantificación explícita de la incertidumbre.

### 7.3.3. Comparación con campañas anteriores

Se realizará una comparación formal entre los parámetros estimados de la nueva campaña y los de las cinco zonas del conjunto de datos actual, mediante un contraste de compatibilidad basado en las regiones de densidad bootstrap de los parámetros (análogo a la Figura 5.5). Si las regiones de densidad al 95% de la nueva campaña y de la Zona 5 se solapan sustancialmente, se concluirá que ambas caracterizan el mismo material con coherencia estadística. Si no se solapan, se investigará si la discrepancia es atribuible a variabilidad espacial de la cantera o a diferencias en el protocolo de ensayo.

## 7.4. Resultados esperados y criterios de éxito

Basándose en los resultados de la simulación del Capítulo 6, se formulan las siguientes hipótesis cuantitativas, que constituyen los criterios de éxito del caso de estudio:

1. Con  $n = 20$  ensayos en configuración 60/40 y  $\sigma_{3,\text{máx}} = 20$  MPa, la anchura media del IC al 95% deberá ser inferior a la obtenida con la Zona 5 ( $n = 24$  ensayos, distribución no optimizada). La simulación predice una reducción del Score global de aproximadamente un 10–15%.
2. Los parámetros estimados deberán situarse en el rango  $m \in [24, 33]$  y  $\sigma_c \in [115, 135]$  MPa, coherentes con los valores de referencia para granito Blanco Mera de la literatura [31, 6].
3. La distribución bootstrap del parámetro  $\hat{m}$  deberá mostrar menor asimetría que la observada en la Zona 5 (Figura 5.4), ya que el diseño 60/40 con  $\sigma_{3,\text{máx}} = 20$  MPa proporciona mayor información sobre  $m$  que la configuración original.
4. La curva de anchura media del IC en función de  $n$  (bloques 10  $\rightarrow$  20  $\rightarrow$  30) deberá seguir el patrón logarítmico identificado en la simulación (Figura 6.3), con la mayor reducción en el primer bloque y rendimientos decrecientes a partir del segundo.

## 7.5. Recursos necesarios y viabilidad

El caso de estudio propuesto es completamente viable con los medios disponibles en un laboratorio geomecánico estándar. Los recursos necesarios son los siguientes.

En cuanto al material, se necesitan 30 probetas cilíndricas de granito Blanco Mera de diámetro 54 mm. Considerando un margen del 20% por posibles roturas durante la preparación, se recomienda extraer 36 testigos en la campaña de campo. El coste de extracción y preparación de probetas es el factor económico dominante del estudio.

En cuanto al equipamiento, se requiere una prensa de carga axial con capacidad mínima de 500 kN, una celda de Hoek con capacidad de presión de al menos 25 MPa, y el sistema de instrumentación con LVDTs. Este equipamiento está disponible en los laboratorios de la Universidad de Vigo, que han ejecutado todas las campañas anteriores sobre este material [4, 5].

En cuanto al tiempo estimado, la preparación de las probetas requiere aproximadamente dos semanas, y la ejecución de los 30 ensayos puede realizarse en una semana adicional, considerando dos ensayos diarios para los triaxiales (que requieren tiempo de montaje y desmontaje de la celda). El análisis estadístico posterior puede completarse en una semana con el código R desarrollado en este trabajo.

El coste total estimado (extracción de material, preparación de probetas y tiempo de laboratorio) es del orden de magnitud habitual para una campaña de caracterización geomecánica de esta escala, y es directamente comparable al de cualquiera de las cinco campañas ya ejecutadas sobre el granito Blanco Mera.

## 7.6. Extensiones posibles

El caso de estudio descrito puede extenderse en varias direcciones que ampliarían el alcance de las conclusiones del TFM:

**Extensión a otras litologías.** Aplicar el mismo protocolo de diseño óptimo a rocas con parámetros de Hoek-Brown significativamente distintos (por ejemplo, una caliza con  $m \approx 8$  o una cuarcita con  $m \approx 20$ ) permitiría verificar empíricamente que la proporción óptima 50/50–60/40 es robusta respecto al tipo de roca, tal y como predice el análisis teórico de la Sección 6.4.3.

**Validación del intervalo de predicción.** Reservar un subconjunto de probetas (por ejemplo,  $n = 10$  adicionales con  $\sigma_3$  elegidos aleatoriamente dentro del rango  $[0, 20]$  MPa) para verificar empíricamente la cobertura del intervalo de predicción: la fracción de nuevas observaciones que caen dentro del IP al 95 % debería ser próxima a 0,95.

**Análisis de variabilidad espacial.** Extraer probetas de varios puntos distintos de la cantera (a diferentes cotas o distancias horizontales) y estimar un modelo jerárquico que distinga la variabilidad dentro de cada punto de la variabilidad entre puntos. Esto permitiría cuantificar en qué medida la dispersión observada entre las cinco zonas del conjunto de datos actual es atribuible a variabilidad espacial de la cantera, y no a diferencias en el diseño experimental.

**Incorporación del módulo de deformación.** Los datos de la campaña propuesta incluirán curvas tensión-deformación completas, lo que permitirá estimar simultáneamente el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ . Extender el análisis de diseño óptimo a un modelo que estime conjuntamente los parámetros de resistencia y deformabilidad sería una contribución metodológica de interés directo para el diseño geotécnico.



## Capítulo 8

# Conclusiones y líneas de investigación futura

Este trabajo ha abordado el análisis estadístico del criterio de rotura de Hoek-Brown desde una perspectiva que raramente se trata en la literatura geomecánica: la inferencia rigurosa sobre los parámetros del modelo en condiciones de muestreo reducido y la optimización estadística del diseño experimental de las campañas de ensayos triaxiales. Las conclusiones se organizan en cuatro bloques temáticos que siguen el hilo argumental del trabajo, seguidos de las limitaciones identificadas y de las líneas de investigación que se desprenden de los resultados obtenidos.

### 8.1. Sobre el ajuste del modelo y la linealización

El ajuste por mínimos cuadrados no lineales del modelo de Hoek-Brown simplificado para roca intacta produce estimaciones prácticamente insesgadas de los parámetros  $m$  y  $\sigma_c$  en todos los grupos de datos analizados. Los residuos del modelo NLS satisfacen los supuestos de normalidad y homocedasticidad en la Zona 5, que es la que presenta mayor coherencia con los valores de referencia para el granito Blanco Mera ( $\hat{m} = 27,28$ ,  $\hat{\sigma}_c = 126,34$  MPa).

La práctica habitual de linealizar la ecuación de Hoek-Brown mediante la transformación  $y' = (\sigma_1 - \sigma_3)^2$  tiene consecuencias estadísticas relevantes que este trabajo ha cuantificado con precisión. La transformación induce heterocedasticidad en los residuos —cuya varianza crece con  $\sigma_3$ — y asimetría en su distribución, violando sistemáticamente los supuestos de la regresión lineal ordinaria. Aunque la discrepancia en los valores estimados de los parámetros entre el modelo linealizado y el NLS es moderada ( $\Delta\hat{m} = 1,73$ ;  $\Delta\hat{\sigma}_c = 2,15$  MPa para los datos de la Zona 5), el sesgo se hace más pronunciado con muestras grandes y la varianza de estimación del modelo linealizado es siempre mayor que la del NLS. El estudio de simulación de Monte Carlo con 10 000 réplicas confirma que la linealización rechaza los tests de normalidad y homocedasticidad en la gran mayoría de los casos, mientras que el modelo NLS supera ambos tests con una tasa de rechazo cercana al nivel nominal del 5%.

La conclusión práctica es clara: la linealización puede emplearse como estimación preliminar rápida de los parámetros, pero no como base para el cálculo de intervalos de confianza ni para ninguna forma de inferencia estadística. El ajuste NLS directo debe ser el procedimiento de referencia.

### 8.2. Sobre los métodos de construcción de intervalos de confianza

Se han comparado tres procedimientos para el cálculo de intervalos de confianza al 95% para la curva de Hoek-Brown: el método delta manual, el método delta automático mediante `predict2_nls`

[11], y el wild bootstrap con multiplicador Rademacher ( $R = 1\,000$  réplicas).

El método delta manual emplea el cuantil normal  $z_{\alpha/2}$ , que solo garantiza cobertura para un valor fijo de  $\sigma_3$  y no en sentido simultáneo sobre toda la curva, lo que lo hace inadecuado como banda de confianza. El método delta automático corrige este problema empleando el cuantil  $\sqrt{p \cdot F_{p, n-p}(1 - \alpha)}$ , que controla el error de forma conjunta sobre el espacio de ambos parámetros  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$  y produce una cobertura simultánea próxima a la nominal. Sin embargo, ambos métodos delta comparten el supuesto implícito de normalidad de los estimadores, que el análisis de las 1 000 réplicas bootstrap pone en entredicho: la distribución de  $\hat{m}$  presenta una asimetría significativa con colas desplazadas hacia valores altos que ninguno de los dos métodos delta puede capturar.

El wild bootstrap es el método más riguroso: no asume normalidad de los estimadores ni homocedasticidad de los errores, y proporciona de forma natural la distribución conjunta de  $(\hat{m}, \hat{\sigma}_c)$ , permitiendo visualizar la correlación negativa entre parámetros y la asimetría de  $\hat{m}$  sin supuestos adicionales.

En cuanto al intervalo de predicción, el IP wild bootstrap puro es el único coherente con la filosofía del método: asumir  $\varepsilon^{(b)} \sim \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}^2)$  para el término de error individual contradice la motivación principal del wild bootstrap, que es precisamente no imponer normalidad ni homocedasticidad. El IP wild puro es sustancialmente más ancho que el IC, con diferencias que pueden superar los 30 MPa en los extremos del rango de confinamiento, cuantificando la incertidumbre real relevante para el diseño geotécnico. Su comportamiento en los extremos está limitado por la distribución irregular de los niveles de  $\sigma_3$  disponibles, lo que constituye una línea de mejora para trabajo futuro.

La recomendación general es emplear el wild bootstrap como método estándar para el cálculo de intervalos de confianza y de predicción en el ajuste del modelo de Hoek-Brown con muestras de tamaño reducido, acompañando siempre el IC con el IP para una caracterización completa de la incertidumbre.

### 8.3. Sobre el diseño óptimo de los ensayos triaxiales

El estudio de simulación sistemático del Capítulo 6 ha identificado tres factores que controlan la precisión de las estimaciones de  $m$  y  $\sigma_c$ : la proporción de ensayos entre los dos niveles de  $\sigma_3$ , la magnitud del nivel máximo de confinamiento, y el tamaño muestral total.

Respecto a la proporción de ensayos, la configuración que minimiza el índice global de error Score — definido como la distancia euclídea en el espacio de errores relativos de  $m$  y  $\sigma_c$  — concentra los ensayos en dos únicos niveles de  $\sigma_3$ , en una proporción aproximada de 60/40 entre  $\sigma_3 = 0$  y el nivel máximo. El uso de múltiples niveles intermedios de  $\sigma_3$  no mejora la estimación y, en general, la empeora. Este resultado empírico está respaldado por el análisis teórico del diseño D-óptimo: el determinante de la matriz de información de Gauss-Newton para el modelo de Hoek-Brown con dos puntos de soporte es proporcional a  $n_0 \cdot n_a$ , cuyo máximo se alcanza en  $n_0 = n_a = n/2$ . La ligera asimetría observada empíricamente (60/40 frente al 50/50 teórico) se explica por la diferencia entre el criterio Score y el criterio D-óptimo, y es estadísticamente insignificante: todas las proporciones entre 50/50 y 70/30 producen un Score de 0,09, con diferencias menores que el error estándar de simulación.

Respecto al valor máximo de confinamiento, la precisión mejora de forma pronunciada al aumentar  $\sigma_{3,\text{máx}}$  desde 5 MPa hasta 20 MPa, a partir de donde la mejora se vuelve asintótica. El valor  $\sigma_{3,\text{máx}} = 20\text{--}25$  MPa recoge la mayor parte del beneficio posible y es alcanzable con la celda de Hoek estándar disponible en la mayoría de laboratorios geomecánicos.

Respecto al tamaño muestral, la reducción del error sigue una ley aproximadamente logarítmica. Las ganancias más sustanciales se producen al aumentar  $n$  de 10 a 30 ensayos; a partir de ahí, el rendimiento marginal de cada ensayo adicional disminuye notablemente. Para el granito Blanco Mera, un diseño de  $n = 20\text{--}30$  ensayos distribuidos 60/40 entre  $\sigma_3 = 0$  y  $\sigma_3 = 20$  MPa representa la configuración con mejor relación coste-beneficio.

En conjunto, estos resultados proporcionan criterios operativos concretos para el diseño de futuras campañas de ensayos triaxiales, que contrastan con la práctica habitual de distribuir los ensayos entre múltiples niveles de confinamiento de forma intuitiva. La implementación de estos criterios no requiere recursos adicionales: con el mismo número de probetas y el mismo equipamiento, una campaña bien di-

señada puede producir estimaciones significativamente más precisas que una campaña con distribución de  $\sigma_3$  no optimizada.

## 8.4. Sobre la variabilidad entre campañas

La dispersión observada en los parámetros estimados entre las cinco zonas del conjunto de datos — $\hat{m}$  varía entre 27,28 y 51,14— es notablemente superior a la incertidumbre de estimación de cada zona individualmente. Este trabajo no ha resuelto definitivamente si dicha dispersión es atribuible a variabilidad real de las propiedades mecánicas de la roca entre distintos puntos y fechas de extracción, o si parte de ella es consecuencia del diseño experimental no optimizado de las campañas anteriores. Esta cuestión queda abierta como objeto del caso de estudio propuesto en el Capítulo 7.

Lo que sí se ha establecido es que mezclar los datos de las cinco zonas en un único ajuste global produce residuos no normales y una estimación de los parámetros que no representa fielmente ninguna de las campañas individualmente. El análisis por zonas es, por tanto, el enfoque estadístico correcto cuando los datos proceden de campañas con posibles diferencias sistemáticas.

## 8.5. Limitaciones del estudio

Los resultados de este trabajo están sujetos a tres limitaciones principales que deben tenerse en cuenta al interpretar las conclusiones.

La primera es que el estudio de simulación del Capítulo 6 utiliza un único escenario de parámetros verdaderos ( $m = 27,275$ ,  $\sigma_c = 126,337$  MPa), correspondientes al granito Blanco Mera. La generalización de las recomendaciones a otras litologías con parámetros muy distintos —especialmente con valores de  $m$  mucho menores, como los correspondientes a rocas blandas o carbónicas— requiere estudios de simulación adicionales, aunque el análisis teórico del diseño D-óptimo sugiere que la recomendación de concentrar los ensayos en los extremos es independiente del valor de los parámetros.

La segunda es que el modelo generativo de la simulación asume homocedasticidad ( $\sigma = 16$  MPa constante en todo el rango de  $\sigma_3$ ). Si la varianza del error crece con  $\sigma_3$  —como sugieren los análisis visuales de las Zonas 1 y 2— el diseño óptimo podría diferir del identificado aquí. La incorporación de un modelo heterocedástico en el generador es una extensión natural del trabajo.

La tercera es que todas las conclusiones sobre el diseño óptimo son de naturaleza empírica y simulada; no se dispone de validación experimental sobre datos reales generados con el diseño propuesto. Esta validación es precisamente el objetivo del caso de estudio del Capítulo 7.

## 8.6. Líneas de investigación futura

De los resultados y limitaciones anteriores se desprenden las siguientes líneas de investigación, ordenadas de mayor a menor relación directa con este trabajo:

**Validación experimental del diseño óptimo.** Ejecutar la campaña propuesta en el Capítulo 7 sobre granito Blanco Mera con la configuración 60/40 y  $\sigma_{3,\text{máx}} = 20$  MPa. La comparación de los intervalos resultantes con los de las campañas anteriores permitirá cuantificar empíricamente la ganancia en precisión debida al diseño optimizado.

**Extensión a modelos heterocedásticos.** Desarrollar un generador de datos que incorpore varianza del error dependiente de  $\sigma_3$  y repetir el estudio de diseño óptimo. Esto permitiría identificar si la proporción óptima cambia bajo heterocedasticidad y si el wild bootstrap mantiene su cobertura nominal en ese escenario.

**Extensión a la forma generalizada de Hoek-Brown.** El presente trabajo se ha centrado en la forma simplificada del criterio ( $s = 1$ ,  $a = 0,5$ ), apropiada para roca intacta. La extensión del análisis estadístico y del diseño óptimo a la forma generalizada con tres parámetros libres ( $m_b$ ,  $s$ ,  $a$ ) es de interés directo para la caracterización de macizos rocosos fracturados.

**Análisis de variabilidad espacial mediante modelos jerárquicos.** La dispersión entre zonas del conjunto de datos actual podría modelarse mediante un modelo jerárquico bayesiano que distinga la variabilidad dentro de cada campaña de la variabilidad entre campañas. Este enfoque permitiría obtener estimaciones de los parámetros que integren la información de todas las zonas de forma estadísticamente coherente.

**Generalización a otras litologías.** Aplicar la metodología completa —ajuste NLS, wild bootstrap e intervalos de predicción, y diseño óptimo— a otras litologías representativas (calizas, areniscas, cuarcitas) con valores de  $m$  significativamente distintos a los del granito. Esto permitiría establecer recomendaciones de diseño experimental específicas por tipo de roca y verificar la universalidad del resultado teórico sobre la proporción óptima.

**Incorporación de ensayos de tracción indirecta.** Los ensayos brasileños (tracción indirecta) aportan información sobre la resistencia a tracción  $\sigma_t$ , que corresponde a valores negativos de  $\sigma_3$  en el espacio de Hoek-Brown. Incluir estos datos en el ajuste ampliaría el rango efectivo de información y podría mejorar sustancialmente la precisión de la estimación de  $\sigma_c$ , que actualmente se apoya principalmente en los ensayos uniaxiales.



```
# ?? 2. FUNCIONES AUXILIARES ?????????????????????????????????????????????????????????????
```

```
#' Ajusta el modelo de Hoek-Brown (NLS) a un data.frame
#' @param datos data.frame con columnas Sigma3 y SigmaPico
#' @return objeto nls, o NULL si falla
```

```
ajustar_HB <- function(datos) {
  tryCatch(
    nls(
      SigmaPico ~ Sigma3 + sc * sqrt(m * Sigma3 / sc + 1),
      data = datos,
      start = list(m = 40, sc = 120)
    ),
    error = function(e) NULL
  )
}
```

```
#' Residuos estudentizados de un ajuste nls
residuos_est <- function(modelo) {
  residuals(modelo) / sqrt(deviance(modelo) / df.residual(modelo))
}
```

```
#' Test de Breusch-Pagan manual sobre residuos NLS vs Sigma3
bp_nls <- function(modelo, datos) {
  res2 <- residuals(modelo)^2
  s3 <- datos$Sigma3
  summary(lm(res2 ~ s3))$coefficients[2, 4]
}
```

```
#' Calcula métricas de simulación para un parámetro
metricas_sim <- function(est, verd) {
  est <- na.omit(est)
  media <- mean(est)
  se <- sd(est)
  bias <- media - verd
  rmse <- sqrt(mean((est - verd)^2))
  c(media = media, SE = se, Bias = bias, RMSE = rmse)
}
```

```
#' Score global: distancia euclídea en el espacio de errores relativos
score_global <- function(rmse_m, rmse_sc) {
  sqrt((rmse_m / M_TRUE)^2 + (rmse_sc / SC_TRUE)^2)
}
```

```
#' Genera tabla resumen a partir de una lista de matrices de parámetros
resumen_lista <- function(resultados, etiquetas) {
  do.call(rbind, lapply(seq_along(resultados), function(j) {
    par <- resultados[[j]]
    mm <- metricas_sim(par[, 1], M_TRUE)
    msc <- metricas_sim(par[, 2], SC_TRUE)
    data.frame(
      Escenario = etiquetas[j],
      Media_m = mm["media"], SE_m = mm["SE"],
```

















```

# Método "Wild"

m_hat <- coef(nlm5)["m"]
sc_hat <- coef(nlm5)["sc"]
sigma_hat <- summary(nlm5)$sigma
residuos_hat <- residuals(nlm5)

curvas_pred <- matrix(NA, nrow = R_BOOT, ncol = 7)

set.seed(SET_SEED)

for (b in 1:R_BOOT) {

# Curva con parámetros FIJOS del ajuste original
curva_base <- sigma3_obs + sc_hat * sqrt(m_hat * sigma3_obs / sc_hat + 1)

# Multiplicador wild independiente por punto
w_b <- sample(c(-1, 1), size = 7, replace = TRUE)

# Residuo del nivel más cercano perturbado por wild
eps_b <- c(sample(residuos_hat[1:4],1),sample(residuos_hat[5:7],1),
sample(residuos_hat[8:11],1),sample(residuos_hat[12:14],1),
sample(residuos_hat[15:18],1),sample(residuos_hat[19:20],1),
sample(residuos_hat[21:24],1)) * w_b

curvas_pred[b, ] <- unique(curva_base) + eps_b
}

ip_inf <- apply(curvas_pred, 2, quantile, probs = ALPHA / 2, na.rm = TRUE)
ip_sup <- apply(curvas_pred, 2, quantile, probs = 1 - ALPHA / 2, na.rm = TRUE)

plot(zona5$Sigma3, zona5$SigmaPico, pch = 16,
xlab = expression(sigma[3] ~ "(MPa)"),
ylab = expression(sigma[1] ~ "(MPa)"),
main = "IC e IP al 95% ? Wild Bootstrap (error wild) ? Zona 5",
ylim = c(60, 400))
lines(xx5, p_central, lwd = 2)
polygon(c(xx5, rev(xx5)), c(ic_boot_sup, rev(ic_boot_inf)),
col = rgb(0.3, 0.3, 0.3, 0.25), border = NA)
lines(xx5, ic_boot_inf, lwd = 2, lty = 2, col = "blue")
lines(xx5, ic_boot_sup, lwd = 2, lty = 2, col = "blue")
polygon(c(unique(sigma3_obs), rev(unique(sigma3_obs))), c(ip_sup, rev(ip_inf)),
col = rgb(0.8, 0.2, 0.2, 0.10), border = NA)
lines(unique(sigma3_obs), ip_inf, lwd = 2, lty = 3, col = "red")
lines(unique(sigma3_obs), ip_sup, lwd = 2, lty = 3, col = "red")
legend("topleft",
legend = c("Datos", "Ajuste HB", "IC 95%", "IP 95%"),
pch = c(16, NA, NA, NA), lty = c(NA, 1, 2, 3), lwd = c(NA, 2, 2, 2),
col = c(1, 1, "blue", "red"))

# Método "normal"

```



```

points(zona5$Sigma3, fm_delta_auto[, 4], pch = 16, col = 2, cex = 0.8)
legend("topleft",
legend = c("Datos", "Ajuste HB", "Bootstrap (simul.)",
"IC bootstrap", "IC delta manual", "IC delta automático"),
pch = c(16, NA, NA, NA, NA, 16), lty = c(NA, 1, 1, 2, 2, NA),
lwd = c(NA, 2, 1, 2, 2, NA),
col = c(1, 1, rgb(0.5, 0.5, 0.5), "blue", "black", 2))

# ?? 5.6 Cobertura empírica: delta manual, delta automático y bootstrap ?????????
# Estudio de simulación Monte Carlo (N = 1000 réplicas) para comparar la
# cobertura simultánea real de los tres métodos frente al 95% nominal.

cat("\n=== BLOQUE: COBERTURA EMPÍRICA IC DELTA VS BOOTSTRAP ===\n")

Sigma3_Z5 <- c(rep(0.2, 4), rep(2, 2), rep(4, 2), rep(5, 3),
rep(6, 2), rep(10, 5), rep(15, 6))
n_z5      <- length(Sigma3_Z5)

xx_cob    <- seq(0, 15, length = 50)
curva_verdadera <- xx_cob + SC_TRUE * sqrt(M_TRUE * xx_cob / SC_TRUE + 1)

set.seed(SET_SEED)

dentro_delta_simultaneo <- 0
dentro_auto_simultaneo <- 0
dentro_boot_simultaneo <- 0
n_validas                <- 0

anchura_delta <- numeric(N_SIM)
anchura_auto  <- numeric(N_SIM)
anchura_boot  <- numeric(N_SIM)

for (i in 1:N_SIM) {

SigmaPico_i <- Sigma3_Z5 +
SC_TRUE * sqrt(M_TRUE * Sigma3_Z5 / SC_TRUE + 1) +
rnorm(n_z5, 0, SIGMA)
datos_i <- data.frame(SigmaPico = SigmaPico_i, Sigma3 = Sigma3_Z5)

mod_i <- ajustar_HB(datos_i)
if (is.null(mod_i)) next

m_i <- coef(mod_i)["m"]
sc_i <- coef(mod_i)["sc"]
V_i <- vcov(mod_i)

pred_i <- xx_cob + sc_i * sqrt(m_i * xx_cob / sc_i + 1)

dm_i <- 0.5 * (sc_i * xx_cob) / sqrt(m_i * sc_i * xx_cob + sc_i^2)
dsc_i <- 0.5 * (m_i * xx_cob + 2 * sc_i) / sqrt(m_i * sc_i * xx_cob + sc_i^2)

var_i <- sapply(seq_along(xx_cob), function(k) {

```

```

V_i["sc","sc"] * dsc_i[k]^2 +
2 * V_i["m","sc"] * dm_i[k] * dsc_i[k] +
V_i["m","m"] * dm_i[k]^2
})

# IC delta manual (qnorm)
z          <- qnorm(1 - ALPHA / 2)
ic_delta_i_inf <- pred_i - z * sqrt(var_i)
ic_delta_i_sup <- pred_i + z * sqrt(var_i)
dentro_delta_simultaneo <- dentro_delta_simultaneo +
all(curva_verdadera >= ic_delta_i_inf & curva_verdadera <= ic_delta_i_sup)
anchura_delta[i] <- mean(ic_delta_i_sup - ic_delta_i_inf)

# IC delta automático (cuantil F)
npar_i    <- length(coef(mod_i))
degf_i    <- nrow(datos_i) - npar_i
cuantil_F <- sqrt(npar_i * qf(1 - ALPHA, npar_i, degf_i))
ic_auto_i_inf <- pred_i - cuantil_F * sqrt(var_i)
ic_auto_i_sup <- pred_i + cuantil_F * sqrt(var_i)
dentro_auto_simultaneo <- dentro_auto_simultaneo +
all(curva_verdadera >= ic_auto_i_inf & curva_verdadera <= ic_auto_i_sup)
anchura_auto[i] <- mean(ic_auto_i_sup - ic_auto_i_inf)

# IC wild bootstrap
boot_i <- tryCatch(
boot_nls(mod_i, data = datos_i, R = R_BOOT, resid.type = "wild"),
error = function(e) NULL
)
if (is.null(boot_i)) next

curvas_b <- matrix(NA, nrow = R_BOOT, ncol = length(xx_cob))
for (b in 1:R_BOOT) {
mb <- boot_i$t[b, 1]
scb <- boot_i$t[b, 2]
if (!is.na(mb) && !is.na(scb) && scb > 0 && mb > 0)
curvas_b[b, ] <- xx_cob + scb * sqrt(mb * xx_cob / scb + 1)
}
ic_boot_i_inf <- apply(curvas_b, 2, quantile, probs = ALPHA / 2, na.rm = TRUE)
ic_boot_i_sup <- apply(curvas_b, 2, quantile, probs = 1 - ALPHA / 2, na.rm = TRUE)
dentro_boot_simultaneo <- dentro_boot_simultaneo +
all(curva_verdadera >= ic_boot_i_inf & curva_verdadera <= ic_boot_i_sup)
anchura_boot[i] <- mean(ic_boot_i_sup - ic_boot_i_inf)

n_validas <- n_validas + 1
if (i %% 100 == 0) cat(sprintf(" Réplica %d / %d\n", i, N_SIM))
}

cat(sprintf("\nRéplicas válidas: %d / %d\n", n_validas, N_SIM))
cat(sprintf("\nCOBERTURA SIMULTÁNEA (todos los puntos del grid):\n"))
cat(sprintf(" Delta manual (qnorm): %.1f%%\n", 100 * dentro_delta_simultaneo / n_validas))
cat(sprintf(" Delta auto (F): %.1f%%\n", 100 * dentro_auto_simultaneo / n_validas))
cat(sprintf(" Wild bootstrap: %.1f%%\n", 100 * dentro_boot_simultaneo / n_validas))

```



```

P16 = c(rep(0.2,15),                                rep(10,5))
)

cat("\n=== PRUEBAS EXPLORATORIAS (P1-P16) ===\n")
res_pruebas <- lapply(config_pruebas, simular_escenario)
tab_pruebas <- resumen_lista(res_pruebas, names(config_pruebas))
print(format(tab_pruebas, digits = 3, nsmall = 2), quote = FALSE)

# ?? 6.2 Escenario 1: proporción entre sigma3=0 y sigma3=15 (n=20) ??????????????

n_total      <- 20
proporciones <- 1:(n_total - 1)
set.seed(1)
cat("\n=== ESCENARIO 1: PROPORCIÓN (n=20) ===\n")
res_prop <- lapply(proporciones, function(j) {
  simular_escenario(c(rep(0, j), rep(15, n_total - j)))
})
etiq_prop <- paste0(proporciones * 5, "/", (n_total - proporciones) * 5)
tab_prop <- resumen_lista(res_prop, etiq_prop)
print(format(tab_prop, digits = 3, nsmall = 2), quote = FALSE)

plot(proporciones * 5, tab_prop$Score,
type = "b", pch = 16,
xlab = "% ensayos a sigma3 = 0",
ylab = "Score RMSE global",
main = "Score global vs proporción de ensayos")
abline(v = 60, lty = 2, col = 2)
legend("topright", legend = "Óptimo empírico (60%)", lty = 2, col = 2)
cat("\nProporción óptima:", etiq_prop[which.min(tab_prop$Score)], "\n")

# ?? 6.3 Escenario 2: magnitud de sigma3_max (proporción fija 60/40) ??????????????

valores_v <- 5:50
n_s2      <- 20; n0_s2 <- round(n_s2 * 0.6); na_s2 <- n_s2 - n0_s2

cat("\n=== ESCENARIO 2: MAGNITUD sigma3_max ===\n")
res_smax <- lapply(valores_v, function(v) {
  simular_escenario(c(rep(0, n0_s2), rep(v, na_s2)))
})
tab_smax <- resumen_lista(res_smax, as.character(valores_v))
print(tab_smax[, c("Escenario", "RMSE_m", "RMSE_sc", "Score")], digits = 3)

plot(valores_v, tab_smax$Score,
type = "b", pch = 16,
xlab = expression(sigma[3*,"*max] ~ "(MPa)"),
ylab = "Score RMSE global",
main = expression("Score global vs " ~ sigma[3*,"*max]))
abline(v = 20, lty = 2, col = 2)
legend("topright", legend = "20 MPa (punto de rendimiento decreciente)", lty = 2, col = 2)

# ?? 6.4 Escenario 3: tamaño muestral (proporción 60/40, sigma3max=15) ??????????

```

```

tamanios <- 10:100
cat("\n=== ESCENARIO 3: TAMAÑO MUESTRAL ===\n")
res_n <- lapply(tamanios, function(n) {
n0 <- round(n * 0.6); na <- n - n0
simular_escenario(c(rep(0, n0), rep(15, na)))
})
tab_n <- resumen_lista(res_n, as.character(tamanios))
print(tab_n[, c("Escenario", "RMSE_m", "RMSE_sc", "Score")], digits = 3)

plot(tamanios, tab_n$Score,
type = "b", pch = 16, cex = 0.7,
xlab = "Tamaño muestral (n)",
ylab = "Score RMSE global",
main = "Score global vs tamaño muestral")
abline(v = 30, lty = 2, col = 2)
legend("topright", legend = "n = 30 (rendimiento decreciente)", lty = 2, col = 2)

# ?? 6.5 Densidades KDE de todos los escenarios exploratorios ??????????????????

colores_16 <- rainbow(16)
fhats <- lapply(res_pruebas, function(p) kde(x = na.omit(p), gridsize = 500))
plot(fhats[[1]], cont = 95, col = colores_16[1], lwd = 2,
xlab = "m", ylab = expression(sigma[c]),
main = "Densidad estimada 95% ? todas las pruebas")
for (k in 2:16)
plot(fhats[[k]], cont = 95, col = colores_16[k], lwd = 2, add = TRUE)
points(M_TRUE, SC_TRUE, col = "black", pch = 16, cex = 1.5)
legend("topright", legend = names(config_pruebas),
lwd = 2, col = colores_16, cex = 0.65)

# ?? 6.6 Score_2: inverso del determinante de la matriz de información ??????????
#  $\det(I)^{-1}$  es proporcional al volumen del elipsoide de confianza de los
# parámetros. Un  $\det(I)^{-1}$  menor indica mayor información (mejor diseño).
# Se compara con el Score RMSE del Capítulo 6.

cat("\n=== SCORE_2 BASADO EN  $\det(I)^{-1}$  ===\n")

score2_vals <- sapply(config_pruebas, function(cfg) {
d <- det_info(cfg)
if (d <= 0) return(NA)
1 / d
})

score_rmse <- c(P1 = 0.1091, P2 = 0.1253, P3 = 0.1324, P4 = 0.1425,
P5 = 0.1296, P6 = 0.1612, P7 = 0.0544, P8 = 0.1397,
P9 = 0.1167, P10 = 0.1335, P11 = 0.1604, P12 = 0.0929,
P13 = 0.1037, P14 = 0.0747, P15 = 0.0641, P16 = 0.1227)

score2_norm <- (score2_vals - min(score2_vals, na.rm = TRUE)) /
(max(score2_vals, na.rm = TRUE) - min(score2_vals, na.rm = TRUE))
score1_norm <- (score_rmse - min(score_rmse)) /
(max(score_rmse) - min(score_rmse))

```

```

tab_scores <- data.frame(
  Prueba = names(config_pruebas),
  n       = sapply(config_pruebas, length),
  detI    = round(sapply(config_pruebas, det_info), 4),
  Score_2 = round(score2_norm, 3),
  Score_1 = round(score1_norm, 3)
)
cat("\nTabla comparativa Score_1 (RMSE) vs Score_2 (det(I)^{-1}):\n")
print(tab_scores)

cor_scores <- cor(score1_norm, score2_norm, use = "complete.obs")
cat(sprintf("\nCorrelación entre Score_1 y Score_2: r = %.3f\n", cor_scores))

par(mfrow = c(1, 2))
ord1 <- order(score_rmse)
barplot(score_rmse[ord1], names.arg = names(score_rmse)[ord1],
  col = "steelblue", main = "Score_1 (RMSE) por prueba",
  ylab = "Score RMSE", las = 2)
abline(h = min(score_rmse), lty = 2, col = "red")

ord2 <- order(score2_norm, na.last = TRUE)
barplot(score2_norm[ord2], names.arg = names(score2_norm)[ord2],
  col = "coral", main = "Score_2 (det(I)^{-1} normalizado) por prueba",
  ylab = "Score_2 (menor = mejor)", las = 2)
abline(h = min(score2_norm, na.rm = TRUE), lty = 2, col = "red")
par(mfrow = c(1, 1))

plot(score1_norm, score2_norm,
  pch = 16, col = "steelblue",
  xlab = "Score_1 normalizado (RMSE)",
  ylab = "Score_2 normalizado (det(I)^{-1})",
  main = sprintf("Correlación Score_1 vs Score_2 (r = %.3f)", cor_scores))
text(score1_norm, score2_norm, labels = names(config_pruebas), pos = 3, cex = 0.8)
abline(lm(score2_norm ~ score1_norm), lty = 2, col = "red")

```

# Bibliografía

- [1] Hoek, E., & Brown, E. T. (1980). *Underground Excavations in Rock*. Institution of Mining and Metallurgy, London.
- [2] Hoek, E., & Brown, E. T. (1980). Empirical strength criterion for rock masses. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 106(9), 1013–1035. <https://doi.org/10.1061/AJGEB6.0001029>
- [3] Quiñones, J., Arzúa, J., Alejano, L. R., García-Bastante, F., Ivars, D. M., & Walton, G. (2017). Analysis of size effects on the geomechanical parameters of intact granite samples under unconfined conditions. *Acta Geotechnica*, 12(6), 1229–1242. <https://doi.org/10.1007/s11440-017-0531-7>
- [4] Arzúa, J., & Alejano, L. R. (2013). Dilation in granite during servo-controlled triaxial strength tests. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 61, 43–56. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2013.02.007>
- [5] Alejano, L. R., Arzúa, J., Bozorgzadeh, N., & Harrison, J. P. (2017). Triaxial strength and deformability of intact and increasingly jointed granite samples. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 95, 87–103. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2017.03.009>
- [6] Alejano, L. R., Estévez-Ventosa, X., González-Fernández, M. A., Walton, G., West, I. G., González-Molano, N. A., & Alvarillos, J. (2021). A method to correct indirect strain measurements in laboratory uniaxial and triaxial compressive strength tests. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 54(6), 2643–2670. <https://doi.org/10.1007/s00603-021-02392-4>
- [7] González-Fernández, M. A., Estévez-Ventosa, X., Alonso, E., & Alejano, L. R. (2021). Analysis of size effects on the Hoek-Brown failure criterion of intact granite samples. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 833(1), 012023. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/833/1/012023>
- [8] Baty, F., Ritz, C., Charles, S., Brutsche, M., Flandrois, J. P., & Delignette-Muller, M. L. (2015). A toolbox for nonlinear regression in R: The package `nlstools`. *Journal of Statistical Software*, 66(5). <https://doi.org/10.18637/jss.v066.i05>
- [9] Davison, A. C., & Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap Methods and their Application*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] Efron, B., & Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, New York.
- [11] Bates, D.M. and Watts, D.G. (2007). *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*. Wiley, New York.
- [12] Seber, G. A. F., & Wild, C. J. (2003). *Nonlinear Regression*. Wiley, Hoboken.
- [13] Atkinson, A. C., Donev, A. N., & Tobias, R. D. (2007). *Optimum Experimental Designs, with SAS*. Oxford University Press, Oxford.
- [14] Fedorov, V. V. (1972). *Theory of Optimal Experiments*. Academic Press, New York.

- [15] Baecher, G. B., & Christian, J. T. (2003). *Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering*. Wiley, Chichester.
- [16] Phoon, K. K., & Kulhawy, F. H. (1999). Characterization of geotechnical variability. *Canadian Geotechnical Journal*, 36(4), 612–624. <https://doi.org/10.1139/t99-038>
- [17] Cai, M. (2010). Practical estimates of tensile strength and Hoek-Brown strength parameter  $m_i$  of brittle rocks. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 43(2), 167–184. <https://doi.org/10.1007/s00603-009-0053-1>
- [18] R Core Team (2024). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna. <https://www.R-project.org/>
- [19] Phoon, K. K., & Kulhawy, F. H. (1999). Characterization of geotechnical variability. *Canadian Geotechnical Journal*, 36(4), 612–624. <https://doi.org/10.1139/t99-038>
- [20] Baecher, G. B., & Christian, J. T. (2003). *Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering*. Wiley, Chichester.
- [21] Lilliefors, H. W. (1967). On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown. *Journal of the American Statistical Association*, 62(318), 399–402. <https://doi.org/10.2307/2283970>
- [22] Shapiro, S. S., & Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52(3–4), 591–611. <https://doi.org/10.2307/2333709>
- [23] Breusch, T. S., & Pagan, A. R. (1979). A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. *Econometrica*, 47(5), 1287–1294. <https://doi.org/10.2307/1911963>
- [24] Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, 57(3), 519–530. <https://doi.org/10.2307/2334770>
- [25] Seber, G. A. F. y Wild, C. J. (1989). *Nonlinear Regression*. John Wiley & Sons, New York.
- [26] Rubén Fernández Casal (2023). *Estadística: Simulación. Apuntes de la asignatura*. Máster en Técnicas Estadísticas, Universidades de Vigo, Santiago de Compostela y A Coruña. Material docente no publicado.
- [27] Área de Estadística e Investigación Operativa (2022). *Tema 4: Intervalos de Confianza. MTE: Inferencia Estadística*. Máster en Técnicas Estadísticas, Universidades de Vigo, Santiago de Compostela y A Coruña. Material docente no publicado.
- [28] Área de Estadística e Investigación Operativa (2023). *Tema 2: Estimación Puntual. MTE: Inferencia Estadística*. Máster en Técnicas Estadísticas, Universidades de Vigo, Santiago de Compostela y A Coruña. Material docente no publicado.
- [29] Área de Estadística e Investigación Operativa (2023). *Tema 3: Procedimientos para la Construcción de Estimadores. MTE: Inferencia Estadística*. Máster en Técnicas Estadísticas, Universidades de Vigo, Santiago de Compostela y A Coruña. Material docente no publicado.
- [30] Pateiro López, B. (2023). *Análisis Multivariante. Apuntes de la asignatura*. Máster en Técnicas Estadísticas, Universidades de Vigo, Santiago de Compostela y A Coruña. Material docente no publicado.
- [31] Hoek, E., Carranza-Torres, C., & Corkum, B. (2002). Hoek-Brown failure criterion — 2002 edition. *Proceedings of the North American Rock Mechanics Society Meeting*, Toronto, 1, 267–273.
- [32] Ulusay, R., & Hudson, J. A. (Eds.) (2007). *The Complete ISRM Suggested Methods for Rock Characterization, Testing and Monitoring: 1974–2006*. ISRM Turkish National Group, Ankara.