UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
UNIVERSIDADE DA CORUÑA
Universidade Vigo

Trabajo Fin de Máster

Juegos estratégicos: Juegos matriciales y su relación con la programación lineal

Anne Rodríguez Ortiz

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2024-2025

Propuesta de Trabajo Fin de Máster

Título en galego: Xogos estratéxicos: Xogos matriciais e a súa relación coa programación lineal
Título en español: Juegos estratégicos: Juegos matriciales y su relación con la programación lineal
English title: Strategic Games: Matrix games and their relation to linear programming
Modalidad: Modalidad A
Autor/a: Anne Rodríguez Ortiz, Universidade de Santiago de Compostela
Director/a: Ignacio García Jurado, Universidade da Coruña
Tutor/a: Tutor/a 1, Empresa 1; Tutor/a 2, Empresa 2
Breve resumen del trabajo: Este TFM analiza la teoría de juegos, enfocándose en juegos estratégicos y matriciales, y su conexión con la programación lineal. Incluye ejemplos prácticos, como resolver juegos con el método del simplex, destacando aplicaciones en decisiones estratégicas y problemas de optimización.
Recomendaciones:
Otras observaciones:

Índice general

Resumen

Resumen en español

Este Trabajo Fin de Máster (TFM) explora la teoría de juegos, con énfasis en los juegos estratégicos y los juegos matriciales, y su relación con la programación lineal. La teoría de juegos, una disciplina matemática que modela decisiones estratégicas entre agentes, se analiza aquí desde una perspectiva teórica y práctica, enfocándose en las interacciones competitivas y cooperativas.

El estudio se centra en los juegos matriciales, una representación fundamental de los juegos estratégicos, donde las estrategias y los pagos se organizan en forma de matriz. Mediante programación lineal, se abordan problemas de optimización asociados a estos juegos, como encontrar estrategias mixtas óptimas que maximicen las ganancias de los jugadores o minimicen sus pérdidas.

El trabajo incluye ejemplos prácticos, destacando la resolución de un juego en forma matricial utilizando el método del simplex, una herramienta poderosa de la programación lineal. Entre los casos estudiados, se analiza un problema real relacionado con decisiones bajo incertidumbre, mostrando cómo la teoría de juegos y la programación lineal ofrecen soluciones eficientes.

English abstract

This Master's Thesis (TFM) explores game theory, with a focus on strategic games and matrix games, and their relationship with linear programming. Game theory, a mathematical discipline that models strategic decision-making among agents, is analyzed here from both theoretical and practical perspectives, emphasizing competitive and cooperative interactions.

The study focuses on matrix games, a fundamental representation of strategic games where strategies and payoffs are organized in a matrix format. Through linear programming, optimization problems associated with these games are addressed, such as finding optimal mixed strategies that maximize players' gains or minimize their losses.

The thesis includes practical examples, highlighting the resolution of a matrix-form game using the simplex method, a powerful tool in linear programming. Among the cases analyzed, a real-world problem related to decision-making under uncertainty is examined, demonstrating how game theory and linear programming provide efficient solutions.

Prefacio

En este Trabajo Fin de Máster (TFM), se presenta un manual introductorio sobre juegos matriciales diseñado para facilitar la comprensión de este tipo de juegos a los usuarios. El objetivo es proporcionar los conocimientos necesarios para interpretar los resultados generados por un código en R, desarrollado específicamente para calcular el valor de unos juegos matriciales y determinar un par de estrategias óptimas para los jugadores involucrados. Para la elaboración de este manual, se ha utilizado, con el consentimiento del tutor, material didáctico previamente preparado por él. Este contenido ha sido traducido, enriquecido y complementado con diversos ejemplos que vinculan la teoría de los juegos matriciales con las ciencias sociales.

Capítulo 1

Juegos estratégicos

Los juegos matriciales y los juegos estratégicos son dos representaciones fundamentales en la teoría de juegos, que se utilizan para modelar situaciones de interacción entre jugadores. Los juegos estratégicos, también conocidos como juegos de forma normal, se caracterizan por definir las estrategias posibles para cada jugador y los pagos asociados a cada combinación de estrategias. Los juegos matriciales, una subcategoría de los juegos estratégicos, representan los pagos de los jugadores en una matriz, donde las filas corresponden a las estrategias del jugador A y las columnas a las del jugador B. Estas representaciones permiten analizar situaciones de competencia o cooperación y son útiles para aplicar herramientas matemáticas, como la programación lineal, con el objetivo de encontrar soluciones de equilibrio, como el equilibrio de Nash.

1.1. Introducción a los juegos estratégicos

Definición 1.1.1 *Un juego estratégico de n jugadores G con un conjunto de jugadores $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ se describe mediante una $2n$-tupla*

$$(X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n),$$

tal que, para todo $i \in N$, X_i es el conjunto no vacío de estrategias del jugador i, y $H_i : X = \prod_{j=1}^{n} X_j \to \mathbb{R}$ es su función de pago, que asigna a cada perfil de estrategias $(x_1, ..., x_n) \in X$ el pago $H_i(x)$, que el jugador i obtiene si se juega dicho perfil.

Observación 1.1.1 *El juego G se lleva a cabo de la siguiente manera: puede haber una fase previa en la que los jugadores pueden comunicarse e incluso hacer acuerdos (no vinculantes). Luego, cada jugador i elige una estrategia $x_i \in X_i$. Las decisiones se toman de manera simultánea e independiente. Finalmente, cada jugador i recibe el pago $H_i(x)$.*

Observación 1.1.2 *En una situación interactiva estática (como las que modelan los juegos estratégicos), intervienen los siguientes elementos:*

- $\{X_i\}_{i \in N}$, *los conjuntos de estrategias de los jugadores.*
- R, *el conjunto de resultados posibles.*
- *Una aplicación $f : X \to R$, que asigna a cada perfil de estrategias x su correspondiente resultado.*
- $\{\succeq_i\}_{i \in N}$, *las preferencias (preórdenes totales sobre R) de los jugadores. Un preorden total en R es una relación binaria $\succeq \subseteq R \times R$ que es comparable y transitiva. Para $r_1, r_2 \in R$, si $(r_1, r_2) \in \succeq$, escribimos $r_1 \succeq r_2$. Decimos que $\succeq \subseteq R \times R$ es comparable si satisface la siguiente condición: para todo $r_1, r_2 \in R$, $r_1 \not\succeq r_2$ implica $r_2 \succeq r_1$.*

- *Las funciones de utilidad* $\{u_i\}_{i\in N}$ *representan las preferencias de los jugadores sobre* R*. Una función de utilidad que representa un preorden total* $\succeq$ *sobre* R *para todo* $i \in N$ *y para todo* $(x_1, ..., x_n) \in X$ *es una aplicación* $u : R \to \mathbb{R}$ *que satisface, para todo* $r_1, r_2 \in R$*, que* $r_1 \succeq r_2$ *si y solo si* $u(r_1) \geq u(r_2)$*. Bajo ciertas condiciones generales sobre* $\succeq$ *y* R*, se puede demostrar que para cada preorden total* $\succeq$ *sobre* R*, existe una función de utilidad que lo representa (ver, por ejemplo González-Díaz et al (2023)).*

  Un juego estratégico es un modelo simplificado

  $(X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$,

  en el que $H_i(x) = u_i(f(x))$*, para todo* $i \in N$ *y todo* $x \in X$*.*

Para explicar mejor los juegos estratégicos utilizaremos una serie de ejemplos:

Ejemplo 1.1.1 *(El dilema del prisionero) El dilema del prisionero, es un juego en forma estratégica en el que:*

- $X_1 = X_2 = \{C \text{ (Confesar)}, D \text{ (No confesar)}\}$,
- $H_1(C, C) = -10$, $H_1(C, D) = 0$, $H_1(D, C) = -15$, $H_1(D, D) = -1$,
- $H_2(C, C) = -10$, $H_2(C, D) = -15$, $H_2(D, C) = 0$, $H_2(D, D) = -1$.

Este juego estratégico puede representarse de manera más clara en la siguiente tabla:

	C	*D*
C	*-10, -10*	*0, -15*
D	*-15, 0*	*-1, -1*

Todos los juegos estratégicos bipersonales en los que los jugadores tienen conjuntos de estrategias finitos (y pequeños), pueden ser representados por este tipo de tablas.

Ejemplo 1.1.2 *(Oligopolio de Cournot)* N *es el conjunto de productores de un determinado bien. Al comienzo del periodo, cada productor* i *debe elegir un* $x_i \in [0, +\infty)$*, que es el número de unidades del bien que producirá y llevará al mercado; el costo para* i *de producir y llevar* x_i *es* $c_i(x_i)$*. El precio de una unidad del bien en el mercado depende de* $\sum_{i\in N} x_i$*, y se denota como* $p\left(\sum_{i\in N} x_i\right)$*. Esta situación puede modelarse mediante el juego estratégico* $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$*, donde:*

- $X_i = [0, +\infty)$
- $H_i(x) = p\left(\sum_{j\in N} x_j\right) x_i - c_i(x_i)$*; para todo* $i \in N$ *y todo* $x \in X$*.*

1.2. Equilibrio de Nash para juegos estratégicos

El concepto de solución más importante para los juegos estratégicos es el equilibrio de Nash. Fue introducido por Nash en 1951. Un equilibrio de Nash en un juego estratégico es simplemente un perfil de estrategias tal que ningún jugador obtiene beneficios al desviarse unilateralmente de él.

Definición 1.2.1 *Sea* $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$ *un juego estratégico. Un equilibrio de Nash de* G *es un perfil de estrategias* $(x_1, ..., x_n) \in X$ *que satisface la condición:*

$$H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x'_i)$$

para todo $x'_i \in X_i$ *y para todo* $i \in N$*. El perfil* (x_{-i}, x'_i) *se define como* $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$*.*

Ahora para los dos ejemplos anteriores, buscaremos aplicar el equilibrio de Nash y así llegar a una solución:

Ejemplo 1.2.1 ***(Dilema del prisionero):*** *Claramente, el único equilibrio de Nash del dilema del prisionero es* (C, C).

Ejemplo 1.2.2 ***(Oligopolio de Cournot):*** *Busquemos equilibrios de Nash en un modelo de Cournot como el mencionado anteriormente, asumiendo que:*

- *Tratamos con un duopolio, es decir,* $n = 2$.
- $c_i(x_i) = cx_i$ *para todo* $i \in \{1, 2\}$, *donde* $c > 0$.
- *La función de precio está dada por:*

$$p(x_1 + x_2) = \begin{cases} a - (x_1 + x_2) & \text{si } x_1 + x_2 < a \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde $a > c$.

Note que las funciones de pago del juego estratégico correspondiente a este modelo de duopolio son (para todo $i \in \{1, 2\}$*):*

$$H_i(x) = \begin{cases} x_i(a - x_1 - x_2 - c) & \text{si } x_1 + x_2 < a \\ -x_i c & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Un equilibrio de Nash de este juego (a veces llamado equilibrio de Cournot) es un par $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in X_1 \times X_2$ *tal que:*

$$H_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \geq H_1(x_1, \hat{x}_2), \quad \forall x_1 \in X_1;$$
$$H_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \geq H_2(\hat{x}_1, x_2), \quad \forall x_2 \in X_2.$$

Calculemos un equilibrio de Nash de este juego. Tenga en cuenta que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = -2x_1 + a - x_2 - c;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) = -2x_2 + a - x_1 - c;$$

donde, para todo $i \in \{1, 2\}$, $f_i(x) := x_i(a - x_1 - x_2 - c)$, *y luego*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = 0 \text{ si y solo si } x_1 = \frac{a - x_2 - c}{2};$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) = 0 \text{ si y solo si } x_2 = \frac{a - x_1 - c}{2}.$$

Note que

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(x) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(x) = -2 \text{ para todo } x \in X.$$

Entonces, si denotamos por $B_i(x_{-i})$ *el conjunto*

$$\{x_i' \mid H_i(x_{-i}, x_i') \geq H_i(x_{-i}, \hat{x}_i);\ \text{para todo } \hat{x}_i \in X\}$$

para cada $x_{-i} \in X_{-i}$ *y cada* $i \in N$, *está claro que*

$$B_1(x_{-1}) = \begin{cases} \frac{a - x_2 - c}{2} & \text{si } x_2 < a - c \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$B_2(x_{-2}) = \begin{cases} \frac{a-x_1-c}{2} & si\ x_1 < a-c \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\hat{x} = \left(\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3}\right)$ *es la única solución del sistema*

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a-x_2-c}{2} \\ x_2 = \frac{a-x_1-c}{2} \end{cases}$$

es evidente que $\hat{x}$ *es el único equilibrio de Nash de este juego. Note que, para todo* $i \in \{1, 2\}$,

$$H_i(\hat{x}) = \frac{(a-c)^2}{9}.$$

Observe que, si en lugar de dos duopolistas, solo hay un monopolista en el mercado, entonces su función de pago sería

$$H(x) = \begin{cases} x(a-x-c) & si\ x < a \\ -xc & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

y luego $f'(x) = 0$ *si y solo si* $x = \frac{a-c}{2}$ *(donde* $f(x) = x(a-x-c)$*). Ahora, dado que* $f''(x) = -2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, entonces el nivel de producción óptimo y el costo para un monopolista son:*

$$\hat{x} = \frac{a-c}{2}; \quad H(\hat{x}) = \frac{(a-c)^2}{4}.$$

Así, está claro que el precio de una unidad en el mercado es menor en el caso de duopolio.

Ahora analizaremos el oligopolio de Cournot para n *jugadores:*

- *Consideramos un oligopolio con* n *jugadores, es decir,* $n \geq 2$.
- *Los costos para cada jugador son lineales:* $c_i(x_i) = cx_i$ *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, donde* $c > 0$.
- *La función de precio está dada por:*

$$p(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \begin{cases} a - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) & si\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n < a \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

  donde $a > c$.

Las funciones de pago del juego estratégico para este modelo son:

$$H_i(x) = \begin{cases} x_i(a - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - c) & si\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n < a \\ -x_i c & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Un equilibrio de Nash de este juego es un conjunto $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ *tal que:*

$$H_i(\hat{x}) \geq H_i(x_i, \hat{x}_{-i}), \quad \forall x_i \in X_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Derivando las funciones de pago, obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i}(x) = a - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - c - x_i = 0.$$

Resolviendo para x_i*, tenemos:*

$$x_i = \frac{a - c - \sum_{j \neq i} x_j}{2}$$

Es fácil comprobar que la soluciónde este sistema es $\hat{x} = (\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n)$ *con:*

$$\hat{x}_i = \frac{a-c}{n+1} \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

La función de pago en equilibrio para cada jugador resulta ser:

$$H_i(\hat{x}) = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2}.$$

A continuación, presentamos el teorema de Nash, que proporciona una condición suficiente para la existencia de un equilibrio de Nash en un juego estratégico, ver más en González-Díaz et al (2023).

Teorema 1.2.1 (Teorema de Nash) *Sea* $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$ *un juego en forma estratégica que satisface las siguientes condiciones para todo* $i \in N$*:*

- X_i *es un subconjunto no vacío, convexo y compacto de* $\mathbb{R}^{m_i}$*.*
- H_i *es continua.*
- *Para todo* $\bar{x}_{-i}$, $H_i(\bar{x}_{-i}, x_i)$ *es cóncava en* X_i *(como función de* x_i*).*

Entonces, G tiene al menos un equilibrio de Nash.

Es importante notar que no podemos aplicar el teorema de Nash a ninguno de los ejemplos tratados anteriormente. Sin embargo, la condición suficiente proporcionada por este teorema se aplica a una amplia clase de juegos, como veremos en las siguientes secciones.

1.3. Estrategias Mixtas de Juegos Finitos

Definición 1.3.1 *Un juego finito es un juego estratégico en el que los jugadores cuentan con un conjunto finito de estrategias. En este tipo de juegos,* $|X_i| = m_i$*, donde* m_i *es un número natural, para todo* $i \in N$*.*

Ejemplo 1.3.1 *El juego de Matching Pennies es un juego básico en teoría de juegos, que ilustra el concepto de equilibrio en estrategias mixtas. Se juega entre dos personas, cada una de las cuales tiene una moneda y puede elegir entre dos opciones: poner la moneda cara arriba (C) o cruz arriba (X).*

- ***Jugadores****: Dos (llamémoslos Jugador A y Jugador B).*
- ***Opciones****: Cada jugador elige simultáneamente cara (C) o cruz (X).*
- ***Resultado****:*
  - *Si ambos eligen la misma cara de la moneda (ambos C o ambos X), el Jugador A gana y el Jugador B pierde.*
  - *Si eligen diferente (uno C y el otro X), el Jugador B gana y el Jugador A pierde.*

La matriz de pagos del juego se representa de la siguiente manera:

	Jugador B: C	*Jugador B: X*
Jugador A: C	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
Jugador A: X	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

- *En cada celda, el primer número representa el pago del Jugador A y el segundo número el pago del Jugador B.*
- *Si ambos eligen C, el Jugador A gana 1 y el Jugador B pierde 1, representado como* $(1, -1)$.
- *Si ambos eligen X, el Jugador A también gana 1 y el Jugador B pierde 1, representado como* $(1, -1)$.
- *Si eligen distinto, el Jugador B gana y el Jugador A pierde, representado como* $(-1, 1)$.

En este juego, no existe un equilibrio en estrategias puras, ya que cada jugador intentará anticiparse al otro. Sin embargo, en el equilibrio en estrategias mixtas, cada jugador elige C y X con una probabilidad del 50 % para hacer impredecible su jugada.

- ***Probabilidad:***
    - *Jugador A elige C con 50 % y X con 50 %.*
    - *Jugador B elige C con 50 % y X con 50 %.*

Este equilibrio hace que ambos jugadores tengan la misma probabilidad de ganar o perder en cada ronda, y, en promedio, su expectativa de ganancia será cero.

Cabe destacar que el teorema de Nash no es aplicable a los juegos finitos. Como se ve en el juego de "Matching Pennies".

No obstante, existe una solución teórica que asegura la existencia de equilibrios de Nash para cualquier juego finito. Esta consiste en ampliar las opciones estratégicas de los jugadores, permitiendo que no solo elijan las estrategias originales (ahora llamadas estrategias puras), sino también combinaciones probabilísticas de estas estrategias. Esta extensión del juego original se denomina la extensión mixta, y las estrategias en esta extensión son conocidas como estrategias mixtas.

Aunque se ha mencionado la extensión mixta como una "solución teórica", las estrategias mixtas tienen un sentido práctico en muchas situaciones reales. A continuación, exploraremos brevemente este concepto en un ejemplo, donde se introducirá informalmente la extensión mixta de un juego estratégico.

Ejemplo 1.3.2 *Tengamos en cuenta otro tipo de juego de matching pennies. Supongamos que los jugadores, además de elegir E o O, pueden elegir una lotería L que selecciona E con probabilidad* $\frac{1}{2}$ *y O con probabilidad* $\frac{1}{2}$. *Supongamos también que los jugadores tienen funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern (y, por lo tanto, sus funciones de pago se pueden extender al conjunto de perfiles de estrategias mixtas, calculando la expectativa matemática). El nuevo juego que estamos considerando es el siguiente:*

	E	O	L
E	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$
O	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(0, 0)$
L	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$

Obsérvese que las funciones de pago se han extendido teniendo en cuenta que los jugadores eligen sus loterías de forma independiente (nos encontramos en un juego estratégico). Por ejemplo:

$$H_1(L,L) = \frac{1}{4}H_1(E,E) + \frac{1}{4}H_1(E,O) + \frac{1}{4}H_1(O,E) + \frac{1}{4}H_1(O,O) = 0.$$

Obsérvese que este juego tiene un equilibrio de Nash: (L,L). La extensión mixta del juego de matching pennies es un nuevo juego estratégico en el que los jugadores pueden elegir no solo L, sino cualquier otra lotería sobre $\{E,O\}$. Es fácil verificar que el único equilibrio de Nash de la extensión mixta del juego de matching pennies es (L,L). Una interpretación de esto puede ser la siguiente: en una situación de matching pennies, es muy importante para ambos jugadores que el otro no tenga ninguna información sobre cuál será su elección final (E u O). Para lograr esto, sería óptimo para cada jugador que ni siquiera él mismo lo supiera.

Definición 1.3.2 *Sea $G = (X_1,\ldots,X_n,H_1,\ldots,H_n)$ un juego finito como se describe en la Definición 1.3.1. La extensión mixta de G es el juego estratégico:*

$$E(G) = (S_1,\ldots,S_n,H_1,\ldots,H_n)$$

donde, para cada jugador $i \in N$:

- $S_i = \{s_i \in \mathbb{R}^{X_i} \mid s_i(x_i) \geq 0$ *para todo* $x_i \in X_i, \sum_{x_i \in X_i} s_i(x_i) = 1\}$
- $H_i(s) = \sum_{x\in X} H_i(x)s(x)$ *para todo* $s \in S$, *donde* $S = \prod_{i\in N} S_i$ *y* $s(x)$ *denota el producto* $s_1(x_1)\cdot \ldots \cdot s_n(x_n)$.

Observciones técnicas sobre las anteriores definiciones:

Observación 1.3.1 *$E(G)$ es realmente una extensión de G, en el sentido de que, para cada jugador i, cualquier elemento de X_i (estrategia pura) puede identificarse claramente con un elemento de S_i (estrategia mixta). En este sentido, podemos escribir $X_i \subseteq S_i$. Además, las funciones de pago de los jugadores en $E(G)$ son extensiones de las funciones de pago de los jugadores en G.*

Observación 1.3.2 *El conjunto de estrategias del jugador i puede identificarse con el simplex en $\mathbb{R}^{m_i}$ dado por:*

$$\{s_i \in \mathbb{R}^{m_i} \mid s_{i_k} \geq 0 \text{ para todo } k \in \{1,\ldots,m_i\}, \sum_{k=1}^{m_i} s_{i_k} = 1\}.$$

Observación 1.3.3 *La extensión mixta de un juego finito cumple con las condiciones del teorema de Nash. Por lo tanto, como corolario de este teorema, la extensión mixta de cualquier juego finito tiene al menos un equilibrio de Nash. De hecho, este fue el resultado que Nash demostró en su trabajo original.*

Es importante señalar que la extensión mixta de un juego finito solo tiene sentido si los jugadores tienen preferencias sobre el conjunto de loterías en $\mathbb{R}$ y sus funciones de utilidad son funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern.

Sea A un conjunto de alternativas. Denotamos por $L(A)$ el conjunto de loterías sobre A, es decir:

$$L(A) = \{x \in [0,1]^A \mid \sum_{a\in A} x(a) = 1 \text{ y el conjunto } \{a \in A \mid x(a) > 0\} \text{ es finito}\}.$$

Claramente, $L(A)$ es un subconjunto convexo del espacio vectorial $\mathbb{R}^A$, y puede expresarse como la envolvente convexa de $\{e_a \mid a \in A\}$, donde cada e_a es la lotería en $L(A)$ dada por: $e_a(a') = 0$ para todo $a' \in A \setminus \{a\}$ y $e_a(a) = 1$.

Definición 1.3.3 *Un problema de decisión es un par $(X, \preceq)$ tal que X es un conjunto y $\preceq$ es un preorden total sobre X. Si X es un subconjunto convexo de un espacio vectorial real, entonces $(X, \preceq)$ se denomina problema de decisión convexo.*

Definición 1.3.4 *Sea $(L(A), \preceq)$ un problema de decisión convexo. Una función $u : A \to \mathbb{R}$ se dice que es una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern que representa $\preceq$ si, para todo $x, y \in L(A)$, se cumple que:*

$$x \preceq y \iff \sum_{a \in A} u(a)x(a) \geq \sum_{a \in A} u(a)y(a).$$

La principal ventaja de las funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern es que están definidas en A, no en $L(A)$, y representan las preferencias del decisor sobre $L(A)$.

1.4. Juegos bipersonales de suma nula

Definición 1.4.1 *Un juego de suma cero para dos personas es un juego estratégico $G = (X, Y, H_1, H_2)$ tal que, para todo perfil de estrategias $(x, y) \in X \times Y$, se cumple que*

$$H_1(x, y) + H_2(x, y) = 0.$$

Para caracterizar un juego de suma cero para dos personas, es suficiente dar la función de pago de uno de los jugadores. Generalmente, se proporciona la función de pago del jugador uno, que se denota simplemente como H. Por lo tanto, de ahora en adelante, diremos que G es el triplete (X, Y, H). En este párrafo, asumiremos que H está acotada en $X \times Y$.

La clase de juegos de suma cero para dos personas fue la primera estudiada por los teóricos de juegos. Claramente, los juegos de suma cero para dos personas representan situaciones en las que los jugadores tienen intereses totalmente opuestos: si un jugador prefiere (x, y) a (x', y'), entonces el otro jugador prefiere (x', y') a (x, y). Los juegos de suma cero para dos personas fueron analizados inicialmente por John von Neumann, quien introdujo los siguientes conceptos

Definición 1.4.2 *Sea $G = (X, Y, H)$ un juego de suma cero para dos personas.*

- $\varphi(x) = \inf_{y \in Y} H(x, y)$. *$\varphi(x)$ es el peor pago que el jugador uno puede obtener si juega x.*
- *El valor inferior de G, denotado por v, se da por*

  $$v = \sup_{x \in X} \varphi(x).$$

  Este valor proporciona el pago que el jugador uno puede garantizarse en G.
- $\psi(y) = \sup_{x \in X} H(x, y)$. *$\psi(y)$ es la pérdida máxima que el jugador dos puede sufrir si juega y.*
- *El valor superior de G, denotado por V, se da por*

  $$V = \inf_{y \in Y} \psi(y).$$

  Este valor proporciona la pérdida que, como máximo, sufrirá el jugador dos en G, es decir, el pago que, como máximo, obtendrá el jugador uno en G.

Claramente, $v \leq V$. Es decir, para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$,

$$\varphi(x) = \inf_{y \in Y} H(x,y) \leq \sup_{x \in X} H(x,y) = \psi(y),$$

y, por lo tanto, $v \leq V$.

Definición 1.4.3 *Decimos que un juego de suma cero para dos personas $G = (X, Y, H)$ está estrictamente determinado (o que tiene valor) si su valor inferior y su valor superior coinciden, es decir, si $v = V$. En tal caso, decimos que $V = v$ es el valor del juego. Nótese que el valor es el pago que el jugador uno puede garantizarse a sí mismo, y menos el pago que el jugador dos puede garantizarse a sí mismo. En aquellos juegos de suma cero para dos personas que no tienen un valor, la situación no está estrictamente determinada en el sentido de que no está claro quién obtendrá el pago $V - v$.*

Definición 1.4.4 *Sea $G = (X, Y, H)$ un juego de suma cero para dos personas con un valor V.*

- *Se dice que $x \in X$ es una estrategia óptima del jugador uno si $V = \varphi(x)$.*
- *Se dice que $y \in Y$ es una estrategia óptima del jugador dos si $V = \psi(y)$.*

Los siguientes ejemplos ilustran algunas posibilidades que pueden ocurrir con respecto al valor y las estrategias óptimas de un juego de suma cero para dos personas.

Ejemplo 1.4.1 *(Un juego de suma cero para dos personas que es estrictamente determinado). Considera el siguiente juego de suma cero para dos personas.*

	L	R
U	2	2
D	1	3

Claramente, $\varphi(U) = 2$ y $\varphi(D) = 1$, así que $v = 2$. Además, $\psi(L) = 2$ y $\psi(R) = 3$, por lo que $V = 2$. Por lo tanto, el valor de este juego es 2, y U y L son estrategias óptimas para los jugadores uno y dos, respectivamente. Téngase en cuenta que, si un juego de suma cero para dos personas finito (uno en el que los conjuntos de estrategias de los jugadores son finitos) tiene valor, entonces ambos jugadores tienen estrategias óptimas.

Ejemplo 1.4.2 *(Un juego de suma cero para dos personas infinito con un valor en el que los jugadores no tienen estrategias óptimas). Considera el juego de suma cero para dos personas $((0,1),(1,2),H)$ tal que, para todo $(x,y) \in (0,1) \times (1,2)$, $H(x,y) = xy$. Es fácil comprobar que $\varphi(x) = x$ para todo $x \in (0,1)$, y, por lo tanto, $v = 1$. Además, $\psi(y) = y$ para todo $y \in (1,2)$, y $V = 1$. Por lo tanto, el juego está estrictamente determinado con un valor de uno. Sin embargo, los jugadores no tienen estrategias óptimas.*

Hasta ahora, no hemos hablado de los equilibrios de Nash en los juegos de suma cero para dos personas, a pesar de que son juegos estratégicos. Podemos preguntarnos cuál es la conexión entre la teoría de von Neumann y la teoría de Nash, es decir, cuál es la relación entre los equilibrios de Nash y los perfiles de estrategias óptimas en los juegos de suma cero para dos personas. A continuación, trataremos este punto en detalle.

Sea $G = (X, Y, H)$ un juego de suma cero para dos personas. Un equilibrio de Nash de G es un par $(x,y) \in X \times Y$ tal que, para todo $x' \in X$ y todo $y' \in Y$,

$$H(x,y) \geq H(x',y),$$
$$-H(x,y) \geq -H(x,y'),$$

o, de manera equivalente,

$$H(x', y) \le H(x, y) \le H(x, y').$$

Un $(x, y) \in X \times Y$ que satisface la condición (1.1) se dice que es un punto de silla de H. Así, en los juegos de suma cero para dos personas, un equilibrio de Nash y un punto de silla de la función de pago del jugador uno son lo mismo. Ahora veamos dos proposiciones que muestran que la teoría de Nash para juegos estratégicos es una generalización de la teoría de von Neumann para juegos de suma cero para dos personas.

Proposición 1.4.1 *Sea $G = (X, Y, H)$ un juego de suma cero de dos personas y supongamos que $(x, y) \in X \times Y$ es un equilibrio de Nash de G. Entonces:*

- *G está estrictamente determinado.*
- *x es una estrategia óptima para el jugador uno e y es una estrategia óptima para el jugador dos.*
- *$V = H(x, y)$.*

Demostración 1.4.1 *Bajo estas condiciones, es claro que:*

$$v = \sup_{x' \in X} \varphi(x') \ge \varphi(x) = \inf_{y' \in Y} H(x, y') \ge H(x, y) \ge \sup_{x' \in X} H(x', y) = \psi(y) \ge \inf_{y' \in Y} \psi(y') = V$$

Como $v \le V$, todas las desigualdades son igualdades, completando así la prueba.

Proposición 1.4.2 *Sea $G = (X, Y, H)$ un juego de suma cero de dos personas. Si G está estrictamente determinado y $x \in X$ y $y \in Y$ son estrategias óptimas para los jugadores uno y dos, respectivamente, entonces (x, y) es un equilibrio de Nash de G y $V = H(x, y)$.*

Demostración 1.4.2 *Bajo estas condiciones, para todo $x' \in X$ y $y' \in Y$, se tiene que:*

$$H(x', y) \le V \le H(x, y')$$

Tomando $x' = x$ y $y' = y$, obtenemos $V = H(x, y)$, y la prueba está concluida.

Observación 1.4.1 *En vista de las proposiciones anteriores, es claro que si (x, y) y (x', y') son equilibrios de Nash de un juego de suma cero de dos personas, entonces (x, y') y (x', y) también lo son y, además:*

$$H(x, y) = H(x', y') = H(x', y) = H(x, y').$$

Nótese que esto no es cierto para cualquier juego de dos personas.

Observación 1.4.2 *Un juego de suma constante de dos personas es un juego estratégico $G = (X, Y, H_1, H_2)$ tal que, para todo perfil de estrategias $(x, y) \in X \times Y$:*

$$H_1(x, y) + H_2(x, y) = K,$$

donde K es una constante real. Obviamente, un juego de suma cero es un juego de suma constante (para $K = 0$). Sin embargo, estudiar G es lo mismo que estudiar el juego de suma cero $G_1 = (X, Y, H_1)$, ya que $(x, y) \in X \times Y$ es un equilibrio de Nash de G si y solo si es un equilibrio de Nash de G_1.

Capítulo 2

Juegos Matriciales y Programación Lineal

En esta sección vamos a probar que para resolver un juego matricial basta resolver un par de problemas de programación lineal duales entre sí. Con ello podemos usar cualquier algoritmo de resolución de problemas de programación lineal para resolver juegos matriciales. La programación lineal es un campo importante dentro de la investigación de operaciones desde que George Dantzig introdujo en 1947 el método simplex para resolver problemas de programación lineal. Para aquellos que no están familiarizados con la programación lineal, presentamos ahora una breve introducción a este campo. Existen muchos libros sobre programación lineal, pero para dar una referencia, podemos citar a Bazaraa et al. (1990). Además, Owen (1995), aunque es un libro sobre teoría de juegos, incluye un capítulo sobre programación lineal, donde se desarrollan el método simplex y la teoría de la dualidad.

Definición 2.0.1 *Un problema de programación lineal es un problema de optimización con restricciones, en el cual tanto la función objetivo (la que queremos optimizar) como las restricciones son lineales. Todo problema de programación lineal puede expresarse de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & cx^t \\ \textit{Sujeto a} \quad & xA \geq b \qquad (1.1) \\ & x \geq 0 \qquad (1.2) \end{aligned}$$

donde A es una matriz $m \times n$, c es un vector $1 \times m$, y b es un vector $1 \times n$. Queremos encontrar una solución factible para el problema (es decir, un $x \in \mathbb{R}^m$ que satisfaga (1.1) y (1.2)) que minimice la función objetivo cx^t dentro del conjunto de soluciones factibles.

Definición 2.0.2 *El dual del problema en la definición anterior es el siguiente problema de programación lineal:*

$$\begin{aligned} \textit{Maximizar} \quad & by^t \\ \textit{Sujeto a} \quad & Ay^t \geq c^t \qquad (1.3) \\ & y \geq 0 \qquad (1.4) \end{aligned}$$

Ahora queremos encontrar una solución factible para el problema (es decir, un $y \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga (1.3) y (1.4)) que maximice la función objetivo by^t dentro del conjunto de soluciones factibles.

Si tenemos un par de problemas como los de las definiciones, nos referimos al primero como el problema primal (P) y al segundo como el problema dual (D). Ahora enunciamos un resultado importante de la programación lineal: el teorema de la dualidad.

Teorema 2.0.1 *Toma un par de problemas de programación lineal duales como en las definiciones, y toma x y y como soluciones factibles de (P) y (D), respectivamente. Entonces, x es una solución óptima de (P) e y es una solución óptima de (D) si y solo si $cx^t = by^t$.*

Demostremos ahora que, para resolver un juego matricial, basta con resolver un cierto par de problemas de programación lineal duales. Tomemos un juego matricial A con un valor positivo [1]. Para encontrar el valor del juego y el conjunto de estrategias óptimas del jugador uno, debemos resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar } \gamma;$$

sujeto a

$$xP_j \geq \gamma, \quad \forall j \in N;$$

$$xJ_m^t = 1;$$

$$x \geq 0;$$

donde $J_m = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$. Claramente, este problema es equivalente al siguiente (que llamamos problema (1.1)):

$$\text{Minimizar } \frac{1}{\gamma};$$

sujeto a

$$xA \geq \gamma J_n;$$

$$xJ_m^t = 1;$$

$$x \geq 0;$$

$$\gamma > 0.$$

Consideremos ahora el siguiente problema (1.2).

$$\text{Minimizar } u^T J_m;$$

sujeto a

$$uA \geq J_n;$$

$$u \geq 0.$$

Proposición 2.0.1 *a) Si (x, γ) es una solución óptima del problema (1.1), entonces u es una solución óptima del problema (1.2), donde, para todo $i \in M$,*

$$u_i = \frac{x_i}{\gamma}.$$

[1] Si no tenemos garantizado que A tenga valor positivo, podemos hacer lo siguiente. Sumamos una constante adecuada a todos los elementos de la matriz A para que la nueva matriz resultante tenga todos sus elementos positivos. Por otro lado debe tenerse en cuenta que al sumar una constante a todos los elementos de una matriz, el nuevo juego resultante cumple que:

- Los jugadores tienen las mismas estrategias óptimas que en el juego original.
- El valor del juego original es igual al valor del nuevo juego menos la constante sumada.

b) Si u es una solución óptima del problema (1.2), entonces (x,γ) *es una solución óptima del problema (1.1), donde, para todo* $i \in M$,

$$x_i = \frac{u_i}{uJ_m^t} \quad y \quad \gamma = \frac{1}{uJ_m^t}.$$

Demostración 2.0.1 *A) Supongamos que* (x,γ) *es una solución óptima de (1.1) y sea u definida como en el enunciado. Como* $xA \geq \gamma J_n$ *y* $\gamma > 0$, *entonces* $\frac{x}{\gamma} \cdot A \geq J_n$ *y, además,* $\frac{x}{\gamma} \geq 0$ *(porque tambien,* $x \geq 0$*). Por lo tanto, u es una solución factible de (1.2).*

Veamos, por reducción al absurdo, que u es óptima de (1.2). Si no fuera, existiría $\bar{u} \geq 0$, *con* $\bar{u}A \geq J_n$, *tal que* $\bar{u}J_m^t < uJ_m^t$. *Definamos entonces:*

- $\overline{x}_i = \frac{1}{\bar{u}J_m^t}\,\overline{u}_i, \quad \forall i \in M$
- $\overline{\gamma} = \frac{1}{\bar{u}J_m^t}$

Como $\bar{u}A \geq J_n$ *y* $\bar{u} \geq 0$, *está claro que* $\bar{u} > 0$, *con lo que* $\bar{\gamma}$ *está bien definido y, además,* $\bar{\gamma} > 0$. *De la factibilidad de* $\bar{u}$ *también se deduce que*

$$\overline{x} \geq 0.$$

Además,

$$\overline{x}J_m^t = \frac{\overline{u}J_m^t}{\overline{u}J_m^t} = 1.$$

Por otro lado, como $1/\bar{\gamma} = \bar{u}J_m^t < uJ_m^t = 1/\gamma$, *tendríamos que* (x,γ) *no es óptima de (1.1), lo cual es una contradicción.*

B) Supongamos que u es una solución óptima de (1.2) y sea (x,γ) *definida como en el enunciado. Como* $uA \geq J_n$ *y* $u \geq 0$ *está claro que* $u > 0$, *con lo que* γ *está bien definido y además,* $\gamma > 0$. *De la factibilidad de u también se deduce que*

$$x \geq 0.$$

Además,

$$xJ_m^t = \frac{uJ_m^t}{uJ_m^t} = 1.$$

Por lo tanto (x,γ) *es una solución factible de (1.1).*

Veamos, por reducción al absurdo, que (x,γ) *es óptima de (1.1). Si no fuera así, existiría* $(\overline{x},\overline{\gamma})$, *con* $\overline{x}A \geq \overline{\gamma}J_n$, $\overline{x}J_m^t = 1$, $\overline{x} \geq 0$, $\overline{\gamma} > 0$, *tal que*

$$\frac{1}{\overline{\gamma}} < \frac{1}{\gamma}$$

Definamos, entonces:

$$\overline{u}_i = \frac{1}{\overline{\gamma}}\overline{x}_i, \quad \forall i \in M$$

Como $\bar{x} \geq 0$ *y* $\bar{\gamma} > 0$ *está claro que* $\bar{u} \geq 0$. *De la factibilidad de* $(\bar{x},\bar{\gamma})$ *también se deduce que* $\bar{u}A \geq J_n$, *con lo que* $\bar{u}$ *es una solución factible de (1.2). Además*

$$\overline{u} \cdot J_m^t = \frac{1}{\overline{\gamma}}\,\overline{x}J_m^t = \frac{1}{\overline{\gamma}} < \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}xJ_m^t = u \cdot J_m^t.$$

Entonces u no sería óptima de (1.2), lo cual es una contradicción.

Ahora podemos proceder de manera análoga desde el punto de vista del jugador dos.

Para encontrar el valor del juego y el conjunto de estrategias óptimas del jugador dos, debemos resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar } \theta;$$

sujeto a

$$Q_i y^t \leq \theta, \quad \forall i \in M;$$
$$yJ_n^t = 1;$$
$$y \geq 0.$$

Claramente, resolver este problema es equivalente a resolver el siguiente (que llamamos problema (2.1)):

$$\text{Maximizar } \frac{1}{\theta};$$

sujeto a

$$Ay^t \leq \theta J_m^t;$$
$$yJ_n^t = 1;$$
$$y \geq 0.$$

Consideremos ahora el siguiente problema (2.2).

$$\text{Maximizar } wJ_n^t;$$

sujeto a

$$Aw^t \leq J_m^t;$$
$$w \geq 0.$$

Nuevamente, es un ejercicio sencillo demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.0.2 *a) Si (y, θ) es una solución óptima del problema (2.1), entonces w es una solución óptima del problema (2.2), donde, para todo $j \in N$,*

$$w_j = \frac{y_j}{\theta}.$$

b) Si w es una solución óptima del problema (2.2), entonces (y, θ) es una solución óptima del problema (2.1), donde, para todo $j \in N$,

$$y_j = \frac{w_j}{wJ_n^t} \quad y \quad \theta = \frac{1}{wJ_n^t}.$$

Entonces, para resolver el juego matricial A, basta con resolver los problemas (1.2) y (2.2), que son un par de problemas duales de programación lineal. Por lo tanto, hemos demostrado lo que queríamos. Obsérvese que este resultado implica que el método simplex puede ser utilizado para resolver un juego matricial. En la próxima sección ilustramos este resultado resolviendo varios problemas prácticos.

Capítulo 3

Ejemplos prácticos

Ejemplo 3.0.1 *Estrategia de fijación de precios entre dos empresas*

*Dos empresas, **A** y **B**, compiten en un mercado ofreciendo productos similares. Ambas pueden elegir entre tres estrategias de fijación de precios: **Precio alto (PA)**, **Precio medio (PM)** y **Precio bajo (PB)**. Dependiendo de la estrategia que cada una elija, las ganancias de la empresa A (y las pérdidas de la empresa B, ya que es un juego de suma cero) están dadas por la siguiente matriz de pagos:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 30 & 20 & -10 \\ 40 & 10 & -20 \\ 50 & 5 & -30 \end{pmatrix}$$

Las filas corresponden a las estrategias de la empresa A y las columnas a las estrategias de la empresa B.

Está claro que $((1,0,0),(0,0,1))$ es un par de estrategias óptimas de los jugadores y que el valor de este juego es -10. Vamos a ilustrar cómo podríamos resolverlo (y llegar a este resultado) usando los resultados del Capítulo 2.

En primer lugar sumamos la constante 31 a todos los elementos de la matriz para tener garantizado que el nuevo juego matricial tiene el valor positivo. Obtenemos así la matriz B siguiente:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 61 & 51 & 21 \\ 71 & 41 & 11 \\ 81 & 36 & 1 \end{pmatrix}$$

En vista de las Proposiciones 2.0.1 y 2.0.2 obtener el valor y una estrategia óptima de los jugadores en este juego basta resolver el siguiente problema de programación lineal y su dual.

$$\text{Maximizar } u_1 + u_2 + u_3$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 61u_1 + 71u_2 + 81u_3 &\geq 1 \\ 51u_1 + 41u_2 + 36u_3 &\geq 1 \\ 21u_1 + 11u_2 + u_3 &\geq 1 \\ u_1, u_2, u_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Al hacerlo (con el código que se indica en el apéndice usando la librería linprog) obtenemos que $(0{,}047, 0, 0)$ es una óptima del primal y que $(0, 0, 0{,}047)$ es una óptima del dual. Por ellos concluimos que:

- $$\frac{1}{0{,}047} \cdot (0{,}047, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

  es una estratégia óptima del jugador 1 en el juego B (y, por lo tanto, también en el juego A).

- $$\frac{1}{0{,}047} \cdot (0, 0, 0{,}047) = (0, 0, 1)$$

  es una estratégia óptima del jugador 2 en el juego B (y por lo tanto, también en el juego A).

- $$\frac{1}{0{,}047} = 21$$

  es el valor del juego B. Por lo tanto, el valor del juego A es $21 - 31 = -10$.

Ejemplo 3.0.2 *Este ejemplo es tomado de Davenport (1960) y Straffin (1993). En este trabajo, Davenport ilustra con un ejemplo cómo los patrones de comportamiento social pueden, en ocasiones, ser respuestas funcionales a problemas que la sociedad debe resolver. Davenport estudió una pequeña aldea en Jamaica, donde alrededor de doscientos habitantes se ganan la vida pescando. Los caladeros de pesca se dividen en bancos cercanos (de 5 a 15 millas de la costa) y bancos lejanos (de 15 a 22 millas de la costa). Veintiséis tripulaciones pescan (en canoas) colocando trampas que son revisadas y recolocadas tres días a la semana. Debido a contornos submarinos especiales, fuertes corrientes cruzan los bancos lejanos. Estas corrientes son impredecibles. Los capitanes de las tripulaciones pueden adoptar una de las siguientes tres estrategias: pescar en los bancos cercanos (I), pescar en los bancos lejanos (O), o pescar en ambos bancos (I-O).*

Pescar en los bancos cercanos es más seguro (en el sentido de que, cuando corre la corriente, se pierde el pescado de los bancos lejanos) y más fácil (porque están más cerca de la costa). Sin embargo, en los bancos lejanos se puede obtener mejor pescado. La siguiente tabla muestra la estimación realizada por Davenport de las ganancias medias, en libras inglesas por mes, para los capitanes de las canoas (él señala que hizo estas estimaciones antes de planificar un análisis basado en la teoría de juegos), dependiendo de la estrategia de pesca elegida y si la corriente corre (R) o no (N).

	R	N
I	17,3	11,5
O	−4,4	20,6
$I-O$	5,2	17

Para resolver este ejemplo utilizando programación lineal, trataremos la matriz de ganacias como un juego de suma cero. En este caso, el jugador 1 (los capitanes de las canoas) busca maximizar su ganancia mínima esperada, y el jugador 2 (la naturaleza, representada por la corriente) actúa como un adversario que busca minimizar esa ganancia. Ver Apéndice para visualizar el código utilizado.

En primer lugar sumamos la constante 5 a todos los elementos de la matriz inicial A para tener garantizado que el nuevo juego matricial tiene valor positivo. Obtenemos así la matriz siguiente:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 22,3 & 16,5 \\ 0,6 & 25,6 \\ 10,2 & 22 \end{pmatrix}$$

En vista de las Proposiciones 2.0.1 y 2.0.2 para obtener el valor y una estrategia óptima de los jugadores en este juego basta resolver el siguiente problema de programación lineal y su dual:

$$\text{Minimizar } u_1 + u_2 + u_3$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 22,3u_1 + 0,6u_2 + 10,2u_3 &\geq 1 \\ 16,5u_1 + 25,6u_2 + 22u_3 &\geq 1 \\ u_1, u_2, u_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Al hacerlo (con el código que se indica en el ápendice usando la librería linprog) obtenemos que $(0{,}0366, 0, 0{,}018)$ es una óptima del primal y que $(0{,}017, 0{,}0375)$ es una óptima del dual. Por ello concluimos que:

- $(0{,}67, 0{,}33)$ es una estrategia óptima del jugador 1 en el juego B (y, por lo tanto, también en el juego original).
- $(0{,}31, 0{,}69)$ es una estrategia óptima del jugador 2 en el juego B (y, por lo tanto, también en el juego original).
- 18,31 es el valor del juego B. Por lo tanto, el valor del juego original es $18{,}31 - 5 = 13{,}31$.

El valor del juego sigue representando la ganancia esperada promedio para el jugador 1 si ambos jugadores siguen sus estrategias óptimas. En este caso, el jugador 1 asegura un promedio de 13,31 libras independientemente de la estrategia del jugador 2 (o el comportamiento de la naturaleza).

El jugador 1 distribuye sus esfuerzos de la siguiente manera:

- El 67 % del tiempo usa la estrategia I (pescar en bancos cercanos). Favorece claramente los bancos cercanos I porque son más seguros y proporcionan una ganancia más estable.
- No usa la estrategia O (pescar en bancos lejanos). Evita por completo los bancos lejanos, ya que es una estratégia con más riesgo y menos rentable dada la incertidumbre de las corrientes.
- El 33 % del tiempo usa la estrategia $I - O$ (pescar en ambos bancos). Utiliza la estrategia combinada como complemento, probablemente para aprovechar algo del potencial de los bancos lejanos sin asumir demasiado riesgo.

Apéndice A

Apéndice

```
library(linprog)
#Ejemplo 3.0.1
c<-c(1,1,1)
b<-c(1,1,1)
A<-matrix(c(61,71,81,s
            51,41,36,
            21,11,1),
          ncol=3, byrow=TRUE)
A
dir<-c(">=",">=",">=")
solveLP(c,b,A,maximum=FALSE,dir,lpSolve=TRUE,solve.dual=TRUE)


#Ejemplo 3.0.2
c=c(1, 1, 1) #tantas entradas como variables
b=c(1, 1) #tantas filas como restricciones

A=matrix(c(22.3,0.6,10.2,
           16.5,25.6,22),
         ncol=3,byrow=TRUE)

dir=c(">=",">=")
solveLP(c,b,A,maximum=FALSE,dir,lpSolve = TRUE,solve.dual = TRUE)
```

Bibliografía

[1] Vazirani, V. V. (2001). *Approximation Algorithms*. Springer.

[2] Myerson, R. B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press.

[3] González-Díaz J.,García-Jurado I. and Fiestras-Janeiro M.G.(2023). *An introductory Course on Mathematical Game Theory and Applications.* Second edition. Graduate studies in Mathematics 238. American Mathematical Society.

[4] Bazaraa M. and Jarvis J. (1990). *Linear Programming and Network Flows.* School of industrial and systems engineering, Georgia.

[5] Owen G. (1995). *Game Theory.* 3rd Edition, Academic Press, San Diego.