



Universidade de Vigo

Trabajo Fin de Máster

---

# Juegos de bancarrota, ranking y core-center

---

Iago Núñez Lugilde

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2019-2020



# Propuesta de Trabajo Fin de Máster

<b>Título en galego:</b> Xogos de bancarrota, ranking e core-center
<b>Título en español:</b> Juegos de bancarrota, ranking y core-center
<b>English title:</b> Bankruptcy games, ranking and core-center
<b>Modalidad:</b> Modalidad A
<b>Autor/a:</b> Iago Núñez Lugilde, USC
<b>Director/a:</b> Estela Sánchez Rodríguez, Universidade de Vigo;
<b>Breve resumen del trabajo:</b> <p>El problema clásico de bancarrota surge cuando una empresa quiebra y no es capaz de satisfacer las deudas contraídas. En este trabajo se estudiará como satisfacer dichas deudas según sea posible, estudiando diferentes soluciones del problema y sus propiedades principales. Además, en dichos problemas existe un orden natural entre los agentes que viene dado por la ordenación de sus demandas, por lo que es de interés poder comparar las distintas soluciones que se han propuesto en la literatura. Se recopilarán los resultados de ranking que se conocen en la actualidad en la clase de los problemas de bancarrota y se medirá la desigualdad existente entre los agentes antes y después de asignar los repartos estudiados. Nos centraremos en una de las reglas introducidas, el core-center, estudiándolo y creando un paquete en R implementando su cálculo para juegos de bancarrota. Por último, se realizará una aplicación al reparto de las emisiones de <math>CO_2</math> permitidas en los distintos países para frenar el cambio climático.</p>



Doña Estela Sánchez Rodríguez, profesora titular de la Universidade de Vigo, informa de que el Trabajo Fin de Máster titulado

**Juegos de bancarrota, ranking y core-center**

fue realizado bajo su dirección por don Iago Núñez Lugilde para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, da su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Vigo, a 12 de enero de 2020.

La directora:

El autor:

Doña Estela Sánchez Rodríguez

Don Iago Núñez Lugilde



# Agradecimientos

A Estela Sánchez Rodríguez, mi tutora que me acompañó y me ayudó a introducirme en el mundo de la investigación. También a todo el grupo SiDOR del que recibí financiación para la realización de este trabajo y del comienzo de la tesis que supondrá este TFM, en particular agradecido a Miguel Mirás y Carmen Quinteiro quienes me resolvieron muchas dudas y me explicaron muchos conceptos.

Sin olvidarme de mi familia y mi pareja, de los que siempre tuve apoyo para realizar el trabajo sin preocupaciones externas y me ayudaron con la decisión de realizar este máster y de estar empezando en estos momentos un proyecto de tesis.

Destacar que gracias a estos meses de trabajo tuve la oportunidad de realizar presentaciones en varios congresos o seminarios, como el del grupo SiDOR, una jornada de Usuarios de R y el XIV Congreso Galego de Estatística e Investigacións de Operacións.

Por último, hacer constar la financiación de los siguientes proyectos de investigación:

- Grupo de Referencia Competitiva de la Xunta de Galicia - Programa de Consolidación - GRC ED431C 2016/040
- FEDER. Unha maneira de facer Europa. Promover o desenvolvemento tecnolóxico, a innovación e unha investigación de calidade. Centro Singular de Investigación de Galicia 2016-2019, CINBIO - ED431G/02
- FEDER/Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades-Agencia Estatal de Investigación/MTM2017-87197-C3-2-P



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Problemas de bancarrota, reglas y propiedades</b>	<b>1</b>
1.1. Problemas de bancarrota . . . . .	1
1.2. Juegos coalicionales . . . . .	2
1.3. Reglas de reparto de un juego de bancarrota . . . . .	5
1.4. Propiedades de una regla de reparto . . . . .	9
<b>2. Ranking y medidas de desigualdad de las reglas de bancarrota</b>	<b>19</b>
2.1. Ranking de las reglas de un problema de bancarrota . . . . .	21
2.2. Diferentes medidas de desigualdad . . . . .	28
<b>3. Núcleo y core-center del problema de bancarrota</b>	<b>35</b>
3.1. Núcleo del juego de bancarrota . . . . .	35
3.2. Core-center del juego de bancarrota . . . . .	45
3.3. Algoritmos . . . . .	58
3.3.1. Algoritmo exterior . . . . .	58
3.3.2. Algoritmo interior . . . . .	67
<b>4. Una aplicación: Reparto de emisiones de <math>CO_2</math></b>	<b>75</b>
4.1. Reparto si todos los países cooperan . . . . .	76
4.2. Reparto si China no coopera . . . . .	81
<b>A. Código R utilizado</b>	<b>85</b>
A.1. Algoritmo exterior . . . . .	85
A.2. Algoritmo interior . . . . .	87
<b>B. Traducciones de las propiedades utilizadas</b>	<b>91</b>
<b>C. Notación</b>	<b>95</b>
<b>D. Resumen de propiedades y reglas</b>	<b>97</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>



# Resumen

## Resumen en español

El problema clásico de bancarrota surge cuando una empresa quiebra y no es capaz de satisfacer las deudas contraídas. En este trabajo se estudiará como satisfacer dichas deudas según sea posible, estudiando diferentes soluciones del problema y sus propiedades principales. Además, en dichos problemas existe un orden natural entre los agentes que viene dado por la ordenación de sus demandas, por lo que es de interés poder comparar las distintas soluciones que se han propuesto en la literatura. Se recopilarán los resultados de ranking que se conocen en la actualidad en la clase de los problemas de bancarrota y se medirá la desigualdad existente entre los agentes antes y después de asignar los repartos estudiados. Nos centraremos en una de las reglas introducidas, el core-center, estudiándolo y creando un paquete en R implementando su cálculo para juegos de bancarrota. Por último, se realizará una aplicación al reparto de las emisiones de  $CO_2$  permitidas en los distintos países para frenar el cambio climático.

## English abstract

The classic bankruptcy problem arises when a company goes bankrupt and it is not able to meet its debts. In this work we study how to satisfy the claimants analyzing different solutions of the problem and their main properties. Since there is a natural order among the agents that is given by the increasing ordering of their demands, it is of interest to compare the different solutions that have been proposed in the literature. We summarize the ranking results that are currently known for the class of bankruptcy problems. Furthermore, we measure the inequality between the agents before and after assigning the studied allocations. We focus on one of the rules introduced, the core-center, studying it and creating an R package implementing its computation for bankruptcy games. Finally, we present an application on how to share the emissions of  $CO_2$  allowed in different countries to curb climate change.



# Introducción

Cuando un grupo de agentes tiene unas demandas sobre un recurso que son mayores que lo disponible, ¿cómo debemos repartir dicho recurso? Con esta pregunta surgen los denominados problemas de bancarrota.

Un juego cooperativo estudia como, llegando a acuerdos entre diferentes agentes, todos pueden salir beneficiados. Veremos que se puede ver el problema de bancarrota como un juego cooperativo y se resolverá desde ese punto de vista.

A lo largo de este trabajo haremos una revisión de la bibliografía existente (Thomson (2019), Thomson (2003), Thomson (2015), Bosmans et al (2011), O'Neill (1982), Mirás Calvo et al. (2018)) donde se estudian las soluciones principales de dicho problema y las propiedades más importantes que deben satisfacer las reglas de reparto. Además, se estudiará como tratan dichas soluciones a los demandantes en función de la cantidad demandada, estableciendo una posible ordenación de las soluciones introducidas que nos servirán para estudiar la desigualdad existente en el grupo a estudiar.

De todos los repartos que se pueden realizar, el núcleo se corresponde con el conjunto de los repartos que son estables, es decir, aquellos en los que los conjuntos de jugadores llevan al menos lo que pueden garantizarse por si mismos. Estudiaremos sus propiedades principales y veremos que su centroide será un reparto a considerar entre el inventario de soluciones que ya han sido estudiadas para problemas de bancarrota. Estudiaremos dicho reparto, el core-center, y daremos dos algoritmos para su cálculo. Por último, aplicaremos todo lo estudiado en este trabajo a un problema real de gran interés relacionado con el cambio climático.

El trabajo está dividido en 4 capítulos y 4 apéndices:

En el **Capítulo 1** se definirán formalmente los problemas de bancarrota (O'Neill (1982)), sus juegos cooperativos asociados y se realizará una revisión bibliográfica de sus soluciones y propiedades principales.

En el **Capítulo 2** se realizará una clasificación de las soluciones expuestas en el capítulo anterior a través de la desigualdad de Lorenz (Bosmans et al (2011)) y se medirá el grado de desigualdad que ofrecen dichas soluciones (Gini (1912)).

En el **Capítulo 3** se estudiarán, tanto el núcleo como el core-center (González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2007), Mirás Calvo et al. (2018), Mirás Calvo et al. (2019)) mediante una revisión bibliográfica y se aportará algún resultado novedoso. Por último, veremos varios algoritmos que facilitarán su cálculo, los cuales están programados tanto en R como en Matlab.

En el **Capítulo 4** analizaremos en detalle un caso real de actualidad, el reparto de emisiones de  $CO_2$  para conseguir frenar el cambio climático.

Para acabar, en el **Apéndice A** se facilitará el código R de los algoritmos introducidos en el capítulo 3 para el cálculo del core-center, que se pondrán a disposición de la comunidad mediante la creación de un paquete. En el **Apéndice B** se introducen las traducciones realizadas de los conceptos de la literatura. En el **Apéndice C** haremos una revisión de la notación utilizada, y, por último, en el **Apéndice D** realizamos una tabla a modo de resumen de las propiedades que cumplen las soluciones propuestas.

# Capítulo 1

## Problemas de bancarrota, reglas y propiedades

En este primer capítulo introduciremos los problemas de bancarrota, O'Neill (1982), dando su definición y estudiando el juego cooperativo asociado, las reglas de reparto propuestas en la literatura y las propiedades que podrían ser aconsejables que verificasen dichas reglas.

### 1.1. Problemas de bancarrota

El problema clásico de bancarrota surge en el contexto en el que se tiene que repartir una cantidad de un bien o estado entre un conjunto de acreedores que demandan parte de ese bien de modo que el estado es insuficiente para satisfacer a todos los demandantes.

Existen muchas aplicaciones en el ámbito económico de este tipo de problemas. Una de ellas es el reparto de impuestos, para el que tendremos que hacer una interpretación distinta. El estado es el dinero que se necesita para poder hacerse cargo del pago de educación, sanidad, infraestructuras... y el vector de demandas está formado por los ingresos brutos de cada contribuyente. El reparto que hacemos ahora corresponderá a la parte que destina cada ciudadano de sus ingresos para el pago de impuestos. El modelo de determinar las cuotas fiscales para llevar a cabo un determinado proyecto también puede ser estudiado con este tipo de problemas. En este caso, los agentes pueden llevar a cabo un proyecto debido a que sus ingresos superan el coste del mismo, pero su bienestar decrece a medida que crece el coste que deben sufragar.

Otro ejemplo de aplicación sería el de racionamiento. Podemos modelar una situación en la que se desea repartir un recurso escaso, que podría ser comida, agua, medicinas... entre diferentes países. El estado será el recurso total y las demandas las necesidades que tiene cada país.

También podría aplicarse en el contexto de proyectos públicos. En este caso el vector de demandas estará formado por los beneficios de los ciudadanos como consecuencia de un determinado proyecto, como podría ser la colocación de las luces navideñas o la construcción de un puente y el estado será el gasto de dicho proyecto. Si el beneficio es mayor que el coste que supuso llevarlo a cabo, podemos resolver el problema como un problema de bancarrota en el que se reparte el coste.

En general, el modelo puede ser utilizado en cualquier situación en la que un conjunto de agentes tiene adquiridos ciertos derechos sobre un recurso, que no es suficiente para satisfacer plenamente a todos los agentes. En todos los contextos, la solución de este problema consiste en buscar como repartir el bien del que se dispone entre todos los acreedores de un modo justo o razonable. A lo largo del trabajo veremos como las propiedades o axiomas nos ayudan a comprender mejor la naturaleza de diferentes tipos de soluciones que se han propuesto en la literatura. En Thomson (2019), Thomson (2003) y Thomson (2015) encontramos una recopilación de los diferentes estudios que se hicieron sobre este tipo de problemas. La teoría matemática es exactamente la misma en todos los ejemplos introducidos,

aunque habrá que ser cautelosos, ya que las interpretaciones de las propiedades deseables para las diferentes soluciones pueden variar. Una buena propiedad en un contexto puede no ser apetecible en otro.

Para empezar, daremos la definición matemática del problema de bancarrota introducido anteriormente.

**Definición 1.1.** Sea  $N = \{1, \dots, n\}$  el conjunto de acreedores, un problema de bancarrota es un par  $(E, d)$ , donde  $E \geq 0$  es el bien o estado a repartir y  $d \in \mathbb{R}^N$  es el vector de demandas, que tiene que satisfacer que:

- $d_i \geq 0 \forall i \in N$ .
- $\sum_{i \in N} d_i \geq E$ .

Además, denotaremos por  $D = \sum_{i=1}^n d_i$  y sin pérdida de generalidad, asumimos que las demandas de los acreedores estarán ordenadas, es decir,  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ . Denotaremos por  $B^N$  al conjunto de problemas de bancarrota con  $N$  como conjunto de acreedores.

Dependiendo de la ideología política, de la idea de igualdad que tengamos o, simplemente del tipo de distribución que estemos obligados a realizar, el reparto que podemos hacer de un recurso puede variar, beneficiando más a unos que a otros. Una división de  $E$  entre los demandantes se denomina regla de reparto, y se define de la siguiente forma.

**Definición 1.2.** Una regla de reparto es una función  $R : B^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  que asigna, a cada problema de bancarrota  $(E, d) \in B^N$  un vector  $R(E, d) \in \mathbb{R}^N$  que tiene que cumplir las dos siguientes propiedades:

- $0 \leq R_i(E, d) \leq d_i \forall i \in N$ .
- $\sum_{i \in N} R_i(E, d) = E$  (propiedad de eficiencia).

Es decir, en una regla se distribuye la cantidad  $E$  y no se le puede asignar a un agente más que su demanda, ni imputarle un coste.

Una regla que puede ser atractiva en el contexto de un problema de bancarrota, puede no ser convincente o adecuada para repartir impuestos en el sistema fiscal de un país. Consideraremos además, que los parámetros del modelo, el estado y las demandas de los agentes, son cantidades fijas, que normalmente están incluidas en diferentes documentos o escrituras legales. Existen extensiones de dicho modelo que permiten variar las demandas en diferentes intervalos (Branzei y Alparslan Gok (2008)) que no serán estudiadas en este trabajo.

## 1.2. Juegos coalicionales

La teoría de juegos coalicionales modela situaciones en las que un conjunto finito de agentes obtiene beneficios fruto de la cooperación entre ellos. Veremos a lo largo de este trabajo el aporte de este enfoque al problema de bancarrota.

**Definición 1.3.** Un juego cooperativo o coalicional es un par  $(N, v)$  siendo  $N = \{1, \dots, n\}$  el conjunto finito de jugadores y  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función que asigna a cada coalición  $S \in 2^N$  un número real,  $v(S)$ , que representa la utilidad que pueden conseguir los jugadores de  $S$  si deciden cooperar. Se considera que  $v(\emptyset) = 0$  y a  $v$  se le llama función característica.

Estos juegos coalicionales pueden ser de costes, si modelan situaciones en las que los agentes tienen que hacer frente a un gasto y el cooperar provoca que el gasto se reduzca, o pueden ser juegos de beneficios, que son aquellos que modelan situaciones en las que los agentes obtendrán un beneficio mayor en función de como cooperen. El objetivo de un juego cooperativo consiste en buscar como repartir entre todos los jugadores el valor  $v(N)$ , que es el coste o beneficio total conjunto.

A los problemas de bancarrota introducidos anteriormente se les pueden asociar diferentes juegos cooperativos. El primer juego cooperativo que definiremos se denomina juego pesimista ya que, cada coalición se pone en el peor caso posible asignando a cada coalición la cantidad del estado que no reclaman los miembros que no pertenecen a dicha coalición.

**Definición 1.4.** El juego cooperativo pesimista asociado a un problema de bancarrota  $(E, d) \in B^N$  es una función  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $N$  es el conjunto de jugadores y  $v$  es la función característica definida para cada coalición  $S \in 2^N$  como  $v(S) = \max\{0, E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j\}$ . Denotamos al conjunto de los juegos de bancarrota pesimistas como  $G^N$ .

Otro juego cooperativo que se puede asignar a los problemas de bancarrota es el denominado juego optimista. En este caso, se le asigna a cada coalición todo el estado o, la suma de las demandas de los agentes de la coalición si estas no superan el estado, i.e, cada coalición estaría en el mejor de los casos posibles.

**Definición 1.5.** El juego cooperativo optimista asociado a un problema de bancarrota  $(E, d) \in B^N$  es una función  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $N$  es el conjunto de jugadores y  $v$  es la función característica definida para cada coalición  $S \in 2^N$ , se como  $v(S) = \min\{E, \sum_{j \in S} d_j\}$ .

A lo largo del trabajo usaremos la definición pesimista que es la que se encuentra comúnmente en la literatura.

**Definición 1.6.** Sea  $v \in G^N$ , una asignación  $x \in \mathbb{R}^N$  es un vector que le asocia a cada jugador una parte de  $v(N)$ . Dada una asignación y una coalición  $S$ , denotamos por  $x(S)$  a la asignación conjunta que reciben los jugadores de  $S$ , i.e,  $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ . Se dice que  $x \in \mathbb{R}^N$  es eficiente si  $x(N) = v(N)$ . Definimos el conjunto de todas las asignaciones eficientes como aquellas que pertenecen al hiperplano  $H = \{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N)\}$ .

Definimos también dos subconjuntos del hiperplano eficiente que son relevantes.

**Definición 1.7.** Sea  $v \in G^N$ , un juego coalicional, se definen los siguientes conjuntos:

- Conjunto de imputaciones:  $I(v) = \{x \in H : x_i \geq v(i) \forall i \in N\}$
- Núcleo:  $C(v) = \{x \in I(v) : x(S) \geq v(S) \forall S \in 2^N\}$ .

Nótese que las definiciones anteriores son para juegos de beneficios. Si nos encontramos con un juego de costes, debemos cambiar todas las desigualdades.

La interpretación del núcleo es la siguiente: si  $x \in C(v)$  todas las coaliciones se garantizan al menos lo que pueden obtener por sí mismas.

**Definición 1.8.** Sea  $v \in G^N$ ,

- $v$  se dice que es equilibrado si  $C(v) \neq \emptyset$
- $v$  se dice que es aditivo si  $v(S) = \sum_{i \in S} v(i) \forall S \in 2^N$ . Un juego aditivo está caracterizado por el vector  $a = (v(i))_{i \in N}$  y, denotaremos por la misma letra al vector y al juego aditivo.
- Sea  $w \in G^N$ , se dice que  $v$  y  $w$  son estratégicamente equivalentes si existe  $k \in \mathbb{R}^+$  y un juego aditivo  $a \in G^N$  tales que  $v = a + k w$ .
- $v \in G^N$  es 0-normalizado si  $v(i) = 0 \forall i \in N$
- El juego 0-normalizado de  $v$ , que denotaremos por  $v_0 \in G^N$  se define como  $v_0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i), S \in 2^N$ .
- $v$  se dice que es convexo si  $\forall S, T \subset N$ , se tiene que  $v(T) + v(S) \leq v(T \cap S) + v(S \cup T)$ .

**Observación 1.9.** *Claramente, un juego y su 0-normalizado son estratégicamente equivalentes, tomando  $k = 1$  y  $a = (v(i))_{i \in N}$ .*

La clase de los juegos de bancarrota es una subclase de los juegos convexos. El juego asociado al problema de bancarrota  $(E - \sum_{i \in N} v(i), d - a)$ , siendo  $a_i = v(i) \ \forall i \in N$ , se corresponde con la 0-normalización del juego  $v$  asociado al problema  $(E, d)$ .

Para todos los juegos cooperativos se define el concepto de solución puntual en un subdominio  $\Omega \subset G^N$ , como una función  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ , que asocia a cada juego, un reparto en  $\mathbb{R}^N$ . Definimos ahora las tres soluciones puntuales con las que trabajaremos a lo largo del trabajo.

Cuando el núcleo de un juego es no vacío, todas sus asignaciones representan alternativas que son estables para todas las coaliciones. Por lo tanto, una posible solución consiste en calcular el centro de gravedad de este conjunto de asignaciones.

**Definición 1.10.** Dado un politopo  $K \subset H$ , definimos por  $\mu(K)$  su centro de gravedad y por  $Vol(K)$  su medida de Lebesgue  $(n - 1)$ -dimensional.

**Observación 1.11.** *Si un politopo  $K$  es convexo, entonces  $\mu(K) \in K$ . Además, tenemos las siguientes propiedades:*

- *La media de un conjunto trasladado es la traslación de la media:  $\mu(a + K) = a + \mu(K) \ \forall a \in \mathbb{R}^N$*
- *La media de un conjunto reescalado es la media del conjunto reescalada:  $\mu(bK) = b\mu(K) \ \forall b \in \mathbb{R}^+$*
- *Si  $K = K_1 \cup K_2, Vol(K_1 \cap K_2) = 0$  y  $\rho = \frac{Vol(K_1)}{Vol(K)}$ , entonces  $\mu(K) = \rho \cdot \mu(K_1) + (1 - \rho) \cdot \mu(K_2)$ . Esta es la propiedad arquimediana del centro de masas.*

**Definición 1.12.** El core-center,  $\mu$ , (González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2007)), se define como la asignación que promedia todos los posibles repartos en el núcleo de juego. Formalmente, es la esperanza matemática de la distribución uniforme sobre el núcleo del juego, es decir, el centro de gravedad del núcleo.

$$\mu(v) = \mu(C(v))$$

**Observación 1.13.** *Como el núcleo de cualquier juego cooperativo es un conjunto convexo, se tiene asegurado que  $\mu(v) \in C(v)$ .*

Otra posible asignación consiste en promediar los vectores de contribuciones marginales con sus multiplicidades. En el caso de los juegos convexos, dichos vectores se corresponden con los puntos extremos del núcleo.

**Definición 1.14.** El valor de Shapley (Shapley (1953)) del juego  $v \in G^N$  se calcula promediando los vectores de contribuciones marginales a todas las posibles ordenaciones de los jugadores, i.e:

$$Sh(v) = \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} m^\pi(v)$$

siendo  $\Pi^N$  el conjunto de las ordenaciones de  $N$ ,  $m^\pi$  el vector de contribuciones marginales de cada orden  $\pi \in \Pi^N$ , i.e:

$$m_i^\pi(v) = v(P_\pi(i) \cup \{i\}) - v(P_\pi(i))$$

donde  $P_\pi(i) = \{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}$ , i.e, el conjunto de jugadores que preceden al jugador  $i$  en el orden  $\pi$ .

El nucleolus (Schmeidler (1969)) es el reparto que hace que las quejas de las coaliciones sean lo más pequeñas posible en el sentido lexicográfico. Podríamos decir que el nucleolus se ocupa, en primer lugar, de contentar a las coaliciones más inestables. Antes de introducir la solución, debemos definir el vector de excesos. Comenzamos definiendo el exceso de una coalición respecto a un vector.

**Definición 1.15.** Sea  $v \in G^N$ ,  $S \subset N$  y  $x \in I(v)$ . Se define el exceso del valor de una coalición  $S$  con respecto al vector  $x$  como:

$$e(S, x) = v(S) - x(S)$$

**Definición 1.16.** Dado un reparto  $x \in \mathbb{R}^n$ , definimos  $\theta(x)$  como la  $2^{|N|}$ -tupla cuyas componentes son los excesos de todas las coaliciones con respecto a  $x$ , ordenados de mayor a menor, es decir,

$$\theta_i(x) \geq \theta_j(x), 1 \leq i \leq j \leq 2^{|N|}$$

Ahora ya estamos en condiciones de presentar el nucleolus de un juego como las asignaciones que minimizan lexicográficamente los vectores de excesos. El nucleolus es una solución que un árbitro podría recomendar para dividir  $v(N)$  entre los jugadores si usa el siguiente procedimiento: primero se buscan las imputaciones que hacen que  $\theta_1(x)$  sea mínimo (ésta es la máxima queja en contra de  $x$ , que se pretende minimizar). Después, entre los vectores que minimizan la máxima queja, el árbitro busca aquellos que minimizan la segunda máxima queja, y así sucesivamente.

**Definición 1.17.** Definimos el nucleolus (Schmeidler (1969)) del juego  $v \in G^N$  como:

$$Nu(v) = \{x \in I(v) : \theta(x) \leq_L \theta(y), \forall y \in I(v)\}$$

Schmeidler demostró que dicho conjunto es unitario.

### 1.3. Reglas de reparto de un juego de bancarrota

En la literatura se han propuesto diferentes reglas de reparto para los problemas de bancarrota. Cada una entiende el concepto de igualdad de diferente forma y, beneficia o perjudica más a ciertos jugadores en función de sus demandas. Se podrá usar la que mejor se adapte a cada situación. Las propiedades que veremos en la siguiente sección ayudan en el proceso de decisión de adoptar una regla a un problema concreto, conjuntamente, con las caracterizaciones axiomáticas de las reglas. En Thomson (2019) se puede encontrar literatura actualizada al respecto.

Repasaremos las reglas principales:

- **La regla de igual ganancia (CEA)** asigna a cada acreedor el mínimo entre su demanda ( $d_i$ ) y una cantidad  $\alpha$ , que es el punto tal que  $E = \sum_{i \in N} \min\{\alpha, d_i\}$ , unívocamente determinado por la propiedad de eficiencia. Formalmente, es el siguiente reparto:

$$CEA_i(E, d) = \min\{\alpha, d_i\} \forall i \in N \quad \text{con} \quad E = \sum_{i \in N} CEA_i(E, d)$$

Con esta regla se intenta repartir a partes iguales la mayor parte del bien según sea posible. De forma intuitiva podemos decir que beneficia más a aquellos agentes que tienen demandas pequeñas.

- **La solución de igual pérdida (CEL)** asigna a cada acreedor  $i \in N$  el máximo entre 0 y  $d_i - \beta$ , donde  $\beta$  es tal que  $E = \sum_{i \in N} \max\{0, d_i - \beta\}$ , unívocamente determinado por la propiedad de eficiencia. Formalmente, es el siguiente reparto:

$$CEL_i(E, d) = \max\{0, d_i - \beta\} \forall i \in N \quad \text{con} \quad E = \sum_{i \in N} CEL_i(E, d)$$

Con esta regla se intenta que, en medida de lo posible, cada jugador se quede igual de lejos de su demanda particular. Intuitivamente, podemos decir que esta regla beneficia más a los agentes con demandas más elevadas.

- **El reparto proporcional** (*PRO*) divide el bien de forma proporcional a las demandas de los acreedores, esto es, para cada  $i \in N$ ,

$$PRO_i(E, d) = \frac{d_i E}{D}$$

Con esta regla se pretende que todos los demandantes lleven un reparto proporcional a su demanda. Podemos ver que esta regla trata a cada unidad demandada por igual.

- **El reparto proporcional ajustado** (*APRO*) empieza asignándole a cada acreedor su derecho mínimo, que se corresponde con el máximo entre 0 y la parte del bien no demandada por el resto de los acreedores, es decir,  $\forall i \in N$ ,

$$s_i = \max\{0, E - \sum_{j \in N \setminus i} d_j\}$$

Ahora, el bien restante,  $E' = E - \sum_{i \in N} s_i$  se divide de forma proporcional entre los demandantes, siendo  $d'_i = \min\{E', d_i - s_i\}$ . Por lo tanto, formalmente, se escribe como sigue:

$$APRO_i(E, d) = s_i + \frac{d'_i E'}{D'} \quad \forall i \in N$$

En esta regla se interpreta que cada demandante  $i$  tiene derecho a recibir como mínimo una cierta cantidad  $s_i$ . Una vez asignada a cada jugador esa cantidad, divide el estado restante de forma proporcional.

- **Concede y divide** (*CD*) es una regla válida sólo para juegos con 2 jugadores y, no tiene una extensión clara para problemas con más acreedores, aunque algunas de las que veremos coinciden con esta regla. El jugador 1 empieza concediéndole al jugador 2 el  $\max\{0, E - d_1\}$  y, el jugador 2 le concede al jugador 1 el  $\max\{0, E - d_2\}$ , es decir, lo que sobra si el otro jugador se lleva su demanda. En el segundo paso, dividimos todo lo que sobra entre los dos acreedores. La formulación matemática de esta regla para  $i, j \in \{1, 2\}$  con  $i \neq j$  es la siguiente:

$$CD_i(E, d) = \max\{E - d_j, 0\} + \frac{E - \max\{E - d_i, 0\} - \max\{E - d_j, 0\}}{2}$$

Por lo tanto, dependiendo del valor de  $E$ , esta regla tomará diferentes valores:

$$CD(E, d) = \begin{cases} (\frac{E}{2}, \frac{E}{2}) & \text{si } 0 \leq E \leq d_1 \\ (\frac{d_1}{2}, E - \frac{d_1}{2}) & \text{si } d_1 < E < d_2 \\ (\frac{E+d_1-d_2}{2}, \frac{E-d_1+d_2}{2}) & \text{si } d_2 \leq E \leq d_1 + d_2 \end{cases}$$

- **El reparto del Talmud** (*T*) divide el bien de la siguiente forma,  $\forall i \in N$ :

$$T_i(E, d) = \begin{cases} CEA_i(E, d/2) & \text{si } E \leq D/2 \\ d_i - CEA_i(D - E, d/2) & \text{si } E \geq D/2 \end{cases}$$

Esta solución divide el problema en dos categorías: aquellos problemas cuyo recurso está lejos de cubrir las demandas y aquellos que cubren al menos la mitad de las demandas. En la primera de

las dos situaciones, reparte a partes iguales la mayor parte del bien según sea posible considerando la mitad de las demandas y, en la segunda de las situaciones, le asigna a cada jugador la mitad de su demanda y reparte lo que sobra mediante la regla *CEL*. Esto es cierto debido a que  $d - CEA(D - E, d/2) = d/2 + CEL(E - D/2, d/2)$ .

- **El reparto de las llegadas aleatorias (RA)** divide el bien para cada  $i \in N$  de la siguiente forma:

$$RA(E, d) = \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} \min\{d_i, \max\{0, E - \sum_{j \in N: \pi(j) < \pi(i)} d_j\}\}$$

Esta solución considera todas las posibles llegadas de los demandantes y les va asignando lo que sobra si a todos los que llegaron antes ya se les dio su demanda. Atiende al principio de que el primero en llegar es el primero en ser servido, teniendo en cuenta todas las posibles llegadas de los agentes.

- **Regla de Piniles (PIN)** reparte  $E$  de la siguiente forma,  $\forall i \in N$ :

$$PIN_i(E, d) = \begin{cases} CEA_i(E, d/2) = T_i(E, d) & \text{si } E \leq D/2 \\ d_i/2 + CEA_i(E - D/2, d/2) & \text{si } E \geq D/2 \end{cases}$$

Esta regla vuelve a dividir los problemas en los mismos tipos que la regla del Talmud y, si estamos en la primera de las situaciones, es la misma regla, pero, si estamos en problemas en los que el estado es mayor que la semisuma de las demandas, después de asignarle a cada jugador la mitad de su demanda, a lo que le sobra le aplica la regla *CEA*.

- **Regla igualitaria restringida (CE)** divide el estado de la siguiente forma  $\forall i \in N$ :

$$CE_i(E, d) = \begin{cases} CEA_i(E, d/2) = T_i(E, d) & \text{si } E \leq D/2 \\ \max\{d_i/2, \min\{d_i, \lambda\}\} & \text{si } E \geq D/2 \end{cases}$$

siendo  $\lambda$  tal que  $\sum_{i=1}^n \max\{d_i/2, \min\{d_i, \lambda\}\} = E$ .

Esta regla vuelve a dividir los problemas según como sea el estado como en el caso anterior y, asigna la regla del Talmud cuando el estado es suficientemente pequeño. Sin embargo, cuando el estado es mayor que la semisuma de las demandas realiza un proceso de asignación diferente.

- **Regla de superposición mínima (MO)**. Esta regla distingue dos casos dependiendo de si hay un agente que demande más que el estado o, si todas las demandas involucradas en el problema son menores que  $E$ :

- $d_n \geq E$ , es decir, al menos un jugador tiene una demanda mayor que el estado. En este caso, si un individuo  $i$  demanda menos que  $E$ , reclama el intervalo  $[0, d_i]$  y, un individuo  $j$ , con demanda mayor que  $E$ , reclama el intervalo  $[0, E]$ . Entonces, cada intervalo se divide a partes iguales por los individuos que lo reclaman, es decir, sea  $d_k^* < E \leq d_{k+1}^* \leq d_n$  con  $k^* \in \{0, \dots, n-1\}$ , entonces:

$$MO_i = \frac{d_1}{n} + \frac{d_2 - d_1}{n-1} + \dots + \frac{d_i - d_{i-1}}{n-i+1} \quad \forall i = 1, \dots, k^*$$



$$MO_j = MO_{k^*} + \frac{E - d_{k^*}}{n - k^*} \forall j = k^* + 1, \dots, n$$

Cada agente recibe la suma de las compensaciones parciales calculadas por las partes que ellos demandan.

- $d_n < E$ , es decir, ningún jugador demanda más que el estado. Sea  $d_0 = 0$ , busquemos el mayor  $k^* \in \{0, \dots, n - 2\}$  para el cual exista  $t \in \mathbb{R}_+$  que satisfaga lo siguiente:

$$d_{k^*} < t \leq d_{k^*+1}, \quad \sum_{i=k^*+1}^n (d_i - t) = E - t$$

Cada agente del conjunto  $\{k^* + 1, \dots, n\}$  recibe la parte del intervalo  $(t, E]$  que solo reclama él. La parte sobrante  $[0, t]$  se divide como en el caso anterior con  $t$  como la cantidad a dividir.

Matemáticamente, escribimos este reparto de la siguiente forma: sea  $d_n < E$ ,  $d_{k^*} < t \leq d_{k^*+1}$  con  $k^* \in \{0, \dots, n - 2\}$  y  $t$  de la forma anterior, entonces:

$$MO_i = \frac{d_1}{n} + \frac{d_2 - d_1}{n - 1} + \dots + \frac{d_i - d_{i-1}}{n - i + 1} \forall i = 1, \dots, k^*$$

$$MO_j = (d_j - t) + MO_{k^*} + \frac{t - d_{k^*}}{n - k^*} \forall j = k^* + 1, \dots, n$$



De modo intuitivo podemos observar que esta regla es más generosa con los agentes con demandas más altas que la regla del Talmud y, menos generosa con aquellos agentes con demandas más bajas.

- **Regla basada en apuestas aleatorias (RAA)** se basa en un proceso aleatorio en el que cada acreedor debe recibir igualdad de oportunidades para que cada unidad de su demanda sea compensada. Cada acreedor  $i \in N$  del problema tiene que escoger aleatoriamente una parte de  $E$  del tamaño de su demanda. Una vez que todos los jugadores realizaron esta operación, se le asigna a cada agente la parte del estado que solo reclamó él y se divide a partes iguales las partes del estado que son reclamadas por más de un agente. El siguiente paso será repartir el estado que nadie demandó, para eso, se rebajan las demandas de cada jugador restando lo que ya obtuvo en el paso anterior y se vuelve a empezar. En un número finito de iteraciones se conseguirá repartir todo el recurso.

Podemos calcular el reparto de esta regla para un problema de 3 jugadores en el que  $E = 10$  y  $d = (2, 4, 7)$ . En el primer paso, se realiza la siguiente operación para cada jugador:

- $RAA_1^1 = \frac{d_1}{E} \frac{E-d_2}{E} \frac{E-d_3}{E} E + \frac{d_1}{E} \frac{d_2}{E} \frac{E-d_3}{E} \frac{E}{2} + \frac{d_1}{E} \frac{E-d_2}{E} \frac{d_3}{E} \frac{E}{2} + \frac{d_1}{E} \frac{d_2}{E} \frac{d_3}{E} \frac{E}{3} = 1.0867$
- $RAA_2^1 = \frac{E-d_1}{E} \frac{d_2}{E} \frac{E-d_3}{E} E + \frac{d_1}{E} \frac{d_2}{E} \frac{E-d_3}{E} \frac{E}{2} + \frac{E-d_1}{E} \frac{d_2}{E} \frac{d_3}{E} \frac{E}{2} + \frac{d_1}{E} \frac{d_2}{E} \frac{d_3}{E} \frac{E}{3} = 2.3867$
- $RAA_3^1 = \frac{E-d_1}{E} \frac{E-d_2}{E} \frac{d_3}{E} E + \frac{d_1}{E} \frac{E-d_2}{E} \frac{d_3}{E} \frac{E}{2} + \frac{E-d_1}{E} \frac{d_2}{E} \frac{d_3}{E} \frac{E}{2} + \frac{d_1}{E} \frac{d_2}{E} \frac{d_3}{E} \frac{E}{3} = 5.0867$

Para el jugador 1 el valor esperado de que no comparta ningún tramo de  $E$  con otros jugadores sería  $\frac{d_1}{E} \frac{E-d_2}{E} \frac{E-d_3}{E} E$ . En el caso de que solo comparta con uno sería  $\frac{d_1}{E} \frac{d_2}{E} \frac{E-d_3}{E} \frac{E}{2} + \frac{d_1}{E} \frac{E-d_2}{E} \frac{d_3}{E} \frac{E}{2}$  y, en el caso de que comparta con todos sería  $\frac{d_1}{E} \frac{d_2}{E} \frac{d_3}{E} \frac{E}{3}$ . Una vez hecho esto para los 3 jugadores,

actualizamos el problema, obteniendo ahora  $E^1 = E - RAA_1^1 - RAA_2^1 - RAA_3^1 = 1.44$  y  $d^1 = (\min\{E^1, d_1 - RAA_1^1\}, \min\{E^1, d_2 - RAA_2^1\}, \min\{E^1, d_3 - RAA_3^1\}) = (0.9133, 1.44, 1.44)$  y, volvemos a realizar la misma operación de antes, obteniendo ahora  $RAA_1^2 = 0.3044$ ,  $RAA_2^2 = 0.5677$  y  $RAA_3^2 = 0.5677$ . Sumamos todos los repartos y obtenemos  $RAA_1 = 1.3911$ ,  $RAA_2 = 2.9544$  y  $RAA_3 = 5.6544$ . Se tiene que  $RAA_1 + RAA_2 + RAA_3 = 10 = E$ , por lo que aquí acaba el reparto ya que  $E^2 = 0$ .

Existen relaciones entre las soluciones del juego cooperativo y las reglas de reparto del problema de bancarrota.

**Proposición 1.18.** *Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota y  $v$  el juego TU asociado. Se verifica que:*

- $RA(E, d) = Sh(v)$
- $T(E, d) = Nu(v)$

**Observación 1.19.** *Se tiene que, tanto la regla del Talmud como la regla de llegadas aleatorias son posibles extensiones de la regla Concede y Divide para más de dos jugadores. Ya que, para  $N = \{1, 2\}$ , se tiene que  $CD = RA = T$ .*

Por último, podemos definir el core-center como una regla de un problema de bancarrota.

**Definición 1.20.** *Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota y  $v$  su juego coalicional asociado. El core-center de un problema de bancarrota se define como la expectativa matemática de la distribución uniforme sobre el núcleo de su juego asociado, i.e,*

$$\mu(E, d) = \mu(v)$$

**Observación 1.21.** *Para poder representar la evolución de una regla en función del crecimiento del estado usamos los denominados camino de reparto, que se definen a través de curvas paramétricas para cualquier par  $i, j \in N$ :*

$$p^R(d) = \{p^R(E) = (R_i(E, d), R_j(E, d)) \in \mathbb{R}^{i,j} : E \in [0, D]\}$$

*La adjudicación a cada reclamante se mide a lo largo del propio eje del acreedor en función del crecimiento del estado. En la Figura 1.1 observamos la evolución del reparto con las reglas CD, CEA, CEL y PRO para un problema con dos acreedores en función del crecimiento del estado.*

## 1.4. Propiedades de una regla de reparto

Para poder evaluar cuando una regla de reparto es satisfactoria se definen una serie de propiedades. Algunas de las más interesantes son las que se enumeran a continuación. En Thomson (2019) podemos encontrar un recopilatorio de éstas y otras propiedades.

Sea  $(E, d) \in B^N$ , un problema de bancarrota. Una regla  $R$  satisface<sup>12</sup>:

- **Homogeneidad:** Si  $\forall \lambda > 0$ , se tiene que  $R(\lambda \cdot E, \lambda \cdot d) = \lambda \cdot R(E, d)$ . Si las demandas y el estado son reescalados, entonces el reparto también debe ser reescalado.
- **Continuidad:** Si, para cada sucesión  $\{(E^\alpha, d^\alpha)\}$  de elementos de  $B^N$  y cada  $(E, d) \in B^N$ , si  $\{(E^\alpha, d^\alpha)\}$  converge a  $(E, d)$ , entonces  $\{R(E^\alpha, d^\alpha)\}$  converge a  $R(E, d)$ . Pequeñas variaciones en el problema no provocan grandes cambios en los repartos.

<sup>1</sup>Muchas de estas propiedades pueden ser enunciadas con las desigualdades estrictas y/o bien también, con grupos de agentes en vez de con agentes individuales

<sup>2</sup>Las siguientes propiedades está traducidas directamente de Thomson (2019). Para evitar confusiones en el Apéndice A se crea un diccionario con las traducciones utilizadas.

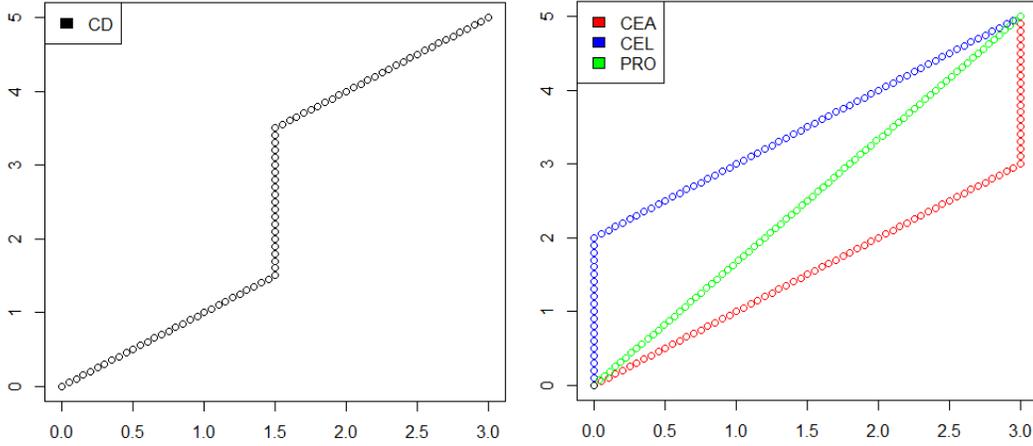


Figura 1.1: Camino de ganancias de las reglas  $CD$ ,  $CEA$ ,  $CEL$  y  $PRO$  con  $N = \{1, 2\}$  y  $d = (3, 5)$

- Las propiedades con las que trabajaremos ahora establecen cotas razonables, superiores o inferiores para los repartos:

- **Derechos positivos:**  $d_i \geq 0 \forall i \in N \Rightarrow R_i(E, d) \geq 0 \forall i \in N$ , i.e, ningún jugador debe pagar nada.
- **Acotación por las demandas:**  $R(E, d) \leq d$ . Ningún reparto puede superar la demanda inicial.
- **Pérdidas positivas :**  $\forall i \in N, d_i \geq 0 \Rightarrow d_i - R_i(E, d) > 0$ . La diferencia entre la demanda y el reparto debe ser positiva o lo que es lo mismo, ningún acreedor debe alcanzar su demanda.
- **Respeto de mínimos derechos:**  $\forall i \in N, R_i(E, d) \geq \max\{E - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} d_j, 0\}$ , i.e, a cada jugador se le asigna, como mínimo, lo que sobra tras darle al resto de agentes sus demandas. Si trabajamos con el juego cooperativo asociado al problema de bancarrota, el respeto de mínimos derechos consiste en asignarle como mínimo, a cada jugador su  $v(i)$ .
- **Mínimos derechos primero:** Sea  $i \in N$ , se tiene que

$$R_i(E, d) = s_i + R_i(E - \sum_i s_i(E, d), d - s(E, d))$$

Se le puede asignar primero a cada jugador su derecho mínimo y se resuelve el problema con el estado restante en el que las demandas de cada acreedor se reducen.

- Cuando existen demandas que son mayores que el estado, en la mayoría de los casos podemos reducirlas y dejarlas igual que el estado. Por esta razón se definen las demandas truncadas como  $t_i(E, d) = \min\{E, d_i\} \forall i \in N$ .

- **Demandas truncadas:** Se tiene que  $R(E, d) \leq t(E, d)$ .
- **Límite inferior razonable:**  $\forall i \in N, R_i(E, d) \geq \frac{1}{n} t_i(E, d)$ , i.e, a cada jugador se le asigna, como mínimo, la  $n$ -ésima parte de su demanda truncada.
- **Límite inferior de las pérdidas:**  $\forall i \in N, d_i - R_i(E, d) \geq \frac{1}{|N|} t_i(D - E, d)$ , i.e, todos los jugadores tienen que perder más que el promedio de lo lejos que está el estado de satisfacer todas las demandas.
- **Igual división del estado entre los demandantes:**  $\forall i \in N, R_i(E, d) \geq t_i(\frac{E}{|N|}, d)$ , i.e, cada jugador tiene que llevarse, al menos la  $n$ -ésima parte del estado si su demanda es mayor.

- **Igual división de la diferencia entre el estado y las demandas:**  $\forall i \in N$ ,  $d_i - R_i(E, d) \geq t_i(\frac{D-E}{|N|}, d)$ . La diferencia entre la demanda y el reparto debe ser mayor que la  $n$ -ésima parte de la diferencia entre la suma de las demandas y el estado.
- Ahora, trabajaremos con propiedades en las que según como sean las demandas, en este caso, dadas por una condición, los jugadores deben recibir su demanda o, no recibir nada:
  - **Compensación completa condicional:** Sea  $i \in N$  tal que  $\sum_{j \in N} \min\{d_j, d_i\} \leq E$ , entonces  $R_i(E, d) = d_i$ , i.e, sea un jugador  $i$ , si su demanda puede ser dada a todos los jugadores sin superar el estado entonces, debe ser compensado y recibir su demanda (él no tiene la culpa de que el resto demanden más).
  - **Compensación completa condicional débil:** Sea  $i \in N$  tal que  $d_i \leq \frac{2E-D}{|N|} \Rightarrow R_i(E, d) = d_i$ , i.e, si la demanda de un jugador es menor que  $\frac{2E-D}{|N|}$ , entonces debe ser totalmente compensado y recibir su demanda.
  - **Compensación nula condicional:** Sea  $i \in N$ , tal que  $\sum_{j>i} (d_j - d_i) \geq E$ , entonces  $R_i(E, d) = 0$ , i.e, si la diferencia entre las demandas superiores a  $i$  son suficientemente grandes, entonces a dicho jugador no se le debe tener en cuenta y no debe recibir nada.
  - **Compensación nula condicional débil:** Sea  $i \in N$  tal que  $d_i \leq \frac{D-2E}{|N|} \Rightarrow R_i(E, d) = 0$ .

**Observación 1.22.** *Compensación completa condicional débil implica Compensación completa condicional. Nótese que, si  $d_i \leq \frac{2E-D}{|N|}$ , entonces  $\sum_{j \in N} \min\{d_j, d_i\} \leq \frac{|N|(2E-D)}{|N|} \leq E \iff E \leq D$ .*

**Observación 1.23.** *Compensación nula condicional débil implica Compensación nula condicional.*

Sea  $i \in N$  tal que  $d_i \leq \frac{D-2E}{|N|}$ . Entonces  $\sum_{j>i} (d_j - d_i) \geq \sum_{j>i} d_j - \frac{(D-2E)(|N|-i)}{|N|} = \sum_{j>i} d_j + i(\frac{D-2E}{|N|}) - D + 2E \geq E \iff i\frac{D-2E}{|N|} + E \geq \sum_{j \leq i} d_j$ .

Como las demandas están ordenadas tenemos que  $\sum_{j \leq i} d_j \leq i d_i \leq i\frac{D-2E}{|N|} \leq i\frac{D-2E}{|N|} + E$ , con lo que se verifica la desigualdad requerida.

- Las siguientes propiedades con las que trabajaremos son las de simetría. Veremos que relaciones deben tener las soluciones de dos jugadores en función de como sean sus demandas:
  - **Igual tratamiento de iguales:** Si  $d_i = d_j$ , entonces  $R_i(E, d) = R_j(E, d)$ , i.e, si dos jugadores demandan lo mismo, entonces se les asigna la misma cantidad en el reparto.
  - **Anonimidad:** Para cada biyección,  $\pi : N \rightarrow N$  y cada  $i \in N$ ,  $R_{\pi(i)}(E, (d_{\pi(i)})_{i \in N}) = R_i(E, d)$ , i.e, un jugador gana lo mismo independientemente de la posición que ocupe en el vector de demandas. Por esta razón, si una regla satisface esta propiedad, podemos ordenar como queramos el vector de demandas y suponer que  $d_i \leq d_j$  si  $i \leq j$ .
  - **Mínimo compartido:** Para cada par  $i, j \in N$  tal que  $d_i, d_j > 0$ , se tiene que, no puede ocurrir simultáneamente que  $R_i(E, d) = 0$  y  $R_j(E, d) = d_j$ , i.e, ningún jugador puede llevarse toda su demanda si existe otro que no se lleva nada, y viceversa.
  - **Igual tratamiento de grupos iguales:** Es una generalización de la propiedad de igual tratamiento de iguales. Formalmente, sean  $N' \subset N$  y  $N'' \subset N$ , si  $\sum_{i \in N'} d_i = \sum_{i \in N''} d_i$ , entonces  $\sum_{i \in N'} R_i(E, d) = \sum_{i \in N''} R_i(E, d)$ , i.e, si dos grupos demandan, de forma grupal, la misma cantidad, entonces el reparto les asigna conjuntamente la misma cantidad.
- Ahora expondremos las propiedades en las que intervienen la relación entre el orden de las demandas y el orden de las soluciones:

- **Preservación del orden en ganancias:** Si  $d_i \leq d_j$ , entonces  $R_i(E, d) \leq R_j(E, d)$  i.e, si un jugador demanda menos que otro, no puede llevar un reparto superior.
  - **Preservación del orden en pérdidas:** Si  $d_i \leq d_j$ , entonces  $d_i - R_i(E, d) \leq d_j - R_j(E, d)$ , i.e, los jugadores con menos demanda van a perder menos con respecto a lo que solicitan que los que demandan más.
- Continuaremos con las propiedades de monotonía, estudiando como deben crecer o disminuir las soluciones en función del crecimiento del estado:
- **Monotonía en el estado:** Si para cada  $E'$  tal que  $E' \geq 0$  si  $\sum_{i \in N} d_i \geq E' \geq E$ , entonces  $R(E', d) \geq R(E, d)$ , i.e, si aumenta la cantidad a repartir, todos los jugadores reciben al menos lo mismo que en el reparto inicial.
  - **Ganancia acotada por el aumento en el estado:** Si para cada  $E'$  tal que  $E' \geq 0$  si  $\sum_{i \in N} d_i \geq E' \geq E$ , entonces,  $\forall i \in N$ ,  $R_i(E', d) - R_i(E, d) \leq E' - E$ , i.e, el aumento que tiene un jugador en su reparto cuando aumenta el estado, no puede ser mayor que el incremento del estado.
  - **Preservación del orden bajo la variación del estado (Super-modularidad):** Si para cada  $E'$  tal que  $E' \geq 0$  si  $\sum_{i \in N} d_i \geq E' \geq E$  y para cada par  $i, j \in N$  con  $d_i \leq d_j$ , tenemos que  $R_i(E', d) - R_i(E, d) \leq R_j(E', d) - R_j(E, d)$ , i.e, si aumenta la cantidad a repartir, los jugadores que demandan más tienen que salir, al menos tan beneficiados como aquellos que tienen una demanda menor.
- Veamos ahora propiedades que relacionan las asignaciones por unidad de demanda o bien mediante razones con variaciones en el estado.
- **Progresividad:** Para cada par  $i, j \in N$  tal que  $d_i \leq d_j$ , se tiene que  $\frac{R_j(E, d)}{d_j} \geq \frac{R_i(E, d)}{d_i}$ , i.e, los jugadores que más demandan quedan más cerca de recibir su propia demanda que los que demandan menos o dicho de otro modo, a más demanda, mayor asignación por unidad de demanda.
  - **Regresividad:** Para cada par  $i, j \in N$  tal que  $d_i \leq d_j$ , se tiene que  $\frac{R_j(E, d)}{d_j} \leq \frac{R_i(E, d)}{d_i}$ , i.e, los jugadores que más demandan quedan más lejos de recibir su propia demanda que los que demandan más o dicho de otro modo, a menos demanda, mayor asignación por unidad de demanda.
- Por lo tanto, se tiene que, las soluciones progresivas tratarán mejor a los grandes demandantes y, las reglas regresivas tratarán mejor a los pequeños demandantes. En el contexto del reparto de impuestos la progresividad suele ser deseable.
- **Concavidad:** Si para cada  $E', E''$  tal que  $E', E'' \geq 0$  si  $\sum_{i \in N} d_i \geq E'' \geq E' \geq E$  y cada par  $i, j \in N$  tal que  $0 \leq d_i \leq d_j$ , entonces  $\frac{R_j(E', d) - R_j(E, d)}{R_i(E', d) - R_i(E, d)} \geq \frac{R_j(E'', d) - R_j(E', d)}{R_i(E'', d) - R_i(E', d)}$ , si los ratios están bien definidos, i.e, a medida que el estado crece, los incrementos se dividen más a favor de los pequeños demandantes.
  - **Convexidad:** Si para cada  $E', E''$  tal que  $E', E'' \geq 0$  si  $\sum_{i \in N} d_i \geq E'' \geq E' \geq E$  y cada par  $i, j \in N$  tal que  $0 \leq d_i \leq d_j$ , entonces  $\frac{R_j(E', d) - R_j(E, d)}{R_i(E', d) - R_i(E, d)} \leq \frac{R_j(E'', d) - R_j(E', d)}{R_i(E'', d) - R_i(E', d)}$ , si los ratios están bien definidos, i.e, a medida que el estado crece, los incrementos se dividen más a favor de los grandes demandantes.
  - **Visibilidad hacia abajo en el origen:** Si para cada  $E'$  tal que  $E' \geq 0$  si  $\sum_{i \in N} d_i \geq E' \geq E$  y para cada par  $i, j \in N$  tal que  $d_i \leq d_j$ , se tiene que  $\frac{R_j(E', d)}{R_i(E', d)} < \frac{R_j(E, d)}{R_i(E, d)}$ . Esta propiedad puede reescribirse de la siguiente forma:  $\frac{R_j(E', d)}{R_j(E, d)} < \frac{R_i(E', d)}{R_i(E, d)}$ . Así vemos que, si una regla cumple esta propiedad, le beneficiará más un incremento en el estado a los pequeños demandantes.

- **Visibilidad hacia arriba en el origen:** Si para cada  $E'$  tal que  $E' \geq 0$  si  $\sum_{i \in N} d_i \geq E' \geq E$  y para cada par  $i, j \in N$  tal que  $d_i \leq d_j$ , se tiene que  $\frac{R_j(E', d)}{R_i(E', d)} > \frac{R_j(E, d)}{R_i(E, d)}$ . De forma análoga  $\frac{R_j(E', d)}{R_j(E, d)} > \frac{R_i(E', d)}{R_i(E, d)}$ . Así vemos que, si una regla cumple esta propiedad, le beneficiará más un incremento en el estado a los grandes demandantes.
- Podemos hacer una interpretación de las últimas propiedades. En las gráficas en las que se muestra el camino de reparto, si una solución es cóncava o convexa, dichas gráficas serán cóncavas o convexas  $\forall i, j \in N$ . Si cumple la propiedad de visibilidad hacia abajo, un observador podrá observar toda la curva si fija su visión en el punto  $(0, 0)$  por abajo, aún no siendo esta cóncava y, si cumple visibilidad hacia arriba, un observador podrá observar toda la curva si fija su visión en el punto  $(0, 0)$  por arriba, aun no siendo esta convexa<sup>3</sup>. Por lo tanto, estas propiedades son más débiles que las de concavidad y convexidad.
- Ahora estudiaremos las propiedades de monotonía variando las demandas.
  - **Monotonía de las demandas:** Si  $d'_i \geq d_i$ , entonces  $R_i(E, (d'_i, d_{-i})) \geq R_i(E, d)$ , i.e, si aumentamos la demanda de un jugador, entonces dicho jugador no puede recibir menos que inicialmente.
  - **Apropiación total por parte de un demandante ilimitadamente mayor:**  $\forall i \in N$  y cada secuencia  $\{E^\delta, d^\delta\}$  de elementos de  $B^N$  tales que  $d_i^\delta \rightarrow \infty$  cuando  $\delta \rightarrow \infty$  y para cada par  $\delta, \delta' \in \mathbb{N}$ ,  $(E^\delta, d_{-i}^\delta) = (E^{\delta'}, d_{-i}^{\delta'})$ , entonces, se tiene que  $R_i(E^\delta, d^\delta) \rightarrow E$  cuando  $\delta \rightarrow \infty$ . Si la demanda de un agente aumenta ilimitadamente, entonces, el reparto a ese jugador aumenta hasta el estado.
  - **Monotonía de las demandas orientada a otros jugadores:** Si  $d'_i \geq d_i$ , entonces  $R_j(E, (d'_i, d_{-i})) \leq R_j(E, d) \forall j \in N$  tal que  $j \neq i$ , i.e, si aumenta la demanda de un jugador, el resto de jugadores no pueden recibir más.
  - **Ganancia acotada por el crecimiento en la demanda:** Si  $d'_i \geq d_i$ , se tiene que  $R_i(E, (d_{-i}, d'_i)) - R_i(E, d) \leq d'_i - d_i$ , i.e, el aumento que tiene un jugador en su reparto cuando aumenta su demanda, no puede ser mayor que dicho aumento.
  - **Sin paradoja de transferencia:** Para cada par  $i, j \in N$ , sea  $d'_i > d_i$  y  $0 \leq d'_j < d_j$ , si  $d'_i + d'_j = d_i + d_j$ , entonces, se tiene que  $R_i(E, (d_{-i-j}, d'_i, d'_j)) \geq R_i(E, d)$  y  $R_j(E, (d_{-i-j}, d'_i, d'_j)) \leq R_j(E, d)$ , i.e, si hay una transferencia de la demanda entre dos jugadores, el demandante que sale beneficiado de la transferencia va a recibir más que inicialmente y el otro jugador involucrado recibirá menos.
  - **Impacto acotado en la transferencia de la demanda:** Para cada par  $i, j \in N$ , sea  $d'_i > d_i$  y  $0 \leq d'_j < d_j$ , si  $d'_i + d'_j = d_i + d_j$ , entonces, se tiene que  $R_i(E, (d_{-i-j}, d'_i, d'_j)) - R_i(E, d) \leq d'_i - d_i$  y  $R_j(E, (d_{-i-j}, d'_i, d'_j)) - R_j(E, d) \leq d_j - d'_j$ , i.e, en las condiciones de la propiedad anterior, ninguno de los dos demandantes puede variar más su reparto que la diferencia entre su demanda inicial y la que tiene después de la transferencia.
  - **Preservación del orden bajo variaciones en la demanda:** Sea  $i \in N$  tal que  $d'_i > d_i$  y sea  $j, k \in N \setminus \{i\}$  tal que  $d_j \leq d_k$ , entonces, se tiene que  $R_j(E, d) - R_j(E, (d_{-i}, d'_i)) \leq R_k(E, d) - R_k(E, (d_{-i}, d'_i))$ , i.e, si un jugador cualquiera aumenta su demanda, se ven más afectados los jugadores que demandan más.
  - **Impacto de la monotonía en el estado en el aumento de las demandas:** Para cada par  $d, d' \in \mathbb{R}_+^N$  y  $\forall i \in N$  con  $d_i < d'_i$  y  $d_{N \setminus i} = d'_{N \setminus i}$  y, para cada par  $E, E' \in \mathbb{R}^+$  tal que  $E < E' \leq d_i + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} d_j$ , se tiene que  $R_i(E, (d_{-i}, d'_i)) - R_i(E, d) \leq R_i(E', (d_{-i}, d'_i)) - R_i(E', d)$ . La ganancia de un jugador al aumentar su demanda es más grande según crece el estado.

<sup>3</sup>También se puede definir la visibilidad desde otros puntos, por ejemplo desde el punto  $(d_i, d_j)$ . Estas se conocen por el nombre de visibilidad hacia abajo desde las demandas y visibilidad hacia arriba desde las demandas

- **Impacto de la monotonía en el estado en la transferencia de las demandas:** Para cada par  $d, d' \in \mathbb{R}_+^N$ ,  $\forall i, j \in N$  y, para cada par  $E, E' \in \mathbb{R}^+$ , si, para algún  $t > 0$ ,  $d'_i = t + d_i$ ,  $d'_j = d_j - t$ , y para cada  $k \in N \setminus \{i, j\}$ ,  $d_k = d'_k$  y  $E < E' < D$ , se tiene que  $R_i(E, d') - R_i(E, d) \leq R_i(E', d') - R_i(E', d)$  y  $R_j(E, d) - R_j(E, d') \leq R_j(E', d) - R_j(E', d')$ . Si dos jugadores transfieren demanda, la diferencia en el reparto, positiva o negativa, será más grande cuanto mayor sea  $E$ .
- Veremos que pasa si truncamos las demandas que son mayores que el estado, y dado que, obviamente  $(E, t(E, d)) \in B^N$ , definimos la siguiente propiedad:
  - **Invarianza bajo truncamiento en las demandas:** Se tiene que  $R(E, d) = R(E, t(E, d))$ , i.e, si algún acreedor demanda más cantidad de la disponible, su demanda puede ser truncada por el estado.
- Consideraremos ahora situaciones en las que se le aplica una solución a un problema de bancarrota con estado  $E$  y, por algún motivo, el estado cambia (pasando a ser  $E'$ ), pudiendo ser mayor o menor que el original. En ambos casos, podemos optar por volver a aplicar la regla al nuevo problema o bien, utilizar el reparto obtenido. Veamos dos propiedades:
  - **Composición hacia abajo:** Si para cada  $E'$  tal que  $E' < E$ , se tiene que  $R(E', d) = R(E', R(E, d))$ . Si el estado a dividir se reduce, entonces la solución en el nuevo estado será equivalente a la solución considerando como demandas el reparto propuesto con el estado inicial.
  - **Composición hacia arriba:** Si para cada  $E'$  tal que  $E' \geq 0$  si  $\sum_{i \in N} d_i \geq E' \geq E$ , entonces  $R(E', d) = R(E, d) + R(E' - E, d - R(E, d))$ . Si el estado a dividir aumenta, la nueva solución puede calcularse sumándole a la solución en el problema inicial, el nuevo reparto en el problema en el que las demandas han sido reducidas teniendo en cuenta la asignación inicial y el estado es la parte que todavía no se ha asignado.
- Un problema de bancarrota puede ser visto desde dos puntos de vista complementarios. Podemos fijarnos en la cantidad que hay para repartir ( $E$ ) o, en lo que le falta a la cantidad que hay para repartir para satisfacer a todos los demandantes ( $D - E$ ). Estudiamos esa simetría con las siguientes propiedades:
  - **Auto-dualidad:** Para cada problema de bancarrota, se tiene que  $R(E, d) = d - R(D - E, d)$ . Para las reglas que satisfagan esa propiedad, si determinamos la solución en el caso en el que  $E \leq \frac{D}{2}$ , entonces ya la tenemos determinada si  $E \geq \frac{D}{2}$ .
  - **Propiedad del punto medio:** Sea un problema de bancarrota  $(E, d)$  tal que  $E = \frac{D}{2}$ , se tiene que  $R(E, d) = \frac{d}{2}$ .

**Observación 1.24.** *La propiedad del punto medio es más débil que la de auto-dualidad. Si  $R$  satisface auto-dualidad y  $E = \frac{D}{2}$ , entonces  $R(\frac{D}{2}, d) = d - R(D - \frac{D}{2}, d)$  y, por lo tanto  $R(\frac{D}{2}, d) = R(E, d) = \frac{d}{2}$ .*

- Veremos ahora otras propiedades de invarianza en las que puede variar las demandas:
  - **Sin ventaja de transferencia:** Para cualquier  $N' \subset N$  y cada  $(d'_i)_{i \in N'}$ , si  $\sum_{i \in N'} d'_i = \sum_{i \in N'} d_i$ , entonces, se tiene que  $\sum_{i \in N'} R_i(E, d) = \sum_{i \in N'} R_i(E, (d_{N \setminus N'}, (d'_i)_{i \in N'}))$ . Esta propiedad recoge que, ningún grupo de agentes puede conseguir más de modo conjunto por transferirse parte de sus demandas entre ellos.
  - **Independencia de la demanda global de los otros:** Sea  $i \in N$  y sea  $N' = N \setminus \{i\}$ , para cada  $(d'_j)_{j \in N'}$ , si  $\sum_{j \in N'} d'_j = \sum_{j \in N'} d_j$ , entonces  $R_i(E, d) = R_i(E, (d_i, (d'_j)_{j \in N'}))$ . Refleja que la solución de un agente depende de su propia demanda, del estado y de la suma global de la demanda de los demás agentes, no depende del resto de demandas siempre que  $D$  se mantenga constante.

- Estudiaremos propiedades que nos permitirán variar las demandas y/o el estado:
  - **Separabilidad en las demandas:** Sea  $(E', d') \in B^N$  y  $N' \subset N$ , si  $d_{N'} = d'_{N'}$ ,  $E = E'$  y  $\sum_{i \in N'} R_i(E, d) = \sum_{i \in N'} R_i(E', d')$ , entonces  $R_{N'}(E', d') = R_{N'}(E, d)$ . Si algunos jugadores varían su demanda, dejando el estado constante, la regla de reparto debería otorgarle lo mismo a aquellos agentes que no han variado su demanda si grupalmente no hubo variación.
  - **Separabilidad en las demandas y el estado:** Sea  $(E', d') \in B^N$  y  $N' \subset N$ , si  $d_{N'} = d'_{N'}$  y  $\sum_{i \in N'} R_i(E, d) = \sum_{i \in N'} R_i(E', d')$ , entonces  $R_{N'}(E', d') = R_{N'}(E, d)$ . Si las demandas de algunos agentes varían y el estado también, y el reparto agregado de estos agentes no sufre variación, entonces todos estos agentes deben recibir lo mismo que en el problema inicial.
  - **Uniformidad en las demandas:** Sea  $(E', d') \in B^N$  y  $N' \subset N$ , si  $d_{N'} = d'_{N'}$  y  $E = E'$ , entonces  $R_{N'}(E, d) \geq R_{N'}(E', d')$  ó  $R_{N'}(E, d) \leq R_{N'}(E', d')$ . Cambios en las demandas de algunos agentes provocarán cambios en la misma dirección para todos los agentes que no han modificado su demanda.
  - **Uniformidad en el estado y en las demandas:** Sea  $(E', d') \in B^N$  y  $N' \subset N$ , si  $d_{N'} = d'_{N'}$ , entonces  $R_{N'}(E, d) \geq R_{N'}(E', d')$  ó  $R_{N'}(E, d) \leq R_{N'}(E', d')$ . Misma interpretación que la propiedad anterior, pero ahora se permite variar el estado, por tanto es una propiedad más fuerte que la anterior.

Las propiedades de uniformidad pueden ser interpretadas como propiedades de solidaridad ya que, los cambios en el reparto de los agentes que no están involucrados deberán ir siempre en la misma dirección, es decir, si uno gana, todos ganan o, si uno pierde, todos pierden.

- Continuamos ahora con dos tipos de propiedades. Por una parte las de convexidad en las demandas, en el estado y en ambos parámetros, y por otro, las de aditividad en el estado:
  - **Convexidad en el estado:** Para cada par  $E, E'$  tales que  $D \geq \max\{E, E'\}$  y  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , se tiene que  $R(\lambda E + (1 - \lambda)E', d) = \lambda R(E, d) + (1 - \lambda)R(E', d)$ .
  - **Convexidad en las demandas:** Para cada par  $d, d'$  tal que  $\min\{D, D'\} \geq E$  y  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , se tiene que  $R(E, \lambda d + (1 - \lambda)d') = \lambda R(E, d) + (1 - \lambda)R(E, d')$ .
  - **Convexidad total:** Para cada par  $(E, d), (E', d') \in B^N$  y  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , se tiene que  $R(\lambda(E, d) + (1 - \lambda)(E', d')) = \lambda R(E, d) + (1 - \lambda)R(E', d')$ .
  - **Aditividad total:** Para cada par  $(E, d), (E', d') \in B^N$ , se tiene que  $R(E + E', d + d') = R(E, d) + R(E', d')$ .
  - **Aditividad en el estado:** Para cada par  $E, E'$  tales que  $D \geq \max\{E, E'\}$ , se tiene que  $R(E + E', d) = R(E, d) + R(E', d)$ .

Una propiedad más débil que la anterior es la siguiente:

  - **Pérdidas positivas con respecto a la aditividad en el estado:** En las condiciones de la propiedad anterior, se tiene que  $R(E + E', d) \leq d$ .

- Ahora, estudiaremos propiedades en las que hay variaciones en la población, i.e. hay una serie de jugadores que abandonan el juego. Pueden abandonarlo sin llevarse nada, una parte de  $E$  o toda su demanda. Veremos diferentes propiedades:
  - **Consistencia:** Si para cada par<sup>4</sup>  $\{N, N'\} \in \mathcal{N}$  tal que  $N' \subset N$  y cada  $(E, d) \in B^N$  si  $x = R(E, d)$ , entonces  $x_{N'} = R(\sum_{i \in N'} x_i, d_{N'})$ . Es una propiedad de robustez en el sentido de que se mantiene la solución inicial si un subgrupo de agentes se vuelven a repartir su asignación conjunta con las demandas iniciales.

<sup>4</sup> $\mathcal{N}$  es una familia de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$ , es decir, el universo potencial de agentes.

- **Consistencia bilateral:** En las mismas condiciones que la propiedad anterior, pero con  $|N'| = 2$ .
  - **Consistencia con las demandas nulas:** Sea  $N' \subset N$ , si  $d_i = 0 \forall i \in N \setminus N'$ , entonces  $R_{N'}(E, d) = R(E, d_{N'})$ . Si los agentes que tienen una demanda nula, dejan el problema, en el problema reducido el resto de jugadores lleva lo mismo que inicialmente. Se trata de una propiedad más débil de consistencia.
  - **Consistencia con la compensación nula:** Sea  $N' \subset N$ , si  $R_{N \setminus N'}(E, d) = 0$ , entonces  $R_{N'}(E, d) = R(E, d)$ .
  - **Consistencia con la compensación completa:** Sea  $N' \subset N$ , si  $R_{N \setminus N'}(E, d) = d_{N \setminus N'}$ , entonces  $R_{N'}(E, d) = R(E - \sum_{i \in N \setminus N'} d_i, d_{N'})$ . Si los agentes a los que en el reparto se les asigna su demanda, abandonan el problema, el resto de jugadores no se ven afectados.
  - **Consistencia media:** Si para cada  $(E, d) \in B^N$ , siendo  $x \equiv R(E, d)$ , se tiene que, para cada  $i \in N$ ,  $x_i = \frac{1}{|N|-1} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} R_i(x_i + x_j, (d_i, d_j))$ . La solución de cada agente puede ser obtenida con el promedio de todos los repartos de los problemas de 2 jugadores.
  - **Monotonía poblacional:** Para cada  $N' \subset N$ , si  $\sum_{i \in N'} d_i \geq E$ , entonces  $R(E, d_{N'}) \geq R_{N'}(E, d)$ . Si un grupo de agentes abandona el problema original, ningún agente sale perdiendo.
  - **Monotonía poblacional con aumento de la población:** Si para  $N' \subset N$ ,  $\sum_{i \in N'} d_i \geq E$ , entonces  $R(E, d_{N'}) \leq R_{N'}(E + \sum_{j \in N \setminus N'} d_j, d)$ . Esta propiedad es, en cierta medida la dual de la anterior. Ahora hay un grupo de agentes que se añaden al problema. Si el estado se incrementa en la suma de las demandas de los nuevos jugadores, ningún agente inicial debe salir perjudicado.
  - **Preservación del orden bajo variaciones en la población:** Para cada problema  $(E, d) \in B^N$  con  $d_i \leq d_j$  y sea  $k \in N$  tal que  $k \neq i, j$ , se tiene que  $R_i(E, d_{-k}) - R_i(E, d) \leq R_j(E, d_{-k}) - R_j(E, d)$ , i.e, si un jugador  $k$  abandona el problema sin llevarse nada, los jugadores que tienen demandas más elevadas salen tanto, o más beneficiados que aquellos con demandas más bajas.
- Imaginamos ahora situaciones en las que un grupo de demandantes transfiere sus demandas a uno de ellos que los represente. Vamos a estudiar propiedades relacionadas con esta situación:
- **Sin ventaja por fusión o división:** Sea  $N' \subset N$  y sea  $d' \in \mathbb{R}_+^{N'}$ , si existe  $i \in N$  tal que  $d'_i = d_i + \sum_{j \in N \setminus N'} d_j$  y  $\forall k \in N' \setminus \{i\}, d_k = d'_k$ , se tiene que  $R_i(E, d') = R_i(E, d) + \sum_{j \in N \setminus N'} R_j(E, d)$ . Si un grupo de agentes se reemplaza por uno solo, siendo la demanda de este la suma de las demandas de todo el grupo, entonces, el grupo obtiene el mismo reparto que individualmente.

Las dos siguientes propiedades están en el mismo caso que en la anterior. En la primera de ellas, el grupo obtendría menos al juntarse, por lo que no habría ventaja en la fusión y, en la segunda, obtendrían más al juntarse, por lo que no hay ventaja en la división:

- **Sin ventaja por fusión:** Sea  $N' \subset N$  y sea  $d' \in \mathbb{R}_+^N$ , si existe  $i \in N$  tal que  $d'_i = d_i + \sum_{j \in N \setminus N'} d_j$  y  $\forall k \in N' \setminus \{i\}, d_k = d'_k$ , se tiene que  $R_i(E, d') \leq R_i(E, d) + \sum_{j \in N \setminus N'} R_j(E, d)$ .
  - **Sin ventaja por división:** Sea  $N' \subset N$  y sea  $d' \in \mathbb{R}_+^N$ , si existe  $i \in N$  tal que  $d'_i = d_i + \sum_{j \in N \setminus N'} d_j$  y  $\forall k \in N' \setminus \{i\}, d_k = d'_k$ , se tiene que  $R_i(E, d') \geq R_i(E, d) + \sum_{j \in N \setminus N'} R_j(E, d)$ .
- Supongamos ahora que podemos replicar el problema de bancarrota  $(E, d)$ , dando lugar al problema  $(E', d')$  que se define de la siguiente forma: sea  $N'$  un conjunto de demandantes del problema replicado  $(E', d')$  tiene que cumplir que  $k|N| = |N'|$  y  $N \subset N'$  y, sea una partición  $(N^i)_{i \in N}$  de  $N'$  en  $|N|$  grupos de agentes,  $(N^i)_{i \in N}$ , tales que, para cada  $i \in N$  y cada  $j \in N^i$ ,  $d'_j = d_i$  y, también  $E' = kE$ .

Es decir, dado el vector de demandas original  $(d_1, \dots, d_n)$ , el vector de demandas de la  $k$ -réplica será la siguiente matriz:

$$d' = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Definimos ahora una propiedad relacionada con este nuevo problema:

- **Invarianza por réplica:** Sea  $(E', d')$  la  $k$ -réplica del problema  $(E, d)$  con partición asociada  $(N^i)_{i \in N}$ , se tiene que  $\forall j \in N^i$ ,  $R_j(E, d) = R_j(E', d')$ .
- Estudiaremos ahora el impacto que tiene el reparto de un jugador  $i$  en uno  $j$  y viceversa:
  - **Contribuciones equilibradas:**  $\forall i, j \in N$ , se tiene que  $R_i(E, d) - R_i(\text{máx}\{E - d_j, 0\}, d_{-j}) = R_j(E, d) - R_j(\text{máx}\{E - d_i, 0\}, d_{-i})$ . El impacto que provoca en el agente  $i$  que el agente  $j$  abandone el problema es el mismo que provoca en el agente  $j$  que el agente  $i$  abandone el problema.

En el **Apéndice D** encontramos un resumen de las propiedades que cumplen las reglas principales.



## Capítulo 2

# Ranking y medidas de desigualdad de las reglas de bancarrota

En problemas de reparto en los que existe un orden natural de los agentes dado por un vector (en el caso de los problemas de bancarrota viene dado por las demandas de los agentes) si las reglas de reparto satisfacen la propiedad de preservación del orden, parece natural preguntarse si podemos establecer rankings para comparar u ordenar las distintas soluciones que se dan en la literatura (en nuestro caso, las introducidas en el capítulo anterior). En este contexto será habitual ordenar dichas soluciones mediante el orden de Lorenz, que compara sumas agregadas ya que, como las soluciones son vectores en el hiperplano eficiente, no tiene sentido comparar coordenada a coordenada. Diremos que una solución es mayor que otra en el sentido de Lorenz si trata mejor a los demandantes más pequeños, es decir, si todas las sumas agregadas son mayores.

En Mirás Calvo et al. (2016) se han obtenido resultados para el juego de aeropuerto y en Thomson (2019), Bosmans et al (2011) están recogidos importantes resultados de ordenaciones o ranking.

Estas ordenaciones están relacionadas con las medidas de desigualdad de una población. Antes de hacer el reparto, en un problema de bancarrota, existe una desigualdad entre sus acreedores dada por sus demandas, que podemos medir y, una vez hecho un reparto, dicha desigualdad podrá crecer o decrecer. Estudiaremos el comportamiento de las diferentes soluciones en este contexto.

Una forma de establecer relaciones de ordenaciones es a través del estudio de propiedades que cumplan las reglas antes expuestas ya que, para decidir la solución más razonable a un problema, aparte del ranking, es razonable estudiar cual es la mejor dentro de las que verifiquen las propiedades más adecuadas a cada contexto. Por lo tanto, veremos algunas relaciones entre las distintas propiedades y demostraremos alguna de ellas (Bosmans et al (2011)). Se puede encontrar un estudio mucho más detallado en Thomson (2019).

**Proposición 2.1.** *Una regla que satisfaga la propiedad de consistencia cumple super-modularidad si, y solo si satisface preservación del orden bajo variaciones en la demanda.*

**Observación 2.2.** *Las reglas PRO, CEA, CEL, T y PIN satisfacen consistencia y super-modularidad, por lo que también van a cumplir preservación del orden bajo variaciones en la demanda.*

*Por otro lado, CE cumple la propiedad de consistencia, pero no satisface la super-modularidad, así que no cumple preservación del orden bajo variaciones en la demanda.*

La regla APRO y RA no son consistentes. Veremos las demostraciones de que, aun así, satisfacen preservación del orden bajo variaciones en la demanda.

**Proposición 2.3.** *La regla APRO satisface preservación del orden bajo variaciones en la demanda.*

*Demostración.* Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota, sea  $i \in N$  tal que  $d'_i > d_i$  y sean  $j, k \in N$  tales que  $d_j < d_k$ , tal que  $d \text{ APRO}_j(E, d) - \text{APRO}_j(E, (d_{-i}, d'_i)) \leq \text{APRO}_k(E, d) - \text{APRO}_k(E, (d_{-i}, d'_i))$ .

Para empezar, veremos que, si un acreedor aumenta su demanda, entonces los derechos mínimos del resto de jugadores disminuyen y, además, veremos que lo harán de forma ordenada, es decir, los jugadores que demandan más, verán más perjudicados sus derechos mínimos que aquellos que demanden menos.

Obviamente tenemos que,  $\forall j \neq i$ ,  $s_j = \max\{0, E - \sum_{l \neq j} d_l\} \geq \max\{0, E - \sum_{l \neq j, i} d_l - d'_i\}$ , que será el derecho mínimo del jugador  $j$  una vez que el acreedor  $i$  aumente su demanda a  $d'_i$  y lo denotaremos por  $s'_j$ . Además,

$$s_j - s'_j = \max\{0, E - \sum_{l \neq j} d_l\} - \max\{0, E - (\sum_{l \neq j, i} d_l + d'_i)\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } E < \sum_{l \neq j} d_l \\ E - \sum_{l \neq j} d_l & \text{si } E \in (\sum_{l \neq j} d_l, \sum_{l \neq j, i} d_l + d'_i) \\ d'_i - d_i & \text{si } E > \sum_{l \neq j, i} d_l + d'_i \end{cases}$$

Análogamente,

$$s_k - s'_k = \begin{cases} 0 & \text{si } E < \sum_{l \neq k} d_l \\ E - \sum_{l \neq k} d_l & \text{si } E \in (\sum_{l \neq k} d_l, \sum_{l \neq k, i} d_l + d'_i) \\ d'_i - d_i & \text{si } E > \sum_{l \neq k, i} d_l + d'_i \end{cases}$$

Se puede comprobar que  $s_j - s'_j \leq s_k - s'_k$ .

Ahora, aplicamos la regla proporcional al problema de demandas ajustadas. Trivialmente, la regla proporcional satisface la preservación del orden bajo variaciones en la demanda. Por lo tanto, aplicando la fórmula de la definición de la regla *APRO*, tendremos que dicha regla satisface la propiedad de preservación del orden bajo variaciones en la demanda.  $\square$

**Proposición 2.4.** *La regla RA satisface la propiedad la preservación del orden bajo variaciones en la demanda.*

*Demostración.* Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota. Si la demanda  $d_i$  aumenta hasta otro valor  $d'_i$  y sean  $j, k \neq i$  tal que  $d_j < d_k$ , veremos que, el acreedor  $k$  se ve más perjudicado por dicho aumento.

Consideremos un orden  $\pi \in \Pi(N)$  tal que el aumento de la demanda de  $i$  genera una disminución en el reparto al jugador  $j$ , es decir,  $i \in P_\pi(j)$  (en dicha ordenación aparece el acreedor  $i$  antes que el acreedor  $j$ ) y  $0 < E - \sum_{l \in P_\pi(j)} d_l < d_j$ .

Ahora, intercambiaremos las posiciones de  $j$  y de  $k$ , por lo que obtendremos un nuevo orden  $\pi' \in \Pi(N)$  para el cual  $i \in P_{\pi'}(k)$  y  $0 < E - \sum_{l \in P_{\pi'}(k)} d_l < d_k$ .

Por lo tanto, con respecto a este nuevo orden, el reparto a  $k$  decrece al menos lo mismo que el reparto a  $j$  en el orden  $\pi$ . Por lo tanto, RA satisface la preservación del orden bajo demandas.  $\square$

En la Tabla 2.1 tenemos una clasificación de las principales reglas en función de una elección de propiedades que hemos elegido.

	PRO	CEA	CEL	T	PIN	CE	APRO	RA	MO
Preservación del orden en ganancias	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Preservación del orden en pérdidas	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Monotonía en el estado	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Super-modularidad	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si
Preservación del orden bajo variaciones en la demanda	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si
Invarianza bajo truncamiento en la demandas	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Auto-dualidad	Si	No	No	Si	No	No	Si	Si	No
Propiedad del punto medio	Si	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	No
Consistencia	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
Consistencia con las demandas nulas	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Límite inferior razonable	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Tabla 2.1: Reglas y propiedades principales.

## 2.1. Ranking de las reglas de un problema de bancarrota

Para poder hacer una buena clasificación de las reglas (Bosmans et al (2011)), tenemos que definir una relación entre ellas y, lo haremos mediante la relación de dominancia de Lorenz, que compara los vectores de forma agregada.

**Definición 2.5.** Sea  $\mathbb{R}_{\geq}^n$  el conjunto de los vectores  $n$ -dimensionales no negativos,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ordenadas sus componentes de menor a mayor, es decir,  $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ . Sean  $x, y \in \mathbb{R}_{\geq}^n$  diremos que  $x$  Lorenz-domina a  $y$  ( $x \geq_L y$ ) si se cumple que:

$$\begin{aligned}
x_1 &\geq y_1 \\
x_1 + x_2 &\geq y_1 + y_2 \\
&\vdots \\
x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} &\geq y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \\
&y \\
x_1 + x_2 + \dots + x_n &= y_1 + y_2 + \dots + y_n
\end{aligned}$$

**Definición 2.6.** Sean dos reglas  $R, R'$ , diremos que  $R$  Lorenz-domina a  $R'$  si  $R(E, d)$  Lorenz-domina a  $R'(E, d')$  para todo  $(E, d) \in B^N$ .

Podemos decir que si  $R$  Lorenz-domina a  $R'$ ,  $R$  beneficia más a los grupos de agentes que demandan menos y perjudica a aquellos que tienen demandas superiores, siendo lo contrario con  $R'$ , lo que puede tener mucha utilidad en el ámbito económico o político.

Por último, antes de empezar con una clasificación de las reglas, veremos en que casos la dualidad del operador revierte la relación de dominancia de Lorenz.

**Definición 2.7.** Sea  $R$  una regla, definimos la regla dual  $R^d$  de  $R$  como  $R^d = d - R(D - E, d)$ . El problema  $(D - E, d)$  es el dual del problema  $(E, d)$ .

**Lema 2.8.** Sean  $R$  y  $S$  dos reglas que satisfacen preservación del orden de ganancias y de pérdidas en un subdominio de  $B^N$ . Entonces,  $R$  Lorenz-domina a  $S$  en un subdominio, si, y solo si,  $S^d$  Lorenz-domina a  $R^d$  en el subdominio de problemas duales.

*Demostración.* Por definición, si  $R$  y  $R^d$  y  $S$  y  $S^d$  son duales, se tiene que:

$$R(E, d) + R^d(D - E, d) = d$$

y

$$S(E, d) + S^d(D - E, d) = d$$

Por lo tanto  $R$  Lorenz-domina a  $S$ , si, y solo si,  $S^d$  Lorenz-domina a  $R^d$ .  $\square$

A partir de ahora, probaremos diferentes resultados que nos permitirán establecer relaciones de Lorenz entre las reglas de reparto.

**Proposición 2.9.** Sea  $\mathcal{R}$  el conjunto de reglas que satisfacen preservación del orden de ganancias,  $CEA$  es la única regla en  $\mathcal{R}$  que Lorenz-domina a cualquier otra regla de  $\mathcal{R}$

*Demostración.* Probar esta proposición es lo mismo que probar que la regla  $CEA$  Lorenz-domina a cualquier regla en  $\mathcal{R}$ . Lo demostraremos por contradicción.

Sea  $R \in \mathcal{R}$  una regla y  $(E, d)$  un problema de bancarrota tal que  $x = CEA(E, d)$  no Lorenz-domina a  $y = R(E, d)$ . Sea  $k \in N$  el agente de menor demanda tal que:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k < y_1 + y_2 + \dots + y_k$$

y

$$\sum_{j=1}^s x_j \geq \sum_{j=1}^s y_j \quad \forall s < k$$

Entonces, tenemos que,  $x_k < y_k \leq d_k$  y, en ese caso  $CEA_k(E, d) = x_k = \lambda \leq y_k \leq y_{k+1} \leq \dots \leq y_n$ , debido a que  $R$  cumple preservación del orden de ganancias. En ese caso, tendríamos que  $\sum_{i=1}^n y_i > E$ , por lo que la regla  $R$  no sería eficiente.  $\square$

**Observación 2.10.** Se tiene que  $CEA$  Lorenz domina a todas las reglas de la Tabla 2.1, por lo que será la que más beneficia a los demandantes más pequeños.

**Proposición 2.11.** Sea  $\mathcal{R}$  el conjunto de reglas que satisfacen la propiedad del punto medio, preservación del orden de ganancias y monotonía en el estado.  $CE$  es la única regla en  $\mathcal{R}$  que Lorenz-domina cualquier otra regla en  $\mathcal{R}$ .

*Demostración.* Tenemos que demostrar que  $CE$  Lorenz-domina cualquier regla en  $\mathcal{R}$ . Lo demostraremos por contradicción.

Sea  $R \in \mathcal{R}$  y sea  $(E, d)$  un problema de bancarrota tal que  $x = CE(E, d)$  no Lorenz-domina a  $y = R(E, d)$ . Sea  $k \in N$  el agente de menor demanda tal que:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k < y_1 + y_2 + \dots + y_k$$

y

$$\sum_{j=1}^s x_j \geq \sum_{j=1}^s y_j \quad \forall s < k$$

Por lo tanto, se tiene que  $x_k < y_k$  y, por eficiencia,  $x_l > y_l$  para algún  $l > k$ .

Las desigualdades  $x_k < y_k \leq d_k$  implican que, ó  $x_k = \frac{d_k}{2}$  ó  $x_k = \lambda < d_k$ . Además,  $l > k$  implica que  $x_l < d_l$  ya que, si la regla  $CE$  no le asigna su demanda al agente  $k$ , tampoco se la podrá asignar al agente  $l$ , que tiene demanda mayor. Distinguimos distintos casos:

1. Si  $\frac{D}{2} > E$  y  $x_k = d_k/2$ , entonces  $y_k > x_k$  no puede ocurrir debido a la monotonía en el estado y la propiedad del punto medio ya que, si  $E$  aumenta hacia  $D/2$ , entonces  $y_k$  debería aumentar hacia  $d_k/2$  y eso no puede ocurrir ya que, es mayor que dicho valor, por lo que tenemos una contradicción.
2. Si  $\frac{D}{2} > E$  y  $x_k = \lambda$ , tenemos que  $\lambda < y_k \leq y_{k+1} \leq \dots \leq y_n$  y, por lo tanto,  $\sum_{i=1}^n y_i > E$ , lo que implica que  $y$  no es una asignación factible.
3. Si  $\frac{D}{2} < E$  y  $y_l < x_l = d_l/2$ , tenemos de nuevo una contradicción ya que, si  $E$  disminuye hacia  $\frac{D}{2}$ , entonces  $y_l$  debería disminuir hacia  $d_l/2$ , pero se tiene que  $y_l < d_l/2$ .
4. Si  $\frac{D}{2} < E$  y  $y_l < x_l = \lambda$ , tenemos que  $x_k = x_{k+1} = \dots = x_l = \lambda$ . Entonces,  $R$  no cumple preservación del orden de ganancias ya que  $y_k > \lambda$  mientras que  $y_l < \lambda$  con  $l > k$ .

□

**Observación 2.12.** *Tenemos que  $CE$  Lorenz-domina a las reglas  $PRO$ ,  $T$ ,  $PIN$ ,  $APRO$  y  $RA$ .*

**Proposición 2.13.** *Sea  $\mathcal{R}$  el conjunto de las reglas que satisface preservación del orden de ganancias, propiedad del punto medio, monotonía en el estado y súper-modularidad, la regla de Piniles es la única que Lorenz-domina cualquier regla en  $\mathcal{R}$ .*

*Demostración.* En el caso donde la semisuma de las demandas es mayor que  $E$ , se tiene que  $PIN$  coincide con  $CE$  y  $T$ . La Proposición 2.11 implica que  $CE$  Lorenz-domina a  $PIN$ ,  $RA$ ,  $APRO$ ,  $T$  y  $PRO$ . Entonces, si  $\frac{D}{2}$ , se tiene que  $PIN = T = CE$  Lorenz-dominan a  $RA$ ,  $APRO$  y  $PRO$ .

Ahora nos centraremos en los otros problemas, donde la semisuma de las demandas sea menor que el estado a dividir,

Demostraremos por contradicción que  $PIN$  Lorenz-domina cualquier regla en  $\mathcal{R}$ .

Sea  $R$  una regla en  $\mathcal{R}$  y, sea  $(E, d)$  un problema de bancarrota tal que  $\frac{D}{2} < E$  y sea  $x = PIN(E, d)$  tal que no Lorenz-domina a  $y = R(E, d)$ . Sea  $k \in N$  el agente de menor demanda tal que:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k < y_1 + y_2 + \dots + y_k$$

$$\sum_{j=1}^s x_j \geq \sum_{j=1}^s y_j \quad \forall s < k$$

Por tanto,  $x_k < y_k \leq d_k$  y  $y_l < x_l \leq d_l$  para algún  $l > k$ . La definición de  $PIN$  implica que  $x_k = \frac{d_k}{2} + \lambda$  y  $x_l = \frac{d_l}{2} + \lambda$ . Como  $R$  satisface la propiedad del punto medio, tenemos que  $R_k(E, d) - R_k(D/2, d) = y_k - \frac{d_k}{2} > \lambda$  mientras que  $R_l(E, d) - R_l(D/2, d) = y_l - \frac{d_l}{2} < \lambda$ . Por lo tanto,  $R$  no cumple la propiedad de super-modularidad ya que  $R_k(E, d) - R_k(D/2, d) = y_k - \frac{d_k}{2} > R_l(E, d) - R_l(D/2, d) = y_l - \frac{d_l}{2}$  □

**Observación 2.14.** *Con el razonamiento del lema anterior y de lo explicado antes, se llega a la conclusión de que la regla de Piniles Lorenz-domina al reparto proporcional, al reparto del Talmud, al reparto proporcional ajustado y al reparto de las llegadas aleatorias.*

En las dos siguientes proposiciones haremos un razonamiento inverso viendo en que condiciones que reglas están siempre Lorenz-dominadas por otras en función de las propiedades que cumplen.

**Proposición 2.15.** *Sea  $\mathcal{R}$  el conjunto de las reglas que satisfacen preservación del orden de ganancias y de pérdidas, preservación del orden bajo variaciones en las demandas, consistencia con las demandas nulas y límite inferior razonable. La regla de reparto  $MO$  es la única que está Lorenz-dominada por cualquier otra regla en  $\mathcal{R}$ .*

*Demostración.* Lo demostraremos por inducción:

1. Para  $n = 2$ , sea  $(E, d)$  un problema de bancarrota con dos individuos. Si  $k^* = 0$ , entonces, tenemos dos casos:

- a)  $E \leq d_1$  y  $MO(E, d) = (E/2, E/2)$ . Como  $R$  satisface límite inferior razonable, se tiene que Lorenz-domina a  $MO(E, d)$ .
- b)  $MO(E, d) = (d_1 - s, d_2 - s)$ , siendo  $s = \frac{(D-E)}{2}$ . Como  $R$  satisface preservación del orden de pérdidas, entonces Lorenz- domina a  $MO(E, d)$ .

Por otro lado, si  $k^* = 1$ , es decir,  $d_1 < E \leq d_2$ , entonces  $MO(E, d) = (d_1/2, E - d_1/2)$ . Cualquier regla que satisfaga límite inferior razonable va a proponer una división de  $E$  que Lorenz-domine a  $MO$  ya que  $R_1(E, d) \geq \frac{1}{2} \min\{E, d_1\} = \frac{d_1}{2}$ .

2. Supongamos que el enunciado se cumple para  $n - 1$  y vamos a demostrarlo para  $n$  jugadores. Consideremos una regla  $R$  que cumpla las propiedades del enunciado.

Sea  $(E, d)$  un problema de bancarrota. Si  $k^* = 0$ , entonces, tenemos dos casos:

- a)  $E \leq d_1$  y  $MO(E, d) = (E/n, \dots, E/n)$ . Como  $R$  satisface límite inferior razonable, entonces Lorenz-domina a  $MO(E, d)$ .
- b)  $MO(E, d) = (d_1 - s, \dots, d_n - s)$ , siendo  $s = (D - E)/n$ . Se tiene que  $d_1 - s \leq R_1 \iff d_1 - R_1 \leq \frac{D-E}{2}$ , lo cual es cierto debido a que  $R$  satisface preservación del orden de pérdidas, que implica límite inferior de las pérdidas. Operando de la misma forma se ve que  $\sum_{i=1}^k d_k - ks \leq \sum_{i=1}^k R_k$  para cualquier  $k \leq n - 1$ . Por lo tanto,  $R$  Lorenz-domina a  $MO(E, d)$ .

Si  $k^* > 0$ , entonces  $d_2 + d_3 + \dots + d_n > E$  y  $(E, (0, d_2, d_3, \dots, d_n))$  es un problema de bancarrota. Además, el  $k^*$  para el problema  $(E, (0, d_2, d_3, \dots, d_n))$  coincide con el del problema original  $(E, d)$ .

Por inducción, tenemos que, el vector  $(n - 1)$ -dimensional  $R(E, (d_2, \dots, d_n))$  Lorenz- domina  $MO(E, (d_2, \dots, d_n))$ . Además, como  $R$  y  $MO$  cumple consistencia con las demandas nulas, tenemos que:

$$\begin{aligned} (0, R(E, (d_2, d_3, \dots, d_n))) &= R(E, (0, d_2, d_3, \dots, d_n)) \geq_L \\ (0, MO(E, (d_2, d_3, \dots, d_n))) &= MO(E, (0, d_2, d_3, \dots, d_n)) \end{aligned}$$

Si empezamos por el problema  $(E, (0, d_2, \dots, d_n))$  y vamos aumentando la demanda del primer jugador hasta  $d_1$ , la regla  $MO$  pasa una cantidad  $\frac{d_1}{n(n-1)}$  de los individuos  $i = 2, \dots, n$  al individuo 1, por lo que, dicho jugador va a obtener, al menos  $d_1/n$  ya que  $R$  satisface límite inferior razonable. Además, como  $R$  cumple preservación del orden bajo variaciones en la demanda, el crecimiento de la demanda del jugador 1 provoca un decrecimiento en las asignaciones  $R_i, i \neq 1$ . Por lo tanto, concluimos la demostración viendo que  $R(E, d)$  Lorenz-domina a  $MO(E, d)$

□

**Observación 2.16.**  $MO$  está Lorenz-dominada por  $RA, APRO, PRO, PIN$  y por  $T$ .

**Proposición 2.17.** Sea  $\mathcal{R}$  el conjunto de las reglas que satisfacen preservación del orden de ganancias y de pérdidas. La regla de reparto  $CEL$  es la única que está Lorenz- dominada por cualquier otra regla en  $\mathcal{R}$

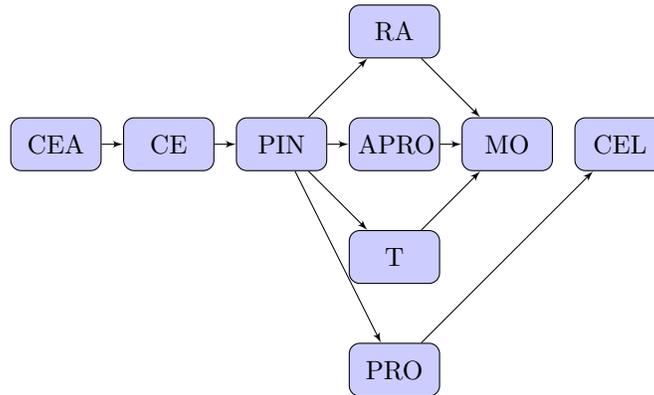
*Demostración.* Para empezar, tenemos que ver que  $CEA(E, d) = d - CEL(D - E, d)$ , por lo que ambas reglas son duales.

Como se tiene que  $CEA$  Lorenz-domina cualquier regla que satisfaga la preservación del orden, tomando el dual, tenemos que  $CEL$  es la única que está Lorenz-dominada por cualquier otra regla en  $\mathcal{R}$

□

**Observación 2.18.** *Se tiene que  $CEL$  está Lorenz-dominada por todas las reglas de la Tabla 2.1.*

Podemos realizar un esquema para resumir todas las relaciones entre las reglas enunciadas. Una flecha (o secuencia de flechas) desde la regla  $R$  a la regla  $R'$  indica que  $R$  Lorenz- domina a  $R'$  y, la ausencia de flecha (o secuencia de flechas) entre dos reglas indica que no hay relación de Lorenz-dominancia:



Ahora, realizaremos diferentes gráficas en las que observaremos la evolución de algunas reglas a medida que aumenta el estado  $E$  con unas demandas fijas.

En la Figura 2.1 vemos como crecen algunas de las reglas anteriores en un ejemplo con 3 jugadores. Representamos el crecimiento del reparto asignado al jugador 1 y a la suma de los repartos a los jugadores 1 y 2. Si una regla  $R$  está siempre por encima de otra,  $R'$  en ambas gráficas, implicará que,  $R \geq_L R'$ .

Observamos, por lo tanto, en las dos primeras gráficas que la regla  $CEA$  es la que más beneficia al jugador con la demanda menor y la regla  $CEL$  es la que más lo perjudica, mientras que la regla proporcional trata siempre a todos los jugadores de la misma forma. Por otro lado, en las dos gráficas inferiores, podemos ver que  $CE = PIN$  si  $E \leq \frac{D}{2}$  y, a partir de ese punto, la regla  $CE$  asigna un reparto mayor al jugador 1 y, a la suma del 1 y del 2, por lo tanto, podemos observar que  $CE \geq_L PIN$ .

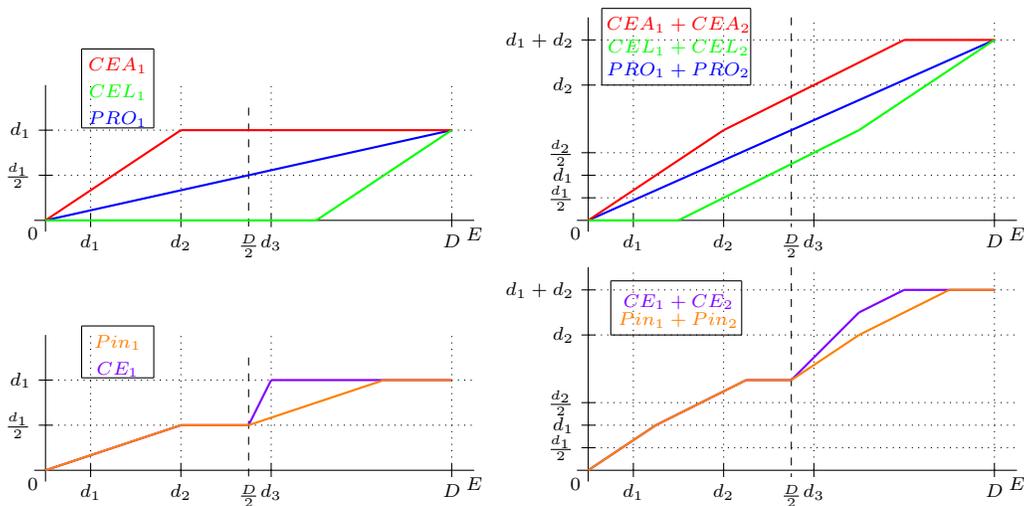


Figura 2.1: Evolución de diferentes soluciones de un problema de bancarrota al aumentar el estado con demandas  $d = (1, 3, 5)$ .

Con el esquema anterior, tenemos que, el conjunto de las reglas  $\{RA, APRO, T, PRO\}$  y el par  $\{PRO, MO\}$  no son Lorenz-comparables, lo cual podría verse haciendo las gráficas para estas soluciones como las de la Figura 2.1 y observando que las curvas se cortan. En la Figura 2.2 podemos verlo para las reglas  $PRO$  y  $APRO$ .

Partiremos el conjunto de problemas de bancarrota  $(E, d) \in B^N$  en tres subdominios: aquellos problemas en los que  $\frac{D}{2} > E$ , diremos que es el conjunto  $B_1^N$ , aquellos en los que  $\frac{D}{2} < E$ , que denotaremos por  $B_0^N$  y, por último, aquellos en los que  $\frac{D}{2} = E$ , que será el dominio  $B_{0.5}^N$ .

Intentaremos buscar comparaciones entre las soluciones dependiendo en que dominio se encuentren.

**Observación 2.19.** *En el dominio  $B_{0.5}^N$  se tiene que, por la propiedad del punto medio,  $CE = PIN = RA = APRO = T = PRO$ . El resto de relaciones se mantienen del esquema anterior (en la Figura 2.1 vemos como coinciden las reglas  $PRO$ ,  $CE$  y  $PIN$  en el punto  $E = \frac{D}{2}$ ).*

**Proposición 2.20.** *En el dominio  $B_1^N$  se tiene que  $APRO$  Lorenz-domina a  $PRO$  y en el dominio  $B_0^N$ ,  $PRO$  Lorenz-domina a  $APRO$  (Figura 2.2)*

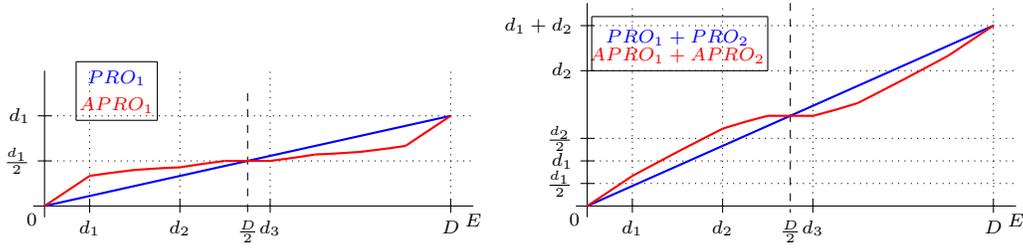


Figura 2.2: Evolución con el crecimiento de  $E$  en un problema de 3 jugadores con demandas  $d = (1, 3, 5)$

*Demostración.* Sea  $(E, d) \in B_1^N$  un problema de bancarrota tal que  $E \leq \frac{D}{2}$ , se tiene que, si el mínimo derecho del agente  $i \in N$ ,  $s_i = \max\{0, E - \sum_{j \in N \setminus i} d_j\} \geq 0$ , entonces  $E - D + d_i > 0$ , lo que implica que  $E + d_i > D \geq 2E$  y, por tanto  $d_i > E$ .

Por lo tanto, como mucho, un individuo tiene un derecho mínimo positivo y, por estar las demandas ordenadas, tiene que ser el último agente. Distinguiamos dos casos:

1.  $s_n(E, d) = 0$ , i.e,  $s_i = 0 \forall i \in N$ . La definición de  $APRO$  implica:

$$APRO(E, d) = APRO(E, \tilde{d}) = PRO(E, \tilde{d})$$

con  $\tilde{d}_i = \min_{i \in N} \{d_i, E\} \forall i \in N$

Por lo tanto, sólo los demandantes más grandes son truncados. Así que, si demostramos que  $PRO(E, \tilde{d})$  Lorenz-domina a  $PRO(E, d)$  tenemos el resultado probado:

Sea  $j \in N$  el agente más pequeño tal que  $d_j > E$ , i.e,  $d_k < E \forall k < j$ . Sea  $m \in N$ , se tiene que  $\sum_{l=1}^m PRO_l(E, \tilde{d}) = \sum_{l=1}^m d_l \frac{E}{\sum_{i=1}^j d_i + (n-j)E} \geq \sum_{l=1}^m d_l \frac{E}{\sum_{i=1}^n d_i} = \sum_{l=1}^m PRO_l(E, d)$ .

2.  $s_n(E, d) > 0$ . El vector de mínimos derechos es  $s = (0, \dots, 0, E - D + d_n)$ . Por lo tanto, el agente  $n$  debe recibir esa cantidad y, se tiene que repartir  $E_A = E - s_n = D - d_n$  entre todos los agentes mediante la regla proporcional con demandas  $(d_1, \dots, d_{n-1}, d_n - s_n)$ . Tenemos que,  $d_n - s_n > E - s_n$ .

$PRO(D - d_n, (d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, D - d_n)) = (\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}, \dots, \frac{d_{n-1}}{2}, \frac{D-d_n}{2})$ , debido a que  $\sum_{i=1}^n d_i = 2(D - d_n)$ .

Así que:

$$APRO(E, d) = \left( \frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}, \dots, \frac{d_{n-1}}{2}, E - \frac{D - d_n}{2} \right)$$

Por otro lado,  $E \leq \frac{D}{2}$  implica que  $PRO(E, d) \leq d/2 \Rightarrow \sum_{l=1}^m APRO_l(E, d) = \sum_{l=1}^m \frac{d_l}{2} \geq \sum_{l=1}^m PRO_l(E, d) \quad \forall m \leq n - 1$ . Por lo tanto, tenemos que  $APRO(E, d)$  Lorenz-domina a  $PRO(E, d)$ .

Como las reglas  $APRO$  y  $PRO$  son duales, aplicando el Lema 2.8 tenemos que  $PRO(E, d)$  Lorenz-domina a  $APRO(E, d)$  en  $B_0^N$ .

□

**Proposición 2.21.** *En el dominio  $B_0^N$ , sea  $\mathcal{R}$  el conjunto de las reglas que satisfacen preservación del orden de ganancias y pérdidas, monotonía en el estado y la propiedad del punto medio, la regla de Talmud es la única que está Lorenz-dominada por cualquier regla en  $\mathcal{R}$  en el dominio  $B_0^N$*

*Demostración.* Las propiedades de monotonía en el estado y la propiedad del punto medio son duales ya que, si una regla satisface una de estas dos propiedades, entonces su dual también lo hace. Tenemos probado que la regla de Talmud Lorenz-domina cualquier regla que satisfaga preservación del orden, monotonía en el estado y la propiedad del punto medio en el dominio  $B_1^N$ . Tomando el dual de este resultado tenemos probada esta proposición. □

**Observación 2.22.** *La regla de Talmud Lorenz-domina a las reglas  $APRO$  y  $RA$  en el dominio  $B_1^N$  y es dominada por ellas en el dominio  $B_0^N$ .*

**Observación 2.23.** *Las reglas  $RA$  y  $PRO$ ; y  $RA$  y  $APRO$  no son Lorenz-comparables en ningún dominio, salvo en  $B_{0,5}^N$ .  $MO$  y  $PRO$  tampoco lo son en  $B_1^N$*

*Vamos a verlo con varios contraejemplos:*

- Sea  $(E, d) \in B^{\{1,2,3\}}$  con  $d = (5, 20, 35)$  y  $E = 15$ , se tiene que:

$$RA(E, d) = (1.67, 6.67, 6.67)$$

$$PRO(E, d) = (1.25, 5, 8.75)$$

$$APRO(E, d) = (2.14, 6.43, 6.43)$$

$$MO(E, d) = (1.67, 6.67, 6.67)$$

- Sea  $(E', d') \in B^{\{1,2,3\}}$  con  $d' = (10, 25, 25)$  y  $E' = 27$ , se tiene que:

$$RA(E', d') = (4, 11.5, 11.5)$$

$$PRO(E', d') = (4.5, 11.25, 11.25)$$

$$MO(E', d') = (3.33, 11.83, 11.83)$$

- Sea  $(E', d') \in B^{\{1,2,3,4\}}$  con  $d'' = (10, 10, 10, 20)$  y  $E'' = 20$ , se tiene que:

$$RA(E'', d'') = (4.2, 4.2, 4.2, 7.5)$$

$$APRO(E'', d'') = (4, 4, 4, 8)$$

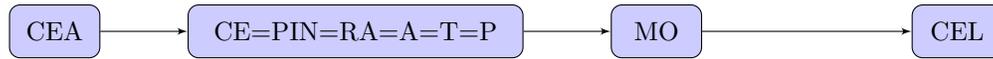
Con el problema  $(E, d)$  tenemos que  $RA(E, d) >_L PRO(E, d)$ , pero con el problema  $(E', d')$  se tiene que  $RA(E', d') <_L PRO(E', d')$ . Así que  $RA$  y  $PRO$  no son Lorenz-comparables en  $B_1^N$ .

Con el problema  $(E, d)$  tenemos que  $RA(E, d) <_L APRO(E, d)$ , pero con el problema  $(E'', d'')$  se tiene que  $RA(E'', d'') >_L APRO(E'', d'')$ . Así que  $RA$  y  $APRO$  no son Lorenz-comparables en  $B_1^N$ .

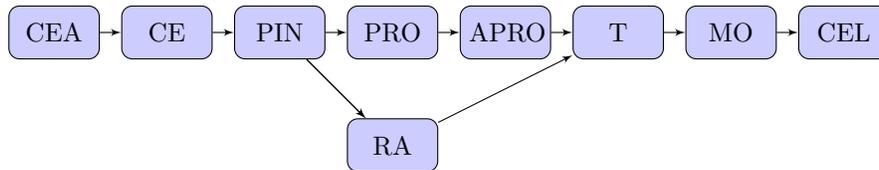
Con el problema  $(E, d)$  tenemos que  $MO(E, d) >_L PRO(E, d)$ , pero con el problema  $(E', d')$  se tiene que  $MO(E', d') <_L PRO(E', d')$ . Así que  $MO$  y  $PRO$  no son Lorenz-comparables en  $B_1^N$ .

Todos estos resultados los podemos resumir en los tres siguientes esquemas, donde las relaciones de Lorenz se representan de la misma forma que el de la forma general:

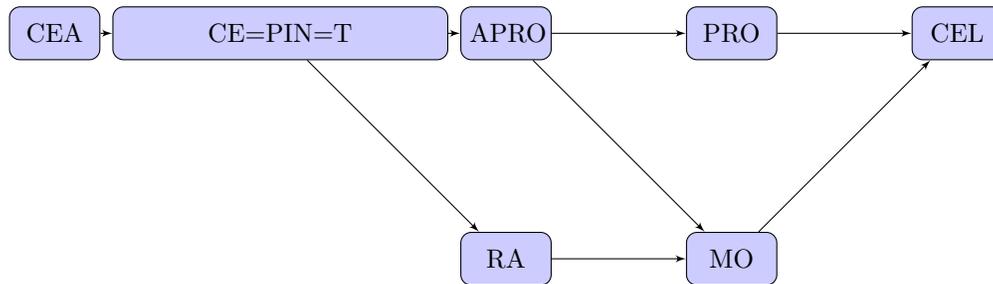
Dominio  $B_{0.5}^N$  ( $E = \frac{D}{2}$ ):



Dominio  $B_0^N$  ( $E \geq \frac{D}{2}$ ):



Dominio  $B_1^N$   $E \leq \frac{D}{2}$ :



De estos gráficos sacamos conclusiones interesantes, por ejemplo, al comparar la regla de llegadas aleatorias con la regla del reparto del Talmud, podemos observar que el reparto del Talmud beneficia más a los agentes con menor demanda si el estado está lejos de satisfacer todas las demandas ( $E \leq \frac{D}{2}$ ) que la regla de llegadas aleatorias y, si el estado es mayor que la semisuma de las demandas, esta relación cambia. Por lo tanto, dependiendo el problema al que nos enfrentemos y dependiendo de que grupo se quiera proteger o beneficiar, se puede elegir una solución u otra.

## 2.2. Diferentes medidas de desigualdad

Como fuimos indicando a lo largo de la sección anterior la relación de Lorenz de las distintas soluciones es un indicador de la desigualdad que implica hacer un cierto reparto u otro. Para hacer una

representación de dicha desigualdad utilizamos la denominada curva de Lorenz, que es una representación gráfica utilizada frecuentemente para plasmar la distribución relativa de una variable en un dominio determinado.

Cada punto de la curva se lee como una frecuencia relativa acumulada del reparto. Supongamos una población de  $n$  individuos, primero ordenamos los individuos en función de su reparto y, en el eje  $x$  representamos la frecuencia relativa acumulada de individuos, mientras que, en el eje  $y$  representaremos la frecuencia relativa acumulada del reparto que acumulen los agentes según la regla. La curva parte del origen  $(0, 0)$  y termina en el punto  $(1, 1)$ . Si el reparto estuviera distribuido de manera perfectamente equitativa, i.e, si a todos se les asignara la misma cantidad, la curva coincidiría con la recta  $x = y$ , es decir, formaría un ángulo de  $45^\circ$  con los ejes. Si existiera desigualdad perfecta, o sea, si todo el reparto se le asigna a un jugador, la curva coincidiría con el eje horizontal hasta el punto  $(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n}, 0)$  donde saltaría el punto  $(1, 1)$ . En general la curva aparecerá representada en una situación intermedia entre estos dos extremos.

Asociado a la curva de Lorenz aparece el llamado índice de Gini (Gini (1912)), que se define como la diferencia de áreas que forman las dos curvas anteriores.

**Definición 2.24.** Sea  $R$  una solución de bancarrota y sea  $A$  el conjunto de puntos que quedan por debajo de la recta de la perfecta igualdad ( $x = y$ ) y por encima de la curva de la solución, y  $B$  el conjunto de puntos que quedan por debajo de la curva de la solución (Figura 2.3), se define el índice de Gini ( $G(R)$ ) mediante la siguiente fórmula:

$$G(R) = \frac{\text{Área}(A)}{\text{Área}(A + B)}$$

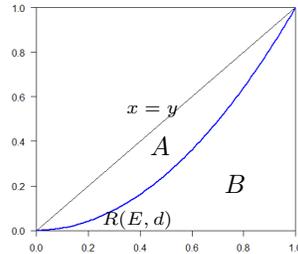


Figura 2.3: Áreas involucradas en el cálculo del índice de Gini

Por lo tanto, un índice de Gini igual a 0 implica perfecta igualdad, todos los jugadores reciben lo mismo. Por otro lado, si se le asigna todo el estado a un jugador (desigualdad máxima), el índice de Gini crecerá ilimitadamente hacia 1 según crece la población.

**Proposición 2.25.** El coeficiente de Gini se calcula, para un problema de bancarrota  $(E, d) \in B^N$  y una regla  $R$ , mediante la siguiente fórmula:

$$G(R) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k)$$

donde  $X_k = \frac{k}{n}$  es la frecuencia relativa acumulada de la variable población e  $Y_k = \frac{\sum_{j=1}^k R_j(E, d)}{E}$ . Nótese que,  $Y_k \cdot 100$  es la proporción acumulada del reparto asignado por  $R$ , para cada  $k = 1, \dots, n$ .

*Demostración.* Para obtener dicha equivalencia, tenemos que calcular las áreas de las regiones de la Figura 2.3:

$$\text{Área}(A + B) = \frac{1}{2}$$

ya que es un triángulo de base 1 y altura 1. Además,

$$\text{Área}(A) = \frac{1}{2} - \text{Área}(B)$$

Para calcular el área de  $B$  realizaremos la suma de todas las componentes que la forman. Por ejemplo, para un juego de 4 jugadores, se tienen los conjuntos  $B_1, B_2, B_3$  y  $B_4$  de la Figura 2.4.

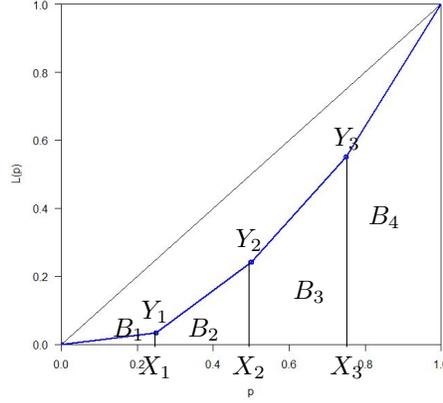


Figura 2.4: Áreas involucradas en el cálculo del índice de Gini

Nótese que  $B_1$  es un triángulo, de base  $X_1$  y de altura  $Y_1$ , por lo que  $\text{Área}(B_1) = \frac{X_1 Y_1}{2}$ .

$B_2, B_3$  y  $B_4$  son trapecoides, cuya área es  $\frac{\text{base}_{\text{mayor}} + \text{base}_{\text{menor}}}{2} \cdot h$ .

$h$  será  $X_{k+1} - X_k$ , la base mayor será  $Y_{k+1}$  y la base menor  $Y_k$ . Por lo tanto,  $\text{Área}(B_k) = \frac{Y_{k+1} + Y_k}{2} \cdot (X_{k+1} - X_k)$ ,  $k = 2, 3, 4$ .

En el caso general, para  $n$  jugadores, podemos separar  $B$  también en un triángulo y en  $n - 1$  trapecoides. Cortando, desde el eje  $x$  en cada  $x_k$ , tendremos, para  $x_1$ , el mismo triángulo que en el caso de 4 jugadores y, para el resto, tendremos  $(n - 1)$  trapecoides, de base mayor  $Y_{k+1}$ , de base menor  $Y_k$  y de altura  $X_{k+1} - X_k$ . Por lo tanto,

$$\text{Área}(B) = \frac{X_1 Y_1}{2} + \frac{Y_3 + Y_2}{2} \cdot (X_3 - X_2) + \dots + \frac{Y_n + Y_{n-1}}{2} \cdot (X_n - X_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k)}{2}$$

tomando  $X_0 = Y_0 = 0$ .

Por lo tanto, substituyendo, obtenemos:

$$\begin{aligned} G(R) &= \frac{\text{Área}(A)}{\text{Área}(A + B)} = \frac{\frac{1}{2} - \text{Área}(B)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k)}{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k) \end{aligned}$$

□

**Observación 2.26.** Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota y  $R$  una solución del problema, si  $r = R_i(E, d) = R_j(E, d) \quad \forall i, j \in N$ , entonces  $G(R) = 0$ , i.e, la igualdad es máxima. Vamos a demostrarlo.

Se tiene que,  $\forall k \in N$ ,  $X_{k+1} - X_k = \frac{1}{n}$  y  $Y_{k+1} + Y_k = \frac{\sum_{j=1}^{k+1} R_j}{E} + \frac{\sum_{j=1}^k R_j}{E} = \frac{(k+1)r}{E} + \frac{kr}{E} = \frac{2kr+r}{nr} = \frac{2k+1}{n}$

$$\begin{aligned} G(R) &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{2k+1}{n} = 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \\ &= 1 - \frac{1}{n^2} \left( \frac{1+2(n-1)+1}{2} n \right) = 0 \end{aligned}$$

**Observación 2.27.** Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota tal que  $d_n > E$  y  $R$  una solución del problema. Si  $R_i(E, d) = 0 \quad \forall i < n$  y  $R_n(E, d) = E$ , entonces  $G(R)$  crece ilimitadamente hasta 1 según aumenta la población, es decir, la desigualdad es máxima. Vamos a demostrarlo.

Se tiene que,  $\forall k < n$ ,  $Y_k = 0$  y que  $Y_n = 1$ , por lo tanto,

$$G(R) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k) = 1 - \frac{1}{n}$$

Así que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (G(R)) = 1$$

**Proposición 2.28.** Sean  $R$  y  $R'$  dos soluciones de un problema de bancarrota  $(E, d) \in B^N$ , se tiene que, si  $R$  Lorenz-domina a  $R'$ , entonces  $G(R) \leq G(R')$ .

*Demostración.* Como  $R \geq_L R'$ , entonces  $\sum_{j=1}^k R_j \geq \sum_{j=1}^k R'_j \quad \forall k < n$ . Por lo tanto, se tiene que,

$$\begin{aligned} G(R) &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{\sum_{j=1}^{k+1} R_j}{E} + \frac{\sum_{j=1}^k R_j}{E} \right) \leq \\ &\leq 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{\sum_{j=1}^{k+1} R'_j}{E} + \frac{\sum_{j=1}^k R'_j}{E} \right) = G(R') \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, se tiene que si  $R$  Lorenz-domina a  $R'$ , entonces  $R$  será más igualitaria.

Además, se tiene que, si se representa la curva de Lorenz para dos soluciones  $R$  y  $R'$ , aquella que quede, en todos los puntos por encima de la otra la dominará según Lorenz y tendrá menos desigualdad y, si la curva de Lorenz de dos curvas se cruzan, entonces podremos admitir que dichas soluciones no son Lorenz-comparables. Esto es debido a que, para  $R$ ,  $Y_k = \sum_{i=1}^k \frac{R_i}{E}$  y, para  $R'$ ,  $Y_k = \sum_{i=1}^k \frac{R'_i}{E}$  por lo que, si todos los  $Y_k$  de la curva de  $R$  están por encima de los de la curva  $R'$ , se tendrá que  $\sum_{i=1}^k \frac{R_i}{E} \geq \sum_{i=1}^k \frac{R'_i}{E} \quad \forall k = 1, \dots, n$ .

En la Figura 2.5 representamos las curvas de Lorenz para dos ejemplos de 4 jugadores, uno con  $E \leq \frac{D}{2}$  y el otro con  $E \geq \frac{D}{2}$  de algunas de las reglas de reparto introducidas previamente.

**Ejemplo 2.29.** Vamos a ver un ejemplo del cálculo de los puntos de dichas curvas y del índice de Gini. Para el problema de bancarrota  $(E, d) = (12, (1, 6, 9, 13)) \in B_1^N$  vamos a calcular los puntos de la curva de Lorenz para la solución  $CEA(E, d) = (1, 3.67, 3.67, 3.67)$ . Obviamente, al ser un problema de 4 jugadores, la curva tendrá 4 puntos. El primero será el  $(\frac{1}{|N|}, \frac{CEA_1}{E}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{12})$ , el segundo  $(\frac{2}{|N|}, \frac{CEA_1+CEA_2}{E}) = (\frac{1}{2}, \frac{4.67}{12})$ , el tercero  $(\frac{3}{|N|}, \frac{CEA_1+CEA_2+CEA_3}{E}) = (\frac{3}{4}, \frac{8.33}{12})$  y, el cuarto

$(\frac{4}{|N|}, \frac{CEA_1+CEA_2+CEA_3+CEA_4}{E}) = (1, 1)^1$ . Operando de la misma forma, podemos calcular cualquier curva de Lorenz y, por tanto, de dar el índice de Gini para cualquier solución<sup>2</sup>:

$R$	$E = 12, d = (1, 6, 9, 13)$	$E = 18, d = (1, 6, 9, 13)$
$T$	0.2604	0.3958
$RA$	0.3333	0.3472
$\mu$	0.2881	0.3775
$PRO$	0.3362	0.3362
$CEA$	0.1667	0.1944
$CEL$	0.5417	0.4444

Tabla 2.2: Cálculo del índice de Gini en dos problemas.

Podemos observar que, la curva de Lorenz de la regla  $CEA$  está por encima en todo punto del resto de reglas, por lo que las Lorenz-domina y, por tanto, será la más igualitaria, justo al contrario que la regla  $CEL$ , que es aquella que beneficia más a los jugadores con demandas más elevadas, por lo que induce más desigualdad.

Sin embargo, para los problemas de bancarrota, el hecho de que una regla sea más igualitaria que otra puede que no sea lo más interesante. Ya que, por ejemplo, si existe mucha diferencia entre las demandas de dos jugadores, no sería justo que en el reparto se llevaran lo mismo, que sería lo correspondiente a la máxima igualdad. Por lo tanto, en nuestro contexto, podemos calcular el índice de Gini para el vector de demandas al igual que hacíamos con las reglas, siendo ahora  $Y_k = \frac{\sum_{j=1}^k d_j}{D}$ . Por lo tanto, tendremos:

$$G(d) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1} - X_k) \left( \frac{\sum_{j=1}^{k+1} d_j}{D} + \frac{\sum_{j=1}^k d_j}{D} \right) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{\sum_{j=1}^{k+1} d_j}{D} + \frac{\sum_{j=1}^k d_j}{D} \right)$$

El índice de Gini de las demandas nos proporcionará un valor de la desigualdad existente entre los demandantes, i.e, la desigualdad de la población. Obviamente, como este índice es una medida relativa, podremos comparar el índice de Gini de la población con el de los repartos y, podremos decir que una regla que minimice la diferencia entre ambos índices será una buena regla.

**Proposición 2.30.** *Sea  $(E, d)$  un problema de bancarrota y sea  $PRO$  la regla proporcional, se tiene que  $G(d) = G(PRO)$ .*

*Demostración.* Se tiene que  $G(PRO) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{\sum_{j=1}^{k+1} PRO_j}{E} + \frac{\sum_{j=1}^k PRO_j}{E} \right) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{\sum_{j=1}^{k+1} \frac{d_j E}{E}}{E} + \frac{\sum_{j=1}^k \frac{d_j E}{E}}{E} \right) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{\sum_{j=1}^{k+1} d_j}{D} + \frac{\sum_{j=1}^k d_j}{D} \right) = G(d)$   $\square$

Por lo tanto, la regla proporcional mantiene la desigualdad existente en la población una vez que hace el reparto, lo cual puede ser una propiedad deseada. Además, las reglas  $RA$ ,  $\mu$  y  $T$ , por los

<sup>1</sup>Cómo los 3 últimos puntos están alineados, no se observa un salto en la gráfica, como pasa en el resto de soluciones

<sup>2</sup>Calculamos también el reparto para el core-center calculándolo como veremos más adelante.

ejemplos vistos, son las que más cerca se quedan de dicho valor. En la Figura 2.5 vemos la curva de Lorenz para las soluciones  $T$ ,  $RA$ ,  $\mu$ ,  $PRO$ ,  $CEA$  y  $CEL$  para dos problemas diferentes, el primero del subdominio  $B_1^N$  y el segundo de  $B_0^N$ .

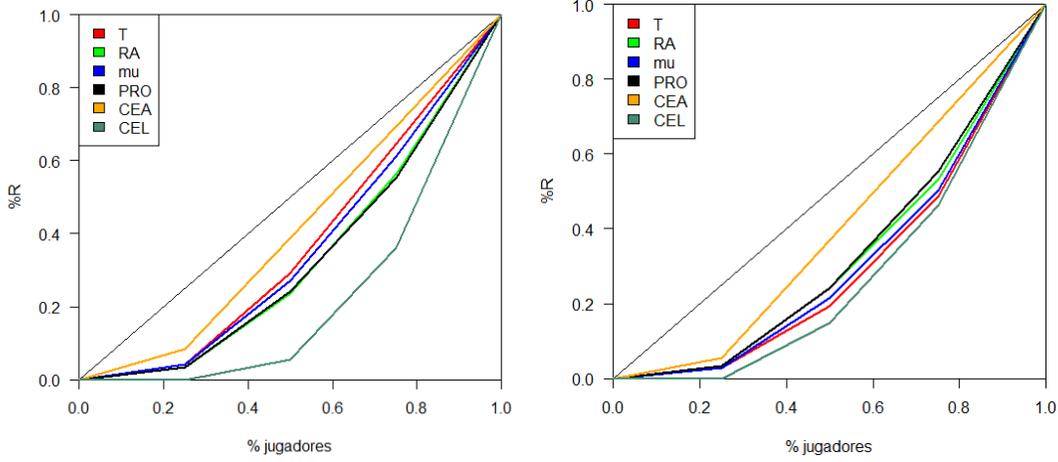


Figura 2.5: Curvas de Lorenz para las soluciones principales,  $(E, d) = (12, (1, 6, 9, 13)) \in B_1^N$  (izquierda) y  $(E, d) = (18, (1, 6, 9, 13)) \in B_0^N$  (derecha)

Existen otros índices para medir la desigualdad, como pueden ser, los índices de Atkinson, Theil o Kolm.

Aquí vamos a introducir el índice de Theil. Para ello, debemos empezar definiendo lo que es la entropía de un sistema, que es una medida del desorden que hay dentro de dicho sistema:

**Definición 2.31.** Dado un conjunto de  $N$  regiones disjuntas cuyas proporciones con respecto al total son  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , es decir,  $\sum_{j=1}^N x_j = 1$ , la entropía del conjunto de dichas regiones se define como:

$$H_N(x) = \sum_{j=1}^N x_j \log\left(\frac{1}{x_j}\right) = - \sum_{j=1}^N x_j \log(x_j)$$

En nuestro caso, podemos tomar como sistema una solución  $R$  y sus regiones serán los valores  $Y_k$  definidos anteriormente. La entropía, que es una medida de desorden, en nuestro contexto sería una medida de desigualdad.

Nótese que, dicho valor siempre es positivo ya que  $0 < x_j < 1$ , debido a que son proporciones. Además, si  $\exists j$  t.q  $x_j \approx 1$ , se tiene que  $x_k \approx 0 \forall k \neq j$  y, por tanto  $H_N(x) \approx 0$ , i.e, toda la variable está concentrada en una región ó, en nuestro contexto, un agente se lleva todo el estado. Por otro lado si  $x_j = \frac{1}{N} \forall j = 1, \dots, N$ , se tiene que  $H_N(x) = \log(N)$ , que es el valor máximo que puede alcanzar y, se consigue cuando las proporciones de todas las regiones son iguales, es decir, en nuestro contexto, el reparto es igualitario.

Una ventaja de la medida de entropía radica en que permite medir la concentración intragrupos e intergrupos, es decir, podremos efectuar análisis desagregados.

Con respecto a esta medida, el coeficiente de Theil se define como el siguiente valor:

$$T = \log(N) - H_N(x) \quad 0 \leq T \leq \log(N).$$

Nótese que, cuando la desigualdad es mínima, dicho coeficiente tomará valor 0 y, cuando es máxima, todo el reparto se le asigna a un jugador, tomará el valor  $\log(N)$ .

Para poder realizar comparaciones con medidas que se encuentren en otro sistema (como es el caso del vector de demandas), definimos el coeficiente de Theil relativo como:

$$T_r = \frac{T}{\log(N)}$$

que varía entre 0 y 1.

**Ejemplo 2.32.** Vamos a calcular el índice de Theil para los dos problemas considerados en el ejemplo 2.32 y, vemos, en la Tabla 2.3, que la relación entre las soluciones es la misma. En ambos problemas, la regla *CEA* es la más igualitaria, y la regla *CEL* la más desigual. Por otro lado, la desigualdad se mantiene constante con *PRO*, mientras que las reglas intermedias, *T*, *RA* y  $\mu$  intercambian su posición al cambiar de dominio.

<i>R</i>	$E = 12, d = (1, 6, 9, 13)$	$E = 18, d = (1, 6, 9, 13)$
<i>T</i>	0.1720	0.2866
<i>RA</i>	0.2197	0.2335
$\mu$	0.2881	0.2668
<i>PRO</i>	0.2214	0.2214
<i>CEA</i>	0.0923	0.1341
<i>CEL</i>	0.5777	0.4056

Tabla 2.3: Cálculo del índice de Theil para dos problemas diferentes

## Capítulo 3

# Núcleo y core-center del problema de bancarrota

Como ya hemos visto en el Capítulo 1 hay un juego cooperativo asociado al problema de bancarrota y por lo tanto, el estudio de su núcleo o conjunto de asignaciones eficientes y estables es un tema de interés. En González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2007) se propuso como solución de un juego equilibrado el core-center, que se corresponde con el centro de gravedad del núcleo del juego. Esta solución considera que todas las asignaciones eficientes y estables deben tener la misma importancia y el reparto que propone consiste en la media del núcleo como conjunto. En este capítulo revisaremos en detalle los principales resultados que se conocen del núcleo del juego de bancarrota y que aparecen recogidos en Mirás Calvo et al. (2019), indicando su estructura y sus propiedades más interesantes. Proseguiremos estudiando el core-center del juego de bancarrota, revisando diferentes propiedades de interés que verifica esta solución. Añadiremos el estudio de algunas propiedades más a las ya estudiadas en Mirás Calvo et al. (2019). Por último, veremos dos algoritmos para su cálculo que han sido implementados en R y en matlab, cuyo código R aparece en el Apéndice A. El primero de ellos se basa en una teselación finita del conjunto de imputaciones en el que una de las piezas es precisamente el núcleo del que desconocemos su centro. El resto de las piezas serán a su vez núcleos de juegos con una estructura muy simple de las que conocemos su core-center. Utilizando la propiedad básica del centro de masas tendremos una fórmula para calcular el core-center del núcleo del juego inicial. El segundo método, que hemos desarrollado íntegramente en este trabajo, consiste en una teselación interior en la que ahora dividimos el núcleo original en una pieza interior que resulta ser a su vez, el núcleo de un juego, del que conocemos su core-center. La parte que no está cubierta todavía, vuelve a descomponerse nuevamente siguiendo un proceso similar, hasta que se termina en un número finito de pasos. Un ejemplo mostrará que este segundo algoritmo puede ser más rápido que el primero al involucrar menos piezas en la partición. Queda todavía estudiar mejoras para este segundo algoritmo y también la posibilidad de combinar ambos para obtener el core-center de un problema de bancarrota de una forma óptima.

### 3.1. Núcleo del juego de bancarrota

Empezaremos con el estudio de algunas propiedades importantes del núcleo de un juego de bancarrota y de su volumen (Mirás Calvo et al. (2019)). Vamos a describir el conjunto de imputaciones de un juego de bancarrota.

**Proposición 3.1.** *Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota y  $v \in G^N$  su juego asociado. Entonces,  $\Delta = E - \sum_{k \in N} v(k) \geq 0$  y  $d_i \geq v(i) \forall i \in N$ . El conjunto de imputaciones  $I(v)$  es el  $(n - 1)$ -simplex dado por los puntos  $a^i = (a_1^i, \dots, a_n^i) \in \mathbb{R}^N$  siendo:*

$$a_j^i = \begin{cases} v(j) & \text{si } j \neq i \\ E - \sum_{k \neq i} v(k) & \text{si } j = i \end{cases}$$

Además,  $Vol(I(v)) = \frac{\sqrt{n}\Delta^{n-1}}{(n-1)!}$  y  $\mu_i(I(v)) = v(i) + \frac{\Delta}{n} \forall i \in N$ .

*Demostración.* Tenemos que  $v(N) = E$  y que el juego  $v$  asociado es convexo, por lo que  $E = v(N) \geq \sum_{i \in N} v(i) = \sum_{i \in N} \max\{0, E - \sum_{k \neq i} d_k\}$ . Tenemos dos opciones:

1.  $E \leq \sum_{k \neq i} d_k$ , en cuyo caso  $v(i) = 0 \leq d_i$
2.  $v(i) = E - \sum_{k \neq i} d_k$  así que  $v(i) - d_i = E - \sum_{k \in N} d_k \leq 0$

Sabemos que los puntos extremos del conjunto de imputaciones se obtienen a partir de los valores individuales de los jugadores  $v(j) \forall j \in N$  completando la coordenada restante por eficiencia. Con lo que ya tenemos la descripción del conjunto de imputaciones de cualquier juego de bancarrota.

El centro de gravedad de un simplex es la media aritmética de sus puntos extremos. Por lo tanto:

$$\mu(I(v)) = \sum_{i=1}^n \frac{a^i}{n} \text{ con lo que } \mu_i(I(v)) = v(i) + \frac{\Delta}{n} \forall i \in N$$

Para calcular el volumen utilizamos la fórmula del determinante de Cayley- Menger (Gritzmann y Klee (1994)) dada de la siguiente forma:

$$Vol(I(v)) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} \cdot \Delta^{n-1}$$

□

**Observación 3.2.** Sea  $v \in G^N$  el juego de bancarrota asociado al problema de bancarrota  $(E, d) \in B^N$ . Como  $C(v) = C(E, d)$ , por comodidad, lo denotaremos indistintamente a lo largo del trabajo.

**Observación 3.3.** El núcleo de un juego de bancarrota asociado a un problema de bancarrota  $(E, d)$  admite la siguiente representación:

$$C(v) = \{x \in H : v(i) \leq x_i \leq \min\{E, d_i\}, \forall i \in N\}$$

**Lema 3.4.**  $C(v) = I(v)$  si, y solo si  $E \leq d_1$  ó  $E = 0$ . En este caso,  $Vol(C(v)) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} E^{n-1}$ . (Si suponemos  $v(i) = 0, \forall i \in N$ )

*Demostración.*  $C(v) = I(v)$  si, y solo si  $\min\{E, d_i\} = E, \forall i \in N$ , i.e,  $d_i \geq E \forall i \in N$  ó  $E = 0$ . En este caso,  $\Delta = E$  y usando la proposición 3.1, tenemos la fórmula del volumen. □

**Lema 3.5.** Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota y  $v \in G^N$  su juego asociado, entonces  $Vol(C(v)) = 0$  si y solo si se cumple una de las siguientes condiciones:

1.  $E = 0$
2.  $E = \sum_{i \in N} d_i$
3.  $\exists i \in N$  tal que  $d_i = 0$

*Demostración.* Sabemos que,  $Vol(C(v)) = 0$  si, y solo si, colapsa algún hiperplano del núcleo. Usando la representación del core del juego de bancarrota de la observación anterior, se tiene que  $Vol(C(v)) = 0$  si, y solo si  $v(i) = \min\{E, d_i\}$ , siendo  $v(i) = \max\{0, E - \sum_{k \neq i} d_k\}$ . Por lo tanto, tenemos 4 casos:

1.  $\min\{E, d_i\} = E$  y  $\max\{0, E - \sum_{k \neq i} d_k\} = 0$ , entonces  $E = 0$ .
2.  $\min\{E, d_i\} = d_i$  y  $\max\{0, E - \sum_{k \neq i} d_k\} = 0$ , entonces  $d_i = 0$ .
3.  $\min\{E, d_i\} = E$  y  $\max\{0, E - \sum_{k \neq i} d_k\} = E - \sum_{k \neq i} d_k$ , entonces  $\sum_{k \neq i} d_k = 0$ , por lo que todas las demandas menos la del jugador  $i$  son 0.
4.  $\min\{E, d_i\} = d_i$  y  $\max\{0, E - \sum_{k \neq i} d_k\} = E - \sum_{k \neq i} d_k$ , entonces  $E = \sum_{k \in N} d_k$ .

□

En el siguiente resultado trabajaremos con el núcleo del problema dual de nuestro problema de bancarrota, que se define de la siguiente forma: sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota, su dual es el problema  $(D - E, d) \in B^N$  y,  $v_D \in G^N$  su juego de bancarrota asociado. En la Figura 3.1 aparece representado un núcleo de un juego de bancarrota y su dual.

**Proposición 3.6.** *Sea  $(E, d) \in B^N$ , entonces  $C(E, d) = d - C(D - E, d)$  y  $\text{Vol}(C(E, d)) = \text{Vol}(C(D - E, d))$ .*

*Demostración.* Sea  $i \in N$

$$v_D(i) = \max\{0, \sum_{i \in N} d_i - E - \sum_{j \in N \setminus i} d_j\} = \max\{0, d_i - E\}$$

$$v(i) = \max\{0, E - \sum_{j \in N \setminus i} d_j\} = d_i - \min\{\sum_{i \in N} d_i - E, d_i\}$$

Y, por lo tanto  $d_i - v_D(i) = d_i - \max\{0, d_i - E\} = \min\{E, d_i\}$ .

Vamos a ver que las dos inclusiones son ciertas para satisfacer la igualdad:

- $C(E, d) \subset d - C(D - E, d)$ . Sea  $x \in C(E, d)$ , tal que  $y = d - x \in C(D - E, d)$ .  
Tenemos que  $y(N) = \sum_{i \in N} (d_i - x_i) = D - E$  por eficiencia y  $\forall i \in N, v_D(i) \leq y_i \leq \min\{D - E, d_i\}$  ya que  $v(i) \leq x_i \leq \min\{E, d_i\}$ . Por lo tanto  $y \in C(v_D)$ .
- $d - C(D - E, d) \subset C(E, d)$ . Sea  $y \in C(D - E, d)$ , tal que  $x = d - y \in C(E, d)$ .  
Tenemos que  $x(N) = E$  y  $\forall i \in N, v(i) \leq x_i \leq \min\{E, d_i\}$  ya que  $v_D(i) \leq y_i \leq \min\{D - E, d_i\}$ . Por lo tanto  $x \in C(v)$ .

Por otra parte, la anterior relación implica que  $\text{Vol}(C(E, d)) = \text{Vol}(C(D - E, d))$ . □

Con este resultado, podemos observar que tenemos dos formas de afrontar un problema de bancarrota: la forma clásica, en la que se reparte el estado existente, o, su forma dual, en la que repartimos la cantidad que le falta al estado para satisfacer las demandas de todos los agentes. Hecho esto, a cada jugador se le asigna su demanda y se le quita el reparto anterior. Este resultado nos asegura que las dos opciones son equivalentes.

**Observación 3.7.** *Sea  $N = \{1, 2\}$  y  $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^N$  tal que  $0 \leq d_1 \leq d_2$ . Si  $E \in [0, d_1 + d_2]$  entonces  $C(E, d)$  es el segmento que une los puntos  $(v(1), E - v(1))$  y  $(E - v(2), v(2))$ . Además, su volumen 1-dimensional viene dado por la fórmula:*

$$\text{Vol}(C(E, d)) = \sqrt{2} \left( E - v(1) - v(2) \right) = \begin{cases} \sqrt{2}E & \text{si } 0 \leq E \leq d_1 \\ \sqrt{2}d_1 & \text{si } d_1 < E < d_2 \\ \sqrt{2}(d_1 + d_2 - E) & \text{si } d_2 \leq E \leq d_1 + d_2 \end{cases}$$

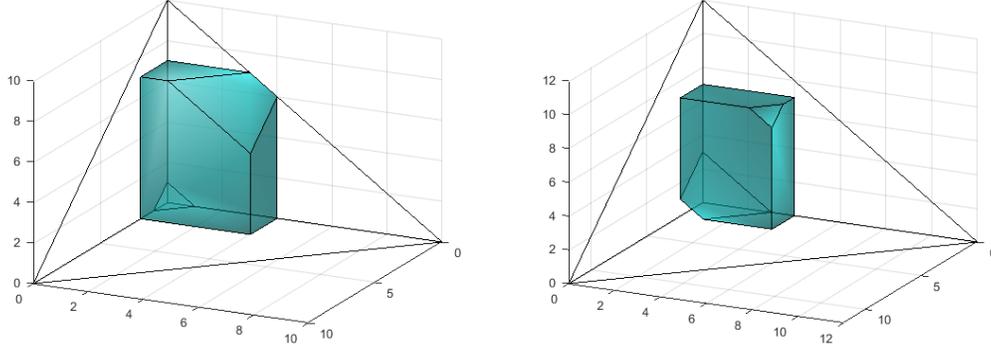


Figura 3.1: Núcleos del juego  $(E, d)$  con  $E = 10$  y  $d = (2, 4, 7, 9)$  y de su dual, con estado  $D - E = 12$ .

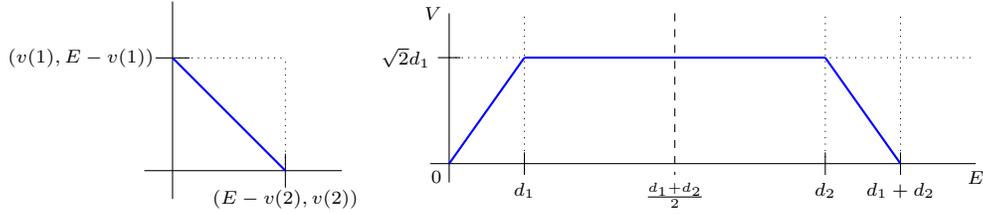


Figura 3.2:  $C(E, d)$  (izquierda) y la función lineal de su volumen (derecha) para 2 jugadores.

Representamos  $C(E, d)$  y la función lineal de su volumen con  $N = \{1, 2\}$  en la Figura 3.2.

Si  $\text{Vol}(C(E, d)) > 0$  entonces el núcleo es una variedad  $(n - 1)$ -dimensional contenida en el hiperplano eficiente  $H = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^n x_i = E\}$ . Por lo tanto,  $H$  es el espacio tangente a cada punto de la variedad y el vector  $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$  es el vector normal a la variedad en cada punto y su longitud es  $\sqrt{n}$ . La transformación  $g : \mathbb{R}^{N \setminus \{n\}} \rightarrow \mathbb{R}^N$ , dada por  $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, E - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)$  define un sistema de coordenadas para  $C(E, d)$  tal que  $\widehat{C}(E, d) = g^{-1}(C(E, d)) \subset \mathbb{R}^{N \setminus \{n\}}$  es la proyección del núcleo en el espacio  $\mathbb{R}^{N \setminus \{n\}}$ .

**Lema 3.8.** Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota y  $v \in G^N$  su juego asociado, entonces,

$$\widehat{C}(E, d) = \{x \in \mathbb{R}^{N \setminus \{n\}} : v(i) \leq x_i \leq \min\{E, d_i\} \quad \forall i \leq n-1, E - \min\{E, d_n\} \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq E - v(n)\} \quad (3.1)$$

Además,  $\text{Vol}(C(E, d)) = \sqrt{n} \cdot \text{Vol}(\widehat{C}(E, d))$  y  $\widehat{C}(E, d) = \prod_{i=1}^{n-1} [0, d_i]$  si, y solo si,  $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \leq E \leq d_n$

*Demostración.* Tenemos que, si proyectamos en el jugador  $n$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{C}(E, d) &= g^{-1}(C(E, d)) = \{g^{-1}(x) \in g^{-1}(H) : v(i) \leq g^{-1}(x_i) \leq \min\{E, d_i\} \quad \forall i \in N \setminus \{n\}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{N \setminus \{n\}} : v(i) \leq x_i \leq \min\{E, d_i\} \quad \forall i \leq n-1, E - \min\{E, d_n\} \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq E - v(n)\} \end{aligned}$$

siendo  $g^{-1}(H) = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{N \setminus \{n\}} : \max\{0, E - d_n\} \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq E - v(n)\}$ .

Ahora, para calcular el volumen del núcleo  $(n-1)$ -dimensional, denotamos por  $m$  la medida de Lebesgue  $(n-1)$ -dimensional y, por tanto, tenemos que:

$$\text{Vol}(C(E, d)) = \int_{C(v)} 1 \cdot dm = \int_{g^{-1}(C(v))} \sqrt{n} dm = \sqrt{n} \cdot \text{Vol}(\widehat{C}(E, d))$$

Por último, tenemos que, si  $E \in [\sum_{i=1}^{n-1} d_i, d_n]$ , se tiene que  $E \geq d_i, \forall i \leq n-1$ , por lo que  $\min\{E, d_i\} = d_i \quad \forall i \leq n-1$ ;  $E = \min\{E, d_n\}$ ,  $v(i) = \max\{0, E - \sum_{j \in N \setminus i} d_j\} = 0 \quad \forall i \leq n-1$  y  $E - v(n) = \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ . Por lo tanto, usando (3.1), tenemos que,

$$\widehat{C}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{N \setminus \{n\}} : 0 \leq x_i \leq d_i, 1 \leq i \leq n-1, 0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i \right\} = \prod_{i=1}^{n-1} [0, d_i]$$

Por otro lado, si  $\widehat{C}(v)$  es un rectángulo entonces, trivialmente,  $E \in [\sum_{i=1}^{n-1} d_i, d_n]$   $\square$

La proyección que hemos definido se puede realizar sobre cualquier jugador  $i \in N^1$ , y lo denotaremos como  $C_i(E, d)$ :

$$C_i(E, d) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{N \setminus \{i\}} : E - \min\{E, d_i\} \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} y_j \leq E - v(i), v(j) \leq y_j \leq \min\{E, d_j\} \quad \forall j \in N \setminus \{i\} \right\}$$

Además, tenemos que el núcleo de un juego de bancarrota en el que el jugador  $i$  abandona el juego (siempre que  $\sum_{j \neq i} d_j \geq E$ ) viene dado por el conjunto,

$$C(E, d_{-i}) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{N \setminus \{i\}} : \sum_{j \in N \setminus i} y_j = E \right\} \cap C_i(E, d)$$

y, si a ese jugador  $i$  se le asigna su demanda y se marcha del juego, el núcleo del nuevo juego viene dado por:

$$C(E - d_i, d_{-i}) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{N \setminus \{i\}} : \sum_{j \in N \setminus i} y_j = E - d_i \right\} \cap C_i(E, d)$$

Representamos estos núcleos para un juego de 3 jugadores en la Figura 3.3. También observamos que las restantes caras son los núcleos proyectados cuando se va un jugador distinto del proyectado con su demanda o, sin llevarse nada.

**Teorema 3.9.** *Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota y  $v \in G^N$  su juego asociado,  $i \in N$ ,  $e_i = [v(i), \min\{E, d_i\}]$ . Entonces,*

$$C(E, d) = \cup_{x_i \in e_i} \{x_i\} \times C(E - x_i, d_i)$$

*Demostración.* Dado  $x_i \in [v(i), \min\{E, d_i\}]$ , denotamos por  $v^{x_i} \in G^N$  el juego de bancarrota asociado del problema reducido  $(E - x_i, d_{-i}) \in B^{N \setminus \{i\}}$ .

Como  $x_i \leq d_i$ , tenemos que:

$$v^{x_i}(j) = \max\{0, E - x_i - \sum_{k \in N \setminus \{i, j\}} d_k\} \geq v(j) \quad \forall j \in N \setminus \{i\}$$

Fácilmente comprobamos que si  $x \in C(E, d)$  entonces  $x_{N \setminus \{i\}} \in C(E, d_{-i})$ . Claramente  $\sum_{k \neq i} x_k = E - x_i$ , y  $\forall j \in N \setminus \{i\}$ ,  $x_j \leq \min\{E, d_j\} \leq d_j$  y  $x_j < \sum_{k \neq i} x_k = E - x_i$  así que  $x_j \leq \min\{E - x_i, d_j\}$ .

Por otra parte, se comprueba fácilmente que si  $y \in C(E - x_i, d_{-i})$  entonces  $x = (x_i, y) \in C(E, d)$ :

$$0 \leq v(j) \leq x_j \text{ y } x_j = E - x_i - \sum_{k \in N \setminus \{i, j\}} x_k \geq E - x_i - \sum_{k \in N \setminus \{i, j\}} d_k \text{ con lo que } x_j \geq v^{x_i}(j). \quad \square$$

<sup>1</sup>Geometricamente, implica bajar una dimensión, completando la coordenada en la que se realiza la proyección por eficiencia

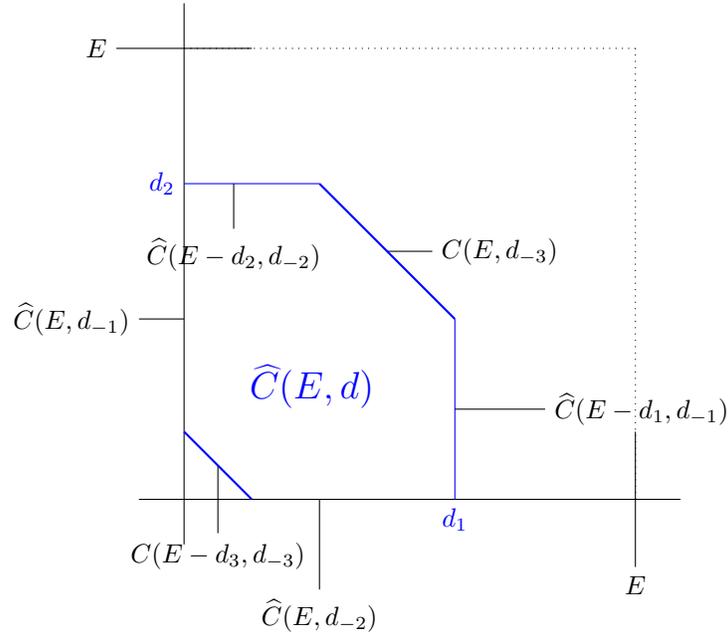


Figura 3.3: Proyección del núcleo de un juego de jugadores sobre el jugador 3 y los núcleos de sus caras.

La interpretación de este teorema es la siguiente: si algún jugador, digamos  $i$ , se lleva en el reparto algo entre  $[v(i), \min\{E, d_i\}]$ , se pueden reasignar las oportunidades para el resto de jugadores, definiendo el problema de bancarrota  $(E - x_i, d_{N \setminus \{i\}}) \in B^{N \setminus \{i\}}$ . En este caso, el núcleo del juego inicial está formado por las secciones de los infinitos juegos diferentes de este tipo representados en la Figura 3.4.

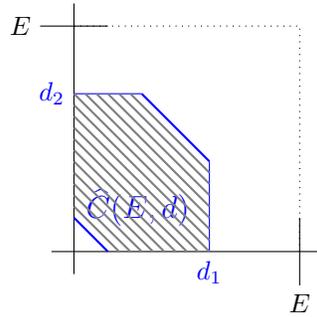


Figura 3.4: Descomposición del Teorema 3.9 de un núcleo de 3 jugadores

Para poder crearnos una intuición de la geometría de los núcleos de los juegos de bancarrota, trabajaremos con los juegos de las caras. Cada cara del núcleo de un juego de bancarrota es, a su vez, el núcleo de un juego de bancarrota, con rigor, veremos que su núcleo es el trasladado de un núcleo de un juego de bancarrota. A continuación daremos su definición en general para un juego convexo.

**Definición 3.10.** Sea  $(N, v)$  un juego convexo cualquiera y sea  $T \subseteq N$  una coalición de jugadores, el juego de la  $T$ -cara se define, para cada coalición  $S \subseteq N$  por  $v_{F_T}(S) = v((S \cap T) \cup (N \setminus T)) - v(N \setminus T) + v(S \cap (N \setminus T))$ .

Estévez-Fernández et al. (2012) demuestran que, el juego de la  $T$ -cara  $v_{F_T} \in G^N$  es estratégicamente equivalente al juego de bancarrota  $\tilde{v}_T \in G^N$  asociado con  $(\tilde{E}_T, \tilde{d}_T) \in B^N$  tal que,  $v_{F_T} = \tilde{a}_T + \tilde{v}_T$ . En la siguiente tabla vemos los tipos de juegos que pueden aparecer, dependiendo si el estado es suficiente o no para satisfacer a los jugadores de la coalición  $T$ .

	$\sum_{i \in T} d_i \geq E$	$\sum_{i \in T} d_i < E$
$\tilde{E}_T$	$E$	$E - \sum_{i \in T} d_i - \sum_{l \in N \setminus T} v(l)$
$\tilde{d}_T$	$(\tilde{d}_T)_i = \begin{cases} d_i & \text{if } i \in T \\ 0 & \text{if } i \notin T \end{cases}$	$(\tilde{d}_T)_i = \begin{cases} 0 & i \in T \\ d_i - v(i) & i \notin T \end{cases}$
$\tilde{a}_T$	$\tilde{a}_T(i) = 0, i \in N$	$\tilde{a}_T(i) = \begin{cases} d_i & i \in T \\ v(i) & i \notin T \end{cases}$

Ahora consideraremos la función  $P : [0, D] \rightarrow \mathbb{R}$ , que asigna a cada valor del estado ( $E \in [0, D]$ ) el volumen, escalado por el factor  $\sqrt{n}$ , del núcleo del juego de bancarrota asociado, es decir,

$$P(E) = \text{Vol}(\hat{C}(E, d)) = \frac{\text{Vol}(C(E, d))}{\sqrt{n}}$$

Aplicando el Lema 3.5, se tiene que  $P(0) = P(D) = 0$  y que  $P(E) > 0$  en cualquier otro caso. Además, por la Proposición 3.6, tenemos que  $P$  es una función simétrica con respecto a la semisuma de las demandas (Figura 3.5).

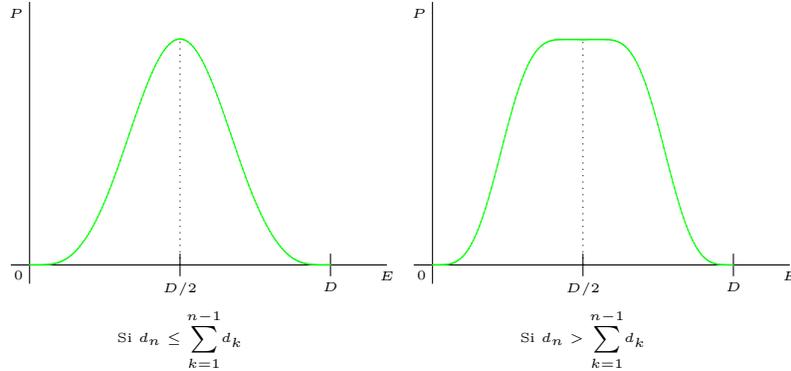


Figura 3.5: Volumen del núcleo de un juego de bancarrota como función de E

Para calcular el volumen de nuestro núcleo, utilizaremos un resultado clásico sobre el volumen de politopos.

**Teorema 3.11** (Lasserre (1983)). *Sea  $K(b) = \{x \in \mathbb{R}^N : Ax \leq b\}$  un poliedro convexo, donde  $A$  es una matriz  $m \times n$  y  $b$  es un vector  $m$ -dimensional. Denotamos por  $V(b) = \text{Vol}_n(K(b))$  su volumen como función de  $b$  y, sea  $K_i(b) = \{x \in K(b) : a_i \cdot x = b_i\}$  la cara  $i$ -ésima de  $K(b)$ . Se tiene que, si  $V(b) > 0$  y  $V(b, i) > 0 \forall i$ , entonces  $V$  es una función diferenciable en  $b$  y  $\frac{\partial V}{\partial b_i}(b) = \frac{1}{\|a_i\|} V(b, i)$ , siendo  $a_i$  la fila  $i$ -ésima de la matriz  $A$ . Además,  $V(b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{\|a_i\|} V(b, i)^2$ .*

<sup>2</sup>Si  $V(b) > 0$  y  $V(b, i) = 0$  para algún  $i$  significa que la restricción  $a_i x = b_i$  es redundante y la cara es de dimensión menor que  $n - 2$ , es decir, es degenerada.

**Lema 3.12.** Sea  $\beta = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ . La función  $P$  es continuamente diferenciable en  $[0, D]$  si  $n \geq 3$ . Además:

1. Si  $E \geq D/2$  entonces  $D - E \in [0, D/2]$  y  $\frac{\partial P}{\partial E}(E, d) = -\frac{\partial P}{\partial E}(D - E, d)$
2. Si  $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \leq d_n$ , entonces:

$$\frac{\partial P}{\partial E}(E) = \begin{cases} \beta \cdot \text{Vol}(C(E, d_{-n})) & \text{si } 0 \leq E \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{n-1} d_i \leq E \leq d_n \end{cases}$$

3. Si  $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \geq d_n$ , entonces:

$$\frac{\partial P}{\partial E}(E) = \begin{cases} \beta \cdot \text{Vol}(C(E, d_{-n})) & \text{si } 0 \leq E \leq d_n \\ \beta \cdot (\text{Vol}(C(E, d_{-n})) - \text{Vol}(C(E - d_n, d_{-n}))) & \text{si } d_n \leq E \leq D/2 \end{cases}$$

*Demostración.* El núcleo de un juego de bancarrota se puede reescribir de forma matricial de la siguiente manera,

$C(E, d) = \{x \in \mathbb{R}^N : A \cdot x \leq b\}$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} -I_{n-1} \\ I_{n-1} \\ 1_{N \setminus n} \\ -1_{N \setminus n} \end{pmatrix}$$

y

$$b^T = (0, \dots, 0, \min\{E, d_1\}, \dots, \min\{E, d_{n-1}\}, E, \max\{0, E - d_n\})$$

Por el Teorema 3.11 sabemos que la función  $P(E)$  es continuamente diferenciable y que  $\frac{\partial P}{\partial b_i}(b) = \frac{1}{\|a_i\|} P_i(b)$ .

Usando este resultado vamos a ir viendo caso a caso como nos quedan las derivadas.

Denotamos por  $L(E) = \{x \in \mathbb{R}^{N \setminus n} : x \geq 0, \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq E\}$  a la proyección del conjunto de imputaciones.

- Si  $E \in [\sum_{i=1}^{n-1} d_i, d_n]$ , entonces, por el Lema 3.8,  $\widehat{C}(E, d) = \prod_{i=1}^{n-1} d_i$ , por lo que no depende de  $E$  y  $\frac{\partial P}{\partial E}(E) = 0$ .
- Si  $0 < E \leq d_1$ , entonces  $\widehat{C}(v) = L(E)$ .
- Si  $j \leq n - 2$  y  $d_j < E < d_{j+1}$  entonces  $\widehat{C}(v) = L(E) \cap \{x \in \mathbb{R}^{N \setminus n} : x_i \leq d_i, i \leq j\}$ .
- Si  $d_{n-1} < E \leq d_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i$  ó  $d_{n-1} < E \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i \leq d_n$ , se tiene que  $\widehat{C}(v) = L(E) \cap \{x \in \mathbb{R}^{N \setminus n} : x_i \leq d_i \ i \leq n - 1\}$ .
- Si  $d_n < E \leq \frac{D}{2} \Rightarrow \widehat{C}(v) = L(E) \cap \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : x_i \leq d_i \ \forall i \leq n - 1, E - d_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i\}$ .

Ahora, como la cara de  $\widehat{C}(v)$  para la cual  $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = E$  es la proyección de la  $T$ -cara con  $C(E, d)$  y  $T = N \setminus \{n\}$  que, es el núcleo del juego de la  $T$ -cara  $v_{F_T}$  estratégicamente equivalente al juego de bancarrota asociado al problema  $(E, (d_1, \dots, d_{n-1}, 0)) \in B^N$ . Aplicando el Teorema 3.11 a  $P(E)$  se tiene que  $\frac{\partial P}{\partial E}(E) = \beta \cdot \text{Vol}(C(E, d_{-n}))$ .

Por otro lado, si  $d_n < E \leq \frac{1}{2}D$  entonces  $\widehat{C}(E, d) = L(E) \cap \{x \in \mathbb{R}^{N \setminus n} : x_i \leq d_i \ i \leq n-1, E - d_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i\}$ . Ahora, como la cara de  $\widehat{C}(E, d)$  para la cual  $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = E - d_n$  es la proyección de la  $T$ -cara con  $C(E, d)$  y  $T = \{n\}$  que, es el núcleo del juego de la  $T$ -cara  $v_{F_T}$  que es estratégicamente equivalente al juego de bancarrota asociado al problema  $(E - d_n, (d_1, \dots, d_{n-1}, 0)) \in B^N$ . Usando el Teorema 3.11 a  $P(E)$  se tiene que  $\frac{\partial P}{\partial E}(E) = \beta \cdot \text{Vol}(C(E, d_{-n})) - \text{Vol}(C(E - d_n, d_{-n}))$ .

Por lo tanto,  $P$  es diferenciable en  $[0, \frac{D}{2}]$  excepto, quizás en los puntos  $0, d_1, \dots, d_n$  y  $\sum_{i=1}^{n-1} d_i$  y las derivadas están dadas en esta demostración. En los puntos citados anteriormente también es diferenciable debido a que las derivadas laterales existen y son iguales.  $\square$

**Proposición 3.13.** *Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota tal que  $|N| \geq 2$ . Si  $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \leq d_n$ , entonces  $P$  es estrictamente creciente en  $[0, \sum_{i=1}^{n-1} d_i]$ , es constante en  $[\sum_{i=1}^{n-1} d_i, d_n]$  y es estrictamente decreciente en  $[d_n, D]$ . Si  $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \geq d_n$  es estrictamente creciente en  $[0, D/2]$  y estrictamente decreciente en  $[D/2, D]$ , alcanzando el máximo en  $E = D/2$ .*

*Demostración.* Lo demostraremos por inducción en  $n$ :

Para  $n = 2$ , el resultado es inmediato (Figura 3.2).

Ahora, asumimos que se cumple la hipótesis para  $n - 1$  jugadores y veremos que pasa para  $n$  jugadores.

Por el Lema 3.12 se tiene que, si  $P(E)$  es creciente en  $E \leq \frac{D}{2}$ , entonces  $P(E)$  es decreciente si  $E \geq \frac{D}{2}$ . Por lo tanto, vamos a demostrar que es creciente cuando  $E$  es menor que la semisuma de las demandas.

Por la hipótesis de inducción, se tiene que la función  $Q(E) = \text{Vol}_{n-2}(C(E, d_{-n}))$  es simétrica con respecto a  $E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ , monótona creciente en  $[0, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} d_i]$  y monótona decreciente en  $[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} d_i, \sum_{i=1}^{n-1} d_i]$

Si  $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \leq d_n$ , se tiene que, por las derivadas del Lema 3.12,  $P(E)$  es creciente si  $E \in [0, \sum_{i=1}^{n-1} d_i]$  y constante si  $E \in [\sum_{i=1}^{n-1} d_i, D/2]$ , teniendo en cuenta que, en este caso  $D/2 < d_n$ . Por el punto 1 de dicho Lema, se tiene que  $P(E)$  es constante si  $E \in [D/2, d_n]$  y es decreciente si  $E \in [d_n, D]$ .

Si  $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \leq d_n$  se tiene que, por las derivadas del Lema 3.12,  $P(E)$  es creciente si  $E \in [0, d_n]$ . Ahora, para probar el resultado para es suficiente con demostrar que  $\text{Vol}_{n-2}(C(E, d_{-n})) \geq \text{Vol}_{n-2}(C(E - d_n, d_{-n}))$  cuando  $d_n \leq E \leq \frac{1}{2}D$ , es decir,  $Q(E) \geq Q(E - d_n)$ .

Si  $E \in [d_n, \frac{1}{2}D]$  entonces  $0 \leq E - d_n \leq e^* = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n d_i - d_n)$ . Como  $e^* \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ , por la simetría de  $Q$ , tenemos que  $Q(E - d_n) \leq Q(E)$  cuando  $E \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i - e^* = \frac{1}{2}D$   $\square$

El siguiente objetivo será dar una fórmula explícita para el cálculo del volumen del núcleo de un juego de bancarrota  $(E, d) \in B^N$ . Definiremos antes la familia de coaliciones  $\mathcal{F} = \{S \subset N : \sum_{i \in S} d_i < E\}$ , que es el conjunto de las coaliciones de  $N$  a las que es factible satisfacer con su demanda si atendiéramos de forma prioritaria a los agentes de  $S$  con respecto al resto. Asumimos además, sin pérdida de generalidad que  $v(i) = 0, \forall i = 1, \dots, n$ .

**Definición 3.14.** Definimos un espacio probabilístico, que será la terna  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , siendo  $\Omega = I(E, d)$ ,  $\mathcal{A}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por las uniones, intersecciones y complementarios de los conjuntos abiertos de en  $\mathbb{R}^n \cap \Omega$  y, la probabilidad  $P$  de un suceso  $A \in \mathcal{A}$  como la razón entre la medida de  $A$  y la medida de  $I(E, d)$ , es decir,

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(I(E, d))} = \frac{\text{Vol}(A)}{\text{Vol}(I(E, d))}$$

Consideraremos ahora los siguientes sucesos de interés  $A_i \in \mathcal{A}$ :

- $A_0 = C(E, d)$
- Para cada  $i \in N$ ,  $\{i\} \in \mathcal{F}$  (i.e  $d_i < E$ ), definimos  $A_i = (0, \dots, d_i, \dots, 0) + I(E - d_i, (E - d_i, \dots, E - d_i))$ , que se corresponde con el conjunto de asignaciones en las que el jugador  $i$  se lleva, como mínimo su demanda y se reparten entre todos los jugadores lo que queda, demandando todos el estado restante. Nótese que si  $\{i\} \notin \mathcal{F}$ , entonces el suceso  $A_i = (0, \dots, E, \dots, 0)$  y, por tanto, de medida nula.

Ahora, calcularemos la probabilidad de cada suceso y de sus intersecciones:

- $P(A_0) = \frac{m(A_0)}{m(\Omega)} = \frac{Vol(C(E, d))}{Vol(I(E, d))} = \frac{Vol(C(E, d))}{\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} E^{n-1}}$ , es decir, la probabilidad geométrica de que una asignación escogida al azar del conjunto de imputaciones esté en el núcleo es el cociente de ambos volúmenes.
- Para cada  $i \in N, \{i\} \in \mathcal{F}$   $P(A_i) = \frac{m(A_i)}{m(\Omega)} = \frac{(E - d_i)^{n-1}}{E^{n-1}} = (1 - \frac{d_i}{E})^{n-1}$ . Observamos que, cuanto mayor es la demanda de un jugador, existe una probabilidad menor de elegir una asignación al azar en el conjunto de imputaciones en el que dicho jugador se lleva, como mínimo, su demanda, es decir, si  $d_i < d_j \Rightarrow P(A_i) > P(A_j)$
- Sea  $S \in \mathcal{F}$ . Supongamos  $S = \{i_1, \dots, i_s\}$  sin pérdida de generalidad. Es inmediato observar que si  $S \in \mathcal{F} \Rightarrow T \in \mathcal{F}, \forall T \subseteq S$ . Por lo tanto,  $\cap_{i \in S} A_i \in \mathcal{F}$ . Aplicando la regla del producto<sup>3</sup> podemos calcular  $P(\cap_{i \in S} A_i) = \frac{(E - d_{i_1})^{n-1}}{E^{n-1}} \frac{(E - d_{i_1} - d_{i_2})^{n-1}}{(E - d_{i_1})^{n-1}} \cdot \dots \cdot \frac{(E - \sum_{j=1}^s d_{i_j})^{n-1}}{(E - \sum_{j=1}^{s-1} d_{i_j})^{n-1}} = \frac{(E - \sum_{j=1}^s d_{i_j})^{n-1}}{E^{n-1}} = (1 - \sum_{j=1}^s \frac{d_{i_j}}{E})^{n-1}$ . Observamos que el suceso  $\cap_{i \in S} A_i$  se corresponde con el conjunto de asignaciones en el que todos los jugadores de la coalición  $S$  reciben al menos su demanda y, entre todos se reparte lo que sobra. Nótese además, que, si  $S \subset S' \Rightarrow \cap_{i \in S'} A_i \subset \cap_{i \in S} A_i$  y, por tanto  $P(\cap_{i \in S'} A_i) \leq P(\cap_{i \in S} A_i)$ , i.e, como parece natural, la probabilidad de que, una asignación escogida al azar le asigne a los jugadores de una coalición como mínimo su demanda, es menor cuando más grande se hace la coalición.
- $P(A_0 \cap A_i) = 0, \forall i \in N$  tal que  $\{i\} \in \mathcal{F}$  ya que, si  $x \in A_0 \Rightarrow x_i \leq d_i \forall i \in N$  y, si  $x \in A_i \Rightarrow x_i \geq d_i$

En el siguiente lema demostraremos que se puede recubrir el conjunto de imputaciones con los sucesos definidos anteriormente:

**Lema 3.15.** *Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota, sea la familia  $\mathcal{F} = \{S \subset N : \sum_{i \in S} d_i < E\}$  y los sucesos  $A_0, A_i, i \in N, \{i\} \in \mathcal{F}$  definidos anteriormente, se tiene que:*

$$I(E, d) = A_0 \cup (\cup_{\{i\} \in \mathcal{F}} A_i)$$

*Demostración.* Veremos las dos inclusiones existentes:

- $I(E, d) \subset A_0 \cup (\cup_{\{i\} \in \mathcal{F}} A_i)$ .  
Sea  $x \in I(E, d)$ . Se tiene que, si  $x_i \leq d_i \forall i = 1, \dots, n$ , entonces, por definición del núcleo,  $x \in C(E, d)$ . Por otro lado, si  $\exists i \in N : x_i > d_i$ , entonces  $x_i \in [d_i, E]$  y  $x_j \in [0, E - d_i], \forall j \neq i$ , ya que si  $x_j \geq E - d_i \Rightarrow x \notin I(E, d)$ . Por lo tanto,  $x$  es un punto de la forma  $x = (0, \dots, d_i, \dots, 0) + b$  y  $b \in I(E - d_i, (E - d_i, \dots, E - d_i))$  ya que  $b_j \leq E - d_i \forall j \in N$ .
- $A_0 \cup (\cup_{\{i\} \in \mathcal{F}} A_i) \subset I(E, d)$ .  
Claramente  $x \in A_0 \subset I(E, d)$ , entonces  $x \in I(E, d)$ . Sea  $y \in A_i$ , se tiene que  $\forall j \in N \setminus \{i\}, y_j \in [0, E - d_i] \subset [0, E]$  y  $y_i \in [d_i, E] \subset [0, E]$ , entonces  $y \in I(E, d)$ .

<sup>3</sup>Dada una colección finita de sucesos  $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n$  de un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , se tiene que  $P(\cap_{i=1}^n A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|\cap_{j=1}^{n-1} A_j)$

□

Por tanto, como  $P(\Omega) = P(I(E, d)) = 1$ , se tiene que:

$$1 = P(A_0 \cup (\cup_{\{i\} \in \mathcal{F}}) A_i) \quad (3.2)$$

**Proposición 3.16.** *Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota, se tiene que:*

$$\text{Vol}_{n-1}(C(E, d)) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} (E^{n-1} + \sum_{S \in \mathcal{F}} (-1)^{|S|} (E - \sum_{i \in S} d_i)^{n-1})$$

*Demostración.* Aplicando la regla de la adición<sup>4</sup> a la igualdad (3.2) obtenemos que,

$$1 = \frac{\text{Vol}(C(E, d))}{\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} E^{n-1}} + \left(1 - \sum_{\{i\} \in \mathcal{F}} \frac{d_i}{E}\right)^{n-1} + \sum_{|S| \geq 2, S \in \mathcal{F}} (-1)^{|S|} \left(1 - \sum_{i \in S} \frac{d_i}{E}\right)^{n-1}$$

Despejando de la fórmula anterior  $\text{Vol}(C(E, d))$ , tenemos:

$$\text{Vol}_{n-1}(C(E, d)) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} \left( E^{n-1} + \sum_{S \in \mathcal{F}} (-1)^{|S|} (E - \sum_{i \in S} d_i)^{n-1} \right)$$

□

## 3.2. Core-center del juego de bancarrota

En esta sección nos centraremos en estudiar el core-center. Como vimos, es una regla de reparto para los problemas de bancarrota. Veremos que propiedades verifica, como varía en función de los parámetros del modelo,  $E$  y  $d$ , y daremos una fórmula integral para calcularlo. Sin embargo, como es una solución difícil de calcular a través de su expresión integral presentamos diferentes algoritmos que nos facilitarán su cálculo.

Las propiedades principales que cumple el core-center están enunciadas en la siguiente proposición y aparecen recogidas en Mirás Calvo et al. (2019).

**Proposición 3.17.** *El core-center es una regla que satisface respeto de mínimos derechos, igual tratamiento de iguales, anonimidad, homogeneidad, auto-dualidad, la propiedad del punto medio, preservación del orden de ganancias, preservación del orden en pérdidas, monotonía en las ganancias, monotonía en el estado, monotonía poblacional, monotonía en las demandas orientada a otros jugadores y límite inferior razonable.*

Además, veremos que también cumple alguna propiedad adicional, enunciada en la siguiente proposición:

**Proposición 3.18.** *El core-center es una regla que satisface consistencia con las demandas nulas y sin paradoja de transferencia.*

Con la estructura del núcleo de un juego de bancarrota y, con diferentes resultados referidos a esta solución, estaremos en disposición de demostrar algunas de las propiedades que verifica el core-center.

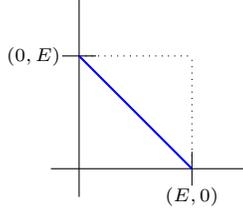
Para empezar estudiaremos la fórmula explícita para un problema de dos jugadores.

**Proposición 3.19.** *Sea  $(E, d) \in B^N$ . Si  $|N| = 2$ , entonces el core-center coincide con la regla Concede y Divide.*

<sup>4</sup>Dada una colección finita de sucesos  $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n$  de un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , se tiene que  $P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i,j \in N, i < j} P(A_i \cap A_j) - \dots (-1)^{n+1} P(\cap_{i=1}^n A_i)$ .

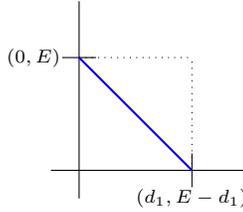
*Demostración.* El core-center, se define como el centro de gravedad del núcleo. En la Figura 3.2 observamos como es el núcleo para un juego con dos jugadores, por lo que, tenemos que calcular el centro de gravedad de ese conjunto. Nótese que,  $v(1) = \max\{0, E - d_2\}$  y  $v(2) = \max\{0, E - d_1\}$ . Distinguimos tres casos:

- $0 \leq E \leq d_1$ . El núcleo es el siguiente conjunto:



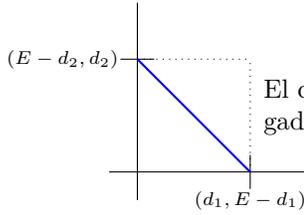
El centro de gravedad será el punto medio de esa recta para los dos jugadores, por lo que tenemos  $\mu_1(E, d) = \mu_2(E, d) = \frac{E}{2}$ .

- $d_1 < E < d_2$ . El núcleo es el siguiente conjunto:



El centro de gravedad será el punto medio de esa recta para los dos jugadores, por lo que tenemos  $\mu_1(E, d) = \frac{d_1}{2}$  y  $\mu_2(E, d) = E - \frac{d_1}{2}$ .

- $d_2 < E < d_1 + d_2$ . El núcleo es el siguiente conjunto:



El centro de gravedad será el punto medio de esa recta para los dos jugadores, por lo que tenemos  $\mu_1(E, d) = \frac{E - d_2 + d_1}{2}$  y  $\mu_2(E, d) = \frac{E - d_1 + d_2}{2}$ .

Por lo tanto, se tiene que:

$$\mu(E, d) = \begin{cases} \left( \frac{E}{2}, \frac{E}{2} \right) & \text{si } 0 \leq E \leq d_1 \\ \left( \frac{d_1}{2}, E - \frac{d_1}{2} \right) & \text{si } d_1 < E < d_2 \\ \left( \frac{E + d_1 - d_2}{2}, \frac{E - d_1 + d_2}{2} \right) & \text{si } d_2 \leq E \leq d_1 + d_2 \end{cases} = CD(E, d)$$

□

En la Figura 3.6 vemos la evolución del core-center según crece  $E$  en el caso  $N = \{1, 2\}$ . Observamos, por tanto, que  $\mu$  es una posible extensión de la regla Concede y Divide.

**Lema 3.20.** Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota tal que  $0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n$  y  $v \in G^N$  el juego de bancarrota asociado, tenemos:

1. Si  $C(v) = I(v)$ , entonces  $\mu_i(v) = v(i) + \frac{E - \sum_{i=1}^n v(i)}{n} \quad \forall i \in N$ . Además, si  $v(i) = 0 \quad \forall i \in N$ , entonces  $\mu_i(v) = \frac{E}{n} \quad \forall i \in N$ .
2. Si  $E \geq \sum_{i=2}^n d_i$ , entonces  $\mu_i(v) = d_i - \frac{D - E}{n} \quad \forall i \in N$ .

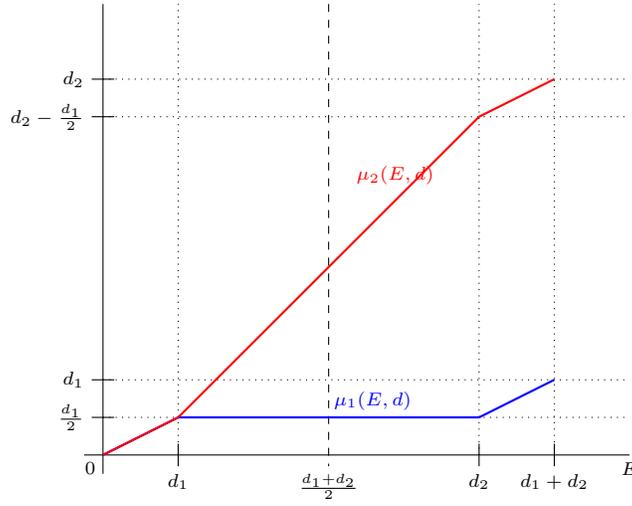


Figura 3.6: Core-center para un juego de dos jugadores

3. Si  $E = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{2}$ , entonces  $\mu(E, d) = \frac{d}{2}$ .
4. Si  $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \leq E \leq d_n$  entonces  $\mu_j(E, d) = \frac{d_j}{2}$  si  $j \neq n$  y  $\mu_n(E, d) = E - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} d_i}{2}$ .
5. Si  $d_i \geq E$  para algún  $i \in N$ , entonces  $\mu_i(E, d) = \mu_i(E, (d_1, \dots, d_{i-1}, E, \dots, E)) = \mu_j(E, d)$ ,  $\forall j > i$ .
6. Si  $v(i) > 0$  para algún  $i \in N$ , entonces  $\mu_j(E, d) = (d_j - d_i) + \mu_i(E, d)$ ,  $\forall j > i$ .

*Demostración.*

1. Por la Proposición 3.1, se tiene que,  $\forall i \in N, \mu_i(I(v)) = v(i) + \Delta/n = v(i) + \frac{E - \sum_{i=1}^n v(i)}{n} = \mu_i(v)$ . Además si el problema está 0-normalizado, se tiene que  $\mu_i(v) = \frac{E}{n} \forall i \in N$ .
2. Si  $E \geq \sum_{i=2}^n d_i$  entonces se tiene que, para el problema dual  $E_D = \sum_{i \in N} d_i - E \leq d_1 \leq d_i \forall i \in N$  y, por tanto  $v_D(i) = 0 \forall i \in N$ . Por lo que, por el punto anterior, se tiene que  $\mu_i(v_D) = \frac{E_D}{n} = \frac{D-E}{n}$ . Por la propiedad de la dualidad, se tiene que  $\mu_i(v) = d_i - \mu_i(v_D) = d_i - \frac{D-E}{n}$ .
3. Tenemos por dualidad que  $\mu(D/2, d) = d - \mu(D/2, d)$ , por lo que  $\mu(D/2, d) = d/2$
4. Por el Lema 3.8 se tiene que  $\hat{C}(v) = \prod_{i=1}^{n-1} [0, d_i]$  y, como  $\mu_j(C(v)) = \mu_j(\hat{C}(v))$  si  $j < n$ . Se tiene que  $\mu_j(E, d) = \frac{d_j}{2}$  si  $j < n$ , con lo que, por eficiencia obtenemos  $\mu_n(E, d) = E - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} d_i}{2}$ .
5. Si  $d_{i+1} \geq d_i \geq E$ , se tiene que  $C(E, d) = C(E, (d_1, \dots, d_{i-1}, E, \dots, E))$ . Por lo tanto, se tiene que, debido a la propiedad de igual tratamiento de iguales:

$$\mu_i(E, d) = \mu_i(E, (d_1, \dots, d_{i-1}, E, \dots, E)) = \mu_{i+1}(E, (d_1, \dots, d_{i-1}, E, \dots, E)) = \mu_{i+1}(E, d)$$

Haciendo las mismas operaciones,  $\forall j > i$  se tiene que  $\mu_i(E, d) = \mu_j(E, d)$

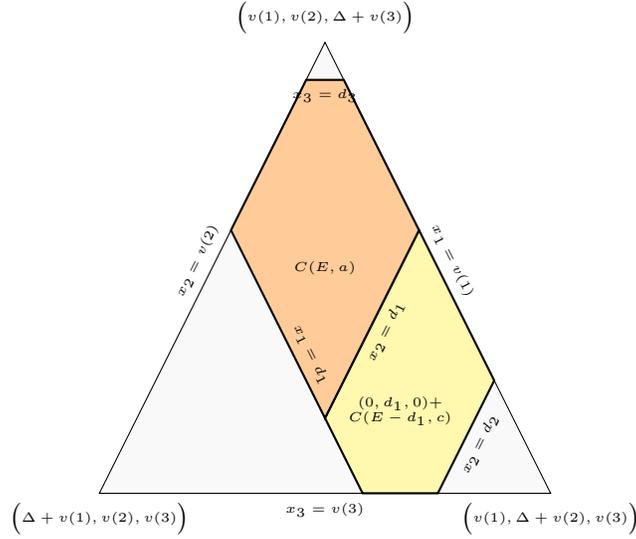


Figura 3.7: Ilustración de la Proposición 3.21 para  $i = 1$  y  $|N| = 3$ . En naranja el núcleo del juego  $(E, a) \in B^N$  y en amarillo el núcleo del juego  $(E - d_1, c) \in B^N$  desplazado por el vector  $(0, d_1, 0)$

6. Si  $v(i) > 0$  para algún  $i \in N$ , entonces  $E > \sum_{k \neq i} d_k$ . Para su problema dual, tenemos que  $E_D = \sum_{j \in N} d_j - E < d_i$  y, por lo tanto,  $\mu_i(E_D, d) = \mu_j(E_D, d) \forall j > i$ . Así que, por dualidad, se tiene que  $\mu_i(E_D, d) = d_i - \mu_i(E, d)$  y  $\mu_j(E_D, d) = d_j - \mu_j(E, d)$ . Así:

$$\mu_j(E, d) = (d_j - d_i) + \mu_i(E, d) \quad \forall j > i$$

□

Vamos a ver ahora varias descomposiciones del núcleo de un juego de bancarrota que nos permitirán demostrar las propiedades de preservación del orden:

**Proposición 3.21.** Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota, siendo  $v \in G^N$  su juego cooperativo asociado 0-normalizado. Sea  $i \in N \setminus \{n\}$  tal que  $d_i < E$  y denotemos por  $a = (d_1, \dots, d_i, d_i, d_{i+2}, \dots, d_n)$ , por  $b = d_i \cdot e^{i+1}$  y sea  $c = d - b = (d_1, \dots, d_i, d_{i+1} - d_i, \dots, d_n)$ , entonces, tenemos que,

$$C(E, d) = C(E, a) \cup (b + C(E - d_i, c)) \text{ y } \text{Vol}(C(E, a) \cap (b + C(E - d_i, c))) = 0$$

En la Figura 3.7 ilustramos este resultado para un juego de 3 jugadores.

*Demostración.* Lo primero que tenemos que ver es que  $(E, a)$  y  $(E - d_i, c)$  son problemas de bancarrota:

- Problema  $(E, a)$ : se tiene que  $a_i \geq 0 \forall i \in N$ . Tenemos que demostrar que  $\sum_{i \in N} a_i > E$ . Vemos que  $\sum_{i \in N} a_i = \sum_{j \neq i+1} d_j + d_i$ , dado que  $v(i) = 0 \forall i \in N$ ,  $\sum_{j \neq i+1} d_i > E$ , con lo que  $\sum_{i \in N} a_i > E + d_i > E$ . Así que  $(E, a) \in B^N$ .
- Problema  $(E - d_i, c)$ : Se tiene que  $c_i \geq 0 \forall i \in N$ . Tenemos que demostrar que  $\sum_{i \in N} c_i > E - d_i$ . Dado que,  $v(i) = 0 \forall i \in N$ ,  $\sum_{j \neq i} d_i > E$ , con lo que  $\sum_{i \in N} c_i = \sum_{j \neq i} d_i \geq E \geq E - d_i$ . Así que  $(E, c) \in B^N$ .

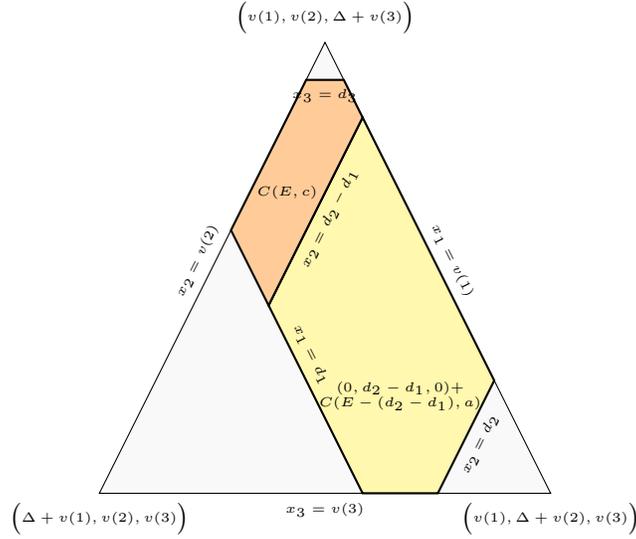


Figura 3.8: Ilustración de la Proposición 3.22 para  $i = 1$  y  $|N| = 3$ . En naranja el núcleo del juego  $(E, c) \in B^N$  y en amarillo el núcleo del juego  $(E - (d_2 - d_1), a) \in B^N$  desplazado por el vector  $(0, d_2 - d_1, 0)$ .

Sean  $v_a, v_c \in G^N$  sus juegos cooperativos asociados respectivamente. Se tiene que  $v_a(k) = 0$  si  $k \leq i + 1$  y  $v_c(k) = 0, \forall k \in N$ . Además,  $v_a(k) \geq v(k) = 0$  y  $v_a(k) \leq \min\{E - d_i, d_k\}$  si  $k > i + 1$ .

$x \in C(E, d)$  si, y sólo si  $\sum_{k \in N} x_k = E, 0 \leq x_k \leq d_k$  si  $k \leq i$  y  $0 \leq x_k \leq \min\{E, d_k\}$  si  $k > i$ .

También se tiene que  $y \in C(E, a)$  si, y sólo si,  $\sum_{k \in N} y_k = E, 0 \leq y_k \leq d_k$  si  $k \leq i + 1$ , y  $v_a(k) \leq y_k \leq \min\{E, d_k\}$  si  $k > i + 1$ .

Finalmente,  $z \in C(E - d_i, c)$  cuando  $\sum_{k \in N} z_k = E - d_i, 0 \leq z_k \leq \min\{E - d_i, d_k\}$  si  $k \neq i + 1$ , y  $0 \leq z_{i+1} \leq \min\{E - d_i, d_{i+1} - d_i\}$ .

Como  $a_i < d_i$ , entonces tenemos que  $C(E, a) \subset C(E, d)$ . Además,  $b + C(E - d_i, c) \subset C(E, d)$  y los conjuntos  $C(E, a)$  y  $b + C(E - d_i, c)$  están separados por el hiperplano  $x_{i+1} = d_i$ , por lo que el volumen de su intersección es cero.

Nos queda probar que  $C(E, d) \subset C(E, a) \cup (b + C(E - d_i, c))$ . Si  $x \in C(E, d)$  y  $x \notin C(E, a)$ , entonces pueden pasar dos cosas:

- $d_i \leq x_{i+1} < \min\{E, d_{i+1}\}$ , en ese caso  $0 \leq x_{i+1} - d_i < \min\{E - d_i, d_{i+1} - d_i\}$ , por lo que  $z = x - b \in C(E - d_i, c)$
- $0 \leq x_k \leq v_a(k)$  para algún  $k > i + 1$ , en cuyo caso  $0 \leq x_k \leq \min\{E - d_i, d_k\}$ , por lo que  $z = x - b \in C(E - d_i, c)$ .

□

**Proposición 3.22.** Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota, siendo  $v \in G^N$  su juego cooperativo asociado. Sea  $i \in N \setminus \{n\}$  tal que  $d_i < E, d_i < d_{i+1}$  y denotemos por  $a = (d_1, \dots, d_i, d_i, d_{i+2}, \dots, d_n)$ , por  $b = (d_{i+1} - d_i) \cdot e^{i+1}$  y, sea  $c = (d_1, \dots, d_{i-1}, d_i, d_{i+1} - d_i, \dots, d_n)$ . Si  $v(i) = 0$  entonces, tenemos que,

$$C(E, d) = C(E, c) \cup (b + C(E - (d_{i+1} - d_i), a)) \text{ y } \text{Vol}(C(E, c) \cap (b + C(E - (d_{i+1} - d_i), a))) = 0$$

En la Figura 3.8 ilustramos este resultado para un juego de 3 jugadores.

*Demostración.* Lo primero que tenemos que ver es que  $(E, c)$  y que  $(E - (d_{i+1} - d_i), a)$  son problemas de bancarrota:

- Problema  $(E, c)$ : se tiene que  $c_i \geq 0 \quad \forall i \in N$ . Tenemos que demostrar que  $\sum_{i \in N} c_i > E$ . Dado que  $v(i) = 0 \quad \forall i \in N$ , se tiene que  $E - \sum_{j \neq i} d_j < 0$ . Por lo tanto,  $\sum_{i \in N} c_i = \sum_{j \neq i} d_j > E$ . Así que  $(E, c) \in B^N$ .
- Problema  $(E - (d_{i+1} - d_i), a)$ : se tiene que  $a_i \geq 0 \quad \forall i \in N$ . Tenemos que demostrar que  $\sum_{i \in N} a_i > E - (d_{i+1} - d_i)$ . Vemos que  $\sum_{i \in N} a_i = \sum_{j \neq i+1} d_j + d_i$ , dado que  $v(i) = 0 \quad \forall i \in N$ ,  $\sum_{j \neq i+1} d_j > E$ , con lo que  $\sum_{i \in N} a_i > E + d_i > E - (d_{i+1} - d_i)$ . Así que  $(E - (d_{i+1} - d_i), a) \in B^N$ .

Sea  $v_a \in G^N$  el juego cooperativo asociado del problema  $(E - (d_{i+1} - d_i), a)$ . Claramente,  $v_a(i+1) = v(i)$  y  $v_a(k) = v(k)$  si  $k \neq i, i+1$ .

Por otro lado, denotamos por  $v_c \in G^N$  el juego de bancarrota asociado al problema  $(E, c) \in B^N$ . Entonces  $v(j) = 0 \quad \forall j \leq i$  y  $v(i+1) \leq d_{i+1} - d_i$  cuando  $v(i+1) > 0$ . Además,  $v_c(i+1) = v(i+1)$  y  $v_c(j) = \max\{0, E - \sum_{k \neq i, j} d_k\} \geq v(j) \quad \forall j \neq i+1$ .

Nótese que  $v_c(j) \leq \min\{E - (d_{i+1} - d_i), d_j\}$  si  $v_c(j) > 0$  para algún  $j \neq i+1$ . Así que  $x \in C(E, d)$  si, y sólo si  $\sum_{k \in N} x_k = E, 0 \leq x_k \leq d_k$  si  $k \leq i$ , y  $v(k) \leq x_k \leq \min\{E, d_k\}$  si  $k > i$ .

También,  $y \in C(E - (d_{i+1} - d_i), a)$  cuando  $\sum_{k \in N} y_k = E - (d_{i+1} - d_i), v(k) \leq y_k \leq \min\{E - (d_{i+1} - d_i), d_k\}$  si  $k \neq i+1$ , y  $v(i) \leq y_{i+1} \leq \min\{E - (d_{i+1} - d_i), d_i\}$ .

Entonces,  $z \in C(E, c)$  si, y sólo si  $\sum_{k \in N} z_k = E, v_c(k) \leq z_k \leq d_k$  si  $k \leq i$ ,  $v_c(k) \leq z_k \leq \min\{E, d_k\}$  si  $k > i+1$  y  $v(i+1) \leq z_{i+1} \leq \min\{E, d_{i+1} - d_i\}$ .

Por lo tanto, tenemos que  $C(E, c) \subset C(E, d)$ ,  $b + C(E - (d_{i+1} - d_i), a) \subset C(E, d)$  y que  $C(E, c)$  y  $b + C(E - (d_{i+1} - d_i), a)$  están separados por el hiperplano  $x_{i+1} = d_{i+1} - d_i$ .

Por último, nos queda probar que  $C(E, d) \subset C(E, c) \cup (b + C(E - (d_{i+1} - d_i), a))$ .

Si  $x \in C(E, d)$  y  $x \notin C(E, c)$ , entonces pueden pasar dos cosas:

- $v(j) \leq x_j \leq v_c(j)$  para algún  $j \neq i+1$ , en cuyo caso  $v(j) \leq x_j \leq \min\{E - (d_{i+1} - d_i), d_j\}$ , por lo que  $z = x - b \in C(E - (d_{i+1} - d_i), c)$
- $d_{i+1} > E$  y  $d_{i+1} - d_i \leq x_{i+1} < d_{i+1}$ , en cuyo caso  $0 \leq x_{i+1} - d_{i+1} + d_i < \min\{E - (d_{i+1} - d_i), d_i\}$ , por lo que  $z = x - b \in C(E - (d_{i+1} - d_i), c)$ .

□

**Observación 3.23.** Si  $v(i) > 0$ , entonces  $C(E, d) = b + C(E - (d_{i+1} - d_i), a)$ , es decir,  $\text{Vol}(C(E, c)) = 0$ .

**Proposición 3.24.** Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota, siendo  $v \in G^N$  su juego cooperativo asociado. Sea  $i \in N \setminus \{n\}$  tal que  $d_i < E$ . Sea  $d_i < d'_i \leq d_{i+1}$  y, denotemos por  $d' = (d_1, \dots, d_{i-1}, d'_i, d_{i+1}, \dots, d_n)$ ,  $b = d_i \cdot e^i$  y  $c = d' - b$ . Tenemos que,

$$C(E, d') = C(E, d) \cup (b + C(E - d_i, c)) \quad \text{y} \quad \text{Vol}(C(E, d) \cap C(E, d_i, d)) = 0$$

En la Figura 3.9 ilustramos este resultado para un juego de 3 jugadores.

*Demostración.* Empezamos viendo que  $(E, d')$  y  $(E - d_i, c)$  son problemas de bancarrota:

- Problema  $(E, d')$ : se tiene que  $d'_i \geq 0 \quad \forall i \in N$ . Tenemos que demostrar que  $\sum_{i \in N} d'_i > E$ . Dado que  $\sum_{i \in N} d'_i > \sum_{i \in N} d_i > E$  porque  $(E, d) \in B^N$  tenemos que  $(E, d') \in B^N$ .
- Problema  $(E - d_i, c)$ : se tiene que  $c_i \geq 0 \quad \forall i \in N$  ya que  $d'_i - d_i > 0$ . Tenemos que demostrar que  $\sum_{i \in N} c_i > E - d_i$ . Vemos que  $\sum_{i \in N} c_i = \sum_{j \neq i} d_j + (d'_i - d_i) > E - d_i \iff \sum_{j \neq i} d_j + d'_i > E$ , lo cual es cierto debido a que  $(E, d') \in B^N$ . Así que  $(E - d_i, c) \in B^N$ .

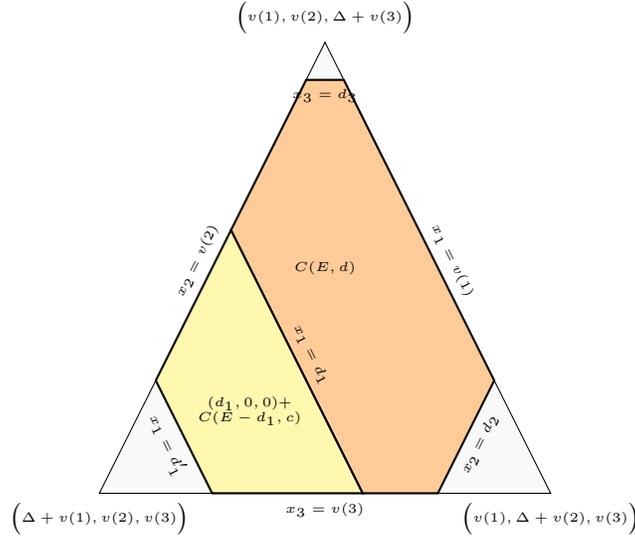


Figura 3.9: Ilustración de la Proposición 3.24 para  $i = 1$  y  $|N| = 3$ . En naranja el núcleo del juego  $(E, d) \in B^N$  y en amarillo el núcleo del juego  $(E - d_1, c) \in B^N$  desplazado por el vector  $(d_1, 0, 0)$ .

Denotamos por  $v_{d'}$  y  $v_c \in G^N$  los juegos cooperativos asociados respectivamente. Tenemos que  $v_{d'} = v(i) = 0$ ,  $v_c(j) = v_{d'}(j) \geq v(i)$  para  $j \neq i$ .

Por tanto,  $x \in C(E, d')$  si  $\sum_{k \in N} x_k = E$ ,  $v(i) \leq x_i \leq d_i$ , y  $v(j) \leq x_j \leq \min\{E, d_j\}$  si  $j \neq i$ .

Finalmente,  $z \in C(E - d_i, c)$  si, y sólo si,  $\sum_{k \in N} z_k = E - d_i$ ,  $0 \leq z_i \leq \min\{E - d_i, d'_i - d_i\}$ , y  $v_{d'}(j) \leq z_j \leq \min\{E - d_i, d_j\}$  si  $j \neq i$ .

Por lo tanto, tenemos que  $C(E, d) \subset C(E, d')$ ,  $b + C(E - d_i, c) \subset C(E, d')$ , y que  $C(E, d)$  y  $b + C(E - d_i, c)$  están separados por el hiperplano  $x_i = d_i$ .

Por último, nos queda probar que  $C(E, d') \subset C(E, d) \cup (b + C(E - d_i, c))$ .

Si  $x \in C(E, d')$  y  $x \notin C(E, d)$ , entonces pueden pasar dos cosas:

- $d_i < x_i \leq \min\{E, d'_i\}$ , en cuyo caso  $0 < x_i - d_i \leq \{E - d_i, d'_i - d_i\}$ , por lo que  $z = x - b \in (b + C(E - d_i, c))$ .
- $v_{d'}(j) \leq x_j < v(j)$  para algún  $j \neq i$ , en cuyo caso  $v_{d'}(j) \leq x_j \leq \min\{E - d_i, d_j\}$  debido a que  $v(j) \leq \min\{E - d_i, d_j\}$ , por lo que  $z = x - b \in C(E - d_i, c)$ .

□

Existen diferentes formas de expresar el core-center. En este trabajo presentaremos una expresión integral en función de los juegos de las caras del núcleo del juego original.

**Teorema 3.25.** Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota,  $v$  su juego asociado e  $i \in N$ . Sea  $f_i : (0, D) \times [0, D_{-i}] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función dada por  $f_i(E, x) = \frac{\text{Vol}_{n-2}(C(x, d_{-i}))}{\text{Vol}_{n-1}(C(E, d))} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$ .

Entonces,  $\int_{v(i)}^{\min\{E, d_i\}} f_i(E, E - s) ds = 1$  y,  $\forall j \in N \setminus \{i\}$ ,

$$\mu_j(E, d) = \int_{v(i)}^{\min\{E, d_i\}} \mu_j(E - s, d_{-i}) f_i(E, E - s) ds$$

Por lo tanto, ya tenemos una forma de expresar el core-center y de calcularlo de forma numérica. Sin embargo, dicho cálculo es muy laborioso para dimensiones altas. Así que, será interesante la búsqueda de algoritmos para simplificar su cálculo.

Otro estudio interesante del core-center consiste en ver como varía dicha solución en función de los parámetros que definen dicho problema. Estos parámetros son el estado ( $E$ ) y las demandas ( $d$ ). Empezamos derivando nuestra solución en función del estado para ver como crece o decrece nuestra solución a medida que movemos dicho parámetro:

**Teorema 3.26.** *Sea  $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^N$  un vector de demandas tal que  $0 < d_1 \leq \dots \leq d_n$ . Si  $\|N\| \geq 3$  entonces  $\mu(\cdot, d)$  es continuamente diferenciable como función del estado en  $[0, D]$  y, además:*

1. Si  $E \in [0, d_1]$ , entonces  $\frac{\partial \mu_j}{\partial E}(E, d) = \frac{1}{n} \forall j \in N$ .
2. Si  $E \in [\sum_{i=1}^{n-1} d_i, d_n]$ , entonces  $\frac{\partial \mu_j}{\partial E}(E, d) = 0 \forall j \in N \setminus \{n\}$  y  $\frac{\partial \mu_n}{\partial E}(E, d) = 1$ .
3. Si  $E \in [d_1, \min\{\frac{1}{2}D, \sum_{i=1}^{n-1} d_i\}]$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_j}{\partial E}(E, d) = & f_n(E, E)(\mu_j(E, d_{-n}) - \mu_j(E, d)) + \\ & + \chi_n(E, d) f_n(E, E - d_n)(\mu_j(E, d) - \mu_j(E - d_n, d_{-n})) \forall j \in N \setminus \{n\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial E}(E, d) = f_1(E, E)(\mu_n(E, d_{-1}) - \mu_n(E, d)) + f_1(E, E - d_1)(\mu_n(E, d) - \mu_j(E - d_1, d_{-1}))$$

4. Si  $E \in [\frac{1}{2}D, D]$  entonces  $D - E \in [0, \frac{1}{2}D]$  y  $\frac{\partial \mu_j}{\partial E}(E, d) = \frac{\partial \mu_j}{\partial E}(D - E, d) \forall j \in N$  siendo  $\chi_j(E, d) = 0$  si  $E < d_j$  y  $\chi_j(E, d) = 1$  en otro caso.

Los otros parámetros que determinan un problema de bancarrota son las demandas de cada jugador, así que es interesante estudiar como varía nuestra solución en función de nuestras demandas:

**Teorema 3.27.** *Sea  $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$  un vector de demandas ordenado y  $E > 0$ , se tiene que  $\mu(E, \cdot)$  es continuamente diferenciable como función de  $d_i \forall i = 1, \dots, n$  y, además:*

1.  $\frac{\partial \mu_j}{\partial d_i} = f_i(E, E - d_i) \cdot [\mu_j(E - d_i, d_{-i}) - \mu_j(E, d)] \forall j \neq i$
2.  $\frac{\partial \mu_i}{\partial d_i} = f_i(E, E - d_i) \cdot [d_i - \mu_i(E, d)]$

*Demostración.* Por el Teorema 3.25 tenemos que  $\forall j \neq i$  con  $d_i < E$ :

$$\mu_j(E, d) = \int_0^{d_i} \mu_j(E - s, d_{-i}) \cdot f_i(E - s, s) ds$$

Usando la regla de la cadena en la expresión anterior (denotamos por  $g(d_i)$  la expresión integral) y, derivando en  $d_i$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_j}{\partial d_i} &= \int_0^{d_i} \frac{\partial g(d_i)}{\partial d_i} ds + \mu_j(E - d_i, d_{-i}) \cdot f_i(E, E - d_i) = \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \cdot \left( \int_0^{d_i} \frac{\mu_j(E - s, d_{-i}) \cdot Vol_{n-2}(C(E - s, d_{-i})) \frac{\partial Vol_{n-1}(C(E, d))}{\partial d_i}}{(Vol_{n-1}(C(E, d)))^2} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_j(E - d_i, d_{-i}) \cdot \frac{Vol_{n-2}(C(E - d_i, d_{-i}))}{Vol_{n-1}(C(E, d))} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ya que } \frac{\partial g(d_i)}{\partial d_i} = \frac{0 - \mu_j(E - s, d_{-i}) Vol_{n-2}(C(E - s, d_{-i})) \frac{\partial Vol_{n-1}(C(E, d))}{\partial d_i}}{Vol_{n-1}(C(E, d))^2}$$

Ahora, usando el teorema 3.11, tenemos que  $\frac{\partial Vol_{n-1}(C(E,d))}{\partial d_i} = Vol_{n-2}(C(E-d_i, d_{-i}))$ , y teniendo en cuenta que  $\mu_j(E, d) = \int_0^{d_i} \mu_j(E-s, d_{-i}) \cdot f_i(E-s, s) ds$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_j}{\partial d_i} &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \cdot (-\mu_j(E, d) \frac{Vol_{n-2}(C(E-d_i, d_{-i}))}{Vol_{n-1}(C(E, d))} + \mu_j(E-d_i, d_{-i}) \cdot \frac{Vol_{n-2}(C(E-d_i, d_{-i}))}{Vol_{n-1}(C(E, d))}) = \\ &= f_i(E, E-d_i) \cdot [\mu_j(E-d_i, d_{-i}) - \mu_j(E, d)] \end{aligned}$$

Ahora, para demostrar la expresión de  $\frac{\partial \mu_i}{\partial d_i}$ , usamos el hecho de que  $\sum_{j=1}^n \mu_j = E$  y, por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mu_j}{\partial d_i} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \mu_i}{\partial d_i} = - \sum_{j \neq i} \frac{\partial \mu_j}{\partial d_i} = f_i(E, E-d_i) \cdot [\sum_{j \neq i} (\mu_j(E, d) - \mu_j(E-d_i, d_{-i}))] = \\ &= f_i(E, E-d_i) \cdot [E - \mu_i(E, d) - E + d_i] = f_i(E, E-d_i) \cdot (d_i - \mu_i(E, d)) \end{aligned}$$

□

Vemos que  $\mu_i$  es creciente si la demanda del jugador  $i$  aumenta y,  $\forall j \neq i$ ,  $\mu_j$  es decreciente si aumenta la demanda del jugador  $i$ .

Por último veremos una relación entre la propiedad de sin paradoja de transferencia y las propiedades de monotonía en las demandas y monotonía en las demandas orientada a otros jugadores.

**Proposición 3.28.** *Si una regla satisface las propiedades de monotonía en las demandas y monotonía en las demandas orientada a otros jugadores, entonces cumple la propiedad de sin paradoja de transferencia.*

*Demostración.* Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota,  $R(E, d)$  una regla que cumple monotonía en las demandas y monotonía en las demandas orientada a otros jugadores y sean  $i, j \in N$  y el vector  $d'$  tal que  $d'_k = d_k$  si  $k \neq i, j$ ,  $d'_i > d_i$  y  $0 \leq d'_j < d_j$  con  $d'_i + d'_j = d_i + d_j$ , entonces, se tiene que, por la propiedad monotonía en las demandas que  $R_i(E, (d_{-i-j}, d'_i, d'_j)) \geq R_i(E, (d_{-i-j}, d_i, d'_j))$  y, por la propiedad de monotonía en las demandas orientada a otros jugadores, se tiene que  $R_i(E, (d_{-i-j}, d_i, d'_j)) \geq R_i(E, (d_{-i-j}, d_i, d_j))$ . Por lo tanto,  $R_i(E, (d_{-i-j}, d'_i, d'_j)) \geq R_i(E, (d_{-i-j}, d_i, d_j))$ . Haciendo un razonamiento análogo, demostramos que  $R_j(E, (d_{-i-j}, d'_i, d'_j)) \leq R_j(E, (d_{-i-j}, d_i, d_j))$ . □

Una vez tenemos enunciados todos los resultados anteriores, visto diferentes fórmulas explícitas para calcularlo y estudiado como varía en función de sus parámetros, ya estamos en disposición de demostrar algunas de las propiedades antes enunciadas:

*Demostración.* (Proposiciones 3.17 y 3.18)

Sea  $(E, d) \in B^N$  un juego de bancarrota y  $v \in G^N$  el juego asociado:

- **Respeto de mínimos derechos:**  $C(v)$  es un conjunto convexo, por lo tanto  $\mu(v) \in C(v)$ . Entonces  $\mu(v) \in H$  y  $0 \leq v(i) \leq \min\{E, d_i\} \leq d_i \quad \forall i \in N$ . Por lo tanto,  $\mu$  es una regla. Pero,  $v(i) = \max\{E - \sum_{j \in N_i} d_j, 0\}$ ,  $i \in N$ , por lo que satisface el respeto de mínimos derechos.
- **Igual tratamiento de iguales y anonimidad:** En el juego asociado, jugadores con las mismas demandas, son jugadores simétricos, por lo que se comportan de la misma forma.
- **Continuidad y homogeneidad:** En González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2007) está demostrado que el core-center, como solución definida en la clase de los juegos equilibrados, trata igual a jugadores simétricos, es homogénea y continua en los valores de la función característica. Dado  $\lambda > 0$  y sea  $S \in 2^N$ , tenemos que  $v_\lambda(S) = \lambda \cdot v(S)$ , donde  $v_\lambda$  es el juego asociado al problema de bancarrota  $(\lambda \cdot E, \lambda \cdot d) \in B^N$ , por lo que el core-center cumple homogeneidad. Además, los valores,  $v(S)$ ,  $S \in 2^N$  de la función característica son continuos con respecto a  $E$  y a las demandas. Por lo tanto, el core-center es composición de funciones continuas y, por lo tanto, continua.

- **Auto-dualidad:** Consecuencia directa de la Proposición 3.6.
- **Propiedad del punto medio:** Se sigue del apartado 3 del Lema 3.20.
- **Preservación del orden de ganancias:** Sea  $i \in N \setminus n$ . Tenemos que demostrar que si  $d_i \leq d_{i+1}$  entonces  $\mu_i(E, d) \leq \mu_{i+1}(E, d)$ :

Cómo el core-center cumple igual tratamiento de iguales, la posible igualdad está probada, así que, vamos a asumir que  $d_i < d_{i+1}$ . Vamos a separar el problema en dos casos:

1.  $d_i > E$ , entonces, por el apartado 5 del Lema 3.20 ya tenemos probada la igualdad.
2.  $d_i < E$ : Asumimos, que el juego  $v$  está 0-normalizado (si no es así lo 0-normalizamos) y, por lo tanto, vamos a utilizar la Proposición 3.21. Sea  $\rho = \frac{Vol(C(E, a))}{Vol(C(E, d))}$ . Cómo nuestra solución cumple igual tratamiento de iguales, se tiene que  $\mu_{i+1}(E, d) = \mu_i(E, a)$ . Además,  $\mu_{i+1}(b + C(E - d_i), c) = d_i + \mu_{i+1}(E - d_i, c) \geq d_i \geq \mu_i(E - d_i, c)$ . Entonces, haciendo uso de la observación de la definición 1.4, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu_{i+1}(E, d) &= \rho \cdot \mu_{i+1}(E, a) + (1 - \rho) \cdot \mu_{i+1}(b + C(E - d_i), c) \\ &\geq \rho \cdot \mu_i(E, a) + (1 - \rho) \cdot \mu_i(E - d_i, c) = \mu_i(E, d) \end{aligned}$$

Vamos a ver ahora que si  $v$  no está 0-normalizado, sabemos que  $v = (v(i))_{i \in N} + w$ , siendo  $w$  la 0-normalización de  $v$ . Entonces, como  $v(i) \leq v(i+1)$ , tenemos que  $\mu_{i+1}(v) = v(i+1) + \mu_{i+1} \geq v(i) + \mu_i(w) = \mu_i(v)$ , c.q.d.

- **Preservación del orden de pérdidas:** Sea  $i \in N \setminus n$ . Tenemos que demostrar que si  $d_i \leq d_{i+1}$  entonces  $d_i - \mu_i(E, d) \leq d_{i+1} - \mu_{i+1}(E, d)$ :

Al igual que antes, por igual tratamiento de iguales, asumimos  $d_i < d_{i+1}$ . Vamos a separar el problema en dos casos:

1.  $d_i > E$ . Por el Lema 3.20,  $\mu_i(E, d) = \mu_{i+1}(E, d)$ . Podemos demostrar que, si  $v(i) > 0$ , entonces  $C(E, d) = b + C(E - (d_{i+1} - d_i), a)$  y, por el Lema 3.20 se tiene que  $\mu_{i+1}(E, d) = (d_{i+1} - d_i) + \mu_i(E, d)$ , por lo que tenemos el resultado esperado.
2.  $d_i < E$ . Suponemos que  $v(i) = 0$ . Usaremos la descomposición de la Proposición 3.22 y denotamos por  $\rho = \frac{Vol(C(E, c))}{Vol(C(E, d))}$ . Entonces, por igual tratamiento de iguales,  $\mu_{i+1}(E - (d_{i+1} - d_i), a) = \mu_i(E - (d_{i+1} - d_i), a)$ . Además,  $\mu_{i+1}(E, c) - \mu_i(E, c) \leq \mu_{i+1}(E, c) \leq d_{i+1} - d_i$ . Por lo tanto, aplicando la Proposición 3.22, tenemos que  $\mu_{i+1}(E, d) - \mu_i(E, d) = \rho(\mu_{i+1}(E, c) - \mu_i(E, c)) + (1 - \rho)(d_{i+1} - d_i) \leq d_{i+1} - d_i$ , c.q.d.

- **Monotonía en las ganancias:** Sea  $i \in N \setminus n$ . tal que  $\mu_j(E, (d'_i, d_{-i})) \leq \mu_j(E, d) \forall j \in N, j \neq i$  siendo  $d' \geq d$ .

Sea  $d_i \leq d'_i \leq d_{i+1}$ . Separamos el problema en dos casos:

1.  $d_i \geq E$ .  $C(E, d') = C(E, d)$  y, por tanto  $\mu_i(E, d') = \mu_i(E, d)$ .
2.  $d_i < E$ . Realizamos la descomposición de la Proposición 3.24 y, denotamos  $\rho = \frac{Vol(C(E, d))}{Vol(C(E, d'))}$ . Claramente  $\mu_i(E, d) \leq d_i + \mu_i(E - d_i, c)$ . Por lo tanto,  $\mu_i(E, d') = \rho \cdot \mu_i(E, d) + (1 - \rho) \cdot (d_i + \mu_i(E - d_i, c)) \leq \mu_i(E, d)$

- **Consistencia con las demandas nulas:** Si tenemos un vector de demandas del tipo  $d = (0, d_2, \dots, d_n)$ , entonces el núcleo del juego de bancarrota asociado colapsa en el eje  $x_1$ , por lo que  $\mu_1 = 0$  y calculamos el core-center del núcleo colapsado de dimensión  $n - 2$  para el juego con demandas  $(d_2, \dots, d_n)$ . Por lo tanto,  $\forall E > 0, \mu(E, (0, d_2, \dots, d_n)) = (0, \mu(d_2, \dots, d_n))$

- **Sin paradoja de transferencia:** Por la Proposición 3.28, como el core-center cumple monotonía en las demandas y monotonía en las demandas orientada a otros jugadores, tenemos que el core-center satisface la propiedad de sin paradoja de transferencia.

□

**Observación 3.29.** Por definición  $d_i - \mu_i(E, d) > 0$ , por lo tanto, la función  $\mu_i(E, \cdot)$  es creciente cuando aumenta su propia demanda, lo que serviría como demostración alternativa de la propiedad de monotonía en las demandas.

**Observación 3.30.** Podemos ver mediante contraejemplos que el core-center no cumple las propiedades de igual tratamiento de iguales por grupo, ni concavidad y convexidad, ni composición superior ni inferior, ni independencia de la demanda global de los otros, ni convexidad en las demandas, ni aditividad en el estado, ni consistencia.

- **Igual tratamiento de iguales por grupos:** Sea  $E = 10$  y  $d = (3, 3, 3, 9)$ , se tiene que  $\mu(E, d) = (1.51, 1.51, 1.51, 5.45)$  y  $3 \cdot 1.51 \neq 5.45$ . Se tiene por tanto que,  $d_1 + d_2 + d_3 = d_4$ , pero  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \neq \mu_4$ .
- **Concavidad y convexidad:** Sea  $d = (3, 5, 7)$ , representamos el camino del reparto para los acreedores 1 y 2 en la Figura 3.10 y, observamos que dicha curva no es ni cóncava ni convexa. Podemos verlo numéricamente: sea  $E = 5$ ,  $E' = 6$  y  $E'' = 7$ , se tiene que  $\frac{R_2(E', d) - R_2(E, d)}{R_1(E', d) - R_1(E, d)} = \frac{2.2179 - 1.8571}{1.3718 - 1.2857} = 4.1915 \geq \frac{R_2(E'', d) - R_2(E', d)}{R_1(E'', d) - R_1(E', d)} = \frac{2.4253 - 2.2179}{1.4597 - 1.3718} = 2.3568$  por lo que el core-center no es convexo y, sea  $E = 8$ ,  $E' = 9$  y  $E'' = 10$ , tenemos que  $\frac{R_2(E', d) - R_2(E, d)}{R_1(E', d) - R_1(E, d)} = \frac{2.7820 - 2.5747}{1.6282 - 1.5402} = 2.3567 \leq \frac{R_2(E'', d) - R_2(E', d)}{R_1(E'', d) - R_1(E', d)} = \frac{3.1428 - 2.7820}{1.7142 - 1.6282} = 4.1914$  por lo que el core-center no es cóncavo.

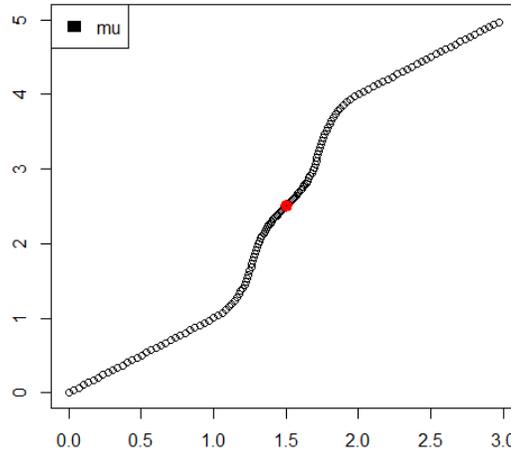


Figura 3.10: Camino del core-center para los acreedores 1,2 con demandas  $d = (3, 5, 7)$

- **Composición hacia abajo:** Sea  $E' = 10$ ,  $E = 11$  y  $d = (5, 6, 6)$ , se tiene que  $\mu(E', d) = (2.8837, 3.5581, 3.5581) \neq \mu(E', \mu(E, d)) = (2.7619, 3.6190, 3.6190)$ .
- **Composición hacia arriba:** Sea  $E = 10$ ,  $E' = 11$  y  $d = (5, 6, 6)$ , se tiene que  $\mu(E', d) = (3.0952, 3.9524, 3.9524) \neq \mu(E, d) + \mu(E' - E, d - \mu(E, d)) = (3.2171, 3.8915, 3.8915)$ .
- **Independencia de la demanda global de los otros:** Sea  $E = 10$ ,  $d = (2, 4, 7, 9)$ ,  $d' = (3, 8, 9)$ , se tiene que  $D' = D - d_1$ . Tomamos  $i = 1$  y tenemos que  $\mu_1(E, d) = 0.9765 \neq \mu_1(E, (2, 3, 8, 9)) = 0.9722$ .

- Consistencia: Sea  $E = 10, d = (5, 6, 6)$ . Tomando  $N' = \{1, 2\}$ , tenemos  $\mu(E, d) = (2.8837, 3.5581, 3.5581)$  y  $\mu(2.8837+3.5583, (5, 6)) = (2.7209, 3.7209) \neq (2.8837, 3.5581)$ .

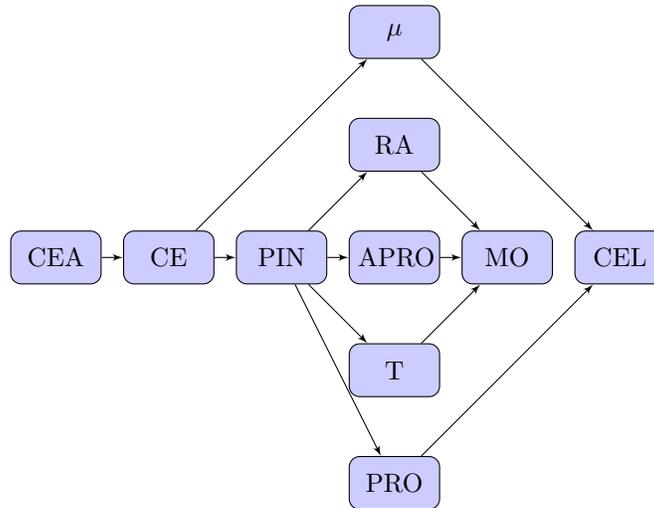
Ilustramos ahora a modo de resumen, en la Tabla 3.1 una comparación de las reglas principales con el core-center viendo que propiedades cumplen y cuales no. Quedando muchas de ellas sin estudiar para futuras investigaciones.

Una vez tenemos demostradas las propiedades principales que cumple el core-center, podemos volver a la clasificación de todas las reglas anteriores y ver donde encaja nuestra solución.

En cualquier dominio de los problemas de bancarrota, se tiene que, como el core-center cumple las propiedades de punto medio, preservación del orden de ganancias y monotonía en el estado,  $CE \geq_L \mu$  por la Proposición 2.11.

Por la Proposición 2.17, por cumplir preservación del orden de ganancias y pérdidas, se tiene que  $\mu \geq_L CEL$ .

Así que podemos actualizar el esquema de la sección 2 añadiendo el core-center, obteniendo que, para cualquier problema  $(E, d) \in B^N$  se tiene que:



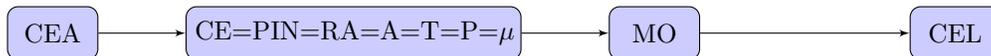
Ahora, vamos a estudiar que relaciones de las vistas en la sección 2 cumple dependiendo de en que dominio trabajemos:

Por cumplir la propiedad del punto medio, tendremos que, en el dominio,  $B_{0,5}^N$ ,  $\mu = CE = PIN = RA = T = P$ .

En el dominio  $B_0^N$ , como satisface las propiedades: preservación del orden de ganancias y pérdidas, monotonía en el estado y la propiedad del punto medio, por la Proposición 2.21, tendremos que  $\mu \geq_L T$  y, la relación inversa en el dominio  $B_1^N$ .

Así que ahora podemos actualizar los esquemas de la sección 2 añadiendo el core-center, los cuales quedarían de la siguiente forma:

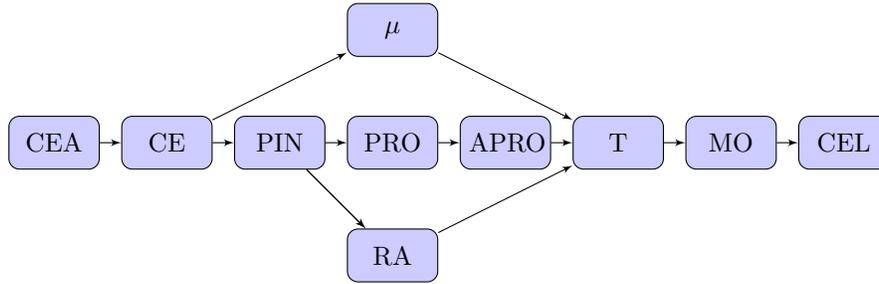
Dominio  $B_{0,5}^N$  ( $E = \frac{D}{2}$ ):



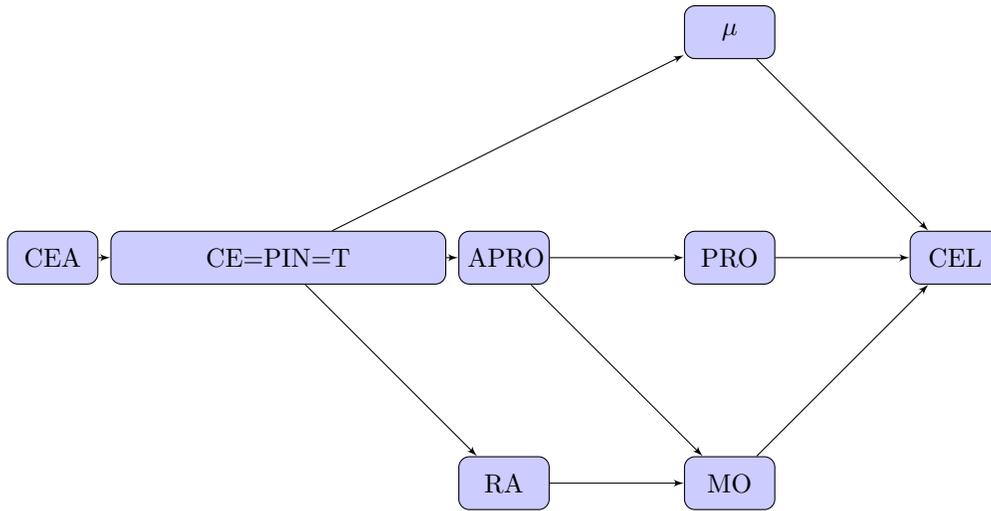
	PRO	T	PIN	RA	MO	APRO	$\mu$
Demandas truncadas por abajo	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Límite inferior de las pérdidas	No	Si	No	Si	No	Si	Si
Consistencia con las demandas nulas	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Igual tratamiento de iguales	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Preservación del orden de ganancias	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Preservación del orden de pérdidas	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Anonimidad	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Continuidad	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Monotonía en las demandas	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Sin paradoja de transferencia	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Monotonía en el estado	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Homogeneidad	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Mínimos derechos primero	No	Si	No	Si	Si	Si	Si
Composición hacia abajo	Si	No	No	No	No	No	No
Composición hacia arriba	Si	No	No	No	No	No	No
Dualidad	Si	Si	No	Si	No	Si	Si
Prop. Punto medio	Si	Si	Si	Si	No	Si	Si
Monotonía poblacional	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Igual tratamiento de iguales en grupos	Si	No	No	No	No	No	No
Concavidad	Si	No	No	No	No	No	No
Convexidad	Si	No	No	No	No	No	No
Independencia de la demanda global de los otros	Si	No	No	No	No	No	No

Tabla 3.1: Resumen de las reglas y propiedades principales

Dominio  $B_0^N$  ( $E \geq \frac{D}{2}$ ):



Dominio  $B_1^N$   $E \leq \frac{D}{2}$ :



### 3.3. Algoritmos

En la sección anterior vimos una fórmula integral para calcular explícitamente el core-center. Sin embargo, implementar dicha fórmula tiene un coste computacional muy alto, debido a que debemos calcular el volumen de diferentes polítopos en  $\mathbb{R}^n$ , por lo que, cuando crece el número de jugadores el cálculo es muy laborioso. Esa es la razón por la que recurrimos a la implementación de diferentes algoritmos para realizar su cálculo.

#### 3.3.1. Algoritmo exterior

En esta sección se presenta el algoritmo propuesto en Mirás Calvo et al. (2018) para la obtención del core-center. El procedimiento se basa en el hecho de que se puede partir el conjunto de imputaciones de un juego de bancarrota en un número finito de piezas que, a su vez son núcleos de diferentes juegos de bancarrota denominados juegos de utopía.

Con un ejemplo con tres jugadores intentaremos explicar de forma fácil la idea del algoritmo. Si estamos en el caso en el que todos los jugadores demandan más cantidad que el estado, el núcleo coincide con el conjunto de imputaciones y, por lo tanto, el core-center será el baricentro del triángulo del conjunto de imputaciones (Figura 3.11 izquierda). Sin embargo, si alguno de los demandantes tiene una demanda menor que el estado, entonces tenemos imputaciones que no están en el núcleo del juego. Será la región de imputaciones que favorecen a ese demandante (ya que se le asignaría como mínimo su demanda). Este conjunto de asignaciones constituyen el juego de utopía, que como veremos es un juego

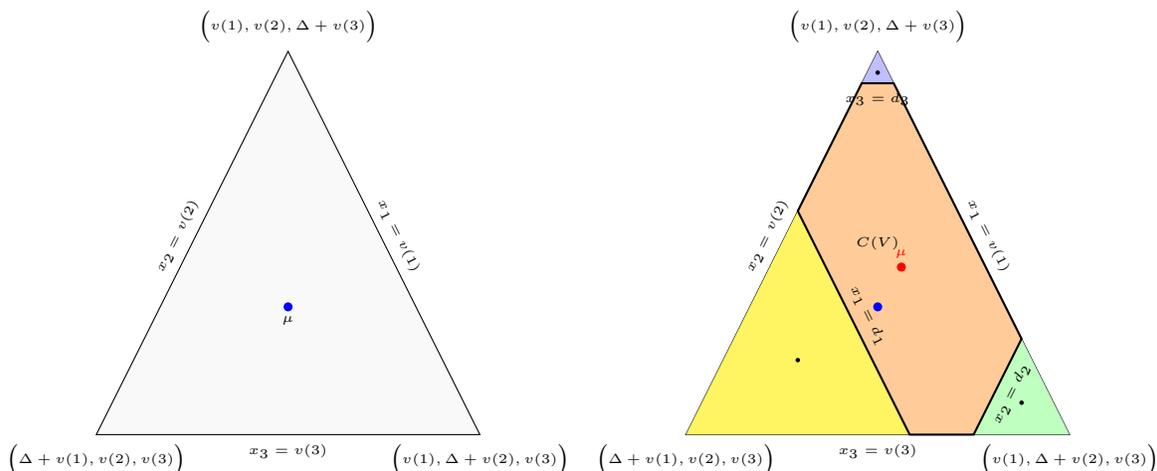


Figura 3.11: Core-center de  $I(v)$ (izquierda) y de  $C(v)$  (derecha) para un juego de 3 jugadores.

de bancarrota. Podemos definir estos juegos para cualquier jugador, obteniendo un conjunto como el de la imagen. (Figura 3.11 derecha). En este caso, el juego de utopía del jugador 1 viene representado en amarillo, el del jugador 2 en verde y el del jugador 3 en azul.

En esta disección del conjunto de imputaciones, conocemos los centros de gravedad de todos los conjuntos, excepto el del propio core. Por lo tanto, promediando todos los centros de gravedad junto con el peso relativo de cada uno en el conjunto de imputaciones, podremos calcular el core-center.

En el caso de un juego de 3 jugadores, los núcleos de los juegos de utopía coinciden con sus conjuntos de imputaciones (son triángulos), por lo que conocemos su centro de gravedad. Sin embargo, para dimensiones más altas, estos juegos no son de este tipo, pero vamos a ver que podemos llegar, en un número finito de pasos a símlices, con lo que, deshaciendo el proceso en orden inverso podemos obtener el core-center de un juego de bancarrota a través de una media ponderada de símlices.

Empezaremos definiendo con rigor los juegos de utopía de los que hablamos anteriormente.

**Definición 3.31.** Sea  $(E, d) \in B^N$  un juego de bancarrota, para cada coalición  $T \subset N$  se define el problema de utopía de la coalición  $T$  ( $T$ -utopía)  $(\tilde{E}_T, \tilde{d}_T) \in B^N$  y el juego aditivo  $a_T \in G^N$  en la Tabla 3.2.

	$\sum_{i \in T} d_i \geq E$	$\sum_{i \in T} d_i < E$
$\tilde{E}_T$	$E$	$E - \sum_{i \in T} d_i - \sum_{\ell \in N \setminus T} v(\ell)$
$\tilde{d}_T$	$(\tilde{d}_T)_i = \begin{cases} d_i & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \notin T \end{cases}$	$(\tilde{d}_T)_i = \begin{cases} \tilde{E}_T & \text{si } i \in T \\ d_i - v(i) & \text{si } i \notin T \end{cases}$
$a_T$	$a_T(i) = 0, i \in N$	$a_T(i) = \begin{cases} d_i & i \in T \\ v(i) & i \notin T \end{cases}$

Tabla 3.2: Definición de los problemas de utopía.

Sea  $\tilde{v}_T$  el juego de bancarrota asociado al problema de bancarrota  $(\tilde{E}_T, \tilde{d}_T) \in B^N$ . El juego de

utopía de la coalición  $T$  se define como  $v_T = a_T + \tilde{v}_T \in G^N$ .

Dado un problema de bancarrota  $(E, d) \in B^N$  consideramos la siguiente familia de coaliciones:

$$\mathcal{F} = \left\{ T \subset N : |T| \leq n - 2, \sum_{i \in T} d_i < E \right\}.$$

Es sencillo de demostrar que las coaliciones de la familia  $\mathcal{F}$  son aquellas cuyo núcleo no es degenerado, es decir,

$$T \in \mathcal{F} \Leftrightarrow p_T = \text{Vol}(C(v_T)) > 0.$$

Así que, estas serán las coaliciones necesarias en el algoritmo exterior para calcular el core-center. Vamos a analizar en detalle los núcleos de los juegos de utopía en el caso en el que  $T \in \mathcal{F}$ .

**Proposición 3.32.** *Sea  $T \in \mathcal{F}$  y  $v_T \in G^N$  el juego de  $T$ -utopía. Entonces:*

1.  $I(v_T) \subset I(v)$ .
2.  $C(v_T) = \{x \in I(v_T) : x_i \leq v_T(N) - v_T(N \setminus \{i\}) \ \forall i \in N \setminus T\}$ .

*Demostración.*

1. Como  $T \in \mathcal{F}$ ,  $\sum_{i \in T} d_i < E$  y sabemos que  $v_T = a_T + \tilde{v}_T$  y que  $\tilde{v}_T$  es un juego 0-normalizado. Entonces, por la caracterización del conjunto de imputaciones de un juego de bancarrota, tenemos que  $I(v_T)$  es el simplex regular dado por los  $n$  puntos  $b^i = a_T + \tilde{E}_T \cdot e^i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i \in N$ . Si probamos que  $b^i \in I(v)$ ,  $\forall i \in N$ , tendremos que  $I(v_T) \subset I(v)$ .

Así que, sea  $i \in N$ ,  $\sum_{j \in N} b_j^i = \sum_{j \in T} a_T(j) + \sum_{j \in N \setminus T} a_T(j) + \tilde{E}_T = \sum_{j \in T} d_j + \sum_{j \in N \setminus T} v(j) + E - \sum_{j \in T} d_j - \sum_{j \in N \setminus T} v(j) = E$ .

Queda por demostrar que  $b_j^i \geq v(j) \ \forall j \in N$ . Veámoslo:

- Si  $j \neq i$ ,  $b_j^i = a_T(j)$ . Si  $j \notin T$ , entonces  $a_T(j) = v(j)$  y, si  $j \in T$ , entonces  $a_T(j) = d_j \geq v(j)$ .
- Si  $j = i$ ,  $b_i^i = a_T(i) + \tilde{E}_T$ . Si  $i \notin T$ , entonces  $a_T(i) = v(i)$  y, si  $i \in T$ , entonces  $a_T(i) = d_i \geq v(i)$ .

2. Se tiene que  $C(v_T) = a_T + C(\tilde{v}_T) = a_T + \{x \in I(\tilde{v}_T) : x_i \leq \min\{\tilde{E}_T, (\tilde{d}_T)_i\} \ \forall i \in N\}$ .

Ahora, si  $i \in T$ , entonces  $(\tilde{d}_T)_i = \tilde{E}_T$ , con lo que  $\min\{\tilde{E}_T, (\tilde{d}_T)_i\} = \tilde{E}_T$ . Así que,  $C(v_T) = \{x \in I(v_T) : x_i \leq v_T(N) - v_T(N \setminus \{i\}) \ \forall i \in N \setminus T\}$

□

**Lema 3.33.** *Sea  $T \in \mathcal{F}$  un elemento maximal de la familia  $\mathcal{F}$  y  $v_T \in G^N$  el juego de  $T$ -utopía. Entonces  $C(v_T) = I(v_T)$ .*

*Demostración.* Si  $T \in \mathcal{F}$  es un elemento maximal, entonces  $\sum_{i \in T} d_i < E$  y  $\sum_{i \in T} d_i + d_j \geq E$  para cada  $j \notin T$ . Sabemos que  $v_T$  es estratégicamente equivalente a  $\tilde{v}_T$ . Para cada  $v$ ,  $C(V) = I(v)$  si, y solo si  $E \leq d_1$ , por lo que, tenemos que demostrar que  $(\tilde{d}_T)_k \geq \tilde{E}_T \ \forall k \in N$ .

Distinguiamos dos casos:

- Si  $i \in T$ , entonces  $\tilde{E}_T = (\tilde{d}_T)_i$
- Si  $i \notin T$ , entonces:

$$\begin{aligned} (\tilde{d}_T)_j - \tilde{E}_T &= (d_j - v(j)) - \left( E - \sum_{i \in T} d_i - \sum_{l \in (N \setminus T)} v(l) \right) = \\ &= \sum_{l \in T} d_l + d_j - E + \sum_{l \in (N \setminus (T \cup \{i\}))} v(l) \geq \sum_{l \in T} d_l + d_j - E \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(\tilde{d}_T)_j \geq \tilde{E}_T \quad \forall j \in N$  □

**Corolario 3.34.** Sea  $T \in \mathcal{F}$ , si  $|T| = n - 2$ , entonces  $C(v_T) = I(v_T)$

Por lo tanto, por el Lema 3.33, vemos que las coaliciones maximales tienen núcleos asociados que son simplex cuyos centros de gravedad es la media de sus puntos extremos.

**Lema 3.35.** Sea  $P, Q \in \mathcal{F}$ , se tiene que:

1.  $v_P(S) = \sum_{i \in S} d_i \quad \forall S \subseteq P$ .
2. Si  $P \cap Q = \emptyset$ , entonces  $v_P(N \setminus Q) \geq E - \sum_{i \in Q} d_i$

El siguiente lema revela que, dadas dos coaliciones de la familia  $\mathcal{F}$ , el conjunto de asignaciones que son estables en ambos juegos de utopía tiene medida nula. Lo demostraremos encontrando un hiperplano de separación entre ambos conjuntos.

**Lema 3.36.** Sea  $T, R \in \mathcal{F}$ ,  $T \neq R$  y  $v_T, v_R \in G^N$  los juegos de  $T$ -utopía y  $R$ -utopía, entonces  $\text{Vol}(C(v_T) \cap C(v_R)) = 0$ .

*Demostración.* Veremos que existe un hiperplano separando  $C(v_T)$  y  $C(v_R)$ . Distinguiremos tres casos:

1. Si  $T = \emptyset$ , entonces  $v_T = v$  y el hiperplano  $\sum_{i \in R} x_i = \sum_{i \in R} d_i$  separa  $C(v)$  y  $C(v_R)$ .  
Si  $y \in C(v)$ , entonces  $\sum_{j \in R} y_j = E - \sum_{j \in N \setminus R} y_j \leq E - v(N \setminus R) = \sum_{i \in R} d_i$ . Por otro lado, si  $z \in C(v_R)$  entonces  $\sum_{j \in R} z_j \geq v_R(R) = \sum_{i \in R} d_i$ .
2. Si  $T, R \neq \emptyset$  y  $R \cap T = \emptyset$  el hiperplano  $\sum_{i \in T} x_i = \sum_{i \in T} d_i$  separa  $C(v_R)$  y  $C(v_T)$ .  
Si  $y \in C(v_T)$  entonces  $\sum_{j \in T} y_j \geq v_T(T) = \sum_{j \in T} d_j$ . Por otro lado, si  $z \in C(v_R)$  entonces, usando el Lema 3.35, tenemos que  $\sum_{j \in T} z_j = E - \sum_{j \in N \setminus T} z_j \leq E - v_R(N \setminus T) \leq \sum_{j \in T} d_j$ .
3. Ahora, si  $R \cap T \neq \emptyset$  y  $T, R \neq \emptyset$ . Asumimos, sin pérdida de generalidad, que  $|R| \geq |T|$ . Entonces  $S = R \cap (N \setminus T) \neq \emptyset$ . Trivialmente,  $a_R(S) = \sum_{j \in S} d_j$  y  $\tilde{v}_R(S) = 0$ . El hiperplano  $\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} d_i$  separa los conjuntos  $C(v_R)$  y  $C(v_T)$ .  
Si  $y \in C(v_R)$  entonces  $\sum_{j \in S} y_j \geq v_R(S) = \sum_{i \in S} d_i$ . Por otro lado, sea  $z \in C(v_T)$ , como  $S \subset N \setminus T$  podemos aplicar el Lema 3.35 y tenemos que  $\sum_{j \in S} z_j = E - \sum_{j \in N \setminus S} z_j \leq E - v_T(N \setminus S) \leq \sum_{i \in S} d_i$ .

□

Por lo tanto, hemos probado que la intersección de dos juegos de utopía es, a lo sumo,  $(n - 2)$ -dimensional (una cara), por lo que su volumen  $(n - 1)$ -dimensional es nulo.

**Lema 3.37.** Si  $x \in I(v) \setminus C(v)$  y  $T_x = \{i \in N : x_i > d_i\}$ , entonces  $T_x \in \mathcal{F}$  y  $1 \leq |T_x| \leq n - 2$

Con estos lemas y proposiciones previos estamos en disposición de demostrar la partición del conjunto de imputaciones en núcleos de juegos de utopía.

**Teorema 3.38.** Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota y  $v \in G^N$  el juego de bancarrota asociado, entonces  $I(v) = \cup_{T \in \mathcal{F}} C(v_T)$ .

*Demostración.* Primero, observamos que, si  $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$  entonces, sabemos que  $d_1 > E$  por lo que  $I(v) = C(v)$ .

Asumamos que  $\mathcal{F}$  contiene al menos una coalición no vacía. Entonces,  $\forall T \in \mathcal{F}$ , por la Proposición 3.32, tenemos que  $C(v_T) \subset I(v_T) \subset I(v)$ . Por lo tanto,  $\cup_{T \in \mathcal{F}} C(v_T) \subset I(v)$ .

Para demostrar que  $I(v) \subset \cup_{T \in \mathcal{F}} C(v_T)$  es suficiente con ver que si  $x \in I(v) \setminus C(v)$  entonces existe  $T \in \mathcal{F}$  tal que  $x \in C(v_T)$ . Así que, si  $x \in I(v) \setminus C(v)$  tomamos  $T = \{i \in N : x_i > d_i\}$ . Por el Lema 3.37, sabemos que  $T \in \mathcal{F}$  y  $1 \leq |T|$ . Primero demostramos que  $x \in I(v_T)$ .

Claramente, si  $i \notin T$  entonces  $v_T(i) = v(i) \leq x_i$  ya que  $x \in I(v)$ . Sin embargo, si  $i \in T$ , entonces  $x_i > d_i = v_T(i)$ . Queda por demostrar que si  $i \notin T$  entonces  $x_i \leq v_T(N) - v_T(N \setminus \{i\}) = \min\{d_i, E - \sum_{j \in T} d_j - \sum_{l \in N \setminus (T \cup \{i\})} v(l)\}$ . Si  $i \notin T$ , entonces  $x_i \leq d_i$ . Ahora, el hecho de que  $x \in I(v)$  implica que

$$x_i = E - \sum_{j \in T} x_j - \sum_{l \in N \setminus (T \cup \{i\})} x_l \leq E - \sum_{j \in T} d_j - \sum_{l \in N \setminus (T \cup \{i\})} v(l)$$

con lo que el resultado está probado.  $\square$

Utilizando el Lema 3.36 y el Teorema 3.38 tenemos una descomposición del conjunto de imputaciones de cualquier juego de bancarrota en núcleos de juegos que son disjuntos entre ellos.

Seguiremos viendo que, para cada coalición  $T$ , su juego  $T$ -utopía es estratégicamente equivalente al juego de bancarrota  $\tilde{v}_T$ . Así que el conjunto de imputaciones de  $\tilde{v}_T$  admite una descomposición de los núcleos de los juegos de utopía asociados a  $\tilde{v}_T$ .

El siguiente lema, de fácil demostración, relaciona el juego de utopía de la unión de dos coaliciones con los juegos de utopía de las coaliciones.

**Lema 3.39.** *Si  $T, R \in \mathcal{F}$ ,  $T \cap R = \emptyset$  y  $T \cup R \in \mathcal{F}$ , entonces  $v_{T \cup R} = (v_T)_R$ .*

Sea  $T \in \mathcal{F}$ , denotemos por  $\mathcal{F}_T = \{S \in \mathcal{F} : T \subset S\}$ , es decir, la familia de coaliciones en  $\mathcal{F}$  que contienen a  $T$ . Nótese que  $T$  es una coalición maximal de la familia si, y solo si  $\mathcal{F}_T = \{T\}$  y  $I(v_T) = C(v_T)$ . Por lo tanto, por la descomposición que vimos en el teorema anterior, tenemos que  $I(v_T) = \cup_{S \in \mathcal{F}_T} C(v_S)$ .

Así que, una vez determinada la familia  $\mathcal{F}$ , calcularemos el core-center de las coaliciones maximales, los cuales conocemos por ser símplices. Hecho esto, eliminamos dichas coaliciones y calcularemos los maximales de la nueva familia. De estas familias podremos calcular su centro de gravedad en función de las calculadas en el paso anterior. De modo recursivo, calcularemos el core-center de todos los juegos de utopía. Podemos calcular los centros de gravedad y sus pesos de los núcleos de los juegos de utopía a partir de los anteriores maximales de  $\mathcal{F}$ . Cuando tenemos todos calculados, podremos aplicar la propiedad de arquímedes del centro de masas para obtener el core-center del juego de bancarrota inicial.

Los volúmenes del conjunto de imputaciones y del núcleo del juego de utopía de la coalición  $T$  escalados por el factor  $\alpha = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$ , los denotamos por  $p_T^I = \frac{1}{\alpha} \text{Vol}(I(v_T))$  y por  $p_T = \frac{1}{\alpha} \text{Vol}(C(v_T))$ .

Empezamos considerando el problema inicial con estado  $\tilde{E}_T$  y  $n$  demandantes con demandas iguales al estado. Denotamos por  $\tilde{v}_T^I$  el problema de bancarrota asociado. Veremos que el centro de masas es el de un simplex.

**Lema 3.40.** *El juego  $v_T^I = a_T + \tilde{v}_T^I \in G^N$  es estratégicamente equivalente al juego  $\tilde{v}_T^I$ . Además,  $\tilde{v}_T^I(N) = \tilde{E}_T$  y  $\tilde{v}_T^I(S) = 0$  si  $S \neq N$ ;  $I(v_T) = C(v_T^I) = a_T + I(\tilde{v}_T^I)$ ;  $p_T^I = (\tilde{E}_T)^{n-1}$ ; y  $\mu_i(I(v_T)) = \mu_i(v_T^I) = a_T(i) + \frac{\tilde{E}_T}{n} \quad \forall i \in N$*

*Demostración.* Cómo  $a_T$  es un juego aditivo, tomando  $k = 1$ , se tiene que  $v_T^I = a_T + \tilde{v}_T^I \in G^N$  es estratégicamente equivalente a  $\tilde{v}_T^I$ . Las siguientes relaciones se siguen de los lemas 3.2 y 3.42.  $\square$

Con este resultado y, con la teselación proporcionada en el Teorema 3.38, tenemos que:

$$p_T^I = p_T + \sum_{S \in \mathcal{F}_T, S \neq T} p_S \quad (3.3)$$

y

$$p_T^I \mu(v_T^I) = p_T \mu(v_T) + \sum_{S \in \mathcal{F}_T, S \neq T} p_S \mu(v_S). \quad (3.4)$$

Ahora, a parte del core-center, podemos calcular los pesos relativos de todos los núcleos de los juegos de utopía, que serán también necesarios para poder implementar el algoritmo.

En el caso de que  $T$  sea una coalición maximal, tenemos que  $p_T^I = p_T = (\tilde{E}_T)^{n-1}$  y  $\mu_i(v_T) = a_T(i) + \frac{\tilde{E}_T}{n}$ ,  $\forall i \in N$ . Por lo tanto, el algoritmo empieza con las coaliciones maximales y procediendo de modo recurrente hacia atrás aplicando las igualdades (3.3) y (3.4) podemos calcular el core-center para todas las coaliciones de  $\mathcal{F}$ . Formalmente, definimos, para cada coalición  $T$  un problema de bancarrota  $(\tilde{E}_T^*, \tilde{d}_T^*) \in B^N$  tal que las demandas son iguales al estado  $\tilde{E}_T^*$  y el juego aditivo  $a_T^* \in G^N$ :

- Si  $T$  es una coalición maximal de  $\mathcal{F}$ , entonces  $\tilde{E}_T^* = \tilde{E}_T$  y  $a_T^* = a_T$ .
- Si  $\mathcal{F}_T \neq \{T\}$  entonces  $\tilde{E}_T^* = \frac{p_T^I}{p_T} \tilde{E}_T - \sum_{S \in \mathcal{F}_T, S \neq T} \frac{p_S}{p_T} \tilde{E}_S^*$  y  $a_T^* = \frac{p_T^I}{p_T} a_T - \sum_{S \in \mathcal{F}_T, S \neq T} \frac{p_S}{p_T} a_S^*$

Sea  $\tilde{v}_T^*$  el juego de bancarrota asociado al problema  $(\tilde{E}_T^*, \tilde{d}_T^*) \in B^N$  y  $v_T^* = a_T^* + \tilde{v}_T^* \in G^N$ . El siguiente resultado resume la información relevante que almacena el algoritmo.

**Proposición 3.41.** *Para cada coalición de la familia  $\mathcal{F}$ ,  $T$ , se tiene que:*

1.  $p_T = (\tilde{E}_T)^{n-1} - \sum_{S \in \mathcal{F}_T, S \neq T} p_S$
2.  $\tilde{E}_T^* = \tilde{E}_T + \sum_{|S|=|T|+1, S \in \mathcal{F}_T} \frac{p_S}{p_T} (\tilde{E}_T - \tilde{E}_S)$  y  $\tilde{E}_T^* \geq \tilde{E}_T \geq \tilde{E}_S > 0 \quad \forall S \in \mathcal{F}_T$ .
3.  $a_T^*(i) = d_i$  si  $i \in T$  y  $a_T^* = v(i) - \frac{p_S}{p_T} (d_i - v(i))$  si  $i \notin T$
4.  $I(\tilde{v}_T^*) = C(\tilde{v}_T^*)$ ;  $\mu_i(\tilde{v}_T^*) = \frac{\tilde{E}_T^*}{n} \forall i \in N$ ; y  $\mu_i(v_T) = \mu_i(\tilde{v}_T^*) = a_T^*(i) + \frac{\tilde{E}_T^*}{n} \forall i \in N$

Mediante estos cálculos, vamos calculando el core-center y, terminamos cuando  $T = \emptyset$  y, este paso final nos proporciona una expresión para el cálculo del core-center, dada en el siguiente teorema. Sea  $F = \{i \in N : \{i\} \in \mathcal{F}\}$  y denotamos por  $\delta$  la función indicadora, que vale 1 si  $i \in F$  y cero en otro caso. En adelante simplificamos la notación, escribiendo  $p_i$  y  $p$  en lugar de  $p_{\{i\}}$  y  $p_\emptyset$ , respectivamente.

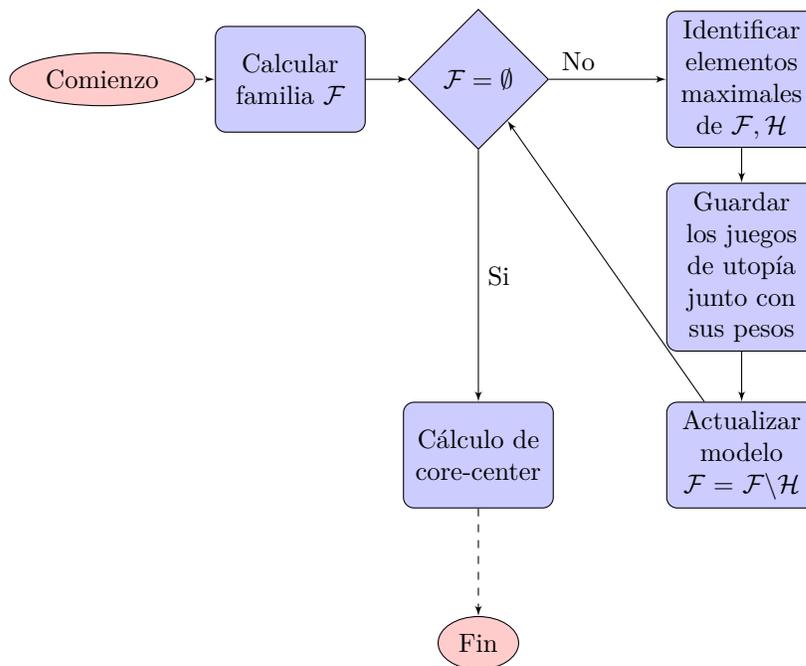
**Teorema 3.42.** *Sea  $(E, d) \in B^N$  un juego de bancarrota,  $v \in G^N$  el juego de bancarrota asociado 0-normalizado y  $\text{Vol}(C(v)) > 0$ . Entonces*

$$\mu_i(E, d) = \frac{1}{n} (E + \sum_{j \in F} \frac{p_j}{p} d_j) - \delta(i) \frac{p_i}{p} d_i, \quad \forall i \in F$$

*Demostración.* Por la proposición anterior, sabemos que, si  $T = \emptyset$ , entonces existe  $E^* = E + \sum_{k \in F} \frac{p_k}{p} \cdot d_k > 0$  y un vector  $a^* \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\mu_i(v) = a_i^* + \frac{E^*}{n} \forall i \in N$ . Además, si  $v(i) = 0, i \in N$ , entonces  $a^*(i) = -\frac{p_i}{p} \cdot d_i$  si  $i \in F$  y  $a^*(i) = 0$  en otro caso. Con esto ya tenemos el resultado probado.  $\square$

Por lo tanto, el core-center divide de forma igualitaria un estado utópico entre los demandantes que consiste en, el estado original más una proporción de su demanda en función del peso que ocupe su juego de utopía asociado, que es  $E + \sum_{j \in F} \frac{p_j}{p} d_j$ . Una vez hecho esto, teniendo en cuenta que, aquellos jugadores con demandas más pequeñas, tienen juegos de utopía con un peso mayor ( $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ ), el reparto de cada agente es disminuido en función de dicho peso.

Ahora, a modo de resumen, ilustramos el algoritmo con un diagrama paso por caso de como hay que proceder y cerraremos la sección con un ejemplo. Sea  $(E, d) \in B^N$ :

**Ejemplo:**

Sea el problema de bancarrota de 4 demandantes, con estado  $E = 10$  y vector de demandas  $d = (2, 4, 7, 9)$ . Sea  $v \in G^N$  su juego de bancarrota asociado calculado de la siguiente forma:

$$v(S) = \max\{0, E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j\} \quad \forall S$$

En la Figura 3.12 vemos representada la proyección del núcleo del juego.

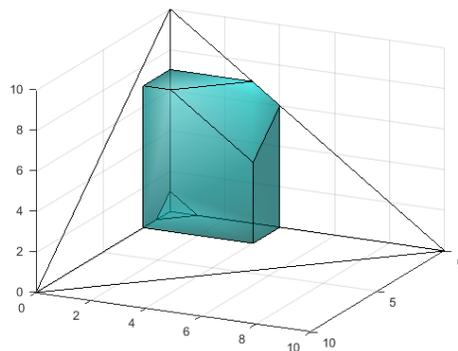


Figura 3.12: Núcleo del juego de bancarrota  $E = 10$  y  $d = (2, 4, 7, 9)$

Para el cálculo del core-center, lo primero que tenemos que hacer es calcular los elementos de la familia  $\mathcal{F}$ , i.e, aquellas coaliciones  $T$  de 1 o 2 jugadores que cumplan que  $\sum_{i \in T} d_i < E$ . Claramente, dicha familia  $\mathcal{F}$  es:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$$

A continuación, describimos los juegos de utopía de las coaliciones de esta familia dados en la siguiente tabla:

	{1}	{2}	{3}	{4}	{1, 2}	{1, 3}
$\tilde{E}_T$	8	6	3	1	4	1
$\tilde{d}_T$	(8, 4, 7, 9)	(2, 6, 7, 9)	(2, 4, 3, 9)	(2, 4, 7, 1)	(4, 4, 7, 9)	(1, 4, 1, 9)
$a_T$	(2, 0, 0, 0)	(0, 4, 0, 0)	(0, 0, 7, 0)	(0, 0, 0, 9)	(2, 4, 0, 0)	(2, 0, 7, 0)

Los elementos maximales de este conjunto son las coaliciones  $\{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}$ , para las que tenemos que  $C(v_T) = I(v_T)$ , representados en la Figura 3.13. Observamos que, para estos problemas, se tiene que todas las demandas son mayores que el estado. Por lo tanto, el core-center de cada uno (sin tener en cuenta la parte aditiva) será  $\mu(\tilde{v}_T) = \frac{\tilde{E}_T}{4}$ .

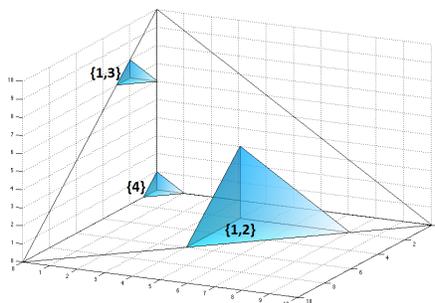


Figura 3.13: Núcleos de los juegos de utopía de las coaliciones maximales de  $\mathcal{F}$

En el primer paso del algoritmo, calculamos los pesos de estas coaliciones maximales y los problemas  $(\tilde{E}_T^*, \tilde{d}_T^*)$  que, por las fórmulas del algoritmo y por (3.3) y (3.4), se tiene:

- $p_4 = p_4^I = 1^3 = 1; \tilde{E}_4^* = \tilde{E}_4 = 1; a_4^* = a_4 = (0, 0, 0, 9)$
- $p_{1,2} = p_{1,2}^I = 4^3 = 64; \tilde{E}_{1,2}^* = \tilde{E}_{1,2} = 4; a_{1,2}^* = a_{1,2} = (2, 4, 0, 0)$
- $p_{1,3} = p_{1,3}^I = 1^3 = 1; \tilde{E}_{1,3}^* = \tilde{E}_{1,3} = 1; a_{1,3}^* = a_{1,3} = (2, 0, 7, 0)$

Así que ahora, guardamos todos esos valores, quitamos los elementos maximales de  $\mathcal{F}$  y actualizamos dicha familia, denotando por  $\mathcal{F}^1$  la nueva familia. Por lo tanto,  $\mathcal{F}^1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$  y volvemos a empezar, viendo que los elementos maximales de este nuevo conjunto son  $\{1\}, \{2\}$  y  $\{3\}$  para los que ahora tenemos que,  $I(v_1) = C(v_1) \cup C(v_{1,2}) \cup C(v_{1,3})$ ,  $I(v_2) = C(v_2) \cup C(v_{1,2})$  y  $I(v_3) = C(v_3) \cup C(v_{1,3})$ , representados en la Figura 3.14, donde el  $C(v_1)$  aparece en amarillo, el  $C(v_2)$  en rojo y  $C(v_3)$  en verde.

En este segundo paso, tenemos que los nuevos juegos no cumplen que las demandas de todos los jugadores sean mayores que el estado por lo que ahora ya no tenemos que los núcleos de los juegos asociados sean tetraedros. Por lo tanto, tenemos que usar los valores calculados en el primer paso y las relaciones  $I(v_1) = C(v_1) \cup C(v_{1,2}) \cup C(v_{1,3})$ ,  $I(v_2) = C(v_2) \cup C(v_{1,2})$  y  $I(v_3) = C(v_3) \cup C(v_{1,3})$ . Tenemos que:

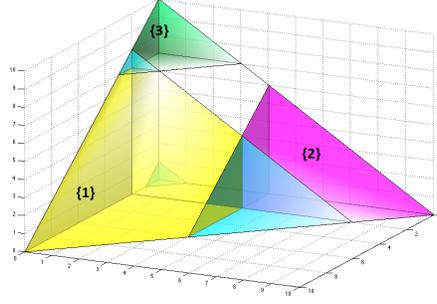


Figura 3.14: Núcleos de los juegos de utopía de las coaliciones maximales de  $\mathcal{F}^1$

- $p_1 = p_1^I - p_{1,2} - p_{1,3} = 8^3 - 64 - 1 = 447$ ;  
 $\tilde{E}_1^* = \frac{p_1^I}{p_1} \cdot \tilde{E}_1 - \frac{p_{1,2}}{p_1} \cdot \tilde{E}_{1,2}^* - \frac{p_{1,3}}{p_1} \cdot \tilde{E}_{1,3}^* = \frac{8^3}{447} \cdot 8 - \frac{64}{447} \cdot 4 - \frac{1}{447} \cdot 1 = \frac{3839}{447}$ ;  
 $a_1^* = \frac{p_1^I}{p_1} \cdot a_1 - \frac{p_{1,2}}{p_1} \cdot a_{1,2}^* - \frac{p_{1,3}}{p_1} \cdot a_{1,3}^* = (2, -\frac{256}{447}, -\frac{7}{447}, 0)$
- $p_2 = p_2^I - p_{1,2} = 6^3 - 64 = 152$ ;  
 $\tilde{E}_2^* = \frac{p_2^I}{p_2} \cdot \tilde{E}_2 - \frac{p_{1,2}}{p_2} \cdot \tilde{E}_{1,2}^* = \frac{6^3}{152} \cdot 6 - \frac{64}{152} \cdot 4 = \frac{130}{19}$ ;  
 $a_2^* = \frac{p_2^I}{p_2} \cdot a_2 - \frac{p_{1,2}}{p_1} \cdot a_{1,2}^* = (-\frac{16}{19}, 4, 0, 0)$
- $p_3 = p_3^I - p_{1,3} = 3^3 - 1 = 26$ ;  
 $\tilde{E}_3^* = \frac{p_3^I}{p_3} \cdot \tilde{E}_3 - \frac{p_{1,3}}{p_3} \cdot \tilde{E}_{1,3}^* = \frac{3^3}{26} \cdot 3 - \frac{1}{26} \cdot 1 = \frac{40}{13}$ ;  
 $a_3^* = \frac{p_3^I}{p_3} \cdot a_3 - \frac{p_{1,3}}{p_1} \cdot a_{1,3}^* = (-\frac{1}{13}, 0, 7, 0)$

Volvemos a guardar todos estos valores y actualizamos el conjunto  $\mathcal{F}$  y nos encontramos que  $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$ . En la Figura 3.15 observamos que la última pieza de la teselación que queda es  $C(v)$ . Por lo que estamos en el último paso y tenemos que calcular  $p_\emptyset$  de la siguiente forma (utilizando la Proposición 3.41):

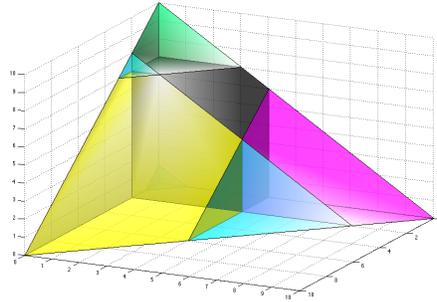


Figura 3.15: Partición del conjunto de imputaciones del juego en el núcleo del mismo junto con sus juegos de utopía

$$p_\emptyset = p_\emptyset^I - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_{1,2} - p_{1,3} = 10^3 - 447 - 152 - 26 - 1 - 64 - 1 = 309$$

Con este último paso ya tenemos terminado el algoritmo y disponemos de todos los resultados que nos permiten calcular el core-center. Con  $\alpha = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} = \frac{1}{3}$  y, con esto, ya podemos calcular el volumen del núcleo.  $Vol(C(v)) = \frac{1}{\alpha} \cdot p_0 = 103$ .

Por lo tanto, usamos la fórmula que obtuvimos en el Teorema 3.44 y obtenemos:

- $\mu_1(E, d) = \frac{1}{4} \cdot (E + \frac{p_1}{p} d_1 + \frac{p_2}{p} d_2 + \frac{p_3}{p} d_3 + \frac{p_4}{p} d_4 - \frac{p_1}{p} d_1) = 0.9765$ .
- $\mu_2(E, d) = \frac{1}{4} \cdot (E + \frac{p_1}{p} d_1 + \frac{p_2}{p} d_2 + \frac{p_3}{p} d_3 + \frac{p_4}{p} d_4 - \frac{p_2}{p} d_2) = 1.9021$ .
- $\mu_3(E, d) = \frac{1}{4} \cdot (E + \frac{p_1}{p} d_1 + \frac{p_2}{p} d_2 + \frac{p_3}{p} d_3 + \frac{p_4}{p} d_4 - \frac{p_3}{p} d_3) = 3.2807$ .
- $\mu_4(E, d) = \frac{1}{4} \cdot (E + \frac{p_1}{p} d_1 + \frac{p_2}{p} d_2 + \frac{p_3}{p} d_3 + \frac{p_4}{p} d_4 - \frac{p_4}{p} d_4) = 3.8406$ .

### 3.3.2. Algoritmo interior

En esta sección presentamos un algoritmo diferente al anterior que llamaremos algoritmo interior debido a que ahora, calcularemos el core-center diseccionando el núcleo del juego, a diferencia del anterior algoritmo, donde teselábamos el conjunto de imputaciones.

Para empezar, estudiaremos una posible descomposición del núcleo de un juego de bancarrota.

#### Descomposición del núcleo de un juego de bancarrota

A partir de este momento del trabajo, como ya demostramos la dualidad del núcleo, trabajaremos con problemas de bancarrota  $(E, d)$  en los que  $\frac{D}{2} \geq E$  sin pérdida de generalidad ya que, si estamos ante un problema del otro tipo, trabajaremos con su problema dual para calcular su core-center y volveremos al original. El trabajo que realizaremos en los siguientes puntos consistirá en hacer una disección del núcleo del juego de bancarrota con el que obtendremos una forma más sencilla para el cálculo de su centro de gravedad. Sea  $v \in G^N$  el juego asociado al problema de bancarrota  $(E, d)$ , supondremos también, sin pérdida de generalidad que  $v$  está 0-normalizado y, si no es así, lo 0-normalizamos.

Empezaremos buscando juegos cuyos núcleos sean interiores al núcleo original y de los cuales conozcamos su centro de gravedad.

**Proposición 3.43.** *Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota,  $v \in G^N$  su juego asociado y  $C(v)$  el núcleo de dicho juego, existe un problema de bancarrota  $(E, d') \in B^N$ , siendo  $v' \in G^N$  su juego asociado y  $C(v')$  el núcleo de dicho juego tal que  $d' = R(2E, d)$  y  $C(v') \subseteq C(v)$ , siendo  $R$  una regla de bancarrota.*

*Demostración.* Para empezar, veremos que  $(E, d')$  es un problema de bancarrota.  $d'_i = R_i(2E, d) \geq 0 \forall i \in N$  y  $\sum_{i \in N} d'_i = 2E > E$ .

Se tiene que  $C(v') = \{x \in H : v'(i) \leq x_i \leq \min\{E, R_i(2E, d)\} \forall i \in N\}$  y  $C(v) = \{x \in H : v(i) \leq x_i \leq \min\{E, d_i\} \forall i \in N\}$ . Así que, tenemos que demostrar que  $v'(i) \geq v(i)$  y que  $\min\{E, R_i(2E, d)\} \leq \min\{E, d_i\}, \forall i \in N$ .

- $v'(i) = \max\{0, E - \sum_{j \neq i} R_j(2E, d)\} \geq \max\{0, E - \sum_{j \neq i} d_j\} \iff \sum_{j \neq i} d_j \geq \sum_{j \neq i} R_j(2E, d)$ .
- $\min\{E, R_i(2E, d)\} \leq \min\{E, d_i\} \iff R_i(2E, d) \leq d_i$ .

□

Denominaremos al juego  $v'$  como juego base. Por eficiencia, se tiene que  $\sum_{i \in N} d'_i = 2E$ . Nos interesa buscar problemas de este tipo dentro de nuestro núcleo principal debido a que, para este tipo de problemas tenemos una forma sencilla de calcular su core-center y el peso que ocupan en el núcleo del problema principal, como vemos en los siguientes resultados.

**Lema 3.44.** Sea  $(E, d) \in B_{0,5}^N$  un problema de bancarrota con  $v$  el juego asociado. El volumen del núcleo de dicho juego base es:

$$\text{Vol}(C(v)) = \prod_{i=1}^{n-1} d_i - \frac{2}{(n-1)!} \cdot \sum_{S \in \mathcal{F}^*} (-1)^{|S|} \cdot (D/2 - d_n - d_S)^{n-1}$$

$$\text{siendo } \mathcal{F}^* = \{T \subset N : \sum_{i \in T} d_i < D/2 - d_n\}$$

**Lema 3.45.** Sea  $(E, d) \in B_{0,5}^N$  un problema de bancarrota con  $v$  el juego asociado, se tiene que:

$$\mu_i(v) = \frac{d_i}{2} \quad \forall i \in N$$

*Demostración.* Tenemos, por la dualidad, que  $\mu(v) = d - \mu(v_D, d)$  y, en este caso, tenemos que  $v = v_D$ , por lo que  $\mu(v) = d/2$ .  $\square$

**Proposición 3.46.** Sea  $(E, d) \in B_1^N$ , un problema de bancarrota y  $(E, d') \in B_{0,5}^N$  un problema base, siendo  $v'$  su juego asociado. Se tiene que  $v'$  es 0-normalizado.

*Demostración.* Para cada  $i \in N$ ,

$$v'(i) = \max\{0, E - \sum_{j \neq i} R_j(2E, d)\} = \max\{0, E - (2E - R_i(2E, d))\} = \max\{0, R_i(2E, d) - E\} = 0$$

ya que  $R_i(2E, d) \leq d_i \leq E$ .  $\square$

Ahora vamos a reescribir los juegos de utopía asociados a estos problemas base.

**Proposición 3.47.** Sea  $(E, d) \in B_1^N$ ,  $(E, d') \in B_{0,5}^N$  su problema base. Para cada coalición  $T \subset N$  se define el problema de utopía de la coalición  $T$  del problema base ( $T$ -utopía base)  $(\hat{E}_T, \hat{d}_T) \in B^N$  y el juego aditivo  $\hat{a}_T \in G^N$  de la siguiente forma:

	$\sum_{i \in T} d'_i \geq E$	$\sum_{i \in T} d'_i < E$
$\hat{E}_T$	$E$	$E - \sum_{i \in T} d'_i$
$\hat{d}_T$	$(\hat{d}_T)_i = \begin{cases} d'_i & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \notin T \end{cases}$	$(\tilde{d}'_T)_i = \begin{cases} \hat{E}_T & \text{si } i \in T \\ d'_i & \text{si } i \notin T \end{cases}$
$\hat{a}_T$	$\hat{a}_T(i) = 0, i \in N$	$\hat{a}_T(i) = \begin{cases} d'_i & i \in T \\ 0 & i \notin T \end{cases}$

Sea  $\hat{v}_T$  el juego de bancarrota asociado al problema de bancarrota  $(\hat{E}_T, \hat{d}_T) \in B^N$ . El juego de utopía de la coalición  $T$  del problema base  $(E, d')$  se define como  $v'_T = \hat{a}_T + \hat{v}_T \in G^N$ .

Una vez definidos estos problemas interiores a nuestro núcleo de bancarrota tenemos que estudiar las asignaciones del núcleo que no están en el problema base. Vemos entonces las asignaciones estables del problema original que lo son también de los juegos de utopía asociado al problema  $(E, d')$ . A estos problemas de bancarrota los denominaremos problemas de privilegios.

**Definición 3.48.** Sea  $(E, d) \in B^N$ ,  $v \in G^N$  su juego de bancarrota asociado y  $(E, d')$  su problema base asociado. Se define, para cualquier coalición  $T \subset N$ , el problema de privilegios  $(E^T, d^T)$  de la coalición  $T$  y sus juegos asociados,  $v^T$ , de la siguiente forma:

- Si  $\sum_{i \in T} d_i \geq E$ . El problema  $(E^T, d^T)$  es el problema  $T$ -utópico del problema base. Por lo tanto,  $v^T = v'_T$ .
- Si  $\sum_{i \in T} d_i < E$ . El problema  $(E^T, d^T)$  viene dado por:

$E^T$	$E - \sum_{j \in T} d'_j$
$d^T$	$(d^T)_j = \begin{cases} d_j - d'_j & \text{si } j \in T \\ d'_j & \text{si } j \notin T \end{cases}$
$a^T$	$a^T(j) = \begin{cases} d'_j & j \in T \\ 0 & j \notin T \end{cases}$

Sea  $\tilde{v}^T$  el juego de bancarrota asociado al problema  $(E^T, d^T)$ , se tiene que  $v^T = a^T + \tilde{v}^T$  será el juego de privilegios de la coalición  $T$ .

**Observación 3.49.** Si  $\exists i \in T$  tal que  $d_i = d'_i$ , entonces el núcleo asociado al juego de privilegios de la coalición  $T$  será degenerado, con lo que su volumen  $(n-1)$ -dimensional será nulo.

**Observación 3.50.** El problema de privilegios de la coalición  $T$  es un problema de bancarrota:

- $(d^T)_i \geq 0 \quad \forall i \in N$ .
- Tenemos que demostrar que  $\sum_{i \in N} (d^T)_i \geq E^T$ . Se tiene que  $\sum_{i \in N} (d^T)_i = \sum_{j \in T} d_j - \sum_{j \in T} d'_j + \sum_{j \notin T} d'_j \geq E - \sum_{j \in T} d'_j \iff \sum_{j \in T} d_j + \sum_{j \notin T} d'_j \geq E$ .  $\sum_{j \in T} d_j + \sum_{j \notin T} d'_j \geq \sum_{j \in N} d'_j \geq E$ , debido a que  $(E, d')$  es un problema de bancarrota.

Si el núcleo asociado al problema de privilegios de la coalición  $T$  no es degenerado, entonces  $d'_i < d_i \quad \forall i \in T$ . En ese caso, el problema de privilegios, asigna a todos los agentes de  $T$  su demanda del problema base y les permite renegociar la parte que no ha sido cubierta de su demanda inicial  $(d_j - d'_j)$  sobre el estado restante,  $E - \sum_{j \in T} d'_j$ , mientras que el resto de los agentes mantienen sus demandas iniciales y no gozan del privilegio de tener ya asignado un reparto antes de iniciar la resolución del problema.

Estos problemas de privilegios pueden verse también como la intersección entre los núcleos de los juegos de utopía del problema base y el núcleo del problema original.

**Proposición 3.51.** Sea  $(E, d) \in B_1^N$ ,  $(E, d') \in B_{0.5}^N$  un problema base y, para cada  $T \subset N$ , sea  $(E^T, d^T) \in B^N$  el problema de privilegios de la coalición  $T$ , siendo  $v^T$  el juego de bancarrota asociado y  $v'_T$  el juego de  $T$ -utopía del problema base, se tiene que:

$$C(v^T) = C(v) \cap C(v'_T)$$

*Demostración.* Sea  $T \subset N$ , distinguimos dos casos:

1.  $\sum_{i \in T} d_i \geq E$ . Por definición,  $v^T = v'_T$ , por lo que, solo tenemos que demostrar que  $C(v'_T) \subset C(v)$ . Claramente,  $C(v'_T) \subset C(v_T)$  y, se tiene que, si  $\sum_{i \in T} d_i \geq E$ , entonces  $C(v_T) \subset C(v)$ .
2.  $\sum_{i \in T} d_i < E$ . Observamos que, tanto para el problema de privilegios, como para el de utopía del problema base, el vector de traslación es idéntico, con lo que, el estado a repartir también coincide, siendo este  $E - \sum_{j \in T} d'_j$ .

Sea  $x \in C(v^T)$ , se tiene que,  $\forall i \in T$ ,  $d'_i \leq x_i \leq d'_i + \min\{d_i - d'_i, E - \sum_{i \in T} d'_i\} \iff d'_i \leq x_i \leq d_i$  ya que  $d_i - d'_i < E - \sum_{i \in T} d'_i \iff \sum_{i \neq j, i \in T} d'_i + d_j < E$  y, esto es cierto debido a que  $\sum_{i \in T} d_i < E$ . Por otro lado,  $\forall j \notin T$ , se tiene que  $0 \leq x_j \leq d'_j$ .

Sea ahora  $y \in C(v)$ , se tiene que,  $\forall i \in N$ ,  $0 \leq y_i \leq \min\{E, d_i\}$ .

Por último, sea  $z \in C(v'_T)$ , se tiene que,  $\forall i \in T, d'_i \leq z_i \leq d'_i + E - \sum_{i \in T} d'_i \iff d'_i \leq z_i \leq E - \sum_{j \in T, j \neq i} d'_j$ . Por otro lado,  $\forall j \notin T$ , se tiene que  $0 \leq x_j \leq d'_j$ .

Por lo tanto, está claro que, si  $j \notin T$ , entonces  $\{x : 0 \leq x_j \leq \min\{E, d_j\}\} \cap \{x : 0 \leq x_j \leq d'_j\} = \{x : 0 \leq x_j \leq d'_j\}$ , por lo que las restricciones de  $C(v^T)$  coinciden con las de  $C(v) \cap C(v'_T)$ .

Por otro lado, si  $i \in T$ , entonces  $\{x : 0 \leq x_i \leq d_i\} \cap \{x : d'_i \leq x_i \leq E - \sum_{j \in T, j \neq i} d'_j\} = \{x : d'_i \leq x_i \leq d_i\}$ , por lo que las restricciones de  $C(v^T)$  coinciden con las de  $C(v) \cap C(v'_T)$ . Esto es cierto debido a que  $d_i < E - \sum_{j \in T, j \neq i} d'_j \iff d_i + \sum_{j \in T, j \neq i} d'_j < E$ .  $d_i + \sum_{j \in T, j \neq i} d'_j < \sum_{j \in T} d'_j < \sum_{j \in T} d_j < E$ .

□

En los siguientes resultados veremos que el núcleo es la unión disjunta del juego base y sus juegos de utopía.

**Proposición 3.52.** *Sea  $(E, d) \in B^N$ ,  $(E, d')$  su problema base y, para cada  $T \subset N$ , sea  $(E^T, d^T) \in B^N$  el problema de privilegios de la coalición  $T$ , siendo  $\tilde{v}^T$  el juego de bancarrota asociado y  $v^T = a^T + \tilde{v}^T$ , el trasladado por la demanda, se tiene que:*

1.  $C(v^T) \subset C(v)$
2.  $\text{Vol}(C(v') \cap C(v^T)) = 0$
3.  $\text{Vol}(C(v^T) \cap C(v^S)) = 0 \quad \forall T, S \subset N, T \neq S$

*Demostración.*

1. Por la Proposición 3.51,  $C(v) \cap C(v'_T) \subset C(v)$
2.  $\text{Vol}(C(v') \cap C(v^T)) = \text{Vol}(C(v') \cap C(v) \cap C(v'_T)) = 0$  ya que  $\text{Vol}(C(v') \cap C(v'_T)) = 0$ .
3.  $C(v^T) \cap C(v^S) = C(v) \cap C(v'_T) \cap C(v'_S)$  y, por el Lema 3.36 sabemos que  $\text{Vol}(C(v'_T) \cap C(v'_S)) = 0$ , por lo que  $\text{Vol}(C(v^T) \cap C(v^S)) = 0$

□

**Proposición 3.53.** *Sea  $(E, d) \in B^N$  un juego de bancarrota,  $v \in G^N$  su juego asociado,  $(E, d')$  su juego base y  $(E^T, d^T)$ , sus juegos de privilegios para cada coalición  $T \subset N$ , se tiene que:*

$$\left( \bigcup_{T \subset N} C(v^T) \right) \cup C(v') = C(v)$$

*Demostración.* Aplicando las propiedades principales entre conjuntos, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left( \bigcup_{T \subset N} C(v^T) \right) \cup C(v') &= \bigcup_{T \subset N} \left( C(v) \cap C(v'_T) \right) \cup C(v') = \left( C(v) \cap \left( \bigcup_{T \subset N} C(v'_T) \right) \right) \cup C(v') = (C(v) \cup \\ C(v')) \cap \left( \left( \bigcup_{T \subset N} C(v'_T) \right) \cup C(v') \right) &= C(v) \cap \left( \left( \bigcup_{T \subset N} C(v'_T) \right) \cup C(v') \right) = C(v) \iff C(v) \subset \left( \left( \bigcup_{T \subset N} C(v'_T) \right) \cup \right. \\ C(v') \left. \right). \end{aligned}$$

Sea  $x \in C(v)$ , se tiene que,  $\forall i \in N, 0 \leq x_i \leq d_i$ . Distinguimos dos casos:

- Si  $x_i \leq d'_i \quad \forall i \in N$  entonces  $x \in C(v')$ .
- Si  $\exists T \subset N$  tal que  $x_i > d'_i$  para algún  $i \in T$ , entonces  $x \in C(v^T)$ .

□

Por lo tanto, ya tenemos una descomposición del núcleo de cualquier juego de bancarrota en diferentes núcleos de juegos más simples.

Tal y como definimos los problemas base, podemos elegir cualquier solución de un problema de bancarrota para realizar la descomposición. Sin embargo, dependiendo cual sea dicha solución, aparecerán diferentes juegos asociados a cada coalición y, para que, la descomposición sea lo más simple posible, buscaremos que aparezcan el menor número de juegos posibles. Esta claro que, si  $\exists i \in N$  tal que  $R_i(2E, d) = d'_i = d_i$ , entonces  $Vol(C(v^{\{i\}})) = 0$ , por lo que, buscamos aquella solución que nos de el número máximo de jugadores tales que  $R_i(2E, d) = d_i$ . Dicha solución será la *CEA* ya que, busca dar, en medida de lo posible, su demanda a los jugadores con demandas menores, siendo, usualmente, un vector del tipo  $CEA(2E, d) = (d_1, \dots, d_i, \lambda, \dots, \lambda)$ .

Por lo tanto, a partir de ahora, mientras que no se diga lo contrario, tomaremos los problemas base para cualquier problema de bancarrota  $(E, d) \in B^N$  como el problema  $(E, d') \in B^N$  tal que  $d' = CEA(2E, d)$ .

Una vez que tenemos claro como descomponer el núcleo de un juego de bancarrota, podemos introducir el denominado algoritmo interior.

### Condiciones básicas para el algoritmo

Sea  $(E, d) \in B^N$  un problema de bancarrota y  $v \in G^N$  su juego asociado, veremos, para empezar, en que condiciones, y de que forma, podremos calcular el core-center de dicho problema de forma inmediata:

1. Si  $d_i \geq E \ \forall i \in N$ . En este caso,  $\mu(E, d) = (\frac{E}{n}, \dots, \frac{E}{n})$ .
2. Si  $E = \frac{D}{2}$ , entonces  $\mu_i(E, d) = \frac{d_i}{2} \ \forall i \in N$ .
3. Si  $d_1 + d_2 > E$ . En este caso, solo tendremos en la familia  $\mathcal{F}$  coaliciones de 1 jugador. Por lo tanto,  $I(v) \setminus C(v)$  es un número finito de tetraedros (a lo sumo  $n$ ) de los que conocemos su centro de gravedad. Por la propiedad arquimediana del centro de masas podemos calcular el core-center fácilmente.

La idea del algoritmo es la siguiente. Si  $(E, d) \in B^N$  está en alguna de las condiciones anteriores, calculamos su core-center de la forma que sabemos. Si no es así, calculamos su juego base, su core-center, su volumen y los juegos de privilegios de cada coalición. Con cada juego de privilegios volvemos al paso inicial. Calculamos su core-center y su volumen si lo conocemos y, si no es así, lo volvemos a descomponer. Seguimos así sucesivamente y llegaremos a una descomposición del núcleo en problemas de bancarrota de los tipos anteriores.

Una posible formulación del algoritmo es la siguiente:

Sea el problema de bancarrota  $(E, d) \in B_1^N$  para el cual no conocemos su core-center,  $(E, d') \in B_{0.5}^N$  y,  $\forall T \subset N$  su problema de privilegios. Iniciamos con  $center = 0$ .

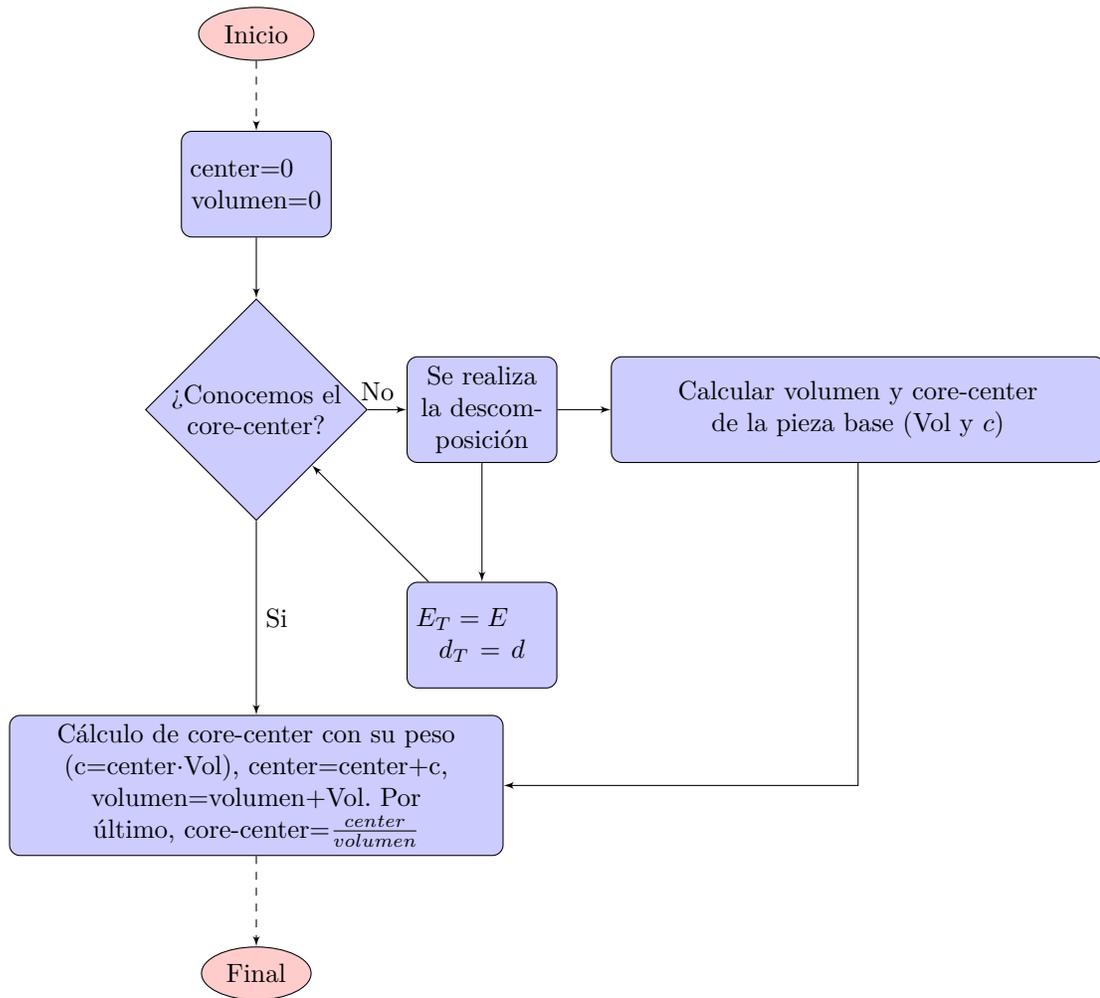
Paso 1. Descomponemos el núcleo de  $(E, d)$  según vimos antes.

Paso 2.  $\mu(v') = \frac{d'}{2}$  y guardamos  $center = center + \mu(v') \frac{Vol(E, d')}{Vol(E, d)}$

Paso 3. Seleccionamos aquellos núcleos que tienen medida positiva y almacenamos la información. Sea  $\mathcal{H} = \{(E_T, d_T) \in B^N : Vol((E^T, d^T)) > 0\}$ . Si  $\mathcal{H} = \emptyset$ ,  $\mu = center$ .

Paso 4. Para cada subproblema  $(E_T, d_T) \in \mathcal{H}$ , si conocemos su core-center, lo calculamos junto con el peso relativo que ocupa en el núcleo inicial y lo introducimos en la fórmula.  $center = center + \mu(v_T) \frac{Vol(E_T, d_T)}{Vol(E, d)}$ . En otro caso, nombramos  $E = E_T, d = d_T$  y volvemos al paso 1.

En el siguiente diagrama podemos ver gráficamente la implementación del mismo. Sea  $(E, d) \in B_1^N$ :



### Ejemplo:

Vamos a resolver ahora el mismo problema que con el algoritmo exterior, un problema con  $N = 4$ ,  $E = 10$  y  $d = (2, 4, 7, 9)$ . Observamos en la Figura 3.12 el núcleo de  $v$ , el juego de bancarrota asociado. Empezamos el algoritmo, iniciando con  $\text{core-center}=0$  y  $\text{volumen}=0$ .

1. Como  $(E, d)$  no cumple ninguna de las condiciones para que conozcamos su core-center, entonces calculamos su problema base, el cual será  $(E, d')$ , con  $d' = CEA(2E, d) = (2, 4, 7, 7)$ , siendo  $2E = 20$ ,  $\text{volumen} = \text{Vol}(C(v')) = 94.67$  y  $\text{core-center} = \mu(v) = (1, 2, 3.5, 3.5) \cdot \text{Vol}(C(v'))$

Ahora, vemos que el único juego que nos puede aparecer es el juego de privilegios de la coalición  $\{4\}$ , ya que, para cualquier otra coalición  $T \neq \{4\}$ , se tiene que  $\exists i \in T$  tal que  $d'_i = d_i$ . El problema de bancarrota de privilegios de la coalición  $\{4\}$  es el siguiente:

- $(E_4, d_4)$ , con  $E_4 = 3, d_4 = (d_1, d_2, d_3, d_4 - d'_4) = (2, 4, 7, 2), a_4 = (0, 0, 0, d'_4) = (0, 0, 0, 7)$  y, en este caso  $\text{Vol}(C(v_4)) \neq 0$ .

Por lo tanto, tenemos nuestro núcleo descompuesto en dos problemas, representado en la Figura 3.16.

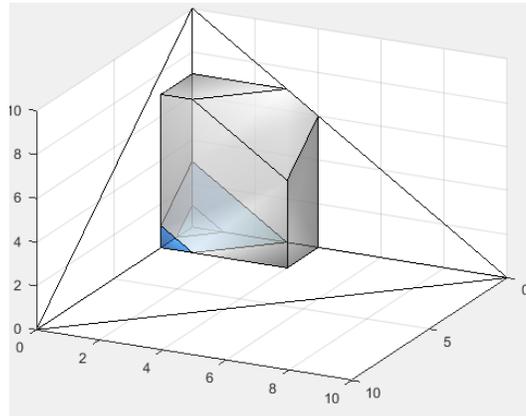


Figura 3.16: Disección del núcleo de problema  $(E, d)$  según el algoritmo interior

2. Solo nos queda por calcular el core-center y el volumen relativo del problema  $(E_4, d_4)$ , los cuales pueden calcularse fácilmente ya que estamos en una de las condiciones en las que conocemos el core-center. Con cuentas sencillas, obtenemos  $Vol(C(v_4)) = 8,33$  y  $\mu(v_4) = (0.71, 0.79, 0.71, 7+0.71)$ .

Por último,

$$\begin{aligned} \mu(v) &= \frac{\mu(v') \cdot Vol(C(v')) + \mu(v_4) \cdot Vol(C(v_4))}{Vol(C(v')) + Vol(C(v_4))} = \\ &= \frac{(1, 2, 3, 5, 3, 5) \cdot 94.67 + (0.71, 0.79, 0.71, 7.71) \cdot 8.33}{103} = (0.9765, 1.9021, 3.2807, 3.8406) \end{aligned}$$

Vemos que, en este ejemplo el algoritmo interior es más rápido que el exterior, terminando en solo dos pasos con sencillas operaciones. En el algoritmo exterior necesitábamos 3 pasos y más cuentas en cada paso.

En futuros trabajos estudiaremos en que condiciones utilizaremos un algoritmo u otro y plantearemos otro algoritmo que será la combinación de los dos vistos en este trabajo, el cual nos servirá para tener siempre una forma óptima de calcularlo.

En el Apéndice A se introduce el código R de los algoritmos expuestos, los cuales se optimizarán en un futuro y se creará una librería que se podrá descargar para el uso de la comunidad.



## Capítulo 4

# Una aplicación: Reparto de emisiones de $CO_2$

En este capítulo aplicaremos y compararemos algunas de las soluciones estudiadas a lo largo del trabajo en un problema real, la reducción de emisiones de  $CO_2$ .

En el año 2015 tuvo lugar la XXI Conferencia de las Naciones Unidas sobre Cambio Climático (COP 21) en donde se negoció el Acuerdo de París. El objetivo principal de dicho acuerdo fue el de mantener el aumento de la temperatura global del planeta muy por debajo de  $1,5^\circ C$  en el año 2030. Según diversos estudios, si esto se cumpliera, se conseguiría frenar el cambio climático.

Para lograrlo, uno de los puntos más importantes consistió en la reducción de la emisión de los gases efecto invernadero y, entre ellos el  $CO_2$ . Los países llegaron al acuerdo de que las emisiones de dicho gas tenían que alcanzar un máximo lo antes posible, para desde ahí, empezar a reducirlo. Los países desarrollados tendrían que empezar a disminuir dichas emisiones, mientras que a los menos desarrollados se les permitiría aumentar las emisiones pero poniendo ciertos límites.

En la Figura 4.1 observamos la evolución de las emisiones de  $CO_2$  desde el año 1960 hasta el año 2014. Como podemos ver, hasta este momento, el crecimiento es enorme, por lo que está clara la necesidad de disminuir dichas emisiones para la sostenibilidad de nuestro planeta. Usualmente, las unidades de medida de las emisiones de  $CO_2$  son los kilotonnes (kt).

Sin embargo, todo lo firmado en dicha conferencia no se llevó a cabo. Por lo tanto, el Programa de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente (PNUMA) en el año 2019 realizó un informe en el que aseguró que se deberían recortar las emisiones de  $CO_2$  un 7.6% anual entre 2020 y 2030.

Aunque todavía no hay ningún país que se comprometiera a realizar estas reducciones, como la necesidad de que tomen conciencia es enorme, en este trabajo estudiaremos recomendaciones de como debería actuar cada país para conseguir frenar el calentamiento global. Para ello plantearémos este problema como un problema de bancarrota. Necesitamos, por tanto, determinar el estado y las demandas de los países o regiones.

Como el PNUMA habla de reducciones desde el año 2020 y, los datos que conseguimos obtener son del 2014, los consideraremos como datos de este año en curso, aunque, obviamente estas emisiones variaron en los últimos 6 años. Con información más actualizada podríamos recalcular los repartos aquí obtenidos.

Tomaremos los datos de las emisiones de  $CO_2$  del banco mundial, de libre acceso, del año 2014 de los 15 países más contaminantes del mundo que son China, EEUU, UE, India, Rusia, Japón, Irán, Arabia Saudí, Corea del Sur, Canadá, México, Indonesia, Brasil, Sudáfrica y Turquía. El resto de países los agruparemos según su región quitando los países antes citados, pudiendo ser de Oriente medio, de África, de Asia, o de América Latina (ver Tabla 4.1).

Plantearémos dos problemas diferentes. En el primero de ellos, consideraremos que todos los países se comprometen con la lucha contra el cambio climático y, en el segundo, supondremos que el compro-

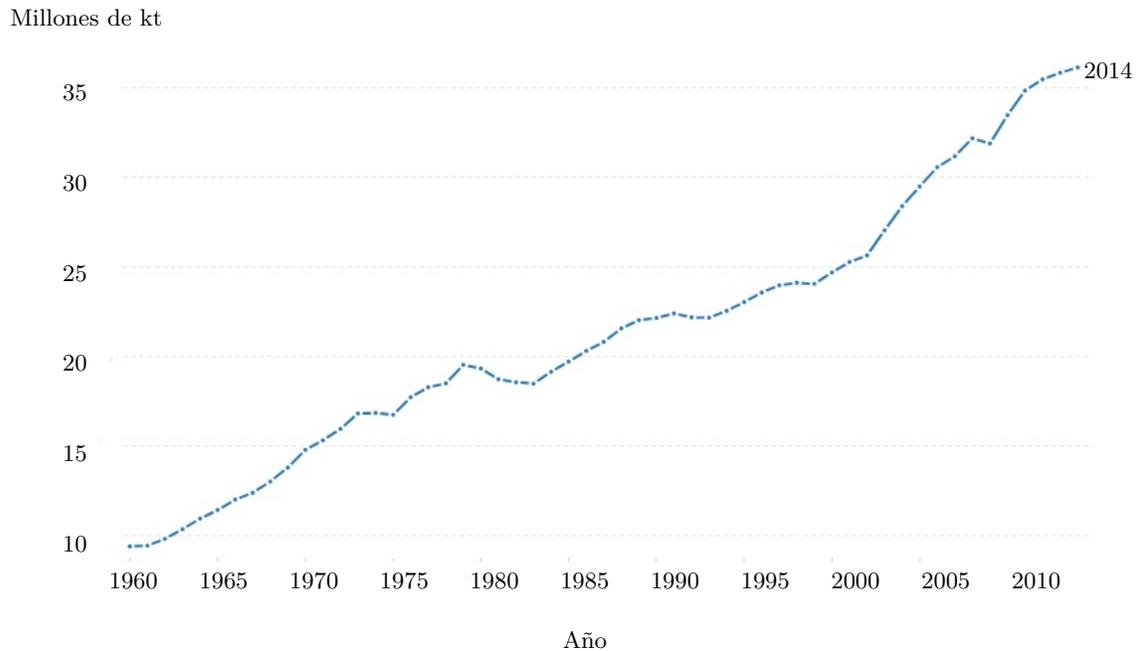


Figura 4.1: Evolución de las emisiones del  $CO_2$  desde 1960 hasta 2014

miso no es total y que China, el país más contaminante del mundo, no se compromete a reducir sus emisiones de  $CO_2$ , algo con lo que ya amenazó en diferentes ocasiones.

#### 4.1. Reparto si todos los países cooperan

Si todos los países se comprometen con la lucha contra el cambio climático tendremos un vector de 19 componentes (cada componente será la emisión de cada país o región), que será nuestro vector de demandas considerando que, cada país o, cada región, demandará seguir emitiendo las mismas cantidades que en ese año. Cabe añadir que, observando la Figura 4.1 en la que se aprecia una tendencia positiva, los países podrían demandar incluso más de lo que emiten en este momento, pero supondremos que el compromiso de cada país o región será, como mínimo, el de mantenerse como en el año 2014.

Así que, tendremos que resolver 10 problemas de bancarrota, siendo el estado de cada uno las emisiones permitidas por el PNUMA. Denotaremos por  $D$  la suma de las emisiones de cada región considerada en el año 2014, que es  $D = 32,855,840kt$  y, para el año 2021 se debería emitir mundialmente un 7.6% menos, por lo que  $E_{2021} = 0,924 \cdot D$  y, resolveremos el problema de bancarrota con estos valores para saber como tiene que rebajar las emisiones cada país. Hecho esto, resolveremos el siguiente problema de bancarrota con  $E_{2022} = 0,924 \cdot E_{2021} = 0,924^2 \cdot D$  para conocer como tendrían que ser las emisiones de cada país en el año 2022. Continuando así sucesivamente hasta el año 2030 conoceremos como debería actuar cada país para conseguir frenar el cambio climático en los próximos 10 años. En la Figura 4.2 observamos la evolución mundial que deben experimentar las emisiones de  $CO_2$  para conseguir frenar el cambio climático y, en la Tabla 4.2 vemos las emisiones máximas permitidas.

Ya tenemos planteado un problema de bancarrota en cada año en el contexto del racionamiento ya que tenemos que repartir un recurso que será escaso, las emisiones de  $CO_2$ .

Para resolverlo habrá que decidir que solución de las vistas a lo largo del trabajo utilizaremos. Con los algoritmos introducidos en este trabajo podemos obtener sin dificultad la solución que hemos estudiado en detalle, el core-center. El resto de soluciones las calculamos usando el paquete de R

Estado	Emisiones máximas permitidas
$E_{2021}$	$0,924 \cdot D = 30,358,790kt$
$E_{2022}$	$0,924 \cdot E_{2021} = 28,051,530kt$
$E_{2023}$	$0,924 \cdot E_{2022} = 28,051,530kt$
$E_{2024}$	$0,924 \cdot E_{2023} = 23,949,720kt$
$E_{2025}$	$0,924 \cdot E_{2024} = 22,129,540kt$
$E_{2026}$	$0,924 \cdot E_{2025} = 20,447,700kt$
$E_{2027}$	$0,924 \cdot E_{2026} = 18,893,670kt$
$E_{2028}$	$0,924 \cdot E_{2027} = 17,457,750kt$
$E_{2029}$	$0,924 \cdot E_{2028} = 15,130,960kt$
$E_{2030}$	$0,924 \cdot E_{2029} = 14,705,010kt$

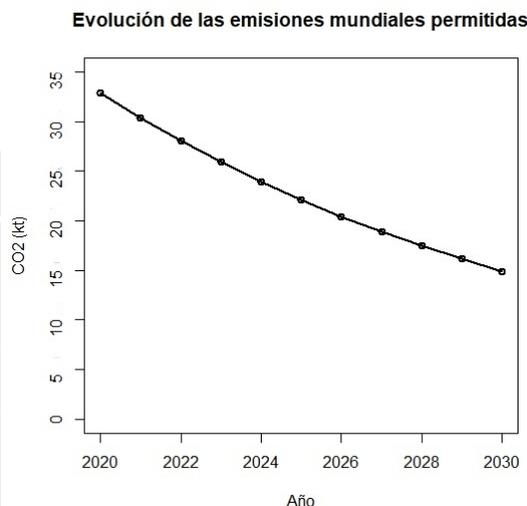


Figura 4.2: Evolución de las emisiones de  $CO_2$  permitidas por la PNUMA

«GameTheory» (Cano-Berlanga et al. (2017)). Al ser un juego con un número elevado de jugadores ( $n = 19$ ), la computación es laboriosa, por ejemplo, el programa R no es capaz de proporcionar la solución Random Arrival para problemas con más de 13 jugadores. Por lo tanto, las mejores soluciones en este aspecto son la proporcional, de cálculo inmediato y la regla del Talmud, que serán las que usaremos en este trabajo.

Resolvemos los 10 problemas de bancarrota numéricamente. En la Figura 4.3 vemos una comparación de la evolución de las diferentes soluciones para 6 regiones distintas: China, EEUU, UE, India, Rusia y África. Escogimos estas regiones debido a que China y EEUU son las más contaminantes, UE, India y Rusia ocupan posiciones intermedias y África es la menos contaminante, por lo que así, podremos comparar como se comportan las soluciones en función de sus demandas.

Las 3 soluciones introducidas nos dan valores coherentes que podríamos utilizar. Sin embargo, presentan diferencias importantes. Por ejemplo, la regla proporcional, «exige» más en los primeros años a los países más contaminantes, y menos a los menos contaminantes, mientras que, tanto Talmud, como el core-center tienen el comportamiento inverso. Además, en el año 2030, tenemos un problema del tipo  $E_{2030} < \frac{D}{2}$ , por lo que, la regla proporcional «exige» menos que las otras dos a los países más contaminantes y a los menos contaminantes les manda rebajar más las demandas. En este contexto, podemos quedarnos con el comportamiento que tienen el core-center y la regla del Talmud ya que, los grandes países están siendo muy reacios a comprometerse con la lucha contra el cambio climático, por esta razón, puede ser interesante no exigirle demasiado los primeros años para que aumente la conciencia y, en ese momento, exigir más esfuerzos para rebajarlo más. Además, al llegar al año 2030, puede ser interesante exigirle más a los que más contaminan debido a que son los países más desarrollados y

pueden conseguir encontrar otras vías para abastecerse mientras que, a regiones como África se le debería exigir bastante menos al ser una región pobre.

Por otro lado, al realizar una comparación entre la regla del Talmud y el core-center, que tienen comportamientos muy similares, podemos quedarnos con el core-center ya que tiene un comportamiento más suave, es decir, la disminución es siempre más progresiva y no hace cambios tan bruscos como la regla del Talmud. Por ejemplo, con las regiones de India, Rusia, UE y África a partir de los años 2025/2026 se mantiene constante hasta el año 2030, mientras que, el core-center, salvo en el caso de África, que se estanca más tarde, disminuye continuamente hasta el año 2030, lo cual tiene más sentido. No parece razonable exigirle muchos esfuerzos a un país hasta el año 2025 y después mantenerlo constante, pudiendo exigirle esfuerzos menores para alcanzar el mismo valor en el año 2030.

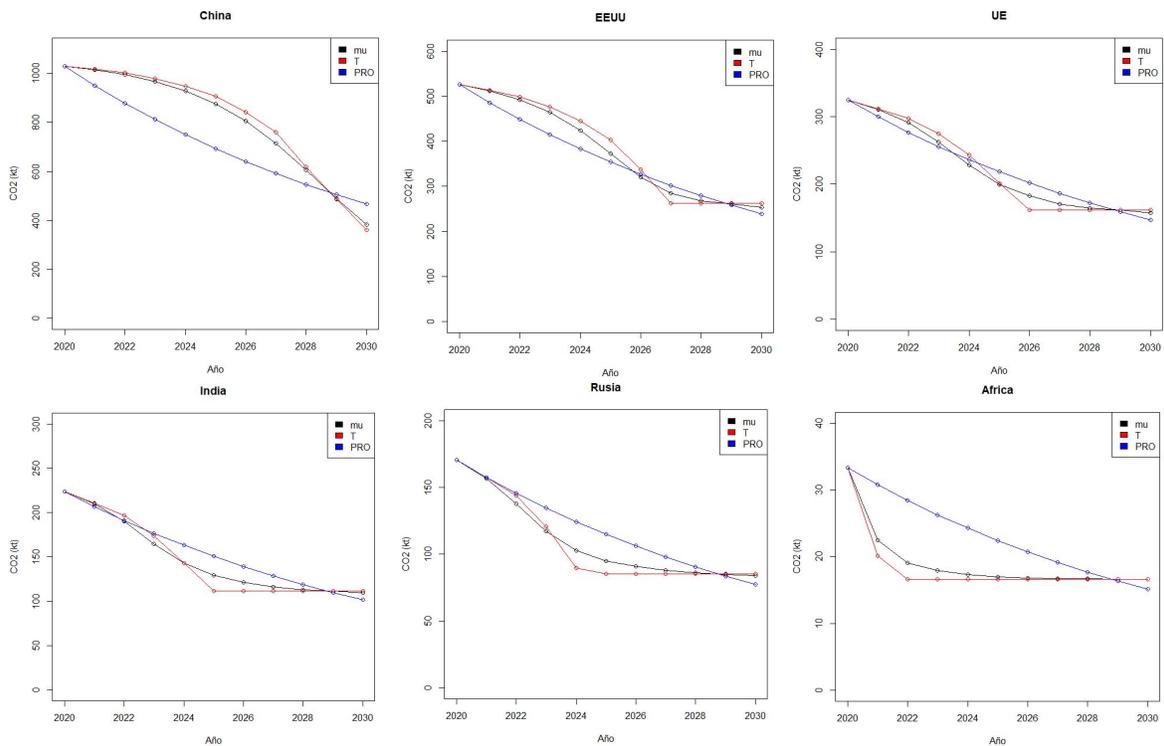


Figura 4.3: Reducción de las emisiones de  $CO_2$  que debe realizar cada país desde el 2020 hasta el 2030 según tres soluciones distintas: core-center(negro), Talmud(rojo) y regla proporcional (azul)

Por las razones expuestas en los párrafos anteriores, creemos que las soluciones que nos propone el core-center son aceptables. Los países, o regiones, según esta regla, deberían realizar las disminuciones de las emisiones de  $CO_2$  dadas en la tercera columna de la Tabla 4.1. En la cuarta columna de la Tabla 4.1 ponemos los valores que propone la regla proporcional para el año 2030 y, vemos que la exigencia a los países menos contaminantes es mayor que lo propuesto por el core-center. En el año 2030 Los valores que propone la regla del Talmud son muy similares a los del core-center. Como ya comentamos, las diferencias entre la regla del Talmud y el core-center se observan sobre todo en los años intermedios (ver Tabla 4.2 en el año 2025).

Ahora, podemos realizar un estudio de la desigualdad existente entre los diferentes países del estudio. Para ello utilizaremos las curvas de Lorenz. Se sabe que, la regla proporcional mantiene la desigualdad existente en la población, por lo que es muy interesante ver como evoluciona dicha

País o región	Emisiones de $CO_2(kt)$ año 2020 (d)	Emisiones de $CO_2(kt)$ año 2030 ( $\mu$ )	Emisiones de $CO_2(kt)$ año 2030 (PRO)
China	10.291.927	3.832.839,5	4.668.979,8
EEUU	5.254.279	2.536.393,2	2.383.597,1
UE	3.241.844	1.578.310,8	1.470.658,5
India	2.238.377	1.097.878,2	1.015.436,9
Rusia	1.705.346	840.161	773.628,1
Japón	1.214.048	600.639,6	550.751,3
Irán	649.481	322.905,1	294.636,2
Arabia Saudí	601.047	298.951,2	272.664,2
Corea del Sur	587.156	292.077,4	266.362,6
Canadá	537.193	267.340,2	243.696,9
México	480.271	239.131,1	217.874,3
Indonesia	464.176	231.149,7	210.572,9
Brasil	529.808	263.681,9	240.346,7
Sudáfrica	489.772	243.841,5	222.184,5
Turquía	345.981	172.469	156.953,8
Resto de Oriente Medio	996.765	494.069,8	452.181,2
Resto de África	333.047	166.040,2	151.086,4
Resto de Asia	1.992.866	979.441,3	904.061,2
Resto de América Latina	902.453	447.688,6	409.396,7

Tabla 4.1: Emisiones de  $CO_2$  por países en el año 2014 y, previsión de emisiones que deben efectuar en el año 2030 para frenar el cambio climático según el core-center.

País o región	Emisiones de $CO_2(kt)$ año 2025 ( $\mu$ )	Emisiones de $CO_2(kt)$ año 2025 ( $T$ )	Emisiones de $CO_2(kt)$ año 2025 ( $PRO$ )
China	8.743.987,4	9.061.125,7	6.931.968,1
EEUU	3.726.210,2	4.023.477,9	3.538.938,3
UE	1.998.526,9	2.011.042,9	2.183.493,8
India	1.296.731,3	1.119.188,5	1.507.624,2
Rusia	955.144,4	852.673,0	1.148.609,4
Japón	658.760,9	607.024,0	817.703,2
Irán	339.506,7	324.740,5	437.447,9
Arabia Saudí	313.167,5	300.523,5	404.825,9
Corea del Sur	305.643,8	293.578,0	395.469,8
Canadá	278.694,8	268.596,5	361.818,0
México	248.205,9	240.135,5	323.479,1
Indonesia	239.626,6	232.088,0	312.638,6
Brasil	274.726,3	264.904,0	356.844,0
Sudáfrica	253.279,0	244.886,0	329.878,3
Turquía	177.177,5	172.990,5	233.030,1
Resto de Oriente Medio	533.213,6	498.382,5	671.355,6
Resto de África	170.403,2	166.523,5	224.318,6
Resto de Asia	1.136.769,8	996.433,0	1.342.264,0
Resto de América Latina	479.964,8	451.226,5	607.833,2

Tabla 4.2: Emisiones de  $CO_2$  por países propuestas por el core-center, la regla del Talmud y la regla proporcional en el año 2025.

desigualdad para el core-center y para la regla del Talmud en este contexto. En la Figura 4.4 vemos que, en el año 2021 la desigualdad en las emisiones de  $CO_2$  aumenta al aplicar el core-center, pero irá disminuyendo paulatinamente y, en el año 2030 dicha desigualdad será menor que con la regla Proporcional y, por tanto, será menor que la desigualdad inicial. Esto puede ser muy interesante ya que, las emisiones de  $CO_2$  están muy ligadas a la economía de cada país. Los países con menos emisiones suelen ser más pobres que aquellos con emisiones elevadas. Por lo tanto, conseguir recortar las emisiones de  $CO_2$  como indica el core-center que se debe hacer puede provocar un descenso de la desigualdad que existe en el mundo. La regla del Talmud y el core-center tienen prácticamente el mismo índice de Gini, por lo que la desigualdad, en términos generales será la misma por lo que no realizamos las gráficas para  $T$ .

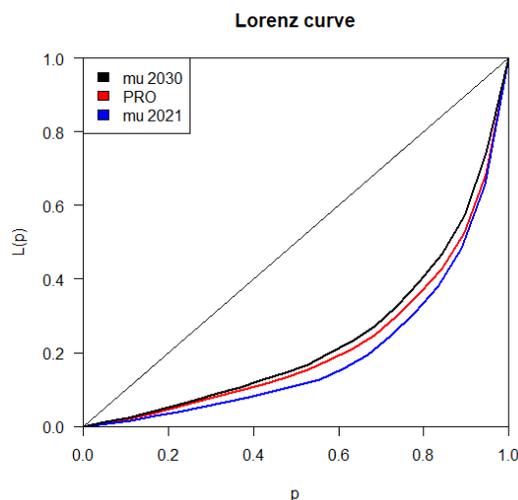


Figura 4.4: Desigualdad existente en las emisiones de  $CO_2$ : core-center en el año 2030(negro), Proporcional(rojo) y core-center en el año 2021 (azul)

## 4.2. Reparto si China no coopera

Por último, vamos a hacer una suposición añadida. Muchas de las grandes potencias mundiales nunca firmaron un acuerdo de compromiso para la reducción de los gases efecto invernadero, lo cual complica mucho el poder frenar el cambio climático. Para ilustrar esta situación, vamos a suponer que China, el país del mundo con más emisiones de  $CO_2$  en el año 2020 decide no comprometerse con estas reducciones y, vamos a ver como deben actuar el resto de países ante tal situación. En términos del juego asociado al problema de bancarrota, diremos que China abandonará el juego y se llevará su demanda (suponemos que su demanda son sus emisiones en el año 2020 y que, como mínimo se compromete a no aumentarlas). Así que, tenemos que resolver el problema de bancarrota de la cara inversa a la que denominamos del jugador «China», que será aquella en la que se lleva su demanda.

La forma de proceder será la misma, pero ahora tendremos un juego con 18 jugadores y, a cada  $E_i$ ,  $i = 2021, \dots, 2030$  se le restarán las emisiones de China (10.291.927 kt). Por lo tanto, ahora nos enfrentaremos a los 10 siguientes problemas:

$$(E_i - d_{\text{China}}, d_{-\text{China}}), i = 2021, \dots, 2030$$

Observemos la evolución de las emisiones mundiales permitidas para todo el planeta si China decide no comprometerse con el cambio climático (Figura 4.5).

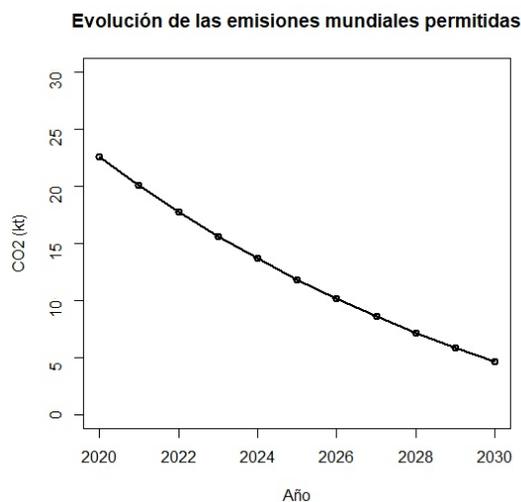


Figura 4.5: Evolución de las emisiones de  $CO_2$  permitidas por la PNUMA si China no entra en el acuerdo

Vemos que, en el año 2030 las emisiones mundiales deberán ser  $4.613.082kt$ , mientras que, en el año 2020 EEUU emite  $5.254.279kt$  por lo que, antes de empezar con la resolución del problema, ya podemos ver que, los esfuerzos del resto de países deberán ser enormes para frenar el cambio climático. Además, podemos ver que, si EEUU tampoco firmara el acuerdo ya sería completamente imparables el cambio climático.

En la Figura 4.6 observamos la evolución del core-center, de la solución proporcional y del reparto de Talmud para este nuevo problema. Por los mismos motivos expuestos anteriormente sostenemos que el core-center es una propuesta razonable. Sin embargo, vemos que, con cualquiera de las soluciones, el descenso de las emisiones debería ser enorme, algo prácticamente imposible de conseguir.

Podemos ver que las reducciones más elevadas las experimentarán los países con mayores emisiones, permitiendo una reducción menor a aquellos que no emiten tanto. Por esta razón, ahora podríamos quedarnos con la regla proporcional, que trata mejor en el año 2030 a los países muy emisores, aunque, de esta forma, no conseguiríamos reducir la desigualdad. Para hacerse a una idea, en este contexto, a EEUU se le permitiría emitir  $347.200,2kt$  de  $CO_2$  y, la región de África, la menos contaminante de todas las consideradas, emite, en el año 2020,  $333.047kt$ , por lo que, para conseguir frenar el cambio climático si China no participa, EEUU debería ponerse al nivel al que está ahora África en cuestión de emisiones, algo completamente utópico.

En la Tabla 4.3 observamos la diferencia del core-center en el año 2030 para los dos problemas introducidos y vemos que, el esfuerzo de todos los países, sobre todo de aquellos con emisiones más elevadas, debería ser enorme si China no se compromete con el cambio climático.

Por lo tanto, con esto ilustramos la necesidad imperiosa de que los países más poderosos se comprometan con la lucha contra el cambio climático ya que, sin su compromiso, conseguir evitarlo sería una utopía prácticamente inalcanzable. Estamos pues ante un juego en el que la cooperación es la única vía de solución del problema.

País o región	Emisiones de $CO_2(kt)$ permitidas en el año 2030 si China participa ( $\mu$ )	Emisiones de $CO_2(kt)$ permitidas en el año 2030 si China no participa ( $\mu$ )
EEUU	2.536.393,2	347.200,2
UE	1.578.310,8	347.200,2
India	1.097.878,2	347.007,9
Rusia	840.161	343.830,1
Japón	600.639,6	323.840,4
Irán	322.905,1	238.117,7
Arabia Saudí	298.951,2	226.060,3
Corea del Sur	292.077,4	222.444,5
Canadá	267.340,2	208.847,5
México	239.131,1	192.207,6
Indonesia	231.149,7	187.276,9
Brasil	263.681,9	206.758,3
Sudáfrica	243.841,5	195.071,3
Turquía	172.469	147.948,5
Resto de Oriente Medio	494.069,8	301.535,6
Resto de África	166.040,2	143.306,4
Resto de Asia	979.441,3	346.397,1
Resto de América Latina	447.688,6	288.031,9

Tabla 4.3: Diferencia de la reducción de emisiones que tiene que efectuar cada país si China firma el acuerdo o si no lo firma según el core-center.

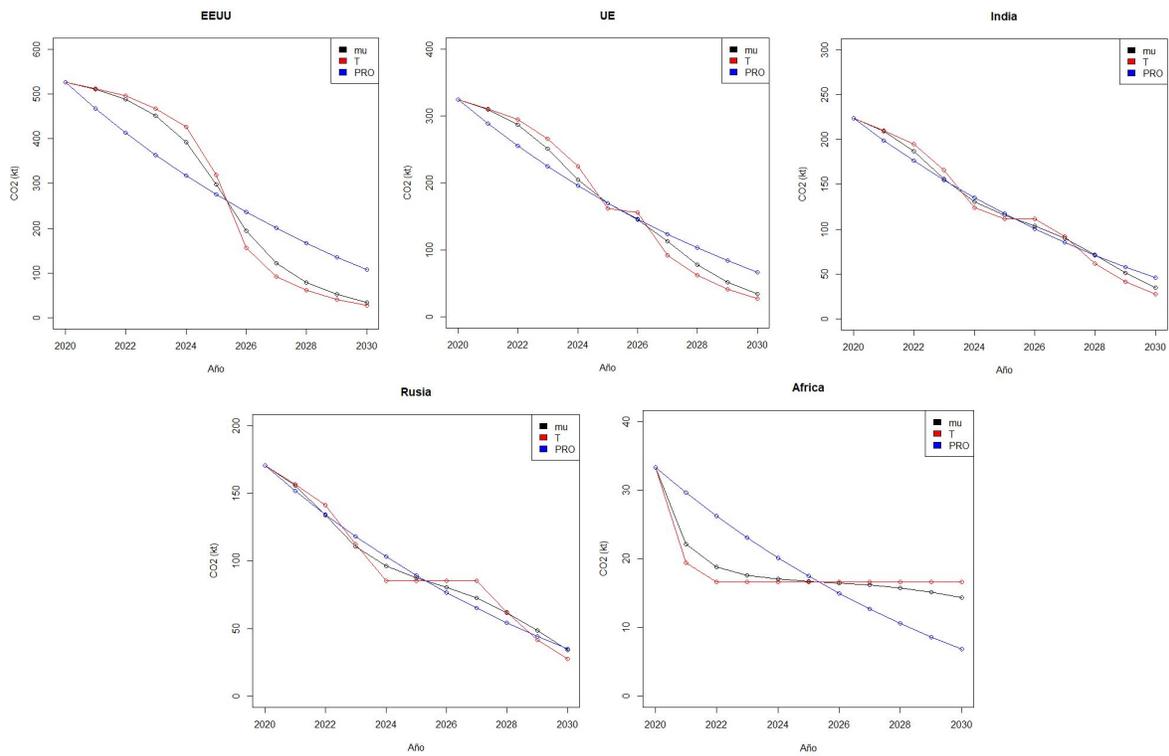


Figura 4.6: Reducción de las emisiones de  $CO_2$  que debe realizar cada país desde el 2020 hasta el 2030 si China no entra en el acuerdo según tres soluciones distintas: core-center (negro), Talmud (rojo) y regla proporcional (azul)

# Apéndice A

## Código R utilizado

### A.1. Algoritmo exterior

Previamente, antes de ejecutar el algoritmo, debemos cargar el paquete, denominado "base".

Para empezar, calculamos el juego de bancarrota asociado al problema  $(E, d)$  del que queremos conocer su core-center:

```
bancarrota=function(E,d){
v=NULL
if(E<=0 | E>sum(d)){print("El juego de bancarrota está mal definido")}
else{
n=length(d)
for(S in 1:((2^n)-1)){
NmenosS=as.logical(as.numeric(intToBits(S)[1:n])<1)
v[S]=max(0,E-sum(d[NmenosS]))
}
agentes=2^(0:n-1)
a=v[agentes]
delta=E-sum(a);

return(list(v,a,delta))}}
```

Se añade ahora la función core-center en la que estudiamos si nuestro problema está en el dominio  $B_1^N$ , en el dominio  $B_0^N$  ó, se calcula directamente si está en el dominio  $B_{0,5}^N$

```
corecenter2=function(E,d){

n=length(d);
mu=rep(0,n);

if (n==2){
v=bancarrota(E,d)[[1]]
a=bancarrota(E,d)[[2]]
delta=bancarrota(E,d)[[3]]
mu=a+delta/n*rep(1,n);
return(mu)
}
```

```

if (E >= sum(d[1:n-1]) & E <= d[n] | E == sum(d)/2 ){
  mu[1:n-1]=d[1:n-1]/2
  mu[n]=E-sum(mu[1:n-1]);

  return
}

control=(E > sum(d)/2);
source("muSelfDuality.R")
if (control==0){
  mu=muSelfDuality(E,d)}

else {
  mu=d-muSelfDuality(sum(d)-E,d)}

return(mu)}

```

Si en la función anterior, el problema cumple que  $E \geq \frac{D}{2}$  se calcula el core-center mediante la siguiente función y, si cumple que  $E \leq \frac{D}{2}$ , se calcula mediante la misma función el core-center de su dual.

```

muSelfDuality=function(E,d){

n=length(d);
source("fulldimutopia.R")
familia=fulldimutopia(E,d)
F=length(familia)
peso=NULL
if (F==0){
  mu=E/n*diag(n)
} else {

  for (C in (n-2):1){
    for (ff in 1:F){
      T=familia[ff]
      Tvector=as.logical(intToBits(T)[1:n])
      if (sum(Tvector)==C & C==n-2){
        peso[ff]=(E-sum(d[Tvector]))^(n-1)}
      else if (sum(Tvector)==C){
        peso[ff]=(E-sum(d[Tvector]))^(n-1)
        for (ss in (ff+1):F){
          if (ff==F){return}
          else {
            S=familia[ss]
            if (bitwAnd(S,T)==T){
              peso[ff]=peso[ff]-peso[ss]}}
        }
      }
    }
  }
}
}

```

```

    }

U=rep(0,1,n); pesoU=U;

    for (ii in 1:n){
        if (sum(familia==2^(ii-1))!=0) {
            U[ii]=1
            pesoU[ii]=peso[which(familia==2^(ii-1))];
        }
    }

pesoC=E^(n-1)-sum(peso);
mu=c(1/n*(E+pesoU%*%d/pesoC))-pesoU*d/pesoC;

return(mu)}

```

En la última función se calcula la familia  $\mathcal{F}$  mediante la siguiente función:

```

fulldimutopia=function(E,d){

coaliciones=NULL;
n=length(d);
for (S in 1:2^n-1){
    Svector=as.logical(intToBits(S)[1:n]);
    if (sum(d[Svector])<E){
        coaliciones=cbind(coaliciones,S)}
}
return(coaliciones[-1])}

```

## A.2. Algoritmo interior

Para empezar, tenemos que instalar las librerías `binaryLogic` y `GameTheory`. El primer paso del algoritmo consistirá en la descomposición del núcleo inicial en el núcleo del problema base y en los núcleos de los juegos de privilegios.

```

descomposicion=function(E,d){
n=length(d)
d1=matrix(0,2^n,n)
a=matrix(0,2^n,n)
E1=rep(0,2^n)
E1[1]=E
d0=sort(d)
library(GameTheory)
d1[1,]=CEA(2*E,d)$Results

for(i in 1:(2^n-1)){
ndx = as.binary(i,n=n)
ndx=as.vector(ndx)
if (sum(ndx)<n-2){
a[i,]=ndx
}
}
}

```

```

E1[i+1]=max(0,E-sum(d1[1,ndx]))
for(j in 1:n){
if(ndx[j]==TRUE){ndx[j]=max(0,(d[j]-d1[1,j]))}
else{ndx[j]=d1[1,j]}
d1[i+1,]=ndx}
a=a[rowSums(d1)!=0,]
E1=E1[rowSums(d1)!=0]
d1=d1[rowSums(d1)!=0,]
a=a[E1!=0,]
d1=d1[E1!=0,]
E1=E1[E1!=0]
d1=d1[rowSums(a)!=0,]
E1=E1[rowSums(a)!=0]
#a=a[rowSums(a)!=0,]
return(list(estados=E1,demandas=d1,orden=a))
}

```

El siguiente paso será calcular el volumen del problema base.

```

volumenbase=function(E,d){
n=length(d);

vol= prod(d[1:(n-1)])*factorial(n-1);
if (d[n]<E){
  vol=vol-2*(E-d[n])^(n-1);

  VEC = d[1:n-1];
  NUM = E-d[n];
  m = length(VEC); i=1
  while(i!=(2^m-1)){
    ndx = as.binary(i,n=m)
    if (sum(VEC[ndx]) < NUM){
      l = length(VEC[ndx]);
      a=VEC[ndx];

      vol=vol+((-1)^(l+1))*2*(E-d[n]-sum(a))^(n-1);
    }
    i=i+1;
  }
}
return(vol)}

```

Una vez que tenemos calculadas estas funciones, procedemos con el cálculo del core-center de cada problema de privilegios.

```

center1=function(E,d){
library(binaryLogic)
n=length(d);
vol=0;
center=rep(0,n);
source("descomposicion.R")
source("volumenbase.R")

```

```

source (" auxiliar.R")
E1=descomposicion (E,d)$estado;
d1=descomposicion (E,d)$demandas;
a=descomposicion (E,d)$orden;
vol=vol+volumenbase (E1 [1] , d1 [1 ,]);
center=center+vol*d1 [1 ,]/2;
for (i in 2:(dim(d1)[1])){
  if (sum(d1 [i ,]==0)==0){
    ad=rep (0,n);
    for (j in 1:n){
      if (a [i-1,j]==1){ad [j]=d1 [1 ,j]};
    }
    if (E1 [i]==sum(d1 [i ,])/2){
      v=volumenbase (E1 [i] , d1 [i ,]);
      center=center+v*(ad+d1 [i ,]/2);
      vol=vol+v
    } else if (sum(d1 [i ,]>=E1 [i])==n){
      v=E1 [i]^(n-1);
      vol=vol+v;
      center=center+v*(ad+E1 [i]/n)
    } else if ((sort (d1 [i ,])[1] + sort (d1 [i ,])[2]) >= E1 [i]){
      source (" corecenter2.R")
      v=(E1 [i]^(n-1))
      for (j in 1:n){
        if (E1 [i]-d1 [i ,j]>0){v=v-(E1 [i]-d1 [i ,j])^(n-1)}
      }
      vol=vol+v;
      center=center+v*(ad+corecenter2 (E1 [i] , d1 [i ,]))
    } else {
      v=auxiliar (E1 [i] , d1 [i ,] , n, ad)$volumen
      c=auxiliar (E1 [i] , d1 [i ,] , n, ad)$center
      vol=vol+v;
      center=center+v*(c+ad)}
}}

center=center/vol;
return (center)}

```

Por último, la función anterior necesita de una función auxiliar que descompone cada problema de privilegios.

```

auxiliar=function (E,d,n,a){
if (E<0.1){
v=0;
c=rep (0,n)}
else{
n=length (d);
vol=0;
center=rep (0,n);
E1=descomposicion (E,d)$estado;
d1=descomposicion (E,d)$demandas;
a=descomposicion (E,d)$orden;
vol=vol+volumenbase (E1 [1] , d1 [1 ,]);

```

```

center=center+vol*d1[1,]/2;
for (i in 2:dim(d1)[1]){
ad=rep(0,n);
for(j in 1:n){
  if(a[i-1,j]==1){ad[j]=d1[1,j]};
}
  if(sum(d1[i,]==0)>=1){
} else if(E1[i]==sum(d1[i,])/2){
  v=volumenbase(E1[i],d1[i,]);
  center=center+v*(ad+d1[i,]/2);
  vol=vol+v
} else if(sum(d1[i,]>=E1[i])==n){
  v=E1[i]^(n-1);
  vol=vol+v;
  center=center+v*(ad+E1[i]/n)
} else if((sort(d1[i,])[1]+sort(d1[i,])[2])>=E1[i]){
  source("corecenter2.R")
  v=(E1[i]^(n-1))
  for(j in 1:n){
    if(E1[i]-d1[i,j]>0){v=v-(E1[i]-d1[i,j])^(n-1)}
  }
  vol=vol+v;
  center=center+v*(ad+corecenter2(E1[i],d1[i,]))
} else {
  v=auxiliar(E1[i],d1[i,],n,ad)$volumen
  c=auxiliar(E1[i],d1[i,],n,ad)$center
  vol=vol+v;
  center=center+v*(c+ad)}
}
c=(center)/vol;
v=vol;
}
return(list(volumen=v,center=c))}

```

## Apéndice B

# Traducciones de las propiedades utilizadas

Durante todo el trabajo se realizan traducciones de las propiedades introducidas en Thomson (2019). En las siguientes tablas pondremos los nombres de las propiedades originales y nuestra traducción para evitar confusiones.

Traducción realizada	Nombre original
Homogeneidad	Homogeneity
Continuidad	Continuity
Derechos positivos	Positive awards
Acotación por las demandas	Claims boundedness
Pérdidas positivas	Positive losses
Respeto de mínimos derechos	Minimal rights lower bounds on awards
Mínimos derechos primero	Minimal rights
Demandas truncadas	Truncated-claims upper bounds on awards
Límite inferior razonable	$\frac{1}{ N }$ -truncated-claims lower bounds on awards
Límite inferior de las pérdidas	$\frac{1}{ N }$ -min-of-claim-and-deficit lower bounds on losses
Igual división del estado entre los demandantes	Min-of-claim-and-equal-division lower bounds on awards
Igual división de la diferencia entre el estado y las demandas	Min-of-claim-and-equal-division-of-deficit lower bounds on losses

<b>Traducción realizada</b>	<b>Nombre original</b>
Compensación completa condicional	Conditional full compensation
Compensación completa condicional débil	Weak conditional full compensation
Compensación nula condicional	Conditional null compensation
Compensación nula condicional débil	Weak conditional null compensation
Igual tratamiento de iguales	Equal treatment of equals
Anonimidad	Anonymity
Mínimo compartido	Minimal sharing
Igual tratamiento de grupos iguales	Equal treatment of equals groups
Preservación del orden en ganancias	Order preservation in awards
Preservación del orden en pérdidas	Order preservation in losses
Monotonía en el estado	Endowment monotonicity
Ganancia acotada por el aumento en el estado	Bounded gain from endowment increase
Preservación del orden bajo la variación en el estado (Super-modularidad)	Order preservation under endowment variations (Super-modularity)
Progresividad	Progressivity
Regresividad	Regressivity
Concavidad	Concavity
Convexidad	Convexity
Visibilidad hacia abajo en el origen	Visibility from below from the origin
Visibilidad hacia arriba en el origen	Visibility from above from the origin
Visibilidad hacia abajo desde las demandas	Visibility from below from above
Visibilidad hacia arriba desde las demandas	Visibility from above from above

<b>Traducción realizada</b>	<b>Nombre original</b>
Monotonía en las demandas	Claim monotonicity
Apropiación total por parte de un demandante ilimitadamente mayor	Full appropriation by unboundedly larger claimant
Monotonía de las demandas orientada a otros jugadores	Other-regarding claim monotonicity
Ganancia acotada por el crecimiento en la demanda	Bounded gain from claim increase
Sin paradoja de transferencia	No transfer paradox
Impacto acotado en la transferencia de la demanda	Bounded impact of claim transfer
Preservación del orden bajo variaciones en la demanda	Order preservation under claims variations
Impacto de la monotonía en el estado en el aumento de las demandas	Endowment-monotonic impact of claim increase
Impacto de la monotonía en el estado en la transferencia de las demandas	Endowment-monotonic impact of claim transfer
invarianza bajo truncamiento de las demandas	Claims truncation invariance
Composición hacia abajo	Composition down
Composición hacia arriba	Composition up
Auto-dualidad	Self-duality
Sin ventaja de transferencia	No advantageous transfer
Independencia de la demanda global de los otros	Summation independence
Separabilidad en las demandas	Claims separability
Separabilidad en las demandas y el estado	Claims-and-endowment separability
Uniformidad en las demandas	Claims uniformity
Uniformidad en el estado y en las demandas	Claims-and-endowment uniformity
Convexidad en el estado	Endowment convexity
Convexidad en las demandas	Claims convexity
Convexidad total	Full convexity
Aditividad total	Full additivity
Aditividad en el estado	Endowment additivity
Pérdidas positivas con respecto a la aditividad en el estado	Positive-losses-in-the-sum-problem-conditional endowment additivity
Consistencia	Consistency
Consistencia bilateral	Bilateral consistency

<b>Traducción realizada</b>	<b>Nombre original</b>
Consistencia con las demandas nulas	Null claims consistency
Consistencia con la compensación nula	Null compensation consistency
Consistencia con la compensación completa	Full compensation consistency
Consistencia media	Average consistency
Monotonía poblacional	Population monotonicity
Monotonía poblacional con aumento de la población	Linked endowment-population monotonicity
Preservación del orden bajo variaciones en la población	Order preservation under population variations
Sin ventaja por fusión o división	No advantageous merging or splitting
Sin ventaja por fusion	No advantageous merging
Sin ventaja por división	No advantageous splitting
invarianza por réplica	Replication invariance
Contribuciones equilibradas	Balanced impact

# Apéndice C

## Notación

- $E \in \mathbb{R}^+$  denota el estado de un problema de bancarrota.
- $N$  denota el conjunto de agentes de un problema,  $N = \{1, \dots, n\}$
- $d \in \mathbb{R}^n$  denota el vector de demandas de un problema de bancarrota.
- El par  $(E, d) \in B^N$  es un problema de bancarrota y  $B^N$  es el conjunto de todos los problemas de bancarrota de población  $N$ .
- Los problemas de bancarrota  $(E, d) \in B_{0.5}^N$  son aquellos que  $E = \frac{D}{2}$ .
- Los problemas de bancarrota  $(E, d) \in B_0^N$  son aquellos que  $E > \frac{D}{2}$ .
- Los problemas de bancarrota  $(E, d) \in B_1^N$  son aquellos que  $E < \frac{D}{2}$ .
- $d_{-i} = (d_1, \dots, d_{i-1}, d_{i+1}, \dots, d_n)$ .
- $d_{-S} = d_{N \setminus S}$ .
- $d_{-i-j} = (d_1, \dots, d_{i-1}, d_{i+1}, \dots, d_{j-1}, d_{j+1}, \dots, d_n)$
- Sea  $S \subset N$ , denotamos por  $x(S) = \sum_{i \in S} d_i$  si  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $S \subset N$ .
- $D = \sum_{i \in N} d_i = d(N)$ .
- $D_{-i} = \sum_{j \neq i} d_j$
- Se denota el hiperplano eficiente por  $H = \{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N)\}$ .
- Sea  $S \subset N$ ,  $|S|$  denota su cardinal.
- Sea  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|a\|$  denota la norma euclidiana.
- La función  $1_S = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{si } i \notin S \end{cases}$  se denomina función indicadora del conjunto  $S$ .



## Apéndice D

# Resumen de propiedades y reglas

	PRO	CEA	CEL	CE	T	PIN	RA	MO	APRO
Demandas truncadas por abajo	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Límite inferior de las pérdidas	No	No	Si	No	Si	No	Si	No	Si
Compensación condicional completa	No	Si	No	No	No	No	No	No	No
Compensación condicional nula	No	No	Si	No	No	No	No	No	No
Igual tratamiento de iguales	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Preservación del orden	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Anonimidad	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Igual tratamiento de iguales en grupos	Si	No	No	No	No	No	No	No	No
Preservación del orden en grupos	Si	No	No	No	No	No	No	No	No
Regresividad	Si	Si	No	No	No	No	No	No	No
Progresividad	Si	No	Si	No	No	No	No	No	No
Continuidad	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Monotonía en las demandas	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Ganancia acotada por el crecimiento en la demanda	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Sin paradoja de transferencia	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Impacto acotado en la transferencia de las demandas	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Tabla D.1: Reglas y propiedades principales

	PRO	CEA	CEL	CE	T	PIN	RA	MO	APRO
Monotonía en el estado	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Concavidad	Si	No	Si	No	No	No	No	No	No
Convexidad	Si	Si	No	No	No	No	No	No	No
Homogeneidad	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Invarianza bajo el truncamiento de las demandas	No	Si	No	No	Si	No	Si	Si	Si
Mínimos derechos primero	No	No	Si	No	Si	No	Si	Si	Si
composicion hacia abajo	Si	Si	Si	No	No	No	No	No	No
composicion hacia arriba	Si	Si	Si	No	No	No	No	No	No
Dualidad	Si	No	No	No	Si	No	Si	No	Si
Prop. Punto medio	Si	No	No	No	Si	Si	Si	No	Si
Sin ventaja por transferencia	Si	No	No	No	No	No	No	No	No
Independencia de la demanda global de los otros	Si	No	No	No	No	No	No	No	No
Separabilidad en las demandas	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
Convexidad en el estado	Si	No	No	No	No	No	No	No	No
Monotonía poblacional	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Monotonía vinculada al estado de la población	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Sin ventaja por fusión	Si	Si	No	No	No	No	No	No	No
Sin ventaja por división	Si	No	Si	No	No	No	No	No	No
invarianza por réplica	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
Consistencia	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
Consistencia bilateral	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
Consistencia en las demandas nulas	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Consistencia en la compensación nula	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Consistencia en la compensación completa	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Consistencia inversa	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
Uniformidad en el estado y en la demanda	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
Uniformidad en el estado y en la población	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
Separabilidad en las demandas y en el estado	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No

Tabla D.2: Reglas y propiedades principales

# Bibliografía

- Bosmans, K. y Lauwers, L. (2011). Lorenz comparisons of nine rules for the adjudication of conflicting claims. *International Journal of Game Theory*, 40(4):791–807.
- Branzei, R. y Alparslan Gok, S. (2008). Bankruptcy problems with interval uncertainty. *Economics Bulletin*, 3:1–10.
- Cano-Berlanga, S., Giménez-Gómez, J. M., y Vilella, C. (2017). Enjoying cooperative games: The r package gametheory. *Applied Mathematics and Computation*, 305:381–393.
- Estévez-Fernández, A., Fiestras-Janeiro, M. G., Mosquera, M. A., y Sánchez-Rodríguez, E. (2012). A bankruptcy approach to the core cover. *Mathematical Methods of Operations Research*, 76:343–359.
- Gini, C. (1912). Variabilità e mutabilità. reprinted in memorie di metodologica statistica. *Rome: Libreria Eredi Virgilio Veschi*.
- González-Díaz, J. y Sánchez-Rodríguez, E. (2007). A natural selection from the core of a tu game: the core-center. *International Journal of Game Theory*, 36(1):27–46.
- Gritzmann, P. y Klee, V. (1994). On the complexity of some basic problems in computational convexity. in polytopes: abstract, convex and computational. *Springer, Dordrecht*, pages 373–466.
- Lasserre, J. B. (1983). An analytical expression and an algorithm for the volume of a convex polyhedron in  $\mathbb{R}^n$ . *Journal of optimization theory and applications*, 39(3):363–377.
- Mirás Calvo, M., Quinteiro Sandomingo, C., y Sánchez-Rodríguez, E. (2016). Monotonicity implications for the ranking of rules for airport problems. *International Journal of Economic Theory*, 12(4):379–400.
- Mirás Calvo, M., Quinteiro Sandomingo, C., y Sánchez-Rodríguez, E. (2018). Compensating utopical allocations in bankruptcy games. preprint.
- Mirás Calvo, M., Quinteiro Sandomingo, C., y Sánchez-Rodríguez, E. (2019). The core-center of a bankruptcy problem. preprint.
- O’Neill, B. (1982). A problem of rights arbitration from the talmud. *Mathematical Social Sciences*, 2(4):345–371.
- Schmeidler, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on applied mathematics*, 17(6):1163–1170.
- Shapley, L. (1953). A value for n-person games. *Contributions to the Theory of Games*, 2(28):307–317.
- Thomson, W. (2003). Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey. *Mathematical Social Sciences*, 45(3):249–297.
- Thomson, W. (2015). Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update. *Mathematical Social Sciences*, 74:41–59.

Thomson, W. (2019). How to divide when there isn't enough: From aristotle, the talmud, and maimonides to the axiomatics of resource allocation. *Cambridge University Press*.