UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
UNIVERSIDADE DA CORUÑA
Universidade Vigo

Trabajo Fin de Máster

Índices de poder para juegos espaciales

Lara Piñeiro Rodríguez

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2018-2019

Propuesta de Trabajo Fin de Máster

Título en galego: Índices de poder para xogos espaciais
Título en español: Índices de poder para juegos espaciales
English title: Power indexes for spatial games
Modalidad: Modalidad A
Autor/a: Lara Piñeiro Rodríguez, Universidade de Santiado de Compostela
Director/a: Jose María Alonso Meijide, Universidade de Santiago de Compostela; Mikel Álvarez Mozos, Universitat de Barcelona
Breve resumen del trabajo: Los Juegos Espaciales son una extensión de los Juegos Simples en la que se tiene en cuenta la posición ideológica de los jugadores. Tras revisar sus aspectos más importantes y sus índices de poder, nos centraremos en una aplicación de los mismos que nos permitirá hacer un análisis de los resultados de las Elecciones Autonómicas del País Vasco, en 2016.

Don Jose María Alonso Meijide, Profesor Titular de la Universidade de Santiago de Compostela y don Mikel Álvarez Mozos, Profesor Lector de la Universitat de Barcelona, informan que el Trabajo Fin de Máster titulado

Índices de poder para juegos espaciales

fue realizado bajo su dirección por doña Lara Piñeiro Rodríguez para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, dan su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Santiago de Compostela, a 4 de Julio de 2019.

El director:

ALONSO MEIJIDE, JOSE MARIA (AUTENTICACIÓN)

Firmado digitalmente por ALONSO MEIJIDE, JOSE MARIA (AUTENTICACIÓN)
Nombre de reconocimiento (DN): c=ES, serialNumber=35318374B, sn=ALONSO, givenName=JOSE MARIA, cn=ALONSO MEIJIDE, JOSE MARIA (AUTENTICACIÓN)
Fecha: 2019.07.02 10:00:33 +02'00'

Don Jose María Alonso Meijide

El director:

ALVAREZ MOZOS MIKEL - 15393670T

Firmado digitalmente por ALVAREZ MOZOS MIKEL - 15393670T
Fecha: 2019.07.01 20:41:46 +02'00'

Don Mikel Álvarez Mozos

La autora:

Doña Lara Piñeiro Rodríguez

Agradecimientos

Me gustaría dar las gracias, en primer lugar, a mis directores de trabajo, por mostrarse siempre dispuestos a atender cualquier cuestión que me surgiese y a orientarme durante toda la elaboración de este trabajo. Gracias también por hacerlo siempre desde la humildad y el respecto, pese a su incuestionable gran conocimiento del tema. Agradecer, por otro lado, a mis compañeros y profesores del máster, toda la ayuda que durante estos dos años no dudaron en brindarme, y sobretodo, gracias por acompañarla siempre de una sonrisa.

Por último, no quería acabar mi etapa académica sin mostrar un agradecimiento muy especial a mis padres y a mi hermana, por ser mi principal pilar en esto y en todo en la vida. Y en general, a todos los que durante estos años han llegado para darle significado a la amistad y al amor, gracias de corazón por regalarme su tiempo, confianza e incondicional cariño.

Índice general

Resumen

Resumen en español

En este trabajo realizaremos un recorrido bibliográfico a través de los aspectos más importantes de los Juegos Espaciales, presentados por Owen, en 1971. Para ello, entenderemos estos juegos como una extensión de los Juegos Simples, o Juegos de Votación, en la que se tiene en cuenta la posición ideológica de los jugadores, con respecto a ciertas características que pueden ser determinantes a la hora de tomar una decisión. La aplicación más fructífera de los Juegos Espaciales tiene lugar en un parlamento, cuando una acción determinada se somete a votación. En esta situación, existen diversos jugadores, o partidos políticos, cuyo voto tiene un peso determinado, condicionado por su número de escaños. Del mismo modo, son también conocidas las preferencias de cada partido con respecto a ciertos temas, sobretodo aquellos especialmente importantes. A lo largo del trabajo, revisaremos los índices de poder existentes para este tipo de juegos al tiempo que propondremos algunos nuevos. Posteriormente, y para concluir, usaremos lo anterior con el fin de hacer un análisis del Parlamento Vasco, tras las elecciones autonómicas de 2016.

English abstract

In this project we will make a bibliographic tour through the most important aspects of the Spatial Games, discovered by Owen, in 1971. We will present these games as an extension of the Simple Games, or Voting Games, which considers the players' ideological position according to certain decisive characteristics so as to make a final decision. The most successful application of the Spatial Games is developed in a parliament, when voting for an specific action. Consequently, in this context, there are several participants, or political parties, whose vote has certain relevance or seats. Moreover, the parties' preferences are also known, especially on important issues. Along this essay, we will revise the power indexes for this type of games, proposing some new ones. To sum up, we will use the previous explanation to analyse the Basque Parliament, after 2016 regional elections.

Capítulo 1

Juegos Simples o Juegos de Votación

La toma de decisiones sometidas a votación entre un grupo de agentes juega un papel muy importante en nuestra sociedad y, más particularmente, en las ciencias políticas. Por esta razón, su modelización, análisis y posterior extracción de información es objeto de muchos estudios (Felsenthal y Machover, 1998). La base de estos estudios reside en la estimación del poder que posee cada agente; para dar respuesta a este asunto, tenemos como principal herramienta la teoría de juegos y, en particular, los llamados Juegos Simples o Juegos de Votación.

Podríamos afirmar que estos Juegos Simples constituyen una de las aplicaciones más provechosas de las matemáticas a las ciencias sociales. Dichos juegos, se caracterizan por un grupo finito de agentes sometido a procesos de elección o toma de decisiones en los que forman coaliciones de voto, susceptibles de ser ganadoras, es decir, de poder vencer en una votación.

A pesar de que podemos situar el origen de los Juegos Simples en los textos de Von Neumann y Morgenstern (1944), la realidad es que la mayoría de los estudios posteriores se basan en la redefinición introducida por Shapley (1962). A continuación, daremos tres formas diferentes de definir los Juegos Simples o de Votación que, a lo largo del trabajo, usaremos indistintamente según convenga.

Definición 1.1 *Un **Juego Simple o Juego de Votación** (N, v) está definido por un conjunto finito de jugadores o votantes, N, y una función característica, $v : 2^N \longrightarrow \{0, 1\}$, que cumplen:*

- $v(S) \in \{0, 1\}$, $\forall S \subseteq N$
- $v(N) = 1$ *y* $v(\emptyset) = 0$
- $v(S) \leq v(T)$, $\forall S \subseteq T \subseteq N$ *(monotonía).*

Tal y como habíamos apuntado antes, una *coalición ganadora* es un subconjunto del conjunto total de agentes, N, autosuficiente para ganar una votación. Es decir:

$$S \subseteq N \textit{es una coalición ganadora} \Leftrightarrow v(S) = 1.$$

Llamaremos W al *conjunto de todas las coaliciones ganadoras* y W_i al *conjunto de coaliciones ganadoras que contienen al jugador i*. Por su parte, una coalición será *perdedora* cuando no es coalición ganadora.

Tras introducir estas nuevas nociones, estamos en condiciones de dar una segunda definición de Juego Simple o Juego de Votación.

Definición 1.2 *Un **Juego Simple o Juego de Votación** (N, W) está definido por un conjunto finito de jugadores o votantes, N, y un conjunto de coaliciones ganadoras, $W \subseteq 2^N$. Dichas coaliciones deberán cumplir:*

- $\emptyset \notin W$
- $N \in W$
- *Si $S \in W$ y $S \subseteq T \subseteq N$, entonces $T \in W$ (monotonía).*

De esta última propiedad de monotonía, podemos intuir otro modo de definir un Juego Simple, mediante una dupla (N, W^m). En ella, W^m denota al *conjunto de coaliciones ganadoras minimales*; siendo una coalición *ganadora minimal* si todo subconjunto propio es una coalición perdedora. Es decir:

$S \subseteq N$ será una coalición ganadora minimal si cumple que $S \in W$ y $T \notin W$, $\forall T \subset S$.

Además, definiremos también un *conjunto formado por las coaliciones ganadoras minimales que contienen al jugador i*, al que nos denotaremos W_i^m.

Como apuntábamos antes, es la propiedad de monotonía la que nos permite obtener el conjunto de coaliciones ganadoras minimales del conjunto de coaliciones ganadoras, y viceversa. Bastaría con hacer las siguientes transformaciones:

$$W^m = \{S \in W \mid T \notin W, \forall T \subset S\}$$

$$W = \{S \subseteq N \mid \exists T \subseteq S, T \in W^m\}.$$

Definición 1.3 *Un **Juego Simple o Juego de Votación** (N, W^m) está definido por un conjunto finito de jugadores o votantes, N, y el conjunto de coaliciones ganadoras minimales, W^m. Dichas coaliciones deberán cumplir:*

- $\emptyset \notin W^m$
- $W^m \neq \emptyset$
- $S \nsubseteq T$, $\forall S, T \in W^m$.

Por otro lado, si un Juego Simple cumple que $N \backslash S \in W$, $\forall S \notin W$, será un *Juego Simple decisivo.*

Ejemplo 1.1 (Geanakoplos, 1994) *Los siguientes son ejemplos de Juegos decisivos de cuatro o menos jugadores:*

- ***1.*** $(N, W) \mid N = \{1\}$ *y* $W = \{\{1\}\}$.
- ***2.*** $(N, W) \mid N = \{1, 2, 3\}$ *y* $W = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
- ***3.*** $(N, W) \mid N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $W = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

En los tres juegos anteriores, podemos ver que los conjuntos complementarios en N de las coaliciones ganadoras son coaliciones perdedoras, ya que no pertenecen a W. Por ello, concluimos trivialmente en que son Juegos Simples decisivos.

Tras las definiciones anteriores cabe señalar que, para las sucesivas secciones de este trabajo, usaremos $SG(N)$ (del inglés, "simple games") para denotar el conjunto de todos los Juegos Simples definidos sobre un conjunto de jugadores N.

1.1. El concepto de mayoría en los Juegos Simples

Según los votos que se precisen para llevar a cabo la acción sometida a votación, podemos distinguir distintas variantes de los Juegos Simples o Juegos de Votación que clasificaremos como *Juegos de Mayoría Simple* o de *α-Supermayoría*. Estos subtipos de Juegos Simples son, a su vez, un caso particular de los llamados *Juegos de Mayoría Ponderada*, que modelan elecciones en las que un jugador puede tener derecho a votar más de una vez. El número de votos que posee un jugador será su peso en una votación, que, como veremos a continuación, será igual a 1 para todos los jugadores de los *Juegos de Mayoría Simple* y *α-Supermayoría*.

La utilidad más común de los *Juegos de Mayoría Ponderada* tiene lugar en un parlamento, en el que los distintos partidos políticos tienen un peso determinado, que se corresponde con sus escaños. Veremos un ejemplo concreto de este uso en el *Capítulo 3*.

1.1.1. Juegos de Mayoría Simple

Los *Juegos de Mayoría Simple* sirven para modelizar procesos de elección en los que todos los jugadores pueden votar el mismo número de veces, es decir, tienen el mismo peso. Además, en dicha situación, se requiere que sean favorables más de la mitad de los votos para que una acción se lleve a cabo. Esto es lo que se conoce como mayoría simple de votos. Podemos definir un *Juego de Mayoría Simple* como sigue.

Definición 1.4 *Un **Juego de Mayoría Simple** es un Juego Simple $(N,v) \in SG(N)$, en el que la función característica del juego, v, es $v(S) = 1$, si $|S| > \frac{n}{2}$, y $v(S) = 0$, en otro caso; siendo S una coalición entre jugadores de N.*

Ejemplo 1.2 *En una empresa, con una plantilla de 5 personas, debe decidir sobre llevar a cabo o no un nuevo proyecto. Se ha determinado que todos los integrantes de la plantilla tienen el mismo valor y que, para que el proyecto salga adelante, debe de haber más votos a favor que en contra.*

Para modelizar esta situación usaremos un Juego de Mayoría Simple $(N,v) \in SG(N)$, en el que $N = \{1,2,3,4,5\}$, $n = |N| = 5$ y la función característica será $v(S) = 1$, cuando $|S| > \frac{n}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$, y $v(S) = 0$, en otro caso.

La función v nos indica que una coalición será ganadora cuando tenga 3 o más elementos. Podemos entonces definir este Juego Simple como un juego $(N,W) \in SG(N)$, en el que $N = \{1,2,3,4,5\}$ y

$$W = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\},$$
$$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}.$$

Si nos restringimos a las coaliciones de 3 elementos, obtenemos el conjunto de coaliciones ganadoras minimales y, por consiguiente, una nueva forma de definir el Juego Simple (N,W^m), siendo $N = \{1,2,3,4,5\}$ y $W^m = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},$ $\{2,4,5\},\{3,4,5\}\}$.

1.1.2. Juegos de α-Supermayoría

Un *Juego de α-Supermayoría* modeliza situaciones en las que cada jugador tiene derecho a un voto y en las que se necesita una cuota de $\lceil \alpha n \rceil$ para ganar la votación, con $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Siendo $\lceil \quad \rceil$ la *función techo entero*, que asigna a cada número real, x, el entero más próximo mayor o igual que x. Matemáticamente, podemos decir lo siguiente.

Definición 1.5 *Un Juego Simple $(N, v) \in SG(N)$ será un* ***Juego de α-Supermayoría*** *si la función característica del juego, v, viene dada por $v(S) = 1$, si $|S| \geq \lceil \alpha n \rceil$, y $v(S) = 0$, en otro caso; siendo S una coalición de N.*

Cuando $\alpha = 1$, tenemos un caso particular de los juegos de α-Supermayoría, al que denominamos *Juego de Unanimidad*. Este tipo de juegos se caracteriza por tener una sola coalición ganadora, la total, N; y se usa para modelar situaciones en las que hace falta consenso entre todos los jugadores para que una acción sea llevada a cabo.

Por otro lado, observamos que si α fuese $\frac{1}{2}$, la definición de juego de α-Supermayoría equivaldría a la de *Juego de Mayoría Simple*; por lo que este último también es un caso particular del primero.

Ejemplo 1.3 *A partir del Ejemplo 1.2, hacemos una pequeña variación de la situación. Suponemos ahora que el jefe del proyecto que se ha de valorar determina que, por los riesgos del mismo, para que salga adelante deberá de contar con el apoyo del 75 % de la plantilla.*

Para modelizar esta situación, usaremos un Juego Simple $(N, v) \in SG(N)$ de α-Supermayoría en el que $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con $n = |N| = 5$, y $\alpha = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$. Por otro lado, dado que para este juego tenemos una cuota de $\lceil \alpha n \rceil = \lceil \frac{15}{4} \rceil = \lceil 3.75 \rceil = 4$, podemos definir la función característica como sigue: $v(S) = 1, \forall |S| \geq 4$, y $v(S) = 0$, en otro caso.

En este ejemplo, la función característica v nos indica que una coalición será ganadora cuando tenga 4 o más elementos. Podemos entonces definir este Juego Simple como un juego $(N, W) \in SG(N)$, siendo $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $W = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.

Si nos restringimos ahora a las coaliciones de 4 elementos, obtenemos el conjunto de coaliciones ganadoras minimales y, por consiguiente, una nueva forma de definir el Juego Simple (N, W^m), en la que $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $W^m = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$.

1.1.3. Juegos de Mayoría Ponderada

Los *Juegos de Mayoría Ponderada* modelan situaciones en las que cada jugador tiene derecho a votar un determinado número de veces, peso del jugador; y en las que, para llevar a cabo una acción, es necesario el acuerdo entre, al menos, un número prefijado de jugadores, cuota.

Definición 1.6 *Un* ***Juego de Mayoría Ponderada*** $[\beta; (w_1, ..., w_n)]$ *es un juego simple (N, W) en el que cada jugador i tiene un peso que se corresponde con la componente i-ésima del vector $(w_1, ..., w_n)$, siendo $w_i \geq 0$, $\forall i \in N$. Además existe una cuota $0 < \beta \leq \sum_{i \in N} w_i$ tal que $S \in W \Leftrightarrow w(S) = \sum_{i \in S} w_i \geq \beta$.*

Podemos ver sin dificultad que los *Juegos de Mayoría Simple* y *α-Supermayoría* son casos particulares de este tipo de juegos, en los que $w_i = 1$, $\forall i \in N$. También se tiene que $\beta = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ y $\beta = \lceil \alpha n \rceil$, respectivamente, según sea un Juego de Mayoría Simple o de α-Supermayoría.

Ejemplo 1.4 *Volviendo al Ejemplo 1.2, hacemos una pequeña variación de la situación, además de la introducida en el Ejemplo 1.2. Ahora tenemos, por un lado, que el jefe de proyectos determina que, por los riesgos del mismo, para que este salga adelante deberá contar con un respaldo del 75 %. Por otro lado, se ha de tener en cuenta que, en este caso, no todas las opiniones de los integrantes de la plantilla tienen el mismo valor, si no que hay expertos en el tema cuya opinión tiene más peso que la de otros.*

Para modelizar esta nueva situación usaremos un Juego Simple $(N, W) \in SG(N)$ *de Mayoría ponderada* $[\beta; (w_1, ..., w_n)]$*, en el que* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*,* $n = |N| = 5$ *y* $(w_1, ..., w_n) = (6, 5, 2, 4, 2)$ *será el vector de pesos del juego. Para calcular la cuota* β*, utilizaremos el porcentaje de apoyo necesario, con respecto a la suma de pesos;* $\beta = \lceil \frac{75}{100} \sum_{i \in N} w_i \rceil = \lceil \frac{3}{4}(6+5+2+4+2) \rceil = \lceil 14.25 \rceil = 15$*. Podemos definir el conjunto de coaliciones ganadoras del juego como sigue* $W = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$*.*

A partir de las coaliciones ganadoras obtenemos el conjunto de coaliciones ganadoras minimales y, por consiguiente, una nueva forma de definir el Juego Simple (N, W^m)*, siendo* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *y* $W^m = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$*.*

1.2. Índices de poder para Juegos Simples

En los Juegos Simples, entendemos el poder como la repercusión que tiene el comportamiento de un jugador en el resultado de una votación.

Definición 1.7 *El **Índice de Poder**,* f*, es una función que asigna a cada Juego Simple* $(N, W) \in SG(N)$ *un vector* $f(N, W) \in \mathbb{R}^n$*, cuyas componentes,* $f_i(N, W)$*, recogen la medida del poder que posee el jugador* i *en dicho juego.*

Los índices de poder de Shapley-Shubik y Banzhaf-Coleman son los más conocidos en el ámbito de los Juegos Simples. Ambos se aplican sobre el conjunto de coaliciones ganadoras del juego y, para su cálculo se echa mano de nociones importantes como las de *swing* y *pivote*.

Definición 1.8 *Un **swing** para el jugador* i *es una coalición* $S \subseteq N$ *que cumple:*

- $i \in S$
- $S \in W$
- $S \backslash \{i\} \notin W$.

Para un Juego Simple (N, W), denotamos con $\eta_i(N, W)$ al *conjunto de todos los swings del jugador* i.

Definición 1.9 *Si consideramos:*

- (N, W) *un Juego Simple o de Votación*
- π *una permutación de* N*,* $\pi \in \Pi(N)$*, que establece un orden estricto en el conjunto* N
- $P_i^\pi \subset N$ *el conjunto de jugadores que preceden a* i *en el orden establecido por* π*,*

se tiene que i *es **pivote** de la ordenación* π *si se cumple que* $P_i^\pi \notin W$ *y* $P_i^\pi \cup \{i\} \in W$*.*

De esta definición, podemos deducir que, a grandes rasgos, el pivote es el primer elemento del orden dado que convierte una coalición perdedora en ganadora. En este caso, denotaremos con $\Pi_i(N, W)$ al *conjunto de permutaciones de* N *en las que* i *es pivote para el juego* (N, W).

Partiendo de estos dos conceptos, se han definido tres tipos de jugadores asociados a los Juegos Simples. Steunenberg et al. (1999) recoge la idea de *jugador nulo* y, posteriormente, se define *jugador inferior* y *superior* (Napel y Widgrén, 2000).

Definición 1.10 *En un Juego Simple $(N, W) \in SG(N)$, un jugador i es un **jugador nulo** si nunca es pivote, $|\eta_i(N, W)| = 0$. Dicho de otro modo, no es un jugador necesario para formar coaliciones ganadoras, $i \notin S$, $\forall S \in W^m$. Matemáticamente, también podemos expresarlo así:*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S),\ \forall S \subseteq N \backslash \{i\}.$$

Definición 1.11 *Sea (N, W) un Juego Simple, a un jugador i se le llama **jugador inferior** si $\exists j \neq i$ que cumple que:*

- $j \in S$, $\forall S \in \eta_i(N, W)$
- $\exists T \in \eta_j(N, W)$ *tal que* $i \notin T$.

*Por otro lado, un jugador que no es inferior será **jugador superior**.*

De forma equivalente a lo anterior, si se da que $\eta_i(N, W) \subseteq \eta_j(N, W)$, $\forall j$ con $j \neq i$, podemos decir que i es un **jugador inferior** (Napel y Widgrén, 2000).

También se pueden probar los siguientes resultados.

Proposición 1.1 *En un Juego Simple, todo jugador nulo es jugador inferior.*

Demostración.

Sea $(N, v) \in SG$ e $i \in N$ jugador nulo, se tiene que $|\eta_i(N, v)| = 0 \Rightarrow \eta_i(N, v) = \emptyset$ y, trivialmente, $\eta_i(N, v) = \emptyset \subseteq \eta_j(N, v)$, $\forall i, j \in N$. Luego i será jugador inferior.

□

Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto, lo será sólo en juegos decisivos, es decir, que cumplen $S \in W$ o $N \backslash S \in W$, $\forall S \subseteq N$ (Napel y Widgrén, 2000).

Proposición 1.2 *En un Juego Simple decisivo, todo jugador inferior es jugador nulo.*

Demostración.

Suponemos que i es un jugador inferior en un Juego Simple decisivo (N, W), vamos a probar que i es jugador nulo.

Por reducción al absurdo, suponemos que no, es decir, $\eta_i(N, W) \neq \emptyset$, o lo que es lo mismo, $\exists R \in \eta_i(N, W) \mid R \neq \emptyset$. Dado que $R \in \eta_i(N, W)$ y, puesto que i es jugador inferior, se tiene que $\exists j \neq i \mid j \in \eta i$. Por otro lado, por definición de swing, como $R \in \eta_i(N, W)$ se tiene que:

- $R \in W$
- $R \backslash \{i\} \notin W$

De lo anterior y por ser un juego decisivo, podemos deducir que $N \backslash R \notin W$ y $N \backslash (R \backslash \{i\}) = (N \backslash R) \cup \{i\} \in W$. Esto implica que la coalición $(N \backslash R) \cup \{i\} \in \eta_i(N, W)$. Hemos llegado a una contradicción con el hecho de que i sea jugador inferior ya que, dado que $j \in R$, se tiene que $j \notin (N \backslash R) \cup \{i\}$.

□

A continuación, procedemos a definir los índices de poder más relevantes en el estudio de los Juegos Simples o de Votación.

1.2.1. Índice de Shapley-Shubik

Utilizando el concepto de pivote, podemos interpretar el índice de poder de Shapley-Shubik (Shapley y Shubik, 1954) como la probabilidad que tiene un jugador i de ser pivote, suponiendo una distribución uniforme sobre el conjunto de todas las permutaciones de N, de manera que todas sean equiprobables.

Definición 1.12 *El **índice de poder de Shapley-Shubik** para un Juego Simple* $(N, W) \in SG(N)$ *es un vector* $f(N, W) \in \mathbb{R}^n$*, en el que cada componente i viene dada por:*

$$f_i(N, W) = \frac{|\Pi_i(N, W)|}{n!} = \sum_{S \in \eta_i(N,W)} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!},$$

siendo $n = |N|$ *y* $s = |S|$.

Ejemplo 1.5 *A continuación, calcularemos el índice de Shapley-Shubik del Juego de Mayoría Ponderada* $[15; 6, 5, 2, 4, 2]$*, dado en el Ejemplo 1.3. Recordemos que se trata de un juego* (N, W)*, con:*

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$W = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

Calculamos, a partir de W*, el conjunto de los swings de cada jugador,* η_i*,* $\forall i \in N$*:*

$$\eta_1(N, W) = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

$$\eta_2(N, W) = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

$$\eta_3(N, W) = \{\{1, 2, 3, 5\}\}$$

$$\eta_4(N, W) = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}\}$$

$$\eta_5(N, W) = \{\{1, 2, 3, 5\}\}.$$

Tenemos entonces las siguientes componentes del índice de Shapley-Shubik:

$$f_1(N, W) = \sum_{S \in \eta_1(N,W)} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} = \frac{2!2!}{5!} + 3\frac{3!1!}{5!} + \frac{4!0!}{5!} = \frac{2}{60} + 3\frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{23}{60}$$

$$f_2(N, W) = \sum_{S \in \eta_2(N,W)} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} = \frac{2!2!}{5!} + 3\frac{3!1!}{5!} + \frac{4!0!}{5!} = \frac{2}{60} + 3\frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{23}{60}$$

$$f_3(N, W) = \sum_{S \in \eta_3(N,W)} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} = \frac{3!1!}{5!} = \frac{1}{20} = \frac{3}{60}$$

$$f_4(N, W) = \sum_{S \in \eta_4(N,W)} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} = \frac{2!2!}{5!} + 2\frac{3!1!}{5!} = \frac{2}{60} + 2\frac{1}{20} = \frac{8}{60}$$

$$f_5(N, W) = \sum_{S \in \eta_5(N,W)} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} = \frac{3!1!}{5!} = \frac{1}{20} = \frac{3}{60},$$

que dan lugar al siguiente índice de Shapley-Shubik para el Juego Simple $(N, W) \in SG(N)$:

$$f(N, W) = \left(\frac{23}{60}, \frac{23}{60}, \frac{3}{60}, \frac{8}{60}, \frac{3}{60}\right).$$

1.2.2. Índice de Banzhaf-Coleman

La autoría del índice de Banzhaf-Coleman se atribuye conjuntamente, como el propio nombre indica, a Banzhaf (1965) y Coleman (1971). Tomando como base el concepto de *swing*, podemos interpretar dicho índice para el jugador i como la probabilidad de que dicho jugador tenga un *swing*. Esto se corresponde con la media aritmética de las contribuciones que dicho jugador hace a las coaliciones a las que se puede unir.

Definición 1.13 *El* ***índice de poder de Banzhaf-Coleman*** *para un Juego Simple $(N, W) \in SG(N)$ es un vector $f(N, W) \in \mathbb{R}^n$, en el que cada componente i viene dada por:*

$$f_i(N, W) = \frac{|\eta_i(N, W)|}{2^{n-1}},$$

siendo $n = |N|$.

Ejemplo 1.6 *Calcularemos el índice de Banzhaf-Coleman del Juego Simple de Mayoría Ponderada $[15; 6, 5, 2, 4, 2]$, dado en el Ejemplo 1.3. En el ejemplo anterior habíamos calculado el conjunto de los swings de cada jugador, η_i, $\forall i \in N$:*

$$\eta_1(N, W) = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

$$\eta_2(N, W) = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

$$\eta_3(N, W) = \{\{1, 2, 3, 5\}\}$$

$$\eta_4(N, W) = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}\}$$

$$\eta_5(N, W) = \{\{1, 2, 3, 5\}\}.$$

Apoyándonos en esto, calculamos las componentes del índice de Banzhaf-Coleman:

$$f_1(N, W) = \frac{|\eta_1(N, W)|}{2^{n-1}} = \frac{5}{2^4} = \frac{5}{16}$$

$$f_2(N, W) = \frac{|\eta_2(N, W)|}{2^{n-1}} = \frac{5}{2^4} = \frac{5}{16}$$

$$f_3(N, W) = \frac{|\eta_3(N, W)|}{2^{n-1}} = \frac{1}{16}$$

$$f_4(N, W) = \frac{|\eta_4(N, W)|}{2^{n-1}} = \frac{3}{16}$$

$$f_5(N, W) = \frac{|\eta_5(N, W)|}{2^{n-1}} = \frac{1}{16}.$$

Tenemos entonces que el índice de Banzhaf-Coleman para el Juego Simple $(N, W) \in SG(N)$ será:

$$f(N, W) = \left(\frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}\right).$$

1.2.3. Índice de Deegan-Packel

El índice de Deegan-Packel se basa en el concepto de *coalición ganadora minimal*, y además, para Deegal y Packel (1979), el tamaño de la coalición influye en el valor del índice.

Definición 1.14 *El* ***índice de poder de Deegan-Packel*** *para un Juego Simple* $(N, W) \in SG(N)$ *es un vector* $f(N, W) \in \mathbb{R}^n$*, en el que cada componente i viene dada por:*

$$f_i(N, W) = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W_i^m} \frac{1}{|S|}.$$

Como podemos deducir de la definición anterior, para medir el poder de cada jugador en una votación, el índice de Deegan-Packel toma como punto de partida tres ideas fundamentales. En primer lugar, como indicamos al principio, sólo se tienen en cuenta las coaliciones ganadoras minimales, considerando que son las únicas existentes. Por otro lado, se considera que todas las coaliciones pertenecientes a W_i^m son equiprobables, de ahí el factor $\frac{1}{|W^m|}$ en la definición del índice. Como última consideración, se tiene que los integrantes de cada coalición se reparten los beneficios que traiga consigo la cooperación de forma equivalente, por eso dividimos entre el tamaño de la coalición S, siendo $S \in W_i^m$.

Ejemplo 1.7 *Volviendo de nuevo al Ejemplo 1.3, calcularemos el índice de Deegan-Packel para el Juego Simple de Mayoría Ponderada* $[15; 6, 5, 2, 4, 2]$ *que allí se presenta. Para ello, partimos del conjunto de coaliciones ganadoras minimales del juego:*

$$W^m = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}\},$$

y calculamos las componentes del índice:

$$f_1(N, W) = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W_1^m} \frac{1}{|S|} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{7}{12} = \frac{7}{24}$$

$$f_2(N, W) = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W_2^m} \frac{1}{|S|} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{7}{12} = \frac{7}{24}$$

$$f_3(N, W) = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W_3^m} \frac{1}{|S|} = \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$f_4(N, W) = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W_4^m} \frac{1}{|S|} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$f_5(N, W) = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W_5^m} \frac{1}{|S|} = \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{8},$$

que dan lugar al siguiente índice de Deegan-Packel para el Juego Simple $(N, W) \in SG(N)$*:*

$$f(N, W) = \left(\frac{7}{24}, \frac{7}{24}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}\right).$$

1.2.4. Índice del Bien Público

El índice del Bien Público (Holler, 1982) también está basado en el concepto de *coalición ganadora minimal* y, más concretamente, se apoya en el conjunto de coaliciones ganadoras minimales que contienen a un determinado jugador i, W_i^m. A diferencia del índice anterior, este índice no tiene en cuenta el tamaño de las coaliciones, sino simplemente el número de ellas.

Definición 1.15 *El* ***índice de poder del Bien Público*** *para un Juego Simple* $(N, W) \in SG(N)$ *es un vector* $f(N, W) \in \mathbb{R}^n$*, en el que cada componente i viene dada por:*

$$f_i(N, W) = \frac{|W_i^m|}{\sum_{j \in N} |W_j^m|}.$$

De la definición anterior podemos extraer dos ideas fundamentales: el poder de cada jugador en una votación sólo depende de las coaliciones ganadoras minimales, aunque en este caso las no minimales también son susceptibles de formarse. Por otro lado, al igual que en el índice de Deegan-Packel, en el índice del Bien Público consideramos equiprobables todas las coaliciones pertenecientes a W_i^m, por eso multiplicamos por $\frac{1}{\sum_{j \in N} |W_j^m|}$.

Ejemplo 1.8 *Volvemos otra vez al Ejemplo 1.3 y calculamos el índice del Bien Público para el Juego Simple de Mayoría Ponderada* $[15; 6, 5, 2, 4, 2]$ *que allí se presenta. Teníamos el siguiente conjunto de coaliciones ganadoras minimales,*

$$W^m = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}\},$$

a partir del cual, calculamos las componentes del índice de Holler o del Bien Público:

$$f_1(N, W) = \frac{|W_1^m|}{\sum_{j \in N} |W_j^m|} = \frac{2}{7}$$

$$f_2(N, W) = \frac{|W_2^m|}{\sum_{j \in N} |W_j^m|} = \frac{2}{7}$$

$$f_3(N, W) = \frac{|W_3^m|}{\sum_{j \in N} |W_j^m|} = \frac{1}{7}$$

$$f_4(N, W) = \frac{|W_4^m|}{\sum_{j \in N} |W_j^m|} = \frac{1}{7}$$

$$f_5(N, W) = \frac{|W_5^m|}{\sum_{j \in N} |W_j^m|} = \frac{1}{7}.$$

En definitiva, el índice del Bien Público para el Juego Simple $(N, W) \in SG(N)$ *será:*

$$f(N, W) = \left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right).$$

1.3. Caracterización de los índices de poder

A parte de las interpretaciones dadas para los distintos índices de poder, es interesante presentar un conjunto de propiedades que sirvan para caracterizar inequívocamente cada índice de poder.

A lo largo de esta sección, definiremos una serie de propiedades que serán la base de las caracterizaciones de los índices que proporcionaremos al final de este apartado.

Sin embargo, para introducir dichas propiedades, será necesario definir una serie de conceptos previos, en los que nos vamos a apoyar.

Definición 1.16 *En un Juego Simple $(N, W) \in SG(N)$, dos jugadores $i, j \in N$ son* ***jugadores simétricos*** *si:*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \; \forall S \subseteq N \backslash \{i, j\}.$$

Definición 1.17 *Sean $(N, v), (N, w) \in SG(N)$ Juegos Simples, para los cuales $W^m(N, v)$ y $W^m(N, w)$ son, respectivamente, sus conjuntos de coaliciones ganadoras minimales. Se tiene que (N, v) y (N, w) son* ***juegos fusionables*** *si:*

$$S \nsubseteq T \text{ y } T \nsubseteq S, \text{ para cualquier par de coaliciones } S \in W^m(N, v) \text{ y } T \in W^m(N, w).$$

Definición 1.18 *Sean $(N, v), (N, w) \in SG(N)$, podemos definir los Juegos Simples $(N, v \wedge w)$ y $(N, v \vee w)$ a partir de sus funciones características. Estas son, respectivamente, las que se muestran a continuación. Para todo $S \subseteq N$:*

$$(v \wedge w)(S) = min\{v(S), w(S)\} = \begin{cases} 1, & si \quad v(S) = 1 \text{ y } w(S) = 1 \\ \\ 0, & si \quad v(S) = 0 \text{ o } w(S) = 0 \end{cases}$$

$$(v \vee w)(S) = max\{v(S), w(S)\} = \begin{cases} 1, & si \quad v(S) = 1 \text{ o } w(S) = 1 \\ \\ 0, & si \quad v(S) = 0 \text{ y } w(S) = 0 \end{cases}$$

Llegados a este punto, ya estamos en condiciones de incluir una serie de propiedades que nos servirán para caracterizar los índices definidos en la sección anterior.

1. Simetría, SIM. Un índice de poder $f : SG(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ será simétrico si, para todo juego $(N, v) \in SG(N)$, se tiene que:

$$f_i(N, v) = f_j(N, v), \; \forall i, j \in N \text{ jugadores simétricos.}$$

2. Jugador nulo, JN. Un índice de poder $f : SG(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfará la propiedad de jugador nulo si, para todo juego $(N, v) \in SG(N)$ y todo $i \in N$ que sea jugador nulo en (N, v), se tiene que:

$$f_i(N, v) = 0.$$

3. Eficiencia, EFI. Un índice de poder $f : SG(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ será eficiente si, para todo juego $(N, v) \in SG(N)$, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(N, v) = v(N) = 1.$$

4. Poder total, PT. Un índice de poder $f : SG(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de poder total si, para todo juego $(N, v) \in SG(N)$, se tiene que el poder total de los jugadores es la suma de las medias de las contribuciones marginales de todos los jugadores. Matemáticamente, lo expresamos así:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(N, v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

5. Transferencia o aditividad para Juegos Simples, TR. Un índice de poder $f : SG(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de transferencia si, para todo par de juegos $(N, v), (N, w) \in SG(N)$, se tiene que:

$$f(N, v) + f(N, w) = f(N, v \wedge w) + f(N, v \vee w),$$

siendo $(N, v \wedge w)$ y $(N, v \vee w)$ los Juegos Simples que se recogen en la *Definición 1.18.*

6. Fusión, FUS. Un índice de poder $f : SG(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de fusión si, para todo par de juegos $(N, v), (N, w) \in SG(N)$ fusionables, se tiene:

$$f(N, v \vee w) = \frac{|W^m(N, v)| f(N, v) + |W^m(N, w)| f(N, w)}{|W^m(N, v \vee w)|},$$

siendo $W^m(N, v)$, $W^m(N, w)$ y $W^m(N, v \vee w)$ los conjuntos de coaliciones ganadoras minimales de los juegos (N, v), (N, w) y $(N, v \vee w)$, respectivamente.

7. PGI-Fusión, PGI-FUS. Un índice de poder $f : SG(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de PGI-Fusión si, para todo par de juegos $(N, v), (N, w) \in SG(N)$ fusionables, se cumple que:

$$f(N, v \vee w) = \frac{\sum_{i \in N} |W_i^m(N, v)|}{\sum_{i \in N} |W_i^m(N, v \vee w)|} f(N, v) + \frac{\sum_{i \in N} |W_i^m(N, w)|}{\sum_{i \in N} |W_i^m(N, v \vee w)|} f(N, w),$$

siendo $W_i^m(N, v)$, $W_i^m(N, w)$ y $W_i^m(N, v \vee w)$ los conjuntos de coaliciones ganadoras minimales que contienen al jugador i para los juegos (N, v), (N, w) y $(N, v \vee w)$, respectivamente.

8. Monotonía minimal, MM. Un índice de poder $f : SG(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de monotonía minimal si, para todo par de juegos $(N, v), (N, w) \in SG(N)$, se tiene:

$$f_i(N, w) |W^m(N, w)| \geq f_i(N, v) |W^m(N, v)|, \; \forall i \in N \mid W_i^m(N, v) \subseteq W_i^m(N, w).$$

9. PGI-Monotonía minimal, PGI-MM. Un índice de poder $f : SG(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de PGI-Monotonía minimal si, para todo par de juegos $(N, v), (N, w) \in SG(N)$, se tiene:

$$f_i(N, w) \sum_{j \in N} |W_j^m(N, w)| \geq f_i(N, v) \sum_{j \in N} |W_j^m(N, v)|, \; \forall i \in N \mid W_i^m(N, v) \subseteq W_i^m(N, w).$$

A partir de estas nueve propiedades, podemos aportar a los índices de la *Sección 1.2* una serie de características que los distingan de los demás. A pesar de que todos ellos cumplen las propiedades de jugador nulo y simetría, existen otras que diferencian a unos de otros.

Teorema 1.1 (Dubey, 1975) *El índice de Shapley-Shubik es el único índice de poder $f : SG(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades de TR, JN, SIM y EFI.*

Teorema 1.2 (Dubey y Shapley, 1979) *El índice de Banzhaf-Coleman es el único índice de poder $f : SG(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades de TR, JN, SIM y PT.*

De lo anterior, podemos observar que la propiedad de transferencia, o aditividad sobre Juegos Simples, se verifica tanto para el índice de Shapley-Shubik como para el de Banzhaf-Coleman. La diferencia reside en que sólo el índice de Shapley-Shubik es eficiente; mientras que el índice de Banzhaf-Coleman verifica la propiedad de poder total, mutuamente excluyente con la anterior, por la propia definición de ambas.

Por otra parte, los índices de Deegan-Packel y del Bien Público no cumplen la propiedad de transferencia, pero sí otras nuevas. El siguiente contraejemplo demuestra cómo los índices de Deegan-Packel y Bien Público no verifican la propiedad de transferencia.

Ejemplo 1.9 *Sean los juegos* $(N,v),(N,w) \in SG(N)$*, siendo* $N=\{1,2,3\}$ *el conjunto total de jugadores y* $W^m(N,v)=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ *y* $W^m(N,w)=\{\{1,3\}\}$ *los conjuntos de coaliciones ganadoras minimales. A partir de estos juegos, podemos obtener los Juegos Simples* $(N,v\vee w)$ *y* $(N,v\wedge w)$*, cuyas coaliciones ganadoras minimales son* $W^m(N,v\vee w)=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ *y* $W^m(N,v\wedge w)=\{\{1,2,3\}\}$*, respectivamente.*

Los índices de Deegan-Packel y del Bien público para los juegos anteriores coinciden y son $f(N,v) = (1/4,1/2,1/4)$*,* $f(N,w)=(1/2,0,1/2)$ *y* $f(N,v\vee w)=f(N,v\wedge w)=(1/3,1/3,1/3)$*.*

Tenemos entonces que estos índices no verifican las propiedades de transferencia, ya que: $f(N,v)+f(N,w)=(3/4,1/2,3/4)\neq(2/3,2/3,2/3)=f(N,v\wedge w)+f(N,v\vee w)$*.*

A continuación, propondremos dos formas distintas de caracterizar el índice de Deegan-Packel. Tras probar que la propiedad de transferencia no se verifica para este índice, veremos si cumple las demás propiedades del índice de Shapley-Shubik.

Teorema 1.3 (Deegan y Packel, 1979) *El índice de Deegan-Packel es el único índice de poder* $f: SG(N)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *que satisface las propiedades de FUS, JN, SIM y EFI.*

Teorema 1.4 (Alonso-Meijide, 2002) *El índice de Deegan-Packel es el único índice de poder* $f: SG(N)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *que satisface las propiedades de MM, JN, SIM y EFI.*

Tenemos, en este caso, dos propiedades que diferencian a este índice del de Shapley-Shubik. A continuación, incluimos un ejemplo que muestra como el índice de Shapley-Shubik no verifica las propiedades de monotonía minimal.

Ejemplo 1.10 *Sean* $(N,v),(N,w)\in SG(N)$ *Juegos Simples, en los que* $N=\{1,2,3\}$ *el conjunto total de jugadores y* $W^m(N,v)=\{\{1,2\}\}$ *y* $W^m(N,w)=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ *los conjuntos de coaliciones ganadoras minimales.*

Para $i=1\in N$*, se tiene que* $W_1^m(N,v)=\{\{1,2\}\}\subseteq\{\{1,2\}\}=W_1^m(N,w)$*. Por lo que no se cumplirá la propiedad de MM para el índice de Shapley-Shubik,* f*, ya que se tiene que:*

$$f_1(N,w)|W^m(N,w)|=\frac{1}{3}\neq\frac{1}{2}=f_1(N,v)|W^m(N,v)|$$

.

Por último, daremos dos formas de singularizar el índice del Bien Público. Se basan en las propiedades de PGI-Fusión y PGI-Monotonía minimal, respectivamente.

Teorema 1.5 (Holler y Packel, 1983) *El índice del Bien Público es el único índice de poder* $f: SG(N)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *que satisface las propiedades de PGI-FUS, JN, SIM y EFI.*

Teorema 1.6 (Alonso-Meijide et al., 2008) *El índice del Bien Público es el único índice de poder* $f: SG(N)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *que satisface las propiedades de PGI-MM, JN, SIM y EFI.*

Capítulo 2

Juegos Espaciales

Un Juego Espacial es una extensión del modelo de Juego Simple, que nace de la necesidad de modelizar las distintas posiciones ideológicas de los jugadores en cualquier proceso de toma de decisión (Owen, 1971). Estas posiciones marcan la preferencia que tiene el jugador con respecto a un tema determinado y, como cabe esperar, esto tiene una importante repercusión sobre los resultados de los índices obtenidos para Juegos Simples, en los que existe una nula influencia ideológica.

Un Juego Espacial está formado por un Juego Simple (N, W) y una colección de $n = |N|$ puntos distribuidos en el espacio, $\mathbb{R}^m$. Las m coordenadas de dichos puntos asignan a cada jugador una posición ideológica con respecto a m variables previamente seleccionadas.

Definición 2.1 *Un **Juego Espacial m-dimensional** es una terna* $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$ *en la que:*

- (N, W) *es un Juego Simple o de Votación*
- $Q^j \in \mathbb{R}^m$, $\forall j \in N$, *siendo:*
  - $\mathbb{R}^m$*, el espacio ideológico con respecto a* m *variables*
  - Q^j*, el punto que representa la situación ideológica para el jugador* j *dentro del espacio ideológico* $\mathbb{R}^m$
- $Q^j \neq Q^k$, $\forall j \neq k$ *con* $j, k \in N$*.*

Los Juegos Espaciales son también juegos de votación en los que los N agentes deciden acerca de llevar a cabo o no una determinada acción. Es fácil imaginarse que, si situamos dicha acción en el espacio ideológico del juego $\mathbb{R}^m$, es más probable que un jugador i vote a favor de la misma cuanto más cerca este su situación ideológica ideal, Q^i, de la situación ideológica de la acción; pues más de acuerdo estará con su ejecución.

Un caso particular de estos juegos es el de los Juegos Espaciales con Espectro que se corresponden con el caso unidimensional, m=1. En él, a diferencia del resto, no se tendrá en cuenta la distancia entre los puntos ideales de los jugadores, sino simplemente la ordenación de los mismos a lo largo de un espectro. En los Juegos Espaciales con Espectro basta con una permutación de los elementos de N para definir la posición ideológica de los jugadores. En esta situación, es fácil intuir que dos agentes con preferencias parecidas estarán de acuerdo en muchas cuestiones y, por tanto, serán más frecuentes las ordenaciones en las que aparezcan próximos.

2.1. Índices de poder para Juegos Espaciales

Una pieza clave de los Juegos Espaciales es la consideración de la ideología de los jugadores a la hora de medir el poder que tiene cada uno; entendiendo *poder* como su capacidad para influir en el resultado de una votación. Como veremos a continuación, existen grandes diferencias entre este poder y el que tendría en un Juego Simple (Napel y Widgrén, 2001).

Por otro lado, mientras que en los Juegos Simples definíamos una ordenación de los jugadores mediante permutaciones de N equiprobables, en este tipo de juegos no podemos hacer esta consideración. Se debe a que la ideología política de cada jugador hace que unas permutaciones sean más probables que otras. La idea es modificar tanto los índices de los Juegos Simples como considera la geometría de los puntos Q^j. Para ello, nos basamos en cuatro ideas fundamentales que, partiendo de dicha geometría, asignan a las distintas permutaciones de N una probabilidad particular:

1. Si Q^j y Q^t están cerca, las permutaciones en las que los jugadores j y t estén cerca deberán ser más probables que en las que estén apartados. Esto se debe a que la proximidad de sus puntos ideales hace que ambos jugadores estén de acuerdo en muchas cuestiones.

2. Las probabilidades deberán de ser invariante ante movimientos rígidos de la configuración de puntos ideales. Garantizando así, el ser consecuentes en la asignación de probabilidades a permutaciones en las que conservan las distancias entre puntos.

3. Las probabilidades deberán de ser, por lo general, funciones continuas sobre los puntos ideales. Excepto cuando las coincidencias entre ellos ocasionen discontinuidades. No obstante, tal y como hemos asumido en la última condición dada para definir Juego Espacial, esto no nos influye.

4. Si dos puntos ideales, Q^j y Q^t, coinciden el resultado final debería ser como si fuesen el mismo jugador. Podemos obviar esta condición si asumimos la suposición inicial de que $Q^j \neq Q^k$, $\forall j \neq k$ con $j, k \in N$.

En definitiva, apoyándonos en lo anterior buscaremos distintas maneras de adaptar los índices de poder que habíamos establecido para Juegos Simples, $(N, W) \in SG(N)$, al caso de Juegos Espaciales, $(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$.

Empezaremos introduciendo dos índices de poder clásicos para este tipo de juegos que surgen como modificaciones del índice Shapley-Shubik, dado para Juegos Simples. Seguidamente, nos centraremos en otros dos índices que serán más manejables computacionalmente hablando, los denotaremos índice distancia y valor espectro. Para concluir esta revisión, propondremos dos nuevos posibles índices de poder para Juegos Espaciales. Estos serán una adaptación de los índices de Deegan-Packel y Bien Público, dados en el *Capítulo 1*, a las características propias de un Juego Espacial.

2.1.1. Índices clásicos

Dos de los índices clásicos más conocidos nacen como una extensión del índice de Shapley-Shubik a los Juegos Espaciales y reciben el nombre de índice de Owen (Owen, 1971) e índice de Owen-Shapley (Owen y Shapley, 1989). A este último se le atribuye una autoría conjunta tras la previa revisión realizada por Shapley (1977) del índice de Owen.

Antes de proceder a la definición del índice de Owen debemos presentar primero lo que denotaremos como B, que será la bola cerrada con el radio mínimo que contenga a los puntos ideales de todos los jugadores, $\{Q^j\}_{j\in N} \subset B$. De este modo, podremos calcular la distancia desde un punto de B a cualquiera de los puntos ideales. Esto induce una permutación en la que ordenamos los elementos de N según aumente la distancia a un punto previamente fijado de B.

Definición 2.2 *El* ***índice de Owen*** *para un Juego Espacial* $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$ *es un vector* $f(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) \in \mathbb{R}^n$*, en el que cada componente* i *viene dada por:*

$$f_i(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) = \frac{\lambda(A_i)}{\lambda(B)},$$

donde λ *es la medida de Lebesgue y* A_i *es el conjunto de puntos de* B *que inducen una permutación en la que* i *es el pivote.*

Por otro lado, para definir el índice de Owen-Shapley daremos previamente el concepto de esfera unidad de $\mathbb{R}^m$, que se corresponderá con el conjunto $S^1_m = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m u_i^2 = 1\}$. De un modo similar al anterior, podemos calcular la dirección desde un punto de la esfera a cualquiera de los puntos ideales. Esto induce una permutación en la que ordenamos los elementos de N de manera ascendente, según el resultado de calcular el producto escalar del punto ideal del jugador por un punto previamente fijado de S. Es decir, para un determinado $u \in S^1_m$ elaboraremos una ordenación de los jugadores de N de manera que j preceda a k si, y solo si, $\sum_{i=1}^m u_i Q_i^j < \sum_{i=1}^m u_i Q_i^k$.

Definición 2.3 *El* ***índice de Owen-Shapley*** *para un Juego Espacial* $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$ *es un vector* $f(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) \in \mathbb{R}^n$*, en el que cada componente* i *viene dada por:*

$$f_i(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) = \frac{\lambda(B_i)}{\lambda(S^1_m)},$$

donde λ *es la medida de Lebesgue y* B_i *es el conjunto de puntos de* S^1_m *que inducen una permutación en la que* i *es pivote.*

De las definiciones anteriores, podemos intuir que la principal diferencia entre ambos índices reside en que mientras que el primero es sensible a las distancias, el segundo depende de las direcciones. También observamos que la principal desventaja de ambos es que tienen un cálculo muy costoso, principalmente el índice de Owen, que es muy complicado hasta en problemas de dimensiones pequeñas. Sin embargo, en este tipo de problemas podríamos considerar viable usar el de Owen-Shapley.

Caracterización del índice de Owen-Shapley

Al igual que hicimos para los índices de poder de Juegos Simples, sería interesante dar una caracterización propia de cada índice de poder espacial, que lo diferencie de los demás. En 2017, Peters y Zarzuelo caracterizan el índice de Owen-Shapley tal y como se recoge en el teorema que incluimos a continuación, basado en las propiedades que siguen:

- **Igual poder de cambio, IPC.** Sean $(N, v, \{Q^j\}_{j\in N})$, $(N, v', \{Q^j\}_{j\in N})$, $(N, w, \{Q^j\}_{j\in N})$ y $(N, w', \{Q^j\}_{j\in N})$ cuatro Juegos Espaciales sobre el conjunto de jugadores N. Se tiene que si $v - v' = w - w' \geq 0$, entonces:

$$f(N, v, \{Q^j\}_{j\in N}) - f(N, v', \{Q^j\}_{j\in N}) = f(N, w, \{Q^j\}_{j\in N}) - f(N, w', \{Q^j\}_{j\in N}).$$

- **Jugador nulo, JN.** Para todo juego espacial $(N, v, \{Q^j\}_{j\in N})$ y todo jugador $i \in N$ que sea jugador nulo, se tiene que:

$$f_j(N, v, \{Q^j\}_{j\in N}) = f_j(N\backslash\{i\}, v_{-i}, \{Q^j\}_{j\in N\backslash\{i\}}),\ \forall j \in N\backslash\{i\};$$

siendo v_{-i} la función característica v restringida al conjunto $N\backslash\{i\}$ y siendo i jugador nulo en un Juego Espacial si lo es en el Juego Simple asociado (N, v); es decir, si cumple la *Definición 1.10*.

- **Anonimato, AN** Para todo juego espacial $(N, v, \{Q^j\}_{j\in N})$ y toda función inyectiva $\lambda : N \longrightarrow N$, se cumple que:
$$f_{\lambda(i)}(\lambda(N), v, \{Q^j\}_{j\in N}) = f_i(N, v, \{Q^j\}_{j\in N}),\ \forall i \in N.$$
- **Invariante por reflexión, IR** Para todo juego espacial $(N, v, \{Q^j\}_{j\in N})$ y todo movimiento lineal sobre los puntos $\{Q^j\}_{j\in N}$, $\Upsilon(\{Q^j\}_{j\in N})$. Se tiene que:
$$f(N, v, \{Q^j\}_{j\in N}) = f(N, v, \Upsilon(\{Q^j\}_{j\in N})).$$
- **Invarianza posicional, IP** Sean $(N, v, \{Q^j\}_{j\in N})$ y $(N, v, \{Q'^j\}_{j\in N})$ dos Juegos Espaciales basados en el mismo Juego Simple (N, v), pero con distinto espacio ideológico. Si $Q'^i = Q^i$ y Q'^j pertenece a la linea que une el punto Q^i con Q^j, $\forall j \in N\backslash\{i\}$, se cumple que:
$$f_i(N, v, \{Q^j\}_{j\in N}) = f_i(N, v, \{Q'^j\}_{j\in N}).$$

Teorema 2.1 (Peters y Zarzuelo, 2017) *El índice de Owen-Shapley es el único índice de poder espacial que satisface las propiedades de IPC, JN, AN, IR e IP.*

2.1.2. Índice distancia

El índice distancia (Alonso-Meijide et al., 2011) nace como otra variación del índice de Shapley-Shubik, basada en la idea de que la probabilidad de una permutación depende de la distancia entre los puntos ideales de los jugadores que considera el orden de la permutación. Para expresar esto matemáticamente, presentamos el concepto de longitud de la permutación $\pi : N \longrightarrow N$ para el Juego Espacial $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$; que denotaremos con $l(\pi)$. Dicha longitud será la suma de los segmentos $[Q^{\pi(1)}, Q^{\pi(2)}]$, $[Q^{\pi(2)}, Q^{\pi(3)}]$, ... , $[Q^{\pi(n-1)}, Q^{\pi(n)}]$ que determina la permutación π:
$$l(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(Q_j^{\pi(i)} - Q_j^{\pi(i+1)}\right)^2}.$$

Podemos imaginar fácilmente que cuanto más larga sea la longitud de una permutación, más lejos estarán los puntos ideales entre jugadores contiguos en el orden establecido y, por lo tanto, menos probable será que cooperen y se dé dicha permutación. En esta idea reside el índice distancia, que considera que la probabilidad de cada permutación es inversamente proporcional a su longitud.

Definición 2.4 *El **índice distancia** para un Juego Espacial $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$ es un vector $f(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) \in \mathbb{R}^n$, en el que cada componente i viene dada por:*
$$f_i(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) = \frac{\sum_{\pi\in\Pi_i(N,W)} \frac{1}{l(\pi)}}{\sum_{\pi\in\Pi(N)} \frac{1}{l(\pi)}}.$$

Cabe destacar que, computacionalmente, el índice distancia es mucho más ventajoso que los índices anteriores.

Propiedades del índice distancia

El índice distancia cumple importantes propiedades que lo diferencian de los índices anteriores. Según recoge Alonso-Meijide et al. (2011) en su estudio de este nuevo índice de poder espacial, se puede probar que el índice distancia cumple estas dos propiedades que se muestran a continuación. Sin embargo, apunta también que existen otros índices de poder espacial que las cumplen, por lo que no conforman una caracterización distintiva para índice distancia. La elaboración de esta, a partir de las dos propiedades que se muestran, podría ser una tarea interesante para estudios futuros.

- **Propiedad 1.**

  Para introducir esta propiedad vamos a recordar el concepto de *jugador nulo*, introducido en el *Capítulo 1.* Para un Juego Simple (N, W) un jugador i es un *jugador nulo* si $i \notin S \ \forall S \in W^m$, es decir, si no es necesario para formar coaliciones ganadoras. En los Juegos Simples, o de Votación, a estos jugadores no se le atribuye ningún poder sobre el resultado de una votación y a los demás si. Cabe esperar que en Juegos Espaciales, los jugadores nulos sigan sin tener ningún poder ya que solamente hemos añadido puntos ideales al modelo de Juego Simple. Al mismo tiempo, los jugadores no nulos verán su índice de poder modificado en función de la ideología del jugador. La primera propiedad nos dice que esto es cierto en el índice distancia y, matemáticamente, podemos expresarla como sigue:

Proposición 2.1 *Sea $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$ un Juego Espacial, para todo $i \in N$ se tiene que:*

$$f_i(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) = 0 \Leftrightarrow i \text{ es jugador nulo en el Juego Simple } (N, W).$$

Para demostrar esta propiedad, basta con ver que si i es jugador nulo en (N, W) entonces $\Pi_i(N, W) = \emptyset$ y, por tanto, $f_i(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) = \frac{\sum_{\pi\in\Pi_i(N,W)} \frac{1}{l(\pi)}}{\sum_{\pi\in\Pi(N)} \frac{1}{l(\pi)}} = 0$, ya que el numerador es nulo.

- **Propiedad 2.**

  Esta propiedad tiene que ver con la simetría de los puntos ideales de los jugadores en el espacio ideológico del juego. Por este motivo, antes de enunciar la propiedad explicaremos a que jugadores nos referimos cuando hablamos de espacialmente simétricos. Dicho concepto se apoya en la previa construcción, para cada $i \in N$, de una partición de $\Pi_i(N, W)$, que recordemos, es el conjunto de permutaciones en las que el jugador i es pivote.

Tomamos un $i \in N$ y, utilizando la longitud de los elementos de $\Pi_i(N, W)$, construimos la partición como sigue:

1. Para $r = 0$,
$\Pi_i^r(N, W) = \Pi_i^0(N, W) = \emptyset$.

2. Para $r \geq 1$ donde $\Pi_i(N, W) \setminus \bigcup_{k=0}^{r-1} \Pi_i^k(N, W) \neq \emptyset$,

$$\Pi_i^r(N, W) = \{\pi \in \Pi_i(N, W) \setminus \bigcup_{k=0}^{r-1} \Pi_i^k(N, W) \ \textit{tal que}\ l(\pi) \leq l(\tilde{\pi}) \ \forall \tilde{\pi} \in \Pi_i(N, W) \setminus \bigcup_{k=0}^{r-1} \Pi_i^k(N, W)\}.$$

Siguiendo estas dos normas de construcción podemos ver que existe un $r_i \in \mathbb{N}$ para el que $\Pi_i(N, W) = \sum_{r=1}^{r_i} \Pi_i^r(N, W)$ y que se cumple que

- $\Pi_i^1(N, W)$ contienen a todas las permutaciones de distancia mínima en las que i es pivote.
- $\Pi_i^{r_i}(N, W)$ contienen a todas las permutaciones de distancia máxima en las que i es pivote.
- $\pi, \tilde{\pi} \in \Pi_i^r(N, W) \Longleftrightarrow l(\pi) = l(\tilde{\pi})$, para todo $i \in N$ y $r \in \{1, ...r_i\}$.

Definición 2.5 *Sea $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$ un Juego Espacial m-dimensional, diremos que dos jugadores, $p, q \in N$, son **espacialmente simétricos** si, y solo si, $r_p = r_q$ y para $r \in \{1, ..., r_p\}$ se cumple:*

- $|\Pi_p^r(N,W)| = |\Pi_q^r(N,W)|$
- $l(\pi) = l(\tilde{\pi})$ *para todo* $\pi \in \Pi_p^r(N,W)$ *y* $\tilde{\pi} \in \Pi_q^r(N,W)$.

De algún modo, podemos intuir de la definición anterior, que los jugadores espacialmente simétricos son intercambiables y, por lo tanto, deberían de tener el mismo poder. Esta es la base de la propiedad de simetría espacial que cumple el índice distancia.

Proposición 2.2 *Sea* $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$ *un juego espacial, se tiene que:*

Si $p, q \in N$ *son jugadores espacialmente simétricos del juego* $\Rightarrow f_p(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) = f_q(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$.

Podemos probar esta propiedad sin más que tomar, para cada $r \in \{1, ..., r_p\}$, un $\pi^r \in \Pi_p^r(N,W)$ y $\tilde{\pi}^r \in \Pi_q^r(N,W)$; de modo que

$$f_p(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) = \frac{\sum_{r=1}^{r_p} \frac{|\Pi_p^r(N,W)|}{l(\pi^r)}}{\sum_{\pi\in\Pi(N)} \frac{1}{l(\pi)}} = \frac{\sum_{r=1}^{r_p} \frac{|\Pi_q^r(N,W)|}{l(\tilde{\pi}^r)}}{\sum_{\pi\in\Pi(N)} \frac{1}{l(\pi)}} = f_q(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}).$$

2.1.3. Valor espectro

Para el caso unidimensional de los Juegos Espaciales, m=1, tenemos un índice particular de naturaleza asimétrica en el que la posición del jugador en el espectro juega un papel fundamental, nos referiremos a dicho índice como *valor del espectro* (Álvarez-Mozos et al., 2013).

Antes de definirlo, es conveniente introducir una serie de conceptos previos que manejaremos posteriormente. En los Juegos Espaciales con Espectro sólo nos interesa la forma en la que están ordenados los puntos ideales $\{Q^j\}_{j\in N}$, pertenecientes al espacio ideológico unidimensional $\mathbb{R}$, sin influir la distancia entre ellos. De este modo, bastará con dar un orden total estricto $\prec^\sigma$ sobre los elementos de N para definir los puntos ideales de los jugadores.

Definición 2.6 *Para toda biyección* $\sigma : N \longrightarrow \{1, ..., |N| = n\}$*, podemos definir un orden estricto* $\prec^\sigma$ *sobre los elementos de N. De manera que, para todo* $i, j \in N$*, se tiene que:*

$$i \prec^\sigma j \Longleftrightarrow \sigma(i) < \sigma(j).$$

Apoyándonos en este orden, definimos dos conjuntos importantes para la comprensión del valor espectro. Los llamaremos *conjunto de coaliciones conexas con respecto a* $\prec^\sigma$, $C^{\prec^\sigma}(N)$, y *conjunto de permutaciones admisibles con respecto a* $\prec^\sigma$, $\Pi^{\prec^\sigma}(N,W)$. Dónde:

Definición 2.7 *Podemos decir que* $S \subset N$ *es una* ***coalición conexa con respecto a*** $\prec^\sigma$ *si, para todo* $i, j \in S$*, se cumple que:*

$$i \prec^\sigma k \prec^\sigma j \Longrightarrow k \in S.$$

Dado esto, podemos afirmar que todo $S \in C^{\prec^\sigma}(N)$, con $|S| > 1$, tiene dos jugadores extremos y otros que estarán entre ambos. Si llamamos mínimo de S al jugador $i \in N$ que cumple que $i \prec^\sigma k$, $\forall k \in S\backslash\{i\}$ y llamamos máximo de S al jugador $j \in N$ que verifica $k \prec^\sigma j$, $\forall k \in S\backslash\{j\}$; i y j serán los jugadores extremos de la coalición S. Esto nos facilita otra manera de denotar una coalición conexa: $S = [i...j]$.

Definición 2.8 *Una permutación* $\pi \in \Pi(N,W)$ *es una* ***permutación admisible con respecto a*** $\prec^\sigma$ *si el conjunto de predecesores de i según la permutación* π, $P_i^\pi = \{j \in N \mid \pi(j) < \pi(i)\}$*, es una coalición conexa con respecto a* $\prec^\sigma$, $\forall i \in N$.

Tras la revisión de los conceptos anteriores, estamos en condiciones de definir el índice de poder:

Definición 2.9 *El* ***valor espectro*** *para un Juego Espacial* $(N, W, \prec^\sigma)$ *es un vector* $f(N, W, \prec^\sigma) \in \mathbb{R}^n$*, en el que cada componente i viene dada por:*

$$f_i(N, W, \prec^\sigma) = \frac{|\Pi_i^{\prec^\sigma}(N, W)|}{2^{n-1}},$$

siendo $\Pi_i^{\prec^\sigma}(N, W)$*, el conjunto de permutaciones admisibles con respecto a* $\prec^\sigma$ *en las que i es pivote y* $2^{n-1} = |\Pi^{\prec^\sigma}(N, W)|$.

De la definición anterior podemos extraer dos ideas fundamentales. En los juegos de α-Supermayoría se tiene que el poder crece hacia los extremos del espectro, mientras que, en los juegos de mayoría simple, la mayor parte del poder se concentra en los jugadores más moderados, que no ocupan ni el centro ni los extremos del espectro. A continuación explicaremos con detalle esta variación y, para ello, presentaremos previamente los conceptos de derecha e izquierda moderada y de extrema derecha e izquierda.

Para empezar, vamos a presentar dos funciones que nos serán de utilidad: $\lceil \quad \rceil$ y $\lfloor \quad \rfloor$. La primera se trata de la *función techo entero*, definida anteriormente en la *Sección 1.1.2*. La segunda, $\lfloor \quad \rfloor$, es la *función suelo entero o parte entera*, que asigna a todo número real, x, el entero más próximo menor o igual que x. Ahora bien, si suponemos el conjunto N con sus elementos renombrados según establece el orden del espectro del Juego Espacial, se tiene lo siguiente:

- un jugador i pertenece a la *izquierda moderada* si $i \in \{LM_1, LM_2\}$, siendo
  - para n par: $LM_1 = \lceil \frac{n}{4} \rceil$ y $LM_2 = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$,
  - para n impar: $LM_1 = \lceil \frac{n+1}{4} \rceil$ y $LM_2 = \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor + 1$;
- un jugador i pertenece a la *derecha moderada* si $i \in \{RM_1, RM_2\}$, siendo
  - para n par: $RM_1 = \lceil \frac{3n}{4} \rceil$ y $RM_2 = \lfloor \frac{3n}{4} \rfloor + 1$,
  - para n impar: $RM_1 = \lceil \frac{3}{4}(n+1) \rceil$ y $RM_2 = \lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor + 1$;
- un jugador i pertenece al conjunto A_k^l si su distancia al extremo izquierdo del espectro es mayor o igual que k, $A_k^l = [k+1, ..., n] \geq k$;
- un jugador i pertenece al conjunto A_k^r si su distancia al extremo derecho del espectro es mayor o igual que k, $A_k^l = [1, ..., n-k] \geq k$.

Idea 1. Sea $(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$ un Juego Espacial 1-dimensional de Mayoría Simple. En una votación el poder de los jugadores varía de forma estrictamente creciente en los intervalos $[1, LM_1]$ y $[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, RM_1]$ y decrece, también estrictamente, en $[LM_2, \lceil \frac{n}{2} \rceil]$ y $[RM_2, n]$. Concentrándose, de este modo, el mayor poder en los jugadores moderados de izquierda y derecha (LM_1, LM_2, RM_1 y RM_2).

Idea 2. Sea $(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$ un Juego Espacial 1-dimensional de α-Supermayoría, con cuota $\lceil \alpha n \rceil$. Cuando la zona nula, $N \setminus A_{k-1}^r \cup A_{k-1}^l$, es no vacía, está formada por los jugadores centrales del espectro que tendrán poder nulo. Mientras tanto, los jugadores con más poder se situarán entre los extremos del espectro y los extremos de la zona nula.

En el caso particular de los juegos de unanimidad, $\alpha = 1$, todo el poder se reparte equitativamente entre los jugadores extremos del espectro, $1/2$ cada uno. Los demás jugadores tendrán poder nulo. Una interpretación de este hecho es la que sigue a continuación. Ya que en los juegos de unanimidad sólo hay una coalición ganadora, que es la total, es importante que los jugadores extremos del espectro estén interesados en cooperar; esto les da un poder extra que podemos pensar como un poder de veto.

Caracterización del valor espectro

En este apartado estudiaremos una forma de caracterizar de manera única el valor espectro. Dicha caracterización (Álvarez-Mozos et al., 2013) se basa en las propiedades que definiremos a continuación. No obstante, vamos a definir previamente una serie de conceptos que serán necesarios.

Definición 2.10 *Sea un Juego Espacial $(N, W, \prec^\sigma)$, diremos que el* ***gemelo inverso con respecto a*** $\prec^\sigma$ *de un jugador $i \in N$, será el jugador $j = n + 1 - i$.*

Definición 2.11 *Sea un Juego Espacial $(N, W, \prec^\sigma)$ y $S \subseteq N$ una coalición. Diremos que la* ***coalición inversa con respecto a*** $\prec^\sigma$ *de S, S^{-1}, será la formada por todos los gemelos inversos de sus jugadores. Es decir:*

$$S^{-1} = \{j \in N \mid j = n + 1 - i, \textit{ siendo } i \in S\}.$$

Definición 2.12 *Sea un Juego Espacial $(N, W, \prec^\sigma)$. Dos* ***jugadores*** *$i, j \in N$ serán* ***simétricos conexos*** *si cumplen que i y j son gemelos inversos y que $v(S \cup \{i\}) = v(S^{-1} \cup \{j\})$, para todo $S \in \{P_i^\pi \mid \pi \in C^{\prec^\sigma}(N)\}$.*

Definición 2.13 *Sea un Juego Espacial $(N, W, \prec^\sigma)$, diremos que un jugador $i \in N$ es* ***jugador veto*** *si $v(S) = 0$, $\forall S \in \{P_i^\pi \mid \pi \in C^{\prec^\sigma}(N)\}$.*

Definición 2.14 *Sea un Juego Espacial $(N, W, \prec^\sigma)$, diremos que un jugador $i \in N$ es* ***jugador nulo conexo*** *si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$, $\forall S \in \{P_i^\pi \mid \pi \in C^{\prec^\sigma}(N)\}$.*

Podemos ahora definir las siguientes propiedades que caracterizarán el valor espectro. Algunas de ellas son adaptaciones de las propiedades que veíamos en el *Capítulo 1*, para Juegos Simples.

- **Eficiencia, EFI.** Un índice de poder espacial f será eficiente si, para todo Juego Espacial de la forma $(N, v, \prec^\sigma)$, cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(N, v, \prec^\sigma) = v(N) = 1.$$

- **Aditividad, AD.** Un índice de poder espacial f satisface la propiedad de aditividad si, para todo par de Juegos Espaciales $(N, v, \prec^\sigma)$ y $(N, w, \prec^\sigma)$, se tiene que:

$$f(N, v + w, \prec^\sigma) = f(N, v, \prec^\sigma) + f(N, w, \prec^\sigma).$$

- **Jugador nulo conexo, JNC.** Un índice de poder espacial f satisface la propiedad de jugador nulo conexo si, para todo Juego Espacial de la forma $(N, v, \prec^\sigma)$ y todo $i \in N$ que sea jugador nulo conexo en el Juego Simple asociado (N, v), se tiene que:

$$f_i(N, v, \prec^\sigma) = 0.$$

- **Jugador simétrico conexo, JSC.** Un índice de poder espacial f satisface la propiedad de jugador simétrico conexo si, para todo Juego Espacial de la forma $(N, v, \prec^\sigma)$, cumple que:

$$f_i(N, v, \prec^\sigma) = f_j(N, v, \prec^\sigma), \ \forall i, j \in N \textit{ jugadores conexos que son simétricos.}$$

- **Contribuciones equilibradas para jugadores con veto, CEJV.** Un índice de poder espacial f satisface la propiedad de contribuciones equilibradas para jugadores con veto si para todo Juego Espacial de la forma $(N, v, \prec^\sigma)$ y todo par de jugadores veto $i, j \in N$, con $i < j$; se tiene que:

$$f_i(N, v, \prec^\sigma) - f_i(N, v, \prec^\sigma_{j\rightarrow}) = f_j(N, v, \prec^\sigma) - f_j(N, v, \prec^\sigma_{\leftarrow i},)$$

  siendo $\sigma_{i\rightarrow} = \sigma_{\leftarrow(i+1)}$ la permutación obtenida de σ cuando el jugador i cambia su posición con el jugador $i + 1$.

En base a las propiedades anteriores, podemos obtener una caracterización del valor espectro.

Teorema 2.2 (Álvarez-Mozos et al., 2013) *El valor espectro es el único índice de poder espacial que satisface las propiedades de EFI, AD, JNC, JSC, y CEJV.*

Extensión al espacio ideológico multidimensional

Para concluir, propondremos un modo de extender este valor espectro a situaciones con espacios ideológicos multidimensionales. Dado un espacio ideológico $\mathbb{R}^m$ con $m > 1$, trataremos cada una de las m variables ideológicas por separado. En cada una de ellas, tan sólo tendremos en cuenta cómo están ordenados los puntos ideales de los jugadores, esta ordenación será el espectro del juego. Podemos ahora calcular los m valores espectro como si se tratase de m Juegos Simples unidimensionales. Finalmente, para calcular un índice global para el caso multidimensional, hacemos una media simple o ponderada de los m valores espectro previamente obtenidos; dependiendo, respectivamente, de si consideramos que toda variable dimensional tiene la misma, o distinta, influencia sobre el comportamiento de cada jugador.

2.1.4. Extensiones de los índices de Deegan-Packel y Bien Público a Juegos Espaciales

A lo largo de esta sección propondremos una posible extensión a Juegos Espaciales para el índice de Deegan-Packel y otra para el de Holler. Ambas modificaciones tienen como punto de partida las definiciones de ambos índices para Juegos Simples, dadas en el *Capítulo 1*, y, posteriormente, serán adaptadas a una estructura espacial. Para ello, utilizaremos un razonamiento similar al empleado para presentar el concepto de longitud de una permutación, definido en la *Sección 2.1.2.*, para el índice distancia.

Tal y como adelantamos, partimos de las definiciones de los índices para un Juego Simple $(N, W) \in SG(N)$:

$$f_i(N, W) = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W_i^m} \frac{1}{|S|} \ \textbf{(Deegan-Packel)}$$

$$f_i(N, W) = \frac{|W_i^m|}{\sum_{j \in N} |W_j^m|} \ \textbf{(Holler)}$$

cuyas interpretaciones, como podemos recordar, mantienen la idea de que todas las coaliciones son equiprobables. Si nos situamos en el caso de los Juegos Espaciales, parece lógico suponer que la probabilidad de que una coalición se forme es inversamente proporcional a la distancia entre los puntos ideales de los jugadores. De este modo, a medida que crece dicha distancia, la probabilidad de cooperación y el poder de los integrantes de la coalición disminuye.

En este caso, y a diferencia que en el índice distancia, será necesario medir la longitud entre los puntos ideales de los miembros de una coalición que no está ordenada. Para dar solución a esto, definiremos el concepto de longitud de una coalición del siguiente modo.

Definición 2.15 *Sea $(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$, un Juego Espacial m-dimensional. Dada una coalición $S \subseteq N$:*

- *consideramos todas las permutaciones posibles de los elementos de S;*
- *aplicamos la fórmula de la longitud de una permutación, que veíamos al principio de la Sección 2.1.2, a cada una de las permutaciones de S consideradas;*

- *definimos el concepto de* ***longitud de una coalición*** *S, $l(S)$, como el mínimo de todas las cantidades anteriores.*

Es decir,

$$l(S) = min_{\pi \in \Pi(S)} \sum_{i=1}^{s-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(Q_j^{\pi(i)} - Q_j^{\pi(i+1)} \right)^2};$$

siendo $s = |S|$ y $\Pi(S)$, el conjunto de todas las posibles permutaciones de los elementos de S.

Seguimos ahora con la idea de que, al pasar a una estructura espacial, la probabilidad de formación ya no es la misma para todas las coaliciones sino que depende inversamente de su longitud. En base a esto, sustituyendo en los índices iniciales el elemento que implica la equiprobabilidad de coaliciones por

$$\frac{\frac{1}{l(S)}}{\sum_{T \in W^m} \frac{1}{l(T)}},$$

obtendremos los índices extendidos a Juegos Espaciales, como mostramos a continuación.

Definición 2.16 *El* ***índice de Deegan-Packel extendido*** *para un Juego Espacial $(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$ es un vector $f(N, W, \{Q^j\}_{j \in N}) \in \mathbb{R}^n$, en el que cada componente i viene dada por:*

$$f_i(N, W, \{Q^j\}_{j \in N}) = \frac{1}{\sum_{T \in W^m} \frac{1}{l(T)}} \sum_{S \in W_i^m} \frac{1}{l(S)} \frac{1}{|S|}.$$

Definición 2.17 *El* ***índice de Holler extendido*** *para un Juego Espacial $(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$ es un vector $f(N, W, \{Q^j\}_{j \in N}) \in \mathbb{R}^n$, en el que cada componente i viene dada por:*

$$f_i(N, W, \{Q^j\}_{j \in N}) = \frac{\sum_{S \in W_i^m} \frac{1}{l(S)}}{\sum_{j \in N} \sum_{T \in W_j^m} \frac{1}{l(T)}}.$$

2.2. Algunas generalidades para los Juegos Espaciales

En esta sección, recogeremos algunos de los enunciados más importantes para Juegos Espaciales. Owen (1995), define un punto final del juego al que denomina centro de poder, estudiando diversas propiedades de ese punto.

Definición 2.18 *Sea $(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$ un Juego Espacial m-dimensional y $f(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$ un índice de poder del juego, el* ***centro de poder del juego espacial*** *será el punto:*

$$P* = \sum_{j \in N} f_j Q^j$$

Owen (1995), también contempla la posibilidad de que el espacio ideológico se restrinja a la ubicación de los puntos ideales de los jugadores, sin que sus índices de poder varíen. Es la propiedad que se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 2.3 *Sea un Juego Espacial m-dimensional $(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$ y $n = |N|$. Suponemos que los n puntos de $\{Q^j\}_{j \in N}$ están contenidos en G, un subespacio lineal k-dimensional de $\mathbb{R}^m$, con $k < m$. Entonces el índice de poder del juego es invariante tanto si pensamos en los puntos Q^j como puntos de $\mathbb{R}^m$ o como puntos de G.*

Pérdida de simetría

La pérdida de simetría es el rasgo común más distintivo de la extensión de los Juegos Simples a Juegos Espaciales. Entre las propiedades que utilizábamos en el capítulo anterior, para caracterizar a los índices de poder de Juegos Simples, observamos que podemos aplicar sin ningún problema las definiciones dadas para la eficiencia, jugador nulo, poder total, transferencia y fusión, al contexto de los Juegos Espaciales. El hecho de que introducir los puntos ideales de los jugadores no afecte a la naturaleza de estas propiedades hace que esta adaptación sea posible.

Sin embargo, para el caso de la propiedad de simetría no podemos decir lo mismo. Esto se debe a que, en los Juegos Espaciales, el poder que tienen los jugadores que son simétricos en el Juego Simple, no tiene que coincidir; ya que también está condicionado por sus puntos ideales. En base a esto, se han desarrollado distintas formas de definir la propiedad de simetría en el contexto de Juegos Espaciales. En la mayoría de los casos, son específicas para cada subclase de juegos o para cada índice de poder, como ocurre con la simetría espacial, que se recoge en la *Propiedad 2.* del índice distancia, definida en la *Sección 2.1.2.* Otra posible variación es la que se incluye en la *Sección 2.1.3* cuando definimos la propiedad del jugador simétrico conexo, JSC, que contribuye a la caracterización del valor espectro. A parte de estas, existen otras muchas adaptaciones de la simetría a los índices espaciales, es el caso de la caracterización de tres índices espacialmente simétricos que hace Alonso-Meijide (2002) basándose en lo que denota: propiedad de simetría espacial para juegos de unanimidad.

Capítulo 3

Aplicación a datos reales

Como ya habíamos adelantado antes, la aplicación más fructífera de los Juegos Espaciales es la modelización de un proceso de votación que tiene lugar en un parlamento. Motivados por esto, a lo largo de este capítulo, hemos escogido realizar un análisis del Parlamento Vasco enfocado desde este tipo de juegos.

Tomaremos como punto de partida los datos reales que nos proporcionan los resultados de las últimas elecciones autonómicas del País Vasco, llevadas a cabo en 2016. Posteriormente, elegiremos los Juegos Espaciales para modelar el actual parlamento con el fin de analizar el poder otorgado a cada partido político con representación parlamentaria. Para medir esta capacidad de cada partido para influir en los resultados de una determinada votación, haremos un recorrido por los diferentes índices de poder definidos para Juegos Espaciales; comparándolos con los propios de los Juegos Simples.

3.1. Modelización del actual Parlamento Vasco

En esta sección elaboraremos un modelo que refleje la actual situación parlamentaria en el País Vasco, fruto de los resultados de las elecciones autonómicas de 2016.

La siguiente tabla incluye los partidos que han conseguido tener representación en el parlamento así como los escaños conseguidos por cada uno de ellos o, lo que es lo mismo, su número de diputados:

Parlamento Vasco					
Partidos	EAJ-PNV	EH Bildu	E. Podemos	PSE-EE	PP
Escaños	28	18	11	9	9

Cuadro 3.1: Datos extraídos de los resultado de las Elecciones Autonómicas Vascas, en 2016

En primer lugar, definiremos un Juego Simple que refleje esta situación y, posteriormente, lo extenderemos a un Juego Espacial que se aproxime a la realidad en la que la ideología de los partidos es crucial para determinar su cooperación.

3.1.1. Modelo: Juego Simple (N, W)

Para definir un Juego Simple (N, W) es suficiente con proporcionar el conjunto de jugadores N y el conjunto de coaliciones ganadoras, W.

La votación que queremos modelar no es otra que la que se lleva a cabo continuamente en el parlamento cuando se tiene que valorar si una determinada acción sigue adelante. En estas circunstancias, observamos que el conjunto de jugadores N se corresponde con el conjunto de partidos políticos con representación parlamentaria.

$$N = \{EAJ\text{-}PNV, EHBildu, E.Podemos, PSE\text{-}EE, PP\}$$

$$n = |N| = 5$$

Para definir el conjunto de coaliciones ganadoras, W, partiremos de la consideración de que estamos ante un juego de mayoría ponderada, $[\beta; (w_{EAJ\text{-}PNV}, ..., w_{PP})]$. En él, los pesos de cada partido o jugador serán su número escaños o diputados con derecho a voto en el parlamento y la cuota β será un número prefijado de jugadores necesario para aprobar una ley. A partir del *Cuadro 3.1*, extraemos los siguientes pesos para el juego.

$$(w_{EAJ\text{-}PNV}, ..., w_{PP}) = (28, 18, 11, 9, 9)$$

El cálculo de la cuota β se basa en el hecho de que, para el sistema político español, una determinada medida consigue respaldo parlamentario suficiente para llevarse a cabo cuando es apoyada por una mayoría simple de jugadores, es decir, más de la mitad.

$$\beta = \lceil \frac{1}{2}(1 + \sum_{i \in N} w_i) \rceil = \lceil \frac{1}{2}(1 + 28 + 18 + 11 + 9 + 9) \rceil = \lceil 38 \rceil = 38$$

Tenemos que efectivamente, β cumple que $0 < \beta \leq \sum_{i \in N} w_i = 75$ y que, considerando que $S \in W \Leftrightarrow w(S) = \sum_{i \in S} w_i \geq \beta = 38$, podemos obtener el conjunto de coaliciones ganadoras que definen al Juego Simple. Ayudados del soporte de software libre R, hemos elaborado e implementado el código recogido en el *Apéndice A.1* que nos facilitará el cálculo de las coaliciones ganadoras para cualquier juego de este tipo.

Tras ejecutar dicho código, obtenemos la siguiente salida de R que nos muestra las coaliciones ganadoras de nuestro problema. Para interpretarla, se ha de tener en cuenta que, para trabajar con unos datos más manejables en R, hemos asignado respectivamente, un número del 1 a $n = 5$, a cada partido EAJ-PNV, EH Bildu, E. Podemos, PSE-EE y PP. Para adaptar dicho código a cualquier otro Juego Simple sólo tendríamos que modificar los datos iniciales relativos a los jugadores, ponderaciones y cuota de mayoría.

```
## [[1]]
## [1] NA
##
## [[2]]
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    2
## [2,]    1    3
##
## [[3]]
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]    1    2    4
```

```
## [3,]    1    2    5
## [4,]    1    3    4
## [5,]    1    3    5
## [6,]    1    4    5
## [7,]    2    3    4
## [8,]    2    3    5
##
## [[4]]
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    2    3    4
## [2,]    1    2    3    5
## [3,]    1    2    4    5
## [4,]    1    3    4    5
## [5,]    2    3    4    5
##
## [[5]]
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]    1    2    3    4    5
```

Tenemos entonces el conjunto de coaliciones ganadoras para nuestro Juego Simple (N, W),

$$W = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{1,3,5\},$$

$$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\},$$

de dimensión $|W| = 16$.

3.1.2. Extensión del modelo: Juego Espacial $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$

Como ya habíamos adelantado y motivados por la elaboración de un modelo lo más próximo posible a la realidad, hemos extendido el Juego Simple anterior en un Juego Espacial. Para ello, se ha tenido en cuenta un aspecto tan importante en este tipo de juegos como es la ideología de los jugadores. En el caso que nos compete, las preferencias políticas de los partidos están muy marcadas y son esenciales a la hora de formar coaliciones que no vayan en contra de la ideología de sus votantes.

Para estudiar la ideología de un jugador, se analizan sus preferencias en relación a un determinado tema o variable. En este caso, hemos optado por un Juego Espacial 2-dimensional donde las variables que marcan las dos dimensiones del espacio ideológico $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^2$ son las posiciones ideológicas del partido en el eje izquierda-derecha y en el eje centro-periferia. Tradicionalmente hay varias teorías que explican el voto y están relacionadas con la ideología de los partidos, pues será próxima a la de sus votantes. El estudio de esta ideología se fundamenta en la existencia de dos *cleavage* políticos fundamentales, el eje izquierda-derecha y el eje centro-periferia. Estos *cleavage* surgen para entender la articulación de intereses y provocan una división social en grupos de personas que comparten unas determinadas características que los llevan a actuar en base a su identidad colectiva (Lipset y Rokkan, 1967).

A continuación, procederemos a situar los partidos políticos con representación parlamentaria en el eje izquierda-derecha, tomando como valores extremos el -5 y 5. En esta escala, el valor -5 se corresponde con la posición ideológica más a la izquierda y el valor 5 con la posición más a la derecha. Para situar los partidos en el eje, nos basamos en el Estudio N^o 3154 del CIS, titulado *"Postelectoral del País Vasco. Elecciones Autonómicas* 2016*"*; concretamente en las respuestas de los encuestados a la pregunta 35: *" Cuando se habla de política se utilizan normalmente las expresiones izquierda y derecha.*

En esta tarjeta hay una serie de casillas que van de izquierda a derecha. ¿En qué casilla colocaría Ud. a cada uno de los siguientes partidos o coaliciones?".

Situación ideal en el eje izquierda-derecha $[-5, 5]$				
EAJ-PNV	EH Bildu	E. Podemos	PSE-EE	PP
1.49	-2.91	-2.20	-0.08	3.91

Cuadro 3.2: Datos extraídos del Estudio N^o 3154 del CIS.

Ahora hacemos lo mismo para el eje centro-periferia, para el que también tomamos una escala cuyos valores extremos son el -5 y 5. En esta escala, el valor -5 se corresponde con la posición ideológica más próxima al nacionalismo centrista, es decir, el nacionalismo español. Por otra parte, en el valor 5 se sitúa la posición más próxima al nacionalismo periférico o, en este caso, nacionalismo vasco.

Para situar los partidos en dicho eje, esta vez nos apoyamos en la respuesta a la pregunta 26 del mismo estudio que dice: *"Y en relación con el sentimiento nacionalista vasco, ¿podría decirme, por favor, dónde colocaría Ud. a cada uno de los siguientes partidos en una escala de 1 a 10, en la que el 1 significa el «mínimo nacionalismo» y el 10 el «máximo nacionalismo»?".*

Obtenemos así, los siguientes resultados.

Situación ideal en el eje centro-periferia $[-5, 5]$				
EAJ-PNV	EH Bildu	E. Podemos	PSE-EE	PP
2.82	3.77	-0.35	-1.80	-3.42

Cuadro 3.3: Datos extraídos del Estudio N^o 3154 del CIS.

Estas preferencias dan lugar a los puntos ideales de los 5 partidos, $\{Q^j\}_{j\in N}$:

$$Q^{EAJ\text{-}PNV} = (1.49, 2.82)$$

$$Q^{EHBildu} = (-2.91, 3.77)$$

$$Q^{E.Podemos} = (-2.20, -0.35)$$

$$Q^{PSE\text{-}EE} = (-0.08, -1.80)$$

$$Q^{PP} = (3.91, -3.42))$$

Hemos, por tanto, modelado la situación inicial como Juego Espacial 2-dimensional $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$, cuyo espacio ideológico $\mathbb{R}^2$ es el que se muestra a continuación.

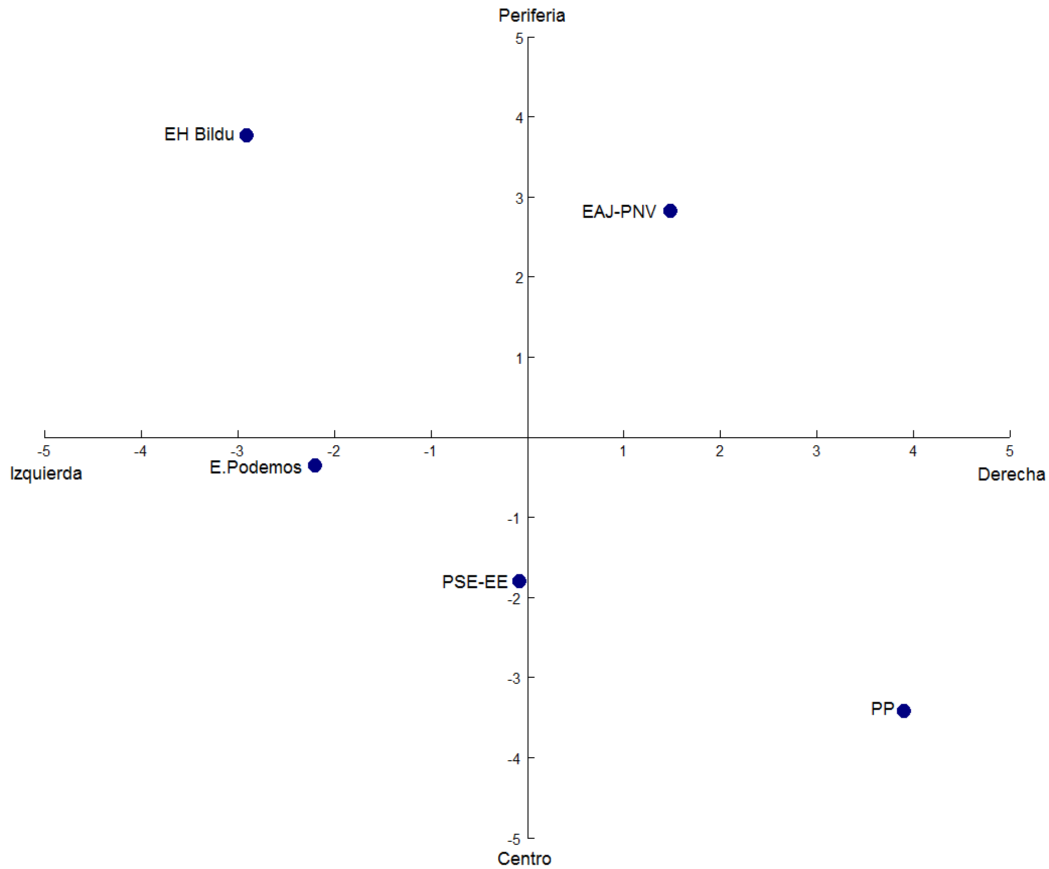

Figura 3.1: Espacio ideológico

3.2. Índices de poder para el Juego Simple (N, W)

Tras modelar la situación parlamentaria del País Vasco, vamos a hacer una estimación del poder que tiene cada uno de los cinco partidos con representación en el parlamento. En este apartado, nos centraremos en el modelo propio de Juego Simple (N, W), que hemos definido en la *Sección 3.1.1.* En base a ello, calculamos el poder que otorgan los índices definidos anteriormente para este tipo de juegos a cada partido político.

3.2.1. Índice de Shapley-Shubik

Hemos utilizando el sistema de software libre R para elaborar un código que lleve a cabo el cálculo de este índice para el juego (N, W). Tal y como vemos en la *Definición 1.12*, el cálculo del índice de Shapley-Shubik se basa en encontrar el conjunto de permutaciones de las que es pivote el jugador i. Esto es lo que se recoge en el código del *Apéndice A.2*, dando lugar a la siguiente salida de R, correspondiente al índice de Shapley-Shubik para nuestro juego (N, W).

```
## [1] 0.40000000 0.23333333 0.23333333 0.06666667 0.06666667
```

Hemos obtenido que el índice de Shapley-Shubik aplicado al Parlamento Vasco será el siguiente:

$$f(N, W) = (0.400, 0.233, 0.233, 0.067, 0.067).$$

3.2.2. Índice de Banzhaf-Coleman

El código del *Apéndice A.3* nos proporciona el índice de Banzhaf-Coleman para el juego (N, W), esta vez su fundamento es el cálculo del conjunto de swings de cada jugador i; tal y como nos indica la *Definición 1.13*. Tras ejecutar en R dicho código, obtenemos:

```
## [1] 0.625 0.375 0.375 0.125 0.125
```

Como resultado, tenemos el siguiente valor del índice:

$$f(N, W) = (0.625, 0.375, 0.375, 0.125, 0.125).$$

3.2.3. Índice de Deegan-Packel

Como ya indicamos en la *Definición 1.14*, el índice de Deegan-Packel se basa en el conjunto de coaliciones ganadoras minimales, y más concretamente, en las que contienen a cada jugador i. De este modo, la búsqueda de ambos conjuntos son la principal tarea en el cálculo del índice que hemos elaborado con ayuda del soporte R y recogido en el *Apéndice A.4*.

Tras la implementación del código hemos obtenido

```
## [1] 0.2666667 0.2333333 0.2333333 0.1333333 0.1333333
```

y, por lo tanto, el siguiente valor para el índice de Deegan-Packel:

$$f(N, W) = (0.267, 0.233, 0.233, 0.133, 0.133).$$

3.2.4. Índice del Bien Público

Por último, basándonos en los conjuntos calculados para el índice anterior, hemos implementado en R el código necesario para calcular el índice del Bien Público, recogido en la *Definición 1.15*. Este código, que se incluye en el *Apéndice A.5,* da lugar a la siguiente salida de R,

```
## [1] 0.2307692 0.2307692 0.2307692 0.1538462 0.1538462
```

y al índice del Bien Público para el juego (N, W):

$$f(N, W) = (0.231, 0.231, 0.231, 0.154, 0.154).$$

3.3. Índices de poder para el Juego Espacial $(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$

En esta sección, estimaremos el poder relativo a cada uno de los cinco partidos que integran el Parlamento Vasco, pero esta vez lo haremos desde el modelo de Juego Espacial $(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$ que hemos modelado en la *Sección 3.1.2*. En base a ello, calculamos el poder que otorgan los índices, definidos para este tipo de juegos, a cada partido político.

3.3.1. Índice distancia

Como indicábamos en la *Definición 2.4*, para el cálculo del índice distancia es necesario conocer el conjunto de permutaciones de las que i es pivote y la longitud de cada permutación π. Basándonos en esto, hemos elaborado el código que se recoge en el *Apéndice A.6*, necesario para calcular el índice distancia del juego espacial $(N, W, \{Q^j\}_{j \in N})$.

Obteniendo, de esta forma, la salida de R

```
## [1] 0.41878021 0.23858169 0.20198541 0.08068518 0.05996751
```

$$f(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) = (0.419, 0.239, 0.202, 0.081, 0.060)\,.$$

3.3.2. Valor espectro

En la *Sección 2.1.3*, explicábamos como aplicábamos el valor de espectro a un juego con un espacio ideológico unidimensional, $m = 1$. Como el juego que se presenta tiene dos dimensiones, hemos aplicado primeramente el cálculo del valor espectro a la variable ideológica relativa a la posición en el eje izquierda-derecha de los partidos. Para ello, usaremos el código del *Apéndice A.7*, dando lugar al siguiente resultado:

```
## [1] 0.250 0.125 0.250 0.250 0.125
```

Una vez hemos obtenido un resultado para esto, hemos utilizado el mismo código pero, en esta ocasión, sobre el eje centro-periferia de los partidos del Parlamento Vasco. Cambiamos los datos iniciales relativos a la posición de los jugadores en el espectro. Es decir, cambiamos el vector x anterior, por:

```
> x<-c( 2.82,  3.77, -0.35, -1.80, -3.42 ) # posición eje centro-periferia
```

y obtenemos el siguiente resultado:

```
## [1] 0.7500 0.0625 0.1875 0.0000 0.0000
```

Considerando que las dos variables ideológicas anteriores tienen la misma influencia sobre la formación de coaliciones, podemos proponer un valor de espectro común haciendo la media del poder alcanzado por cada jugador en cada una de ellas. El resultado será:

```
## [1] 0.50000 0.09375 0.21875 0.12500 0.06250
```

$$f(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) = (0.500, 0.094, 0.219, 0.125, 0.063)\,.$$

3.3.3. Índice de Deegan-Packel extendido

De las extensiones propuestas a lo largo de la *Sección 2.1.4*, la del índice de Deegan-Packel se basa en las coaliciones ganadoras minimales y en lo que hemos denominado longitud de una coalición. Tras haber elaborado el código de R que recoge estos conceptos, incluido en el *Apéndice A.8*, hemos obtenido un resultado:

```
## [1] 0.2174958 0.2147773 0.2378712 0.2262693 0.1035863
```

y, por tanto, el siguiente índice de Deegan-Packel extendido para el juego espacial $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$:

$$f(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) = (0.217, 0.215, 0.238, 0.226, 0.104)\,.$$

3.3.4. Índice del Bien Público extendido

Una vez más, y con ayuda del soporte R, hemos implementado un código que calcule el índice del Bien Público extendido. Dicho código está recogido en el *Apéndice A.9* y la base del mismo es la igual a la tomada en la sección anterior para el índice de Deegan-Packel.

Obtenemos, por tanto, el siguiente resultado:

```
## [1] 0.1901043 0.2155843 0.2324731 0.2482083 0.1136300
```

correspondiente al índice del Bien Público extendido:

$$f(N, W, \{Q^j\}_{j\in N}) = (0.190, 0.216, 0.232, 0.248, 0.114)\,.$$

3.4. Conclusiones

Reparto del poder entre los partidos del Parlamento Vasco					
	EAJ-PNV	EH Bildu	E. Podemos	PSE-EE	PP
Shapley-Shubik	0.400	0.233	0.233	0.067	0.067
Banzhaf-Coleman	0.625	0.375	0.375	0.125	0.125
Deegan-Packel	0.267	0.233	0.233	0.133	0.133
Bien Público	0.231	0.231	0.231	0.154	0.154

Cuadro 3.4: Índices de poder propios del Juego Simple (N, W)

Reparto del poder entre los partidos del Parlamento Vasco					
	EAJ-PNV	EH Bildu	E. Podemos	PSE-EE	PP
Distancia	0.419	0.239	0.202	0.081	0.060
Espectro	0.500	0.094	0.219	0.125	0.063
DP extendido	0.217	0.215	0.238	0.226	0.104
BP extendido	0.190	0.216	0.232	0.248	0.114

Cuadro 3.5: Índices de poder propios del Juego Espacial $(N, W, \{Q^j\}_{j\in N})$

Apoyándonos en los resultados recogidos en las tablas anteriores, veremos que, en general, existe un consenso en cuanto al poder que tiene cada partido político en el Parlamento Vasco. No obstante, podemos notar diferencias entre los distintos índices.

Cuando partimos de un modelo de Juego Simple (N, W), podemos achacar las diferencias de poder a su representación parlamentaria, ya que es el único dato distintivo del modelo. De este modo, en el *Cuadro 3.4*, podemos observar como PP y PSE-EE tienen el mismo poder, calculado desde cualquiera de los índices, lo mismo pasa con E. Podemos y EH Bildu. No obstante, mientras que este comportamiento es el esperado para PP y PSE-EE, ya que tienen el mismo número de escaños y son jugadores simétricos en el Juego Simple; para EH Bildu y E. Podemos no, pues existe una diferencia de 7 escaños entre ellos. Si hacemos un repaso por los índices, vemos que el índice de Shapley-Shubik y Banhzaf-Coleman para un jugador i se basan, respectivamente, en el conjunto de permutaciones en las que este jugador es pivote y en su número de swings. Por su parte, el índice de Deegan-Packel y Holler parten del conjunto de coaliciones ganadoras minimales. En todos los casos anteriores, para el cálculo de estos conceptos influye que exista un partido que tenga 28 escaños (EAJ-PNV), muy cercano a los 38 que garantizan la mayoría absoluta. Esto hace que, tanto como si EAJ-PNV coopera con EH Bildu como si lo hace con E. Podemos, dichas coaliciones tienen escaños suficientes para ganar la votación. Esto podría ser una explicación de porqué estos dos últimos partidos tienen el mismo poder en el parlamento.

También llama la atención que la suma de componentes de los resultados del *Cuadro 3.4* es 1 para todos los índices, excepto para el índice de Banzhaf-Coleman. Esto se debe a que, tal y como veíamos en la *Sección 1.3*, el índice de Banzhaf-Coleman es el único que no cumple la propiedad de eficiencia.

Para analizar el poder otorgado a EAJ-PNV en relación a los demás, podemos pensar en que, para este Juego Simple (N, W), se tiene $\eta_1(N, W) = 10$, $\eta_2(N, W) = \eta_3(N, W) = 6$ y $\eta_4(N, W) = = \eta_5(N, W) = 2$. Con lo cual, es lógico que el índice de Banzhaf-Coleman sea el mismo dos a dos para los cuatro últimos partidos y sea mucho más elevado para el EAJ-PNV. Por su parte, en el índice de Shapley-Shubik, ocurre algo similar, ya que se tiene que $|\Pi_1| = 48$, $|\Pi_2| = |\Pi_3| = 28$ y $|\Pi_4| = |\Pi_5| = 8$.

Sin embargo, una característica del índice de Deegan-Packel y del Bien Público es que no son monótonos en relación a la ponderación de los votantes. Es decir, para estos índices, tener más peso o escaños no implica pertenecer a más coaliciones ganadoras minimales; por lo que pueden existir jugadores con más peso o escaños que tengan menor poder que otros con pesos menores. Este es el motivo por el que el índice de Deegan Packel y Holler no causan el mismo efecto que explicábamos para los demás índices, que sean monótonos en cuanto al peso de los votantes hace que se suavicen mucho las diferencias entre el poder de EAJ-PNV y del resto de partidos. Finalmente, el hecho de que en el índice de Deegan-Packel influya el tamaño de las coaliciones ganadoras minimales y en el de Holler no, provoca esa diferencia que se observa entre el poder de EAJ-PNV y el de EH Bildu o E.Podemos.

Ahora nos vamos a centrar en el modelo de Juego Espacial y en el *Cuadro 3.5*. En este caso, con respecto a los Juegos Simples, destaca la pérdida de simetría, tal y como reflejan los índices de poder para los partidos PP y PSE-EE, que son jugadores simétricos en el Juego Simple. Comparando ambos cuadros, vemos que, en el primero, el poder de ambos partidos siempre coincide, de acuerdo con la simetría que caracteriza a todos los índices de poder de Juegos Simples que hemos visto. Sin embargo, observamos que esta simetría se pierde cuando se tiene en cuenta la posición ideológica de los distintos partidos, ocasionando distinciones en los índices de poder espaciales de ambos partidos. Las diferencias entre PP y PSE-EE en el índice distancia y en el valor espectro, las podemos achacar a que, según el espacio ideológico, los ideales del PP son más extremistas que los del PSE-EE; esto ocasiona que el PSE-EE esté más próximo a las preferencias de los demás partidos; hecho que le aporta un poder adicional ya que va a haber mayor probabilidad de entendimiento y, por lo tanto, de cooperación a la hora de formar coaliciones.

Por otra parte, motivados porque el índice distancia sea distinto para todos los partidos, podemos deducir que no existen jugadores espacialmente simétricos. Bastaría con aplicar el contrarrecíproco de la *Proposición 2.2*. Esto concuerda gráficamente con la distribución espacial de los puntos ideales de los jugadores, recogidos en la *Figura 3.1*.

Para el valor espectro, destaca la pérdida de poder de EH Bildu. Esto es debido a que, para este índice, no importa la distancia entre puntos ideales, sino simplemente la posición que ocupan los partidos en el espectro. Siendo los valores extremos los que alcanzan menor poder. Es el caso de EH Bildu que, para ambas variables ideológicas, ocupa un valor extremo.

Cuando extendemos los índices de Deegan-Packel y Bien Público a Juegos Espaciales, también observamos diferencias notables. El PSE-EE aumenta su poder de modo considerable. Mientras que para el modelo de Juego Simple, este partido era, junto al PP, el de menor poder; ahora pasa a ser el de mayor en el caso del índice del Bien Público. Para Deegan-Packel, por su parte, PSE-EE será el segundo partido con más poder, muy cerca del primero, E. Podemos. Observamos que, para ambos índices extendidos, EAJ-PNV ha dejado de ser el partido más poderoso. Tal y como vemos en la *Figura 3.1*, esta serie de cambios podría estar motivada porque la posición del PSE-EE es más cercana a la del resto de partidos que la del PP.

3.5. Extensiones

En esta sección vamos a proponer una serie de posibles extensiones que partirían de este trabajo. En primer lugar, sobra decir que todo lo que aquí se recoge podría ser fácilmente aplicable a cualquier otro parlamento, teniendo como única limitación la obtención de datos fiables y objetivos sobre la ideología de los partidos que vamos a estudiar.

Por otra parte, también sería factible hacer una adaptación de los códigos de R, recogidos en el *Apéndice*, al caso de juegos con espacios ideológicos multidimensionales en los que $m > 2$. Una posible variable ideológica a considerar podría ser la posición de cada partido respecto al tema del feminismo. Para ello idearíamos una escala pro y contra feminismo, basada en las medidas de los partidos que contribuyan a la igualdad de género; como podrían ser la ley de la violencia de género, desaparición de la brecha salarial, ruptura del techo de cristal, etc. Aunque este es un tema muy importante hoy en día, en la mayoría de los casos es difícil obtener información objetiva que trate de cuantificar la posición feminista de cada partido sobre una escala numérica.

Finalmente, la aproximación a la realidad que nos proporcionan los Juegos Espaciales hace que sea interesante aplicarlos a multitud de modelos conocidos, que son propios de situaciones concretas. Pudiendo obtener resultados muchos más precisos, si cabe, que los del modelo inicial. Una posible vía de estudio podría ser cómo extender el valor de Owen (Owen, 1995), propio de juegos con uniones a priori, a situaciones en las que también se ha de tener en cuenta el espacio ideológico sobre el que se desarrollan.

Apéndice A

Códigos R

A lo largo de este apéndice, se recogerá la implementación en lenguaje R de todos los cálculos utilizados en el *Capítulo 3*. El código incluye un texto autoexplicativo, para facilitar su entendimiento. Cabe destacar también que, para aplicar los cálculos a otros juegos diferentes, bastaría con modificar la primera parte de cada uno de los apartados de este apéndice, relativa a los datos del problema.

A.1. Conjunto de coaliciones ganadoras

```
###########################################################################
#######################   Coaliciones ganadoras   #########################
###########################################################################


> library(gtools) # librería necesaria para la función combinations

> ### DATOS:
>
> N<-1:5 # jugadores
> p<-c(28,18,11,9,9) # pesos o ponderaciones
> beta<-38 # cuota de mayoría
> n<-length(N) # número de jugadores
>
> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS W:
>
> W<-list(NA,n)
>
> for(j in 1:n){
+   com <-combinations(n,j,N) # conjunto de combinaciones de N tamaño n
+   nfila<-nrow(com) # dimensiones del conjunto de combinaciones
+   ncolu<-ncol(com)
+   pp<-matrix(NA,nfila,ncolu) # pesos de las distintas combinaciones
+   pt<-vector("numeric",nfila) # sumas de los pesos pp
+   for( i in 1:nfila){
+     pp[i,]<-p[com[i,]] # peso de la combinación de la fila i
+     pt[i]<-sum(pp[i,]) # suma de los pesos de la fila i
+   }
```

```
+    m<-length(which(pt>=beta))
+    m
+    ganadora<-matrix(NA,m,ncolu)
+    if(m==0){
+       ganadora<-NA
+    }else{
+       for(i in 1:m){
+          ganadora[i,]<-com[which(pt>=beta)[i],]
+          ganadora
+       }
+    }
+    W[[j]]<-ganadora
+ }
> W # conjunto de coaliciones ganadoras
```

A.2. Índice de Shapley-Shubik

```
##############################################################################
###############   Cálculo del Índice Shapley-Shubik   ###################
##############################################################################

> library(gtools) # librería necesaria para la función permutations

> ### DATOS:

> N<-1:5 # jugadores
> p<-c(28,18,11,9,9) # pesos o ponderaciones
> beta<-38 # cuota de mayoría
> n<-length(N) # número de jugadores

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE PERMUTACIONES DE N:

> per <-permutations(n,n,N) # conjunto de permutaciones de N, de orden n
> nper<- factorial(n) # tamaño del conjunto per

> ## BÚSQUEDA DE PERMUTACIONES DE N EN LAS QUE EL JUGADOR i ES PIVOTE:

> pp<-matrix(NA,nper,n) # pesos de las distintas permutaciones (per)
> peri<-vector("list",n) # lista que contiene en la componente i el conjunto de
>                        # permutaciones en las que el jugador i es pivote

> for( i in 1:nper){
+    pp[i,]<-p[per[i,]] # peso de la permutación i
+    pp
+    s <- cumsum(pp[i,])
+    pospiv<-min(which(s >= beta)) # posición del pivote de la permutación i
+    pivote<-per[i,pospiv] # pivote de la permutación i
+
+    peri[[pivote]]<-rbind(peri[[pivote]],per[i,])
+ }
```

```
> ## ÍNDICE

> shapleyshubik<-vector("numeric",n) # índice
>
> for (i in 1:n){
+   shapleyshubik[i]<-(nrow(peri[[i]]))/nper
+ }
> shapleyshubik
```

A.3. Índice de Banzhaf-Coleman

```
################################################################################
################   Cálculo índice de Banzhaf-Coleman   #################
################################################################################

> library(gtools) # librería necesaria para la función combinations

> ### DATOS:

> N<-1:5 # jugadores
> p<-c(28,18,11,9,9) # pesos o ponderaciones
> beta<-38 # cuota de mayoría
> n<-length(N) # número de jugadores

> ## CONJUNTO DE SWINGS DEL JUGADOR i

> banzhafcoleman<-vector("numeric",n) # índice
> com<-vector("list",n) # cada elemento i de la lista será el conjunto
>                       # de combinaciones de N de i elementos
> ncom<-vector("numeric",n) # cada elemento i del vector será el número
>                           # de combinaciones de i elementos
> pc<-vector("list",n)
> comi<-vector("list",n) # cada elemento i de la lista será el conjunto de
>                        # swings del jugador i

> for (j in 1:n){
+ com[[j]] <-combinations(n,j,N)
+ ncom[j]<-nrow(com[[j]])
+ pc[[j]]<-matrix(NA,ncom[j],j)
+ for( i in 1:ncom[j]){
+   pc[[j]][i,]<-p[com[[j]][i,]]
+   if(sum(pc[[j]][i,])>=beta){
+   for (k in 1:j){
+      if((sum(pc[[j]][i,])-pc[[j]][i,k])<beta){
+         elemento<-com[[j]][i,k]
+         comi[[elemento]]<-rbind(comi[[elemento]],c(com[[j]][i,],rep(NA,n-j)))
+      }
+   }
+   }
```

```
+ }
+ }

> ## ÍNDICE

> for (i in 1:n){
+   banzhafcoleman[i]<-(nrow(comi[[i]]))/(2^(n-1))
+ }
> banzhafcoleman
```

A.4. Índice de Deegan-Packel

```
################################################################################
##################   Cálculo índice de Deegan-Packel   ##################
################################################################################

> library(gtools) # librería necesaria para la función combinations

> ### DATOS:

> N<-1:5 # jugadores
> p<-c(28,18,11,9,9) # pesos o ponderaciones
> beta<-38 # cuota de mayoría
> n<-length(N) # número de jugadores

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS W:

> W<-list(NA,n) # conjunto de coaliciones ganadoras
> for(j in 1:n){
+   com <-combinations(n,j,N) # conjunto de combinaciones de N
+   nfila<-nrow(com)
+   ncolu<-ncol(com)
+   pp<-matrix(NA,nfila,ncolu) # pesos de las distintas combinaciones
+   pt<-vector("numeric",nfila) # sumas de los pesos anteriores
+   for( i in 1:nfila){
+     pp[i,]<-p[com[i,]]
+     pt[i]<-sum(pp[i,])
+   }
+   m<-length(which(pt>=beta))
+   ganadora<-matrix(NA,m,ncolu)
+   if(m==0){
+     ganadora<-NA
+   }else{
+     for(i in 1:m){
+       ganadora[i,]<-com[which(pt>=beta)[i],]
+       ganadora
+     }
+   }
+   W[[j]]<-ganadora
+ }
```

```
> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS MINIMALES, Wm:

> Wm<-matrix(NA, ncol=n)
> pc<-vector("list",n)
> for (j in 1:n){
+    ncoaj<-nrow(W[[j]]) # número de coaliciones ganadoras de j elemento
+    if(is.numeric(W[[j]])=="TRUE"){
+       test<-vector("numeric",j)
+       pc[[j]]<-matrix(NA,ncoaj,j)
+       for (i in 1:ncoaj){
+          pc[[j]][i,]<-p[W[[j]][i,]] # peso de la combinacion (de la
                                      # fila i del conjunto 'W[[j]]')
+          for (k in 1:j){
+             test[k]<-sum(pc[[j]][i,])-pc[[j]][i,k]
+          }
+          if(any(test>=rep(beta,j))){
+            Wm<-Wm
+          }
+          else{
+            Wm<-rbind(Wm,c(W[[j]][i,],rep(NA,n-j)))
+          }
+       }
+    }
+ }
> Wm<-Wm[-1,]

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS MINIMALES QUE
CONTIENEN AL JUGADOR i, Wmi:

> Wmi<-vector("list", n)
> nwm<-nrow(Wm)
> for(j in 1:n){
+    for(i in 1:(nwm)){
+       if(any(Wm[i,]==j,na.rm=T)){
+         Wmi[[j]]<-rbind(Wmi[[j]],Wm[i,])
+       }
+    }
+
+ }

> ## ÍNDICE

> sumatorio<-vector("numeric",n)
> deeganpackel<-vector("numeric",n) # índice
> for (j in 1:n){
+    ncoami<-nrow(Wmi[[j]])
+    sumando<-vector("numeric",ncoami)
+    for(i in 1:ncoami){
```

```
+    sumando[i]<-1/length( which(is.na(Wmi[[j]][i,])==FALSE))
+    }
+    sumatorio[j]<- sum(sumando)
+    deeganpackel[j]<-(1/nwm)*sumatorio[j]
+ }
> deeganpackel
```

A.5. Índice del Bien Público

```
################################################################################
##################    Cálculo índice del Bien Público    ##################
################################################################################

> library(gtools) # librería necesaria para la función combinations

> ### DATOS:

> N<-1:5 # jugadores
> p<-c(28,18,11,9,9) # pesos o ponderaciones
> beta<-38 # cuota de mayoría
> n<-length(N) # número de jugadores

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS W:

> W<-list(NA,n) # conjunto de coaliciones ganadoras
> for(j in 1:n){
+    com <-combinations(n,j,N) # conjunto de combinaciones de N
+    nfila<-nrow(com)
+    ncolu<-ncol(com)
+    pp<-matrix(NA,nfila,ncolu) # pesos de las distintas combinaciones
+    pt<-vector("numeric",nfila) # sumas de los pesos anteriores
+    for( i in 1:nfila){
+       pp[i,]<-p[com[i,]]
+       pt[i]<-sum(pp[i,])
+    }
+    m<-length(which(pt>=beta))
+    ganadora<-matrix(NA,m,ncolu)
+    if(m==0){
+       ganadora<-NA
+    }else{
+       for(i in 1:m){
+          ganadora[i,]<-com[which(pt>=beta)[i],]
+          ganadora
+       }
+    }
+    W[[j]]<-ganadora
+ }

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS MINIMALES, Wm:
```

```
> Wm<-matrix(NA, ncol=n)
> pc<-vector("list",n)
> for (j in 1:n){
+    ncoaj<-nrow(W[[j]]) # número de coaliciones ganadoras de j elemento
+    if(is.numeric(W[[j]])=="TRUE"){
+       test<-vector("numeric",j)
+       pc[[j]]<-matrix(NA,ncoaj,j)
+       for (i in 1:ncoaj){
+          pc[[j]][i,]<-p[W[[j]][i,]] # peso de la combinacion (de la
                                       # fila i  del conjunto 'W[[j]]')
+          for (k in 1:j){
+             test[k]<-sum(pc[[j]][i,])-pc[[j]][i,k]
+          }
+          if(any(test>=rep(beta,j))){
+            Wm<-Wm
+          }
+          else{
+            Wm<-rbind(Wm,c(W[[j]][i,],rep(NA,n-j)))
+          }
+       }
+    }
+ }
> Wm<-Wm[-1,]

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS MINIMALES QUE
CONTIENEN AL JUGADOR i, Wmi:

> Wmi<-vector("list", n)
> nwm<-nrow(Wm)
> for(j in 1:n){
+    for(i in 1:(nwm)){
+       if(any(Wm[i,]==j,na.rm=T)){
+          Wmi[[j]]<-rbind(Wmi[[j]],Wm[i,])
+       }
+    }
+
+ }

> ## ÍNDICE

> holler<-vector("numeric",n) # índice
> ncoami<-vector("numeric",n)
> for (j in 1:n){
+    for(i in 1:n){
+    ncoami[i]<-nrow(Wmi[[i]])
+    }
+    holler[j]<-ncoami[j]/(sum(ncoami))
+ }
> holler
```

A.6. Índice distancia

```
################################################################################
####################    Cálculo del Índice Distancia    ####################
################################################################################

> library(gtools) # librería necesaria para la función permutations

> ### DATOS:

> N<-1:5 # jugadores
> p<-c(28,18,11,9,9) # pesos o ponderaciones
> beta<-38 # cuota de mayoría
> n<-length(N) # número de jugadores
> x<-c( 1.49, -2.91, -2.20, -0.08,  3.91) # posición eje izquierda-derecha
> y<-c( 2.82,  3.77, -0.35, -1.80, -3.42 ) # posición eje centro-periferia
> ptosid<-cbind(x,y) # puntos ideales de los jugadores dados por filas
> m<-ncol(ptosid)


> #### DENOMINADOR (igual para todo jugador i de N)

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE PERMUTACIONES DE N

> per <-permutations(n,n,N) # conjunto de permutaciones de N de orden n
> nper<- factorial(n)

> ## LONGITUD DE CADA PERMUTACIÓN

> longitud<-vector("numeric",nper) # cada componente i del vector es la
                                   # longitud de la permutación i
> vaux<-vector("numeric",n-1)
> vauxaux<-vector("numeric",m)
> for (i in 1:nper){
+   for (k in 1:(n-1)){
+     for (l in 1:m){
+       vauxaux[l]<-(ptosid[per[i,k],l]-ptosid[per[i,k+1],l])^2
+     }
+     vaux[k]<-sum(vauxaux)
+   }
+   longitud[i]<-sum(vaux)
+ }

> ## DENOMINADOR
> sumando<-rep(1,nper)/longitud
> denominador<- sum(sumando)
```

```
> #### NUMERADOR (distinto para cada jugador i de N)

> ## PERMUTACIONES EN LAS QUE EL JUGADOR i ES PIVOTE

> pp<-matrix(NA,nper,n) # pesos de las distintas permutaciones
> peri<-vector("list",n) # cada componente i de la lista es el conjunto
de permutaciones en las que el i es pivote

> for( i in 1:nper){
+   pp[i,]<-p[per[i,]] # peso de la permutación i
+   s <- cumsum(pp[i,])
+   pospiv<-min(which(s >= beta)) # posición del elemento que convierte
la coalición en ganadora
+   pivote<-per[i,pospiv] # pivote de la permutación i
+   peri[[pivote]]<-rbind(peri[[pivote]],per[i,])
+ }

> ### ÍNDICE

> distancia<-vector("numeric",n)
> numerador<-vector("numeric",n)
> for (t in 1:n){
+   nperit<-nrow(peri[[t]])
+   longitud<-vector("numeric",nperit)
+   vaux<-vector("numeric",n-1)
+   vauxaux<-vector("numeric",m)
+   for (i in 1:nperit){
+     for (k in 1:(n-1)){
+       for (l in 1:m){
+         vauxaux[l]<-(ptosid[peri[[t]][i,k],l]-ptosid[peri[[t]][i,k+1],l])^2
+       }
+       vaux[k]<-sum(vauxaux)
+     }
+     longitud[i]<-sum(vaux)
+   }
+   sumando<-rep(1,nperit)/longitud
+   numerador[t]<- sum(sumando)
+   distancia[t]<-numerador[t]*(1/denominador)
+ }
> distancia
```

A.7. Valor espectro

```
################################################################################
##################   Cálculo valor de espectro   ###############################
################################################################################

> library(gtools) # librería necesaria para la función permutations
```

```
> ### DATOS:

> N<-1:5 # jugadores
> p<-c(28,18,11,9,9) # pesos o ponderaciones
> beta<-38 # cuota de mayoría
> n<-length(N) # número de jugadores
> x<-c( 1.49, -2.91, -2.20, -0.08,  3.91) # posición eje izquierda-derecha
> m<-1
> espectro<-order(x) # cada componente i corresponde al jugador que está
                     # ocupando el lugar i del orden del espectro
> sigma<-order(espectro) # la componente i nos dice la posición del espectro
                         # que ocupa el jugador i de N

> ## CONJUNTO DE PERMUTACIONES DE N

> per <-permutations(n,n,N) # conjunto de permutaciones de N
> nper<- factorial(n)

> ## CONJUNTO DE PERMUTACIONES DE N ADMISIBLES CON RESPECTO AL ORDEN
DEL ESPECTRO (admisible)

> admisible<-matrix(NA, ncol=5)
> for (i in 1:nper){
+    predecesor<-matrix(NA, ncol=5,nrow=5)
+    for (j in 1:n){
+       posij<-order(per[i,])[j]
+       if(posij>1){
+       for (k in 1:(posij-1)){
+           predecesor[j,k]<-per[i,][k]
+       }}
+       minimo<-min(sigma[predecesor[j,]], na.rm=T)
+       maximo<-max(sigma[predecesor[j,]], na.rm=T)
+       if(minimo!=Inf && minimo!=maximo){
+          test<-espectro[minimo:maximo]
+       if(any(sort(predecesor[j,])!=sort(test))){
+          break
+       }}
+    }
+    if(j==5){
+       admisible<-rbind(admisible, per[i,])
+    }
+    }
> admisible<-admisible[-1,]

> ## CONJUNTO DE PERMUTACIONES DE N ADMISIBLES CON RESPECTO AL ORDEN
DEL ESPECTRO EN LAS QUE i ES PIVOTE (admisiblei)

> nadm<-nrow(admisible)
> pp<-matrix(NA,nadm,n) # pesos de las permutaciones
> admisiblei<-vector("list",n)
> for( i in 1:nadm){
+    pp[i,]<-p[admisible[i,]]
```

```
+   s <- cumsum(pp[i,])
+   pospiv<-min(which(s >= beta)) # posición del pivote de la permutación i
+   pivote<-admisible[i,pospiv] # pivote de la permutación i
+   admisiblei[[pivote]]<-rbind(admisiblei[[pivote]],admisible[i,])
+ }

> ### ÍNDICE

> indiceespectro<-vector("numeric",n) # índice
> for (j in 1:n){
+   if(is.numeric(nrow(admisiblei[[j]]))){
+     indiceespectro[j]<-(nrow(admisiblei[[j]]))/(2^(n-1))
+   }else{
+     indiceespectro[j]<-0
+   }
+ }
indiceespectro
```

A.8. Índice de Deegan-Packel extendido

```
##############################################################################
#############   Cálculo índice de Deegan-Packel EXTENDIDO ###############
##############################################################################

> library(gtools) # librería necesaria para la función combinations

> ### DATOS:

> N<-1:5 # jugadores
> p<-c(28,18,11,9,9) # pesos o ponderaciones
> beta<-38 # cuota de mayoría
> n<-length(N) # número de jugadores
> x<-c( 1.49, -2.91, -2.20, -0.08,  3.91) # posición eje izquierda-derecha
> y<-c( 2.82,  3.77, -0.35, -1.80, -3.42 ) # posición eje centro-periferia
> ptosid<-cbind(x,y) # puntos ideales de los jugadores dados por filas
> m<-ncol(ptosid)
>

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS W:

> W<-list(NA,n) # conjunto de coaliciones ganadoras
> for(j in 1:n){
+   com <-combinations(n,j,N) # conjunto de combinaciones de N
+   nfila<-nrow(com)
+   ncolu<-ncol(com)
+   pp<-matrix(NA,nfila,ncolu) # pesos de las distintas combinaciones
+   pt<-vector("numeric",nfila) # sumas de los pesos anteriores
+   for( i in 1:nfila){
+     pp[i,]<-p[com[i,]]
+     pt[i]<-sum(pp[i,])
```

```
+     }
+     m<-length(which(pt>=beta))
+     ganadora<-matrix(NA,m,ncolu)
+     if(m==0){
+        ganadora<-NA
+     }else{
+        for(i in 1:m){
+           ganadora[i,]<-com[which(pt>=beta)[i],]
+           ganadora
+        }
+     }
+    W[[j]]<-ganadora
+ }

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS MINIMALES, Wm:

> Wm<-matrix(NA,ncol=n)
> pc<-vector("list",n)
> for (j in 1:n){
+     ncoaj<-nrow(W[[j]]) # número de coaliciones ganadoras de j elemento
+     if(is.numeric(W[[j]])=="TRUE"){
+        test<-vector("numeric",j)
+        pc[[j]]<-matrix(NA,ncoaj,j)
+        for (i in 1:ncoaj){
+           pc[[j]][i,]<-p[W[[j]][i,]] # peso de la combinacion (de la
                                       # fila i del conjunto 'W[[j]]')
+           for (k in 1:j){
+              test[k]<-sum(pc[[j]][i,])-pc[[j]][i,k]
+           }
+           if(any(test>=rep(beta,j))){
+              Wm<-Wm
+           }
+           else{
+              Wm<-rbind(Wm,c(W[[j]][i,],rep(NA,n-j)))
+           }
+        }
+     }
+ }
> Wm<-Wm[-1,]

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS MINIMALES QUE
CONTIENEN AL JUGADOR i, Wmi:

> Wmi<-vector("list", n)
> nwm<-nrow(Wm)
> for(j in 1:n){
+     for(i in 1:(nwm)){
+        if(any(Wm[i,]==j,na.rm=T)){
+           Wmi[[j]]<-rbind(Wmi[[j]],Wm[i,])
+        }
+     }
```

```
+ }
> ## ÍNDICE
> sumatorio<-vector("numeric",n)
> dpexten<-vector("numeric",n)
> sumandot<-vector("numeric",nwm)
> for (q in 1:nwm){
+   pert<-permutations(length( which(is.na(Wm[q,])==FALSE)),
length(which(is.na(Wm[q,])==FALSE)),Wm[q,which(is.na(Wm[q,])==FALSE)])
+   npert<- factorial(length( which(is.na(Wm[q,])==FALSE)))
+ longitud<-vector("numeric",npert)
+ vaux<-vector("numeric",(length( which(is.na(Wm[q,])==FALSE)))-1)
+ vauxaux<-vector("numeric",m)
+ for (i in 1:npert){
+    for (k in 1:((length( which(is.na(Wm[q,])==FALSE)))-1)){
+       for (l in 1:m){
+          vauxaux[l]<-(ptosid[pert[i,k],l]-ptosid[pert[i,k+1],l])^2
+       }
+       vaux[k]<-sum(vauxaux)
+    }
+    longitud[i]<-sum(vaux)
+ }
+ longitudt<-min(longitud)
+ sumandot[q]<-1/longitudt
+ }
> partefija <-1/(sum(sumandot))
> for (j in 1:n){
+    ncoami<-nrow(Wmi[[j]])
+    sumandos<-vector("numeric",ncoami)
+    for(q in 1:ncoami){
+         pers<-permutations(length(which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE)),
length(which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE)),
Wmi[[j]][q,which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE)])
+         npers<- factorial(length(which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE)))
+         longitud<-vector("numeric",npers)
+               vaux<-vector("numeric",(length(which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE))-1))
+         vauxaux<-vector("numeric",m)
+         for (i in 1:npers){
+              for (k in 1:((length(which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE)))-1)){
+                 for (l in 1:m){
+                    vauxaux[l]<-(ptosid[pers[i,k],l]-ptosid[pers[i,k+1],l])^2
+                 }
+                 vaux[k]<-sum(vauxaux)
+              }
+              longitud[i]<-sum(vaux)
+           }
+       longituds<-min(longitud)
+       sumandos[q]<-(1/longituds)*(1/length(which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE)))
+    }
+    sumatorio[j]<- sum(sumandos)
+    dpexten[j]<-partefija*sumatorio[j]
+ }
> dpexten # índice
```

A.9. Índice del Bien Público extendido

```
###############################################################################
############## Cálculo índice del Bien Público extendido ################
###############################################################################

> library(gtools) # librería necesaria para la función combinations

> ### DATOS:

> N<-1:5 # jugadores
> p<-c(28,18,11,9,9) # pesos o ponderaciones
> beta<-38 # cuota de mayoría
> n<-length(N) # número de jugadores
> x<-c( 1.49, -2.91, -2.20, -0.08,  3.91) # posición eje izquierda derecha
> y<-c( 2.82,  3.77, -0.35, -1.80, -3.42 ) # posición eje centro-periferia
> ptosid<-cbind(x,y) # puntos ideales de los jugadores dados por filas
> m<-ncol(ptosid)


> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS W:

> W<-list(NA,n) # conjunto de coaliciones ganadoras
> for(j in 1:n){
+   com <-combinations(n,j,N) # conjunto de combinaciones de N
+    nfila<-nrow(com)
+    ncolu<-ncol(com)
+    pp<-matrix(NA,nfila,ncolu) # pesos de las distintas combinaciones
+    pt<-vector("numeric",nfila) # sumas de los pesos anteriores
+    for( i in 1:nfila){
+       pp[i,]<-p[com[i,]]
+       pt[i]<-sum(pp[i,])
+    }
+    m<-length(which(pt>=beta))
+    ganadora<-matrix(NA,m,ncolu)
+     if(m==0){
+       ganadora<-NA
+    }else{
+       for(i in 1:m){
+          ganadora[i,]<-com[which(pt>=beta)[i],]
+          ganadora
+       }
+    }
+   W[[j]]<-ganadora
+ }

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS MINIMALES, Wm:

> Wm<-matrix(NA,ncol=n)
> pc<-vector("list",n)
```

```
> for (j in 1:n){
+   ncoaj<-nrow(W[[j]]) # número de coaliciones ganadoras de j elemento
+   if(is.numeric(W[[j]])=="TRUE"){
+     test<-vector("numeric",j)
+     pc[[j]]<-matrix(NA,ncoaj,j)
+     for (i in 1:ncoaj){
+       pc[[j]][i,]<-p[W[[j]][i,]] # peso de la combinacion (de la
                                   # fila i del conjunto 'W[[j]]')
+       for (k in 1:j){
+         test[k]<-sum(pc[[j]][i,])-pc[[j]][i,k]
+       }
+       if(any(test>=rep(beta,j))){
+         Wm<-Wm
+       }
+       else{
+         Wm<-rbind(Wm,c(W[[j]][i,],rep(NA,n-j)))
+       }
+     }
+   }
+ }
> Wm<-Wm[-1,]

> ## BÚSQUEDA DEL CONJUNTO DE COALICIONES GANADORAS MINIMALES QUE
CONTIENEN AL JUGADOR i, Wmi:

> Wmi<-vector("list", n)
> nwm<-nrow(Wm)
> for(j in 1:n){
+   for(i in 1:(nwm)){
+     if(any(Wm[i,]==j,na.rm=T)){
+       Wmi[[j]]<-rbind(Wmi[[j]],Wm[i,])
+     }
+   }
+
+ }

> ## ÍNDICE

> sumatorio<-vector("numeric",n)
> hexten<-vector("numeric",n)
> for (j in 1:n){
+   ncoami<-nrow(Wmi[[j]])
+   sumandos<-vector("numeric",ncoami)
+   for(q in 1:ncoami){
+     pers<-permutations(length( which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE)),
length(which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE)),
Wmi[[j]][q,which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE)]) # matriz con
las permutaciones de la fila q
+     npers<- factorial(length( which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE)))
+     longitud<-vector("numeric",npers)
+     vaux<-vector("numeric",(length( which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE))-1))
```

```
+        vauxaux<-vector("numeric",m)
+        for (i in 1:npers){
+           for (k in 1:((length( which(is.na(Wmi[[j]][q,])==FALSE)))-1)){
+              for (l in 1:m){
+                vauxaux[l]<-(ptosid[pers[i,k],l]-ptosid[pers[i,k+1],l])^2
+              }
+              vaux[k]<-sum(vauxaux)
+           }
+           longitud[i]<-sum(vaux)
+        }
+        longituds<-min(longitud)
+        sumandos[q]<-(1/longituds)
+     }
+     sumatorio[j]<- sum(sumandos)
+ }
> for (j in 1:n){
+     hexten[j]<-sumatorio[j]/sum(sumatorio)
+ }
> hexten # índice
```

Bibliografía

[1] Alonso-Meijide, J. M. (2002). Contribuciones a la teoría del valor en juegos cooperativos con condicionamientos exógenos. Tesis Doctoral. Universidade de Santiago de Compostela.

[2] Alonso-Meijide, J. M., Casas-Méndez, B., Holler, M.J. y Lorenzo-Freire, S. (2008). Computing power indices: multilinear extensions and new characterizations. European Journal of Operational Research, 18(2), 540-554.

[3] Alonso-Meijide, J. M., Fiestras-Janeiro, M. G. y García-Jurado, I. (2011). A new power index for spatial games. Understanding Complex Systems, 2011, 275-285.

[4] Álvarez-Mozos, M., Hellman, Z. y Winter, E. (2013). Spectrum value for coalitional games. Games and Economic Behavior, 82, 132-142.

[5] Banzhaf, J. F. (1965). Weighted voting does not work: A mathematical analysis. Rutgers Law Review, 19, 317-343.

[6] Coleman, J. S. (1971). Control of collectivities and the power of a collectivity to act. Social Choice, Gordon and Breach.

[7] Deegan, J. y Packel, E. W. (1979). A new index of power for simple n-person games. International Journal of Game Theory, 7, 113-123.

[8] Dubey, P. (1975). On the uniqueness of the Shapley value. International Journal of Game Theory, 4, 131-139.

[9] Dubey, P. y Shapley, L. S. (1979). Mathematical properties of the Banzhaf power index. Mathematics of Operations Research, 4, 99-131.

[10] Felsenthal, D. S. y Machover, M. (1998), The measurement of voting power; theory and practice, problems and paradoxes, Edward Elgar.

[11] Geanakoplos, J. (1994). Common Knowledge, In: Handbook of Game Theory with Economic Applications, Vol. 2, editors: R.J. Aumann and S. Hart. N.H. Elsevier Science Publishers.

[12] Holler, M. J. (1982). Forming coalitions and measuring voting power. Political Studies, 30(2), 262-271.

[13] Holler, M. J. y Packel, E. W. (1983). Power, luck and the right index. Zeitschrift für Nationalökonomie, 43(1), 21-29.

[14] Lipsen, M. S. y Rokkan, S. (1967). Party Systems and Voter Alignments. Editorial Free Press.

[15] Napel, S. y Widgrén, M. (2000). Inferior Players in Simple Games. The Research Institute of the Finnish Economy Discussion Papers.

[16] Napel, S. y Widgrén, M. (2001). Inferior players in simple games. International Journal of Game Theory, 30(2), 209-220.

[17] Owen, G. (1971). Political games. Naval Research Logistics Quarterly, 18, 345-354.

[18] Owen, G. y Shapley, L. S. (1989). Optimal location of candidates in ideological space. International Journal of Game Theory, 18, 339-356.

[19] Owen, G. (1995). Game theory. San Diego 3rd. ed. Academic Press, 408-427.

[20] Peters, H. y Zarzuelo, J. M. (2017). An axiomatic characterization of the Owen-Shapley spatial power index. International Journal of Game Theory, 46(2), 525-545.

[21] Shapley, L. S. y Shubik, M. (1954). A method for evaluating the distribution of power in a committee system. American Political Science Review, 48, 787-792.

[22] Shapley, L. S. (1962). Simple games: an outline of the descriptive theory. Behavioral Science, 7, 59-66.

[23] Shapley, L. S. (1977). A comparison of power indices and a nonsymmetric generalization. Document P-5872. Rand Collection.

[24] Steunenberg, B., Schmidtchen, D. y Koboldt, C. (1999). Strategic Power in the European Union: Evaluating the Distribution of Power in Policy Games. Journal of Theoretical Politics, 11, 339-366.

[25] Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.