



Universidade de Vigo

Trabajo Fin de Máster

---

# Modelización y resolución de problemas binivel en el contexto de bancos e inversores

---

Brais González Rodríguez

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2018-2019



# Propuesta de Trabajo Fin de Máster

<b>Título en galego:</b> Modelización e resolución de problemas binivel no contexto de bancos e inversores
<b>Título en español:</b> Modelización y resolución de problemas binivel en el contexto de bancos e inversores
<b>English title:</b> Modelling and resolution of bilevel problems in the context of banks and investors
<b>Modalidad:</b> Modalidad A
<b>Autor/a:</b> Brais González Rodríguez, Universidad de Santiago de Compostela
<b>Director/a:</b> Julio González Díaz, Universidad de Santiago de Compostela
<b>Breve resumen del trabajo:</b> <p>El objetivo de este trabajo es modelar situaciones reales en las cuales un cierto número de inversores tiene como objetivo invertir en ciertas carteras a través de uno o varios bancos. Para ello se estudiará el modelo clásico de Markowitz y a partir de él se propondrán modelos alternativos.</p>



Don Julio González Díaz, Profesor contratado Doctor de la Universidad de Santiago de Compostela informa que el Trabajo Fin de Máster titulado

**Modelización y resolución de problemas binivel en el contexto de bancos e inversores**

fue realizado bajo su dirección por don Brais González Rodríguez para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, dan su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Santiago de Compostela, a 2 de julio de 2019.

El director:

A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and a long vertical stroke extending upwards from the top of the signature.

Don Julio González Díaz

El autor:

Don Brais González Rodríguez



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>V</b>
<b>1. Fundamentos de la programación matemática</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	1
1.2. Distintas clasificaciones . . . . .	2
1.3. Condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker . . . . .	5
1.4. Dualidad en programación lineal . . . . .	7
<b>2. Optimización de carteras y medidas de riesgo</b>	<b>11</b>
2.1. Carteras de inversión . . . . .	11
2.2. Modelos clásicos . . . . .	16
2.3. Una medida de riesgo alternativa a la varianza: el CVaR . . . . .	22
<b>3. Problemas binivel entre inversores y bancos</b>	<b>31</b>
3.1. Problemas de optimización binivel . . . . .	31
3.2. Modelado de los problemas del banco y del inversor . . . . .	34
3.3. Banco líder e inversor seguidor . . . . .	37
3.3.1. Caso con varios inversores . . . . .	40
3.4. Inversor líder y banco seguidor . . . . .	44
3.5. Modelo cooperativo . . . . .	46
<b>4. Resultados numéricos</b>	<b>51</b>
4.1. Datos utilizados y método de resolución . . . . .	51
4.2. Modelo BoT . . . . .	53
4.2.1. Modelo BoT con varios inversores . . . . .	60

4.3. Modelo IoT . . . . .	65
4.4. Modelo SW . . . . .	69
<b>A. Construcción detallada de un problema dual</b>	<b>73</b>
<b>B. Código utilizado a lo largo del trabajo</b>	<b>77</b>
B.1. Modelos clásicos . . . . .	77
B.2. Modelo BoT . . . . .	79
B.3. Modelo IoT . . . . .	92
B.4. Modelo SW . . . . .	93
<b>C. Gráficas</b>	<b>97</b>
C.1. Modelo BoT con varios inversores . . . . .	97
C.2. Modelo IoT frente a modelo BoT . . . . .	104



# Agradecimientos

Antes de comenzar con el contenido de esta memoria, veo necesario agradecer a todas las personas e instituciones que han hecho posible la realización de la misma.

A la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, ya que en sus instalaciones he realizado la mayor parte de este trabajo. Al Instituto Tecnológico de Matemática Industrial (ITMATI), por facilitarme el acceso a sus medios siempre que lo he necesitado. Agradecer también al Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) y al Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades por financiar actividades relacionadas con esta memoria a través del proyecto MTM2017-87197-C3-3-P.

Al tutor académico de este trabajo, Julio González, por guiarme y ayudarme siempre que lo he necesitado. A Justo Puerto y Marina Leal, profesores en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, por plantar la semilla de este trabajo y confiar en mí para darle continuidad. A todos los profesores del Máster en Técnicas Estadísticas, por todo lo que me han enseñado durante estos dos años, así como a mis compañeros de aula, con los que ha sido un placer compartir diferentes vivencias.

Finalmente, y no por ello menos importante, a mi familia y a mis amigos por haberme apoyado durante todo este tiempo siempre que lo he necesitado y por hacer todo esto posible.



# Resumen

El propósito de este trabajo es modelar y resolver situaciones reales en las cuales un cierto número de inversores desea crear una cartera de inversión a través de uno o varios bancos. Por un lado el banco tiene que decidir qué comisiones poner a cada activo y por otro lado el inversor tiene que decidir cómo configurar su cartera. A diferencia de los modelos clásicos, en este trabajo se considerará el CVaR como medida de riesgo, por sus buenas propiedades matemáticas y su alta aceptación en la literatura. Además, se crearán diferentes modelos en función de si es el banco o el inversor el que toma primero la decisión, dando lugar a problemas binivel. A dichos problemas se le aplicarán técnicas matemáticas de optimización para poder resolverlos de forma eficiente y finalmente se presentará una discusión de los resultados obtenidos.

# Abstract

The goal of this work is to model and solve real situations in which a certain number of investors aim to create a portfolio through one or several banks. On the one hand the bank has to decide which commissions to put on each asset and on the other hand the investor has to decide how to configure the portfolio. Unlike the classic models, the risk measure considered in this work will be the CVaR, due to its good mathematical properties and its high acceptance in the literature. In addition, different models will be created depending on whether it is the bank or the investor who makes the decision first, leading to bi-level problems. After that, mathematical optimization techniques will be applied to these problems in order to solve them efficiently. Finally a discussion of the results will be presented.



# Introducción

Históricamente, el principal criterio para decidir en qué carteras y con qué cantidad invertía un inversor era ver que combinación generaba mayor rentabilidad. Sin embargo, esto cambió en el año 1952, cuando Harry Markowitz introdujo un factor a tener en cuenta igual de importante que la rentabilidad: el riesgo de cada inversión ([Markowitz \(1952\)](#)). Así, se empezaron a considerar modelos en los cuales se combinaban las ideas de maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo a la hora de decidir. La medida utilizada por Markowitz para medir el riesgo fue la varianza.

Sin embargo, la varianza, a pesar de ser una buena medida de dispersión, como medida de riesgo tiene bastantes limitaciones. Debido a esto, en años posteriores se propusieron medidas alternativas, como es el caso del VaR ([Stambaugh \(1996\)](#)) y del CVaR ([Rockafellar y Uryasev \(2000\)](#)), esta última con muy buenas propiedades matemáticas. Así, uno de los objetivos de este trabajo será explicar estas medidas de riesgo, sus ventajas y desventajas, así como la forma de calcularlas.

Por otro lado, el modelo propuesto por Markowitz solamente se centra en encontrar una cartera óptima desde el punto de vista del inversor. Sin embargo, en este trabajo se irá más allá y se estudiarán situaciones en las que no solamente un inversor quiere encontrar su cartera óptima, sino que el inversor tiene que pagar unas comisiones al banco para realizar su inversión y el banco quiere maximizar los beneficios que obtiene. De este modo, surgen diversas situaciones dependiendo de quién escoja primero su estrategia o de si hay colaboración o no. Una primera aproximación a estos modelos, aunque con ciertas diferencias a lo que se tratará en este trabajo, se puede ver en [Leal et al. \(2018\)](#). Tanto el autor como el director de este trabajo de Fin de Máster han trabajado estrechamente con dos de los coautores del anterior artículo: Marina Leal y Justo Puerto de la Universidad de Sevilla. Dicha colaboración ha permitido la realización de parte de este trabajo y el objetivo es seguir investigando en esta línea más allá de lo presentado en esta memoria.

Además, es importante destacar que los problemas que se plantearán en este trabajo se modelarán primero teniendo en cuenta la situación de partida y posteriormente se utilizarán técnicas de optimización matemática que permitan resolverlos de forma eficiente. Una de

las técnicas utilizadas será la conocida como RLT (*Reformulation-Linearization Technique*), introducida en [Sherali y Tuncbilek \(1991\)](#) y estudiada en detalle en [González-Rodríguez \(2017\)](#) (trabajo de Fin de Grado del mismo autor que esta memoria).

La organización de este documento será la siguiente: en primer lugar se enunciarán definiciones y resultados relativos a la programación matemática que se utilizarán a lo largo del trabajo, para ayudar al lector que no esté familiarizado con los mismos. Posteriormente se hará una revisión de los modelos clásicos relativos a optimización de carteras y se tratarán los principales conceptos relacionados con el CVaR como medida de riesgo. Finalmente se estudiarán los modelos matemáticos y el proceso para llegar a ellos, así como los resultados obtenidos, dando una interpretación de los mismos.

# Capítulo 1

## Fundamentos de la programación matemática

En este capítulo se explicarán brevemente los principales conceptos de la programación matemática, que serán utilizados a lo largo de todo el trabajo. El objetivo es enunciar los principales resultados de optimalidad en la programación matemática, para poder aplicarlos posteriormente a los problemas de carteras entre bancos e inversores.

Para la redacción de este capítulo se tomará como principal referencia [González-Rodríguez \(2017\)](#).

### 1.1. Conceptos básicos

**Definición 1.1.1.** En general, un problema de programación matemática consiste en minimizar o maximizar una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sobre un conjunto específico  $F \subset \mathbb{R}^n$ , denominado *conjunto factible*.

*Observación 1.1.1.* Nótese que maximizar una función  $f$  es equivalente a minimizar la función  $-f$ , por lo que a lo largo de este capítulo trataremos solamente problemas de minimizar (es el convenio utilizado por la mayoría de libros).

*Observación 1.1.2.* Se utilizará el convenio estándar de denotar los vectores de  $\mathbb{R}^n$  usando la negrita. Además, los consideraremos siempre vectores columna.

**Definición 1.1.2.** Se define *solución factible* como cualquier punto  $\mathbf{x} \in F$ , independientemente del valor de  $f(\mathbf{x})$ .

**Definición 1.1.3.** Se define *solución óptima* como cualquier punto  $\bar{\mathbf{x}} \in F$  tal que  $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in F$ . También se denomina *solución óptima global*.

**Definición 1.1.4.** Se dice que un punto  $\bar{\mathbf{x}} \in F$  es una *solución óptima local* si para algún entorno  $U$  de  $\bar{\mathbf{x}}$  se tiene que  $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in F \cap U$ .

**Definición 1.1.5.** Se llama *conjunto óptimo* al conjunto de todas las soluciones óptimas (si las hubiera).

**Definición 1.1.6.** Se define el *valor óptimo* como la mayor cota inferior de los valores de  $f(\mathbf{x})$  con  $\mathbf{x} \in F$ , es decir, el  $\inf_{\mathbf{x} \in F} \{f(\mathbf{x})\}$ . Puede que  $f$  alcance dicho valor en algún punto  $\bar{\mathbf{x}} \in F$  o no.

*Observación 1.1.3.* Si  $f$  no está acotada inferiormente, entonces el valor óptimo es  $-\infty$ . Por convenio, decimos que el valor óptimo es  $+\infty$  si  $F = \emptyset$ .

**Definición 1.1.7.** En general, formularemos los problemas de programación matemática de la siguiente forma (formato estándar):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeto a} && g_i(\mathbf{x}) \leq 0, && i = 1, \dots, m, \\ &&& h_j(\mathbf{x}) = 0, && j = 1, \dots, l, \\ &&& \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

El conjunto factible  $F$  es el conjunto de todos los puntos  $\mathbf{x} \in X$  que satisfacen las restricciones  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  y  $h_j(\mathbf{x}) = 0$ .

En la mayoría de libros se suele usar el conjunto  $X$  para agrupar en él las restricciones que se consideran “fáciles” (como cotas inferiores y superiores). En general, consideraremos  $X = \mathbb{R}^n$ .

## 1.2. Distintas clasificaciones

En esta sección veremos dos principales formas de clasificar los problemas de programación matemática: en lineales y no lineales y en convexos y no convexos.

**Definición 1.2.1.** Se dice que una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es *afín* si  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$  para unos ciertos  $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  es *lineal* si es afín y además  $c_0 = 0$ .



Con la definición anterior podemos hacer una primera clasificación de los problemas de programación matemática a partir de la forma estándar de la definición 1.1.7.

- *Problema de programación lineal*: se trata del caso en el que  $f$  es una función lineal,  $g_i$  y  $h_j$  son funciones afines y el conjunto  $X$  es  $\mathbb{R}^n$ . La restricción de que  $f$  sea lineal y no afín no es relevante puesto que sumar o restarle una constante solo haría cambiar el valor de la función objetivo, siendo la solución óptima la misma.
- *Problema de programación no lineal*: cualquier problema de programación matemática que no sea lineal.

**Ejemplo 1.2.1.** El problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 5x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 4x_1 + x_2 - 20 \leq 0 \\ & x_1 + x_3 - 6 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

es un ejemplo de problema de programación lineal de dimensión 3 ( $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$ ).

El problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 5x_1x_2 - x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 4x_1 + x_2^2 - 20 \leq 0 \\ & x_1 + x_3 - 6 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

es un ejemplo de problema de programación no lineal de dimensión 3 ( $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$ ).

**Proposición 1.2.1.** *Cualquier problema de programación lineal se puede expresar de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de variables,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  el vector de los coeficientes de la función objetivo,  $\mathbf{A} \in M_{m \times n}$  matriz de los coeficientes de las restricciones y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  vector de los términos independientes.

Se entiende por  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  que todas las componentes del vector  $\mathbf{x}$  son mayores o iguales que 0.

La demostración de lo anterior es bastante sencilla y puede verse en [González-Rodríguez \(2017\)](#).

**Definición 1.2.2.** Se dice que una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es *convexa* si, para todo par de puntos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que  $f((1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \leq (1 - \lambda)f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y})$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Proposición 1.2.2.** Una función afín (en particular lineal)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa.

*Demostración.* Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función afín (en particular es lineal). Por la definición 1.2.1,  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ . De lo anterior se deduce fácilmente que  $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  y que  $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Así, para todo  $\lambda \in [0, 1]$  se tiene que  $f((1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (1 - \lambda)f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y}) \leq (1 - \lambda)f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y})$ .  $\square$

**Definición 1.2.3.** Se dice que un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  es *convexo* si, para todo par de puntos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ , se tiene que  $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in C$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$ .

Atendiendo a lo anterior se puede hacer una segunda clasificación de los problemas de programación matemática. Consideraremos el problema dado en su forma estándar 1.1.7.

- *Problema de programación convexa:* se trata del caso en el que  $f$  y  $g_i$  son funciones convexas,  $h_j$  son afines y el conjunto  $X$  es un conjunto convexo.
- *Problema de programación no convexa:* cualquier problema de programación matemática que no sea convexo.

**Ejemplo 1.2.2.** El problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 2x_1^2 - 3x_2^2 - 1 \leq 0 \\ & x_1 + x_3 - 12 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

es un ejemplo de problema de programación convexa de dimensión 3 ( $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$ ).

*Observación 1.2.1.* Es inmediato ver que todo problema de programación lineal es un problema de programación convexa.

**Proposición 1.2.3.** *Un problema de programación matemática es convexo si y sólo si  $f$  es convexa y el conjunto factible  $F$  es un conjunto convexo.*

*Demostración.* Es inmediato ver que las restricciones que involucran a las funciones  $g_i$  y  $h_j$  dan lugar a un conjunto convexo. De forma recíproca, si el conjunto factible  $F$  es convexo, basta tomar  $X = F$ .  $\square$

**Proposición 1.2.4.** *En cualquier problema de optimización convexa (en particular en cualquier problema de programación lineal), todo óptimo local es también óptimo global.*

De nuevo, la demostración del anterior resultado es sencilla y puede verse en [González-Rodríguez \(2017\)](#).

Un caso especial de problemas de programación matemática son los *problemas de programación entera*, que son en los que se exige que las variables sean enteras, es decir,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ . Otro tipo de problemas son los *problemas de programación mixta*, en los cuales solamente algunas de las variables que aparecen son enteras. No profundizaremos en ellos, pues los problemas que aparecerán en este trabajo serán problemas con variables continuas.

### 1.3. Condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker

En el ámbito de la programación no lineal, el principal resultado relacionado con la optimalidad (local), es el teorema de Karush-Kuhn-Tucker. Dicho teorema nos proporciona, bajo unas ciertas hipótesis, una serie de condiciones necesarias para que un punto sea un óptimo local.

A continuación, enunciaremos el teorema de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Su demostración no se incluye en este trabajo, pues requiere demostrar varios resultados previos, que se salen del objetivo de esta memoria. El proceso llevado a cabo para llegar a la demostración de este teorema puede encontrarse en [González-Rodríguez \(2017\)](#) y en [Bazaraa et al. \(2006\)](#).

Antes de enunciar el siguiente teorema, necesitamos definir formalmente lo que se conoce como el conjunto de restricciones saturadas en un punto.

**Definición 1.3.1.** Consideremos el siguiente el problema de programación matemática:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeto a } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, l \end{aligned}$$

Dado un punto  $\mathbf{x} \in F$  se define el conjunto  $I(\mathbf{x}) = \{i : g_i(\mathbf{x}) = 0\}$ . Así,  $I(\mathbf{x})$  es el conjunto formado por los índices de las restricciones de desigualdad en las cuales no existe un entorno en el que se pueda mover  $\mathbf{x}$  sin salirse del conjunto factible  $F$ . Dichas restricciones se conocen como restricciones saturadas en el punto  $\mathbf{x}$ .

**Teorema 1.3.1** (Condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker). *Consideremos el problema de programación matemática dado por:*

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeto a } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, l \end{aligned}$$

*y supongamos que  $\bar{\mathbf{x}}$  es un punto factible tal que  $f$  y  $g_i$  con  $i \in I(\bar{\mathbf{x}})$  son diferenciables en  $\bar{\mathbf{x}}$ , que  $h_j$  con  $j \in \{1, \dots, l\}$  son continuamente diferenciables, que  $g_i$  con  $i \notin I(\bar{\mathbf{x}})$  son continuas en  $\bar{\mathbf{x}}$  y que los vectores  $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$  con  $i \in I(\bar{\mathbf{x}})$  y  $\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})$  con  $j \in \{1, \dots, l\}$  son linealmente independientes. Si  $\bar{\mathbf{x}}$  es un mínimo local, entonces existen escalares únicos  $u_i$  para todo  $i \in I(\bar{\mathbf{x}})$  y  $v_j$  para todo  $j \in \{1, \dots, l\}$  tales que:*

- $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I(\bar{\mathbf{x}})} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$  y
- $u_i \geq 0$  para todo  $i \in I(\bar{\mathbf{x}})$ .

*Si además las funciones  $g_i$  con  $i \notin I(\bar{\mathbf{x}})$  son diferenciables en  $\bar{\mathbf{x}}$ , entonces las condiciones anteriores son equivalentes a que existen escalares únicos  $u_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$  y  $v_j$  para todo  $j \in \{1, \dots, l\}$  tales que:*

- $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ ,
- $u_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$  y
- $u_i \geq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

De este modo, las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker nos proporcionan unas condiciones necesarias para que un punto sea un óptimo local en cualquier problema de programación matemática. Además, se puede demostrar que en problemas de programación lineal, estas condiciones son también suficientes (Bazaraa et al. (2006)).

## 1.4. Dualidad en programación lineal

Por último y, para finalizar este capítulo de nociones básicas de la programación matemática, enunciaremos los teoremas de dualidad (teorema de dualidad débil y teorema de dualidad fuerte). Dichos teoremas se enuncian para cualquier problema de programación matemática, pero en esta memoria solamente enunciaremos los teoremas de dualidad en programación lineal, ya que será sobre esta clase de problemas sobre la que los apliquemos.

**Definición 1.4.1.** Dado un problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ &\text{sujeto a} && \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &&& \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned}$$

se define su *problema dual* como

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \boldsymbol{\pi}^\top \mathbf{b} \\ &\text{sujeto a} && \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c}, \end{aligned}$$

Se puede ver fácilmente que se cumplen las siguientes relaciones entre el problema primal y el problema dual:

- El problema dual tiene tantas variables como restricciones tiene el programa primal.
- El problema dual tiene tantas restricciones como variables tiene el programa primal.
- Los coeficientes de la función objetivo del problema dual son los términos independientes de las restricciones del programa primal.
- Los términos independientes de las restricciones del problema dual son los coeficientes de la función objetivo del problema primal.

- La matriz de coeficientes del problema dual es la traspuesta de la matriz de coeficientes del problema primal.
- Si el programa primal es un problema de minimización, el programa dual es un problema de maximización.
- El problema dual de un problema dual es el programa primal original.

En este caso, se ha definido el problema dual para un problema de programación lineal de la forma vista en la proposición 1.2.1, ya que sabemos que cualquier problema de programación lineal se podía expresar de dicha forma. Sin embargo, se puede construir directamente el dual de un problema de programación lineal con restricciones tanto de igualdad como de desigualdad y con variables tanto mayores o iguales que 0 como menores o iguales que 0 o libres.

Para ello, basta con construir el problema dual siguiendo las indicaciones de las tablas 1.1 y 1.2. Así, podemos ver que el signo de las restricciones del problema dual depende del signo de las variables del problema primal y el signo de las variables del problema dual depende del signo de las restricciones del problema primal.

Primal		Dual	
minimizar	$\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	maximizar	$\boldsymbol{\pi}^\top \mathbf{b}$
sujeto a	$\mathbf{A}_i^f \mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1$	sujeto a	$\pi_i \geq 0, \quad i \in M_1$
	$\mathbf{A}_i^f \mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2$		$\pi_i \leq 0, \quad i \in M_2$
	$\mathbf{A}_i^f \mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3$		$\pi_i \in \mathbb{R}, \quad i \in M_3$
	$x_j \geq 0, \quad j \in N_1$		$\boldsymbol{\pi}^\top \mathbf{A}_j^c \leq c_j, \quad j \in N_1$
	$x_j \leq 0, \quad j \in N_2$		$\boldsymbol{\pi}^\top \mathbf{A}_j^c \geq c_j, \quad j \in N_2$
	$x_j \in \mathbb{R}, \quad j \in N_3$		$\boldsymbol{\pi}^\top \mathbf{A}_j^c = c_j, \quad j \in N_3$

Tabla 1.1: Transformación de un problema a su dual.

A continuación, enunciaremos el teorema de dualidad débil y posteriormente el teorema de dualidad fuerte para problemas de programación lineal.

**Teorema 1.4.1** (Teorema de dualidad débil). *Para todo par de soluciones factibles  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\bar{\boldsymbol{\pi}}$  de los problemas primal y dual, respectivamente, se tiene que  $\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} \geq \bar{\boldsymbol{\pi}}^\top \mathbf{b}$ .*

Primal		Dual	
Función objetivo	Minimizar	Maximizar	Función objetivo
Restricciones	$\geq$	$\geq$	Variables
	$\leq$	$\leq$	
	$=$	libres	
Variables	$\geq$	$\leq$	Restricciones
	$\leq$	$\geq$	
	libres	$=$	

Tabla 1.2: Transformación de un problema a su dual.

*Demostración.* En efecto, para todo par de soluciones factibles  $\bar{x}$  y  $\bar{\pi}$  de los problemas primal y dual, respectivamente, se tiene que

$$\mathbf{c}^\top \bar{x} \geq (\bar{\pi}^\top \mathbf{A}) \bar{x} = \bar{\pi}^\top (\mathbf{A} \bar{x}) \geq \bar{\pi}^\top \mathbf{b} \quad \square$$

**Corolario 1.4.2.** Si  $\mathbf{c}^\top \bar{x} = \bar{\pi}^\top \mathbf{b}$  con  $\bar{x}$  solución factible del problema primal y  $\bar{\pi}$  solución factible del problema dual, entonces  $\bar{x}$  es un óptimo global del problema primal y  $\bar{\pi}$  es un óptimo global del problema dual.

Por tanto, el valor de la función objetivo en una solución factible del problema primal acota superiormente el valor de la solución óptima, mientras que el valor de la función objetivo en una solución factible del problema dual lo acota inferiormente. Además, si dichas cotas coinciden estamos ante un óptimo global.

En general, dichas cotas pueden no coincidir, quedando un espacio entre ellas denominado *duality gap*. Sin embargo, en programación lineal esto no ocurre, tal y como nos garantiza el teorema de dualidad fuerte que se enuncia a continuación.

**Teorema 1.4.3** (Teorema de dualidad fuerte). *Dado un problema de programación lineal y su dual se tiene que*

$$\inf_x \{\mathbf{c}^\top \mathbf{x}\} = \sup_\pi \{\boldsymbol{\pi}^\top \mathbf{b}\}$$

La demostración de este teorema se deduce aplicando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (teorema 1.3.1) y puede verse en [Bazaraa et al. \(2006\)](#).





## Capítulo 2

# Optimización de carteras y medidas de riesgo

En este capítulo presentaremos varios modelos clásicos que se utilizan para calcular la cartera de inversión óptima para un cierto inversor en términos de rentabilidad y riesgo, seleccionando de forma adecuada los activos que compondrán dicha cartera. Los modelos que aquí presentaremos se basan en el trabajo de [Markowitz \(1952\)](#), considerado como el nacimiento de la teoría moderna de inversión.

Para poder entender dichos modelos, dedicaremos una primera sección a explicar conceptos básicos relacionados con carteras de inversión.

Finalmente, se introducirán medidas de riesgo alternativas a la varianza, que es la medida de riesgo clásica y la que se utiliza en [Markowitz \(1952\)](#).

### 2.1. Carteras de inversión

En primer lugar introduciremos una serie de conceptos básicos que utilizaremos a lo largo de esta memoria.

**Definición 2.1.1.** Un activo financiero es un instrumento financiero que representa derechos parciales del propietario sobre una cierta empresa con el objetivo de obtener un beneficio económico.

**Definición 2.1.2.** Una cartera de inversión es una combinación de activos financieros en los que se decide invertir una cierta cantidad de dinero.

En general, denotaremos una cartera de inversión por  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ , siendo  $x_j$  la cantidad de dinero que se invierte en el activo  $j$ .

*Observación 2.1.1.* Supondremos sin pérdida de generalidad que para cualquier cartera de inversión se cumple que  $\sum_{j=1}^m x_j = 1$ . Así,  $x_j$  denotará la proporción del total invertido que invertimos en el activo  $j$ .

A lo largo de esta memoria necesitamos predecir de alguna forma el comportamiento de los activos en el futuro. Como el futuro es desconocido, no hay una única forma válida de hacer esto. El enfoque que utilizaremos en esta memoria es considerar diferentes escenarios futuros con una cierta probabilidad asociada en función de lo que ocurrió en el pasado.

**Definición 2.1.3.** Consideramos un activo  $j$  en el cual se puede invertir. Se define el retorno de dicho activo  $j$  en un instante de tiempo  $t$  como el cociente  $r_{jt} = \frac{v_{j,t+1} - v_{jt}}{v_{jt}}$  siendo  $v_{jt}$  el valor del activo  $j$  en el instante  $t$  y  $v_{j,t+1}$  el valor del activo  $j$  en el instante  $t + 1$ .

En general, consideraremos como unidad de tiempo el día. Además, si el activo  $j$  obtuvo retornos  $r_{jt}$ , con  $t \in \{1, \dots, T\}$ , en los últimos  $T$  días, lo que haremos será considerar  $1, \dots, T$  escenarios futuros con una probabilidad asociada  $p_t$  de forma que en el escenario  $t$  el retorno futuro del activo  $j$  sea  $r_{jt}$ . En general, los escenarios se considerarán equiprobables.

*Observación 2.1.2.* Un estudio realista pasaría por usar técnicas estadísticas más avanzadas como series de tiempo, pero prescindiremos de ellas aquí para centrarnos en los problemas de optimización resultantes.

**Definición 2.1.4.** Para cada activo  $j$  denotaremos por  $R_j$  la variable aleatoria discreta que toma valores  $r_{jt}$  con probabilidad  $p_t$ . Evidentemente, las probabilidades de los escenarios futuros deben sumar 1, es decir,  $\sum_{t=1}^T p_t = 1$ . Dicha variable aleatoria  $R_j$  se denomina retorno del activo  $j$ .

**Definición 2.1.5.** Se define el retorno esperado de un activo  $j$  como la esperanza de la variable  $R_j$ . Así, el retorno esperado de un activo, viene dado por

$$E_j = \mathbb{E}(R_j) = \sum_{t=1}^T p_t r_{jt}.$$

En caso de que supongamos los escenarios equiprobables, se tiene que

$$E_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{jt}.$$

A continuación se definen conceptos análogos para una cartera de inversión.

**Definición 2.1.6.** Se define el retorno de una cartera de inversión  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  como la variable aleatoria  $R$  de forma que toma el valor  $\sum_{j=1}^m x_j r_{jt}$  con probabilidad  $p_t$ .

**Definición 2.1.7.** El retorno esperado de una cartera de inversión  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  se define como

$$E = \mathbb{E}(R) = \sum_{t=1}^T \left( p_t \cdot \sum_{j=1}^m x_j r_{jt} \right).$$

En el caso de que todos los escenarios sean equiprobables, se tiene que

$$E = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^m x_j r_{jt} = \sum_{j=1}^m x_j \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{jt} = \sum_{j=1}^m x_j E_j.$$

Así, el retorno esperado de una cartera de inversión se puede calcular como la suma de los retornos esperados de cada activo multiplicados por la cantidad invertida en cada uno de ellos.

A continuación se muestra un ejemplo sencillo.

**Ejemplo 2.1.1.** Consideremos dos posibles activos en los que invertir:  $A_1$  y  $A_2$ . Supongamos que tras un estudio previo hemos llegado a la conclusión de que el activo  $A_1$  tendrá un retorno de 0.2 (beneficio) con una probabilidad 0.5 y un retorno de  $-0.1$  (pérdida) con una probabilidad 0.5. Por otra parte, el activo  $A_2$  tendrá un retorno de 0.01 con una probabilidad 0.5 y un retorno de 0.03 con una probabilidad 0.5.

Así, si consideramos la cartera de inversión  $\mathbf{x} = (x, 1 - x)$  con  $x \in [0, 1]$ , su retorno esperado será

$$E = x \cdot R_1 + (1 - x) \cdot R_2 = x \cdot \frac{0.2 - 0.1}{2} + (1 - x) \cdot \frac{0.01 + 0.03}{2} = 0.05x + 0.02(1 - x)$$

De este modo, podemos ver que el máximo de la función  $0.05x + 0.02(1 - x)$  con  $x \in [0, 1]$  se alcanza en  $x = 1$ , es decir, invertir todo el dinero en el activo  $A_1$ .

El anterior ejemplo pone de manifiesto que centrarse solamente en maximizar el retorno esperado quizá no sea lo más conveniente. En efecto, en este ejemplo estaríamos invirtiendo todo nuestro dinero en el activo  $A_1$ , pues es el que mayor retorno esperado tiene. Sin embargo,

es importante destacar el alto riesgo de dicha inversión, pues hay una probabilidad del 50 % de tener pérdidas del 10 %, mientras que invirtiendo en el activo  $A_2$  nos aseguraríamos no tener pérdidas en ningún caso, a pesar de que su retorno esperado sea más bajo.

Por tanto, necesitamos una medida del riesgo de la inversión. En [Markowitz \(1952\)](#) se considera la varianza, tal y como se define a continuación.

**Definición 2.1.8.** Se define la varianza de un activo  $j$  como la varianza de su retorno  $R_j$ . Así, la varianza del activo  $j$  es

$$\sigma_j^2 = \text{Var}(R_j) = \sum_{t=1}^T p_t (r_{jt} - E_j)^2.$$

**Definición 2.1.9.** Se define la covarianza entre dos activos  $j$  y  $k$  como la covarianza entre los retornos  $R_j$  y  $R_k$ . Así, la covarianza de entre el activo  $j$  y el activo  $k$  viene dada por

$$\sigma_{jk} = \text{Cov}(R_j, R_k) = \sum_{t=1}^T p_t (r_{jt} - E_j)(r_{kt} - E_k).$$

A continuación definimos la varianza de una cartera de inversión.

**Definición 2.1.10.** Se define la varianza de una cartera de inversión  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  como la varianza del retorno de dicha cartera  $R$ . Así,

$$V = \text{Var}(R) = \sum_{t=1}^T p_t \left( \sum_{j=1}^m x_j r_{jt} - E \right)^2$$

Ahora probaremos una breve proposición que nos proporciona una forma fácil de calcular la varianza de una cartera de inversión en la práctica.

**Proposición 2.1.1.** *La varianza de una cartera de inversión viene dada por*

$$V = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_j x_k \sigma_{jk}.$$

*Demostración.* Haciendo operaciones se tiene que

$$V = \text{Var}(R) = \sum_{t=1}^T p_t \left( \sum_{j=1}^m x_j r_{jt} - E \right)^2 = \sum_{t=1}^T p_t \left( \sum_{j=1}^m x_j r_{jt} - \sum_{j=1}^m x_j E_j \right)^2 = \text{Var} \left( \sum_{j=1}^m x_j R_j \right).$$

Utilizando ahora las propiedades de la varianza, se tiene que

$$V = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \text{Cov}(x_j R_j, x_k R_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_j x_k \text{Cov}(R_j, R_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_j x_k \sigma_{jk}. \quad \square$$

A continuación se muestra un ejemplo que pone de manifiesto la importancia del enfoque que le demos al problema de elegir la cartera óptima.

**Ejemplo 2.1.2.** Consideremos los activos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  de forma que cada uno de ellos tiene dos escenarios futuros posibles con una probabilidad de 0.5 cada uno de ellos. Los retornos en cada escenario se muestran en la tabla 2.1.

Activo	Escenario 1	Escenario 2
$A_1$	-0.1	0.2
$A_2$	-0.01	0.05
$A_3$	0.001	0.005

Tabla 2.1: Retornos en los posibles escenarios para cada activo en el ejemplo 2.1.2.

Vamos a elegir la cartera óptima siguiendo 2 enfoques diferentes:

1. Maximizando el retorno esperado. En este caso, el retorno esperado de la cartera  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , con  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , es

$$\begin{aligned} E &= x_1 \cdot R_1 + x_2 \cdot R_2 + x_3 \cdot R_3 = x_1 \cdot \frac{0.2 - 0.1}{2} + x_2 \cdot \frac{0.05 - 0.01}{2} + x_3 \cdot \frac{0.001 + 0.005}{2} \\ &= 0.05x_1 + 0.02x_2 + 0.003x_3. \end{aligned}$$

Así, el máximo de la función  $0.05x_1 + 0.02x_2 + 0.003x_3$  (sujeto a que  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ) se alcanza en  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ , es decir, invertir todo en el activo  $A_1$ . Esto concuerda con el hecho de que el activo  $A_1$  es el que tiene un retorno esperado mayor.

2. Minimizando la varianza. En este caso, la varianza de la cartera  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , con  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , es

$$\begin{aligned} V &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_j x_k \sigma_{jk} = x_1 x_1 \sigma_{11} + x_1 x_2 \sigma_{12} + x_1 x_3 \sigma_{13} + x_2 x_1 \sigma_{21} + x_2 x_2 \sigma_{22} + \\ & x_2 x_3 \sigma_{23} + x_3 x_1 \sigma_{31} + x_3 x_2 \sigma_{32} + x_3 x_3 \sigma_{33} = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + x_3^2 \sigma_3^2 + \\ & 2(x_1 x_2 \sigma_{12} + x_1 x_3 \sigma_{13} + x_2 x_3 \sigma_{23}). \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos de las correspondientes varianzas y covarianzas, obtenemos que:

$$V = 0.0225x_1^2 + 0.0009x_2^2 + 4 \cdot 10^{-6}x_3^2 + 0.009x_1x_2 + 0.0006x_1x_3 + 1.2 \cdot 10^{-4}x_2x_3$$

Se puede ver que el mínimo de la función anterior, sujeto a que  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , se alcanza en  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ , por lo que se invertiría todo el dinero en el activo  $A_3$ . Esto concuerda con el hecho de que el activo  $A_3$  sea el que menos dispersión tiene. En este caso, también coincide con el hecho de que sea el único activo que no tiene un retorno negativo en ninguno de los escenarios. Sin embargo, esto no tendría por qué ocurrir, ya que un activo con retornos negativos muy parecidos tendría menor varianza que un activo con retornos positivos pero más dispersos. Esto nos indica que la varianza, siendo una buena medida de dispersión, no es en sí misma una buena medida del riesgo, y por eso hoy en día existen una gran cantidad de medidas de riesgo alternativas.

## 2.2. Modelos clásicos

El ejemplo 2.1.2 pone de manifiesto que con diferentes enfoques se pueden obtener carteras completamente diferentes. A continuación, se muestra un nuevo enfoque posible, el cual tiene como objetivo buscar un equilibrio entre los dos anteriores enfoques.

**Ejemplo 2.2.1.** Consideremos los datos del ejemplo 2.1.2. Nuestro objetivo ahora será maximizar una combinación convexa del retorno esperado y la varianza cambiada de signo. Por ejemplo, podemos considerar la función a maximizar  $0.5 \cdot E - 0.5 \cdot V$ .

Así, haciendo cálculos similares a los del ejemplo 2.1.2, se obtiene que la cartera óptima en este caso es  $(x_1, x_2, x_3) = (0.79167, 0.20833, 0)$ .

Es importante destacar que tanto el caso de maximizar el retorno esperado como el caso de minimizar la varianza son ambos un caso particular de maximizar una combinación convexa del retorno esperado y la varianza cambiada de signo.

A continuación, vamos a resolver de nuevo el anterior ejemplo, considerando combinaciones convexas de la forma  $\lambda E - (1 - \lambda)V$ , para diferentes valores de  $\lambda$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Para ello, utilizamos AMPL (Fourer et al. (1990)) con el solver RAPOSa<sup>1</sup> (González-Díaz (2018)) que garantiza la optimalidad global de las soluciones. En el apéndice B.1 se encuentra el código utilizado. Ejecutando dicho código, obtenemos los resultados que se muestran en la tabla 2.2.

$\lambda$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	0	0	1
0.025	0	0.21	0.79
0.05	0	0.5	0.5
0.075	0	0.81	0.19
0.1	0	1	0
0.3	0.2	0.8	0
0.4	0.44	0.56	0
0.5	0.79	0.21	0
0.6	1	0	0
0.8	1	0	0
1	1	0	0

Tabla 2.2: Carteras óptimas para diferentes valores de  $\lambda$ .

Se puede ver que cuando  $\lambda$  es pequeño, lo óptimo es invertir en el activo  $A_3$  (mínimo riesgo), mientras que cuando  $\lambda$  es grande lo óptimo es invertir en el activo  $A_1$  (máximo retorno esperado). Por otra parte, cuando tenemos un valor de  $\lambda$  de 0.1, lo óptimo es invertir en el activo  $A_2$ , pues no tiene ni el mayor riesgo ni el menor retorno esperado. Es importante destacar que las escalas de los valores de los retornos esperados y las varianzas no son comparables, de ahí que se invierta todo en el activo  $A_2$  con  $\lambda = 0.1$  en vez de con  $\lambda = 0.5$ . Por esta misma

<sup>1</sup>RAPOSa es una herramienta de optimización polinómica desarrollada por investigadores de la USC y del IMTATI, siendo uno de los principales desarrolladores el autor de esta memoria. En la web [www.itmati.com/RAPOSa/index.html](http://www.itmati.com/RAPOSa/index.html) puede encontrarse más información.

razón, la malla escogida para los valores de  $\lambda$  no es uniforme.

Sin embargo, el enfoque anterior no es el único posible, además de que tiene el inconveniente de no saber de antemano qué malla de valores de  $\lambda$  tomar. A continuación se plantean otros dos enfoques diferentes:

- Resolver el problema de minimizar la varianza sujeto a la restricción de que el retorno esperado tiene que ser mayor que una cierta cantidad. Se trataría de resolver por tanto el siguiente problema de optimización matemática:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_j x_k \sigma_{jk} \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^m x_j R_j \geq E_{\min} \\ & \sum_{j=1}^m x_j = 1 \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

siendo  $m$  el número de activos,  $E_{\min}$  el mínimo retorno esperado que el inversor se quiere garantizar y  $R_j$  el retorno esperado del activo  $j$ .

- Resolver el problema de maximizar el retorno esperado sujeto a la restricción de que la varianza tiene que ser menor que una cierta cantidad. En este caso, se trataría de resolver el siguiente problema de optimización matemática:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \sum_{j=1}^m x_j R_j \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_j x_k \sigma_{jk} \leq V_{\max} \\ & \sum_{j=1}^m x_j = 1 \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

siendo  $m$  el número de activos,  $V_{\max}$  la máxima varianza que el inversor quiere tener y  $R_j$  el retorno esperado del activo  $j$ .

Para el primero de los enfoques, lo que haremos será una malla (ahora sí la podemos hacer



uniforme) en las posibles cotas inferiores para el retorno esperado. Sabemos que el máximo retorno esperado que podemos obtener en este caso es 0.05, invirtiendo todo en el activo  $A_1$ , mientras que el mínimo es 0.003, invirtiendo todo en el activo  $A_3$ . En la tabla 2.3 se pueden ver los resultados obtenidos para las diferentes cotas inferiores del retorno esperado. En el apéndice B.1 se muestra el código utilizado para obtener los resultados.

Cota inferior del retorno esperado	$x_1$	$x_2$	$x_3$
0.003	0	0	1
0.0124	0	0.55294	0.44706
0.0218	0.06	0.94	0
0.0312	0.373	0.627	0
0.0406	0.687	0.313	0
0.05	1	0	0

Tabla 2.3: Carteras óptimas para diferentes cotas inferiores del retorno esperado.

Así, vemos que cuando la cota inferior del valor esperado es pequeña (0.003), la inversión óptima consiste en invertir todo en el activo  $A_3$ , pues es el que tiene menor varianza. Sin embargo, según vamos aumentando la cota inferior del valor esperado, podemos observar que primero se invierte en el activo  $A_2$  y finalmente se acaba invirtiendo todo en el activo  $A_1$ , pues es la única forma de que el retorno esperado sea 0.05. Es importante destacar que en este caso, la restricción de que el valor esperado sea mayor que una cierta cantidad siempre se satura, pues los activos de menor varianza son también los de menor retorno esperado y viceversa.

De forma análoga, podemos utilizar el segundo de los enfoques, para hacer una malla uniforme en las cotas superiores de la varianza. Sabemos que la varianza mínima que se puede alcanzar en este caso es  $4 \cdot 10^{-6}$  invirtiendo todo en el activo  $A_3$ , mientras que la varianza máxima es 0.0225, invirtiendo todo en el activo  $A_1$ . En la tabla 2.4 se pueden ver los resultados obtenidos para las diferentes cotas superiores de la varianza. En el apéndice B.1 se muestra el código utilizado para obtener los resultados.

Así, vemos que cuando la cota superior de la varianza es pequeña ( $4 \cdot 10^{-6}$ ), la inversión óptima consiste en invertir todo en el activo  $A_3$ , pues es la única forma de garantizarse una varianza de  $4 \cdot 10^{-6}$ . Sin embargo, según vamos aumentando la cota superior de la varianza,

podemos observar que primero se invierte en el activo  $A_2$  y finalmente se acaba invirtiendo todo en el activo  $A_1$ , pues la cota superior de la varianza deja de ser restrictiva y se puede invertir todo en el activo  $A_1$  con el objetivo de maximizar el retorno esperado. De nuevo, la restricción de que la varianza sea menor que una cierta cantidad siempre se satura, por el mismo motivo que comentamos anteriormente.

Cota superior de la varianza	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$4 \cdot 10^{-6}$	0	0	1
$4.5032 \cdot 10^{-3}$	0.31	0.69	0
$9.0024 \cdot 10^{-3}$	0.54	0.46	0
$1.35016 \cdot 10^{-2}$	0.72	0.28	0
$1.80008 \cdot 10^{-2}$	0.87	0.13	0
$2.25 \cdot 10^{-2}$	1	0	0

Tabla 2.4: Carteras óptimas para diferentes cotas superiores de la varianza.

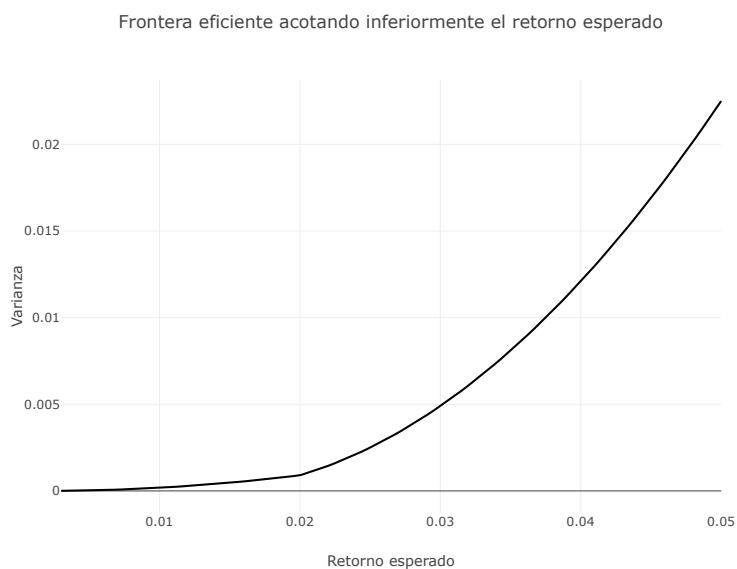


Figura 2.1: Frontera eficiente acotando inferiormente el retorno esperado y minimizando la varianza.

Finalmente, haciendo una malla más fina en ambos casos, podemos obtener las gráficas de las figuras 2.1 y 2.2. En la gráfica 2.1 podemos ver cuál es la mínima varianza para cada uno de los retornos esperados que el inversor se quiera garantizar. Así, si el inversor quiere que su cartera tenga un retorno esperado mayor o igual 0.03, la menor varianza que puede obtener es 0.005. Esto es lo que se denomina frontera eficiente.

De modo similar, en la gráfica 2.2 podemos ver cuál es el máximo retorno esperado que puede obtener un inversor para cada una de las varianzas que el inversor se quiera garantizar. Así, si el inversor quiere que su cartera tenga una varianza menor o igual que 0.01, el máximo retorno esperado que puede obtener es 0.0375.

Obsérvese que ambos métodos llegan a la misma frontera eficiente, lo único que cambia en las gráficas son los ejes.

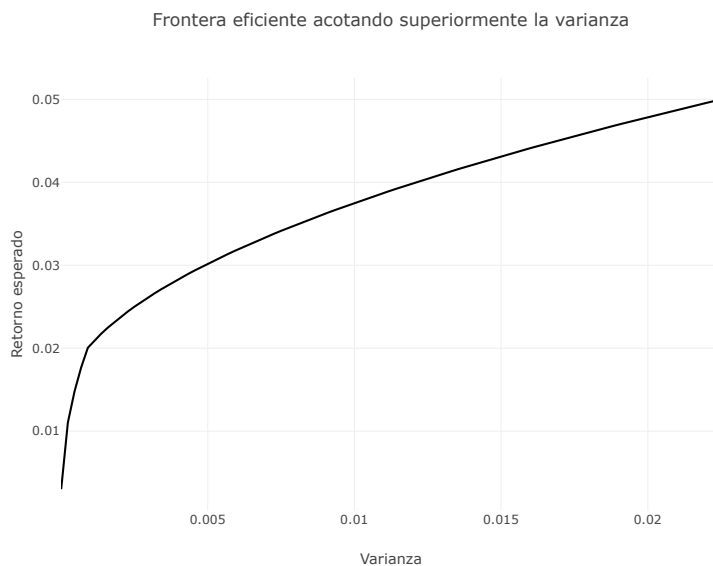


Figura 2.2: Frontera eficiente acotando superiormente la varianza y maximizando el retorno esperado.

### 2.3. Una medida de riesgo alternativa a la varianza: el CVaR

Hasta ahora, hemos considerado la varianza como la medida asociada al riesgo de una inversión. Sin embargo, existen otras medidas que se utilizan más en la actualidad, como es el caso del *Value at Risk* (VaR), descrito en [Stambaugh \(1996\)](#), o el *Conditional Value at Risk* (CVaR), introducido en [Rockafellar y Uryasev \(2000\)](#). En esta sección explicaremos qué son y cómo se calculan y también comentaremos sus principales ventajas e inconvenientes con respecto a la varianza.

En primer lugar definiremos el VaR y, a continuación el CVaR, que será el que utilizemos a lo largo de esta memoria.

**Definición 2.3.1.** Dada una variable aleatoria (continua o discreta)  $X$  que toma valores en un cierto soporte  $S_X$ , con función de densidad  $f(x)$  y función de distribución  $F(x)$ , se define el VaR con nivel  $\alpha \in (0, 1)$  como el valor más pequeño tal que la probabilidad de que  $X$  sea menor que dicho valor es mayor o igual que  $\alpha$ . Matemáticamente se define como

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in S_X : F(x) \geq \alpha\}.$$

En la gráfica [2.3](#) se puede ver una interpretación gráfica del VaR aplicado a la distribución normal.

Si ahora consideramos una cartera de inversión  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ , definimos su  $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x})$  como el opuesto al VaR de sus retornos, es decir,  $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) = -\text{VaR}_\alpha(R)$ . El objetivo del signo menos es transformar un beneficio (presumiblemente negativo) en una pérdida. Así, cuanto mayor sea el VaR de una cartera de inversión, mayor será su riesgo.

**Definición 2.3.2.** Dada una variable aleatoria continua  $X$  que toma valores en todo  $\mathbb{R}$  con función de densidad  $f(x)$ , se define el CVaR con nivel  $\alpha$  como

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\inf}^{\text{VaR}_\alpha(X)} x f(x) dx.^2$$

<sup>2</sup>Es importante destacar que en algunos artículos se define el CVaR como

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_\beta(X) d\beta.$$

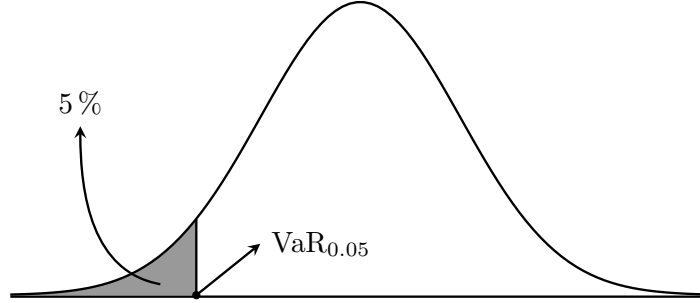


Figura 2.3: Interpretación gráfica del VaR

Así, el CVaR es la media de los valores que están a la izquierda del VaR.

Para variables aleatorias discretas el CVaR se define de forma análoga, tal y como se muestra a continuación.

**Definición 2.3.3.** Consideremos una variable aleatoria discreta  $X$  que toma valores  $\{x_1, \dots, x_T\}$  con función de densidad  $f(x_t) = p_t$  tal que  $\sum_{t=1}^T p_t = 1$  y supongamos sin pérdida de generalidad que  $x_1 < x_2 < \dots, < x_{T-1} < x_T$ . Se define el CVaR con nivel  $\alpha$  como

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \left[ \sum_{t=1}^{q-1} x_t p_t + x_q \left( \alpha - \sum_{t=1}^{q-1} p_t \right) \right], \quad (2.1)$$

siendo  $q$  tal que  $\text{VaR}_\alpha(X) = x_q$ .

Veamos ahora como aplicar esta definición de CVaR a lo que hemos visto en relación con carteras de inversión.

**Definición 2.3.4.** Consideremos una cartera de inversión  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  y un conjunto de  $T$  escenarios con los correspondientes retornos asociados a cada activo, que denotaremos por  $r_{jt}$ , con  $j \in \{1, \dots, m\}$  e  $t \in \{1, \dots, T\}$ , siendo  $r_{jt}$  el retorno del activo  $j$  en el escenario  $t$ .

Así, el CVaR de la cartera de inversión  $\mathbf{x}$  es el opuesto del CVaR asociado al retorno de dicha cartera. Es decir, se tiene que

$$\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = -\text{CVaR}_\alpha(R) = -\frac{1}{\alpha} \left[ \sum_{t=1}^{q-1} \left( p_t \sum_{j=1}^m x_j r_{jt} \right) + \left( \sum_{j=1}^m x_j r_{jq} \right) \cdot \left( \alpha - \sum_{t=1}^{q-1} p_t \right) \right], \quad (2.2)$$

En [Acerbi y Tasche \(2002\)](#) se puede ver que esta definición es equivalente a la dada en la definición 2.3.2.

siendo  $q$  tal que  $\text{VaR}_\alpha(R) = x_q$ .

En el caso de que todos los escenarios sean equiprobables, se tiene que

$$\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = -\text{CVaR}_\alpha(R) = -\frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{q-1} \sum_{j=1}^m x_j r_{jt} + \left( \alpha - \frac{q-1}{T} \right) \sum_{j=1}^m x_j r_{jq} \right], \quad (2.3)$$

De nuevo, el objetivo del signo menos involucrado en la definición del CVaR es justamente convertir los beneficios (retornos esperados) en pérdidas. Así, cuanto mayor sea el CVaR mayor riesgo tendrá la cartera de inversión.

Para finalizar esta sección, se muestra un ejemplo de cómo calcular el VaR y CVaR de una cartera de inversión concreta.

**Ejemplo 2.3.1.** Consideremos los activos y los retornos que se muestran en la tabla 2.3.1. Supondremos que los 4 escenarios son equiprobables, con probabilidad 0.25 cada uno de ellos.

Activo	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3	Escenario 4
$A_1$	-0.1	0.1	-0.05	-0.15
$A_2$	-0.05	0.05	-0.1	0.2
$A_3$	0	-0.05	0.2	-0.15

Tabla 2.5: Retornos de cada uno de los activos del ejemplo 2.3.1.

A continuación, calculamos el  $\text{VaR}_\alpha$  y el  $\text{CVaR}_\alpha$  de la cartera de inversión  $\mathbf{x} = (0.4, 0.1, 0.5)$  para  $\alpha = 0.3$ . Primero lo haremos con la fórmula genérica y posteriormente con la fórmula simplificada teniendo en cuenta que los escenarios son equiprobables.

Lo primero que necesitamos es saber como se distribuye la variable de los retornos  $R$ . Para ello, calculamos que valor toma en cada uno de los 4 escenarios posibles obteniendo que en el escenario 1 toma el valor  $-0.1 \cdot 0.4 - 0.05 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.5 = -0.045$ , en el escenario 2 el valor  $0.1 \cdot 0.4 + 0.05 \cdot 0.1 - 0.05 \cdot 0.5 = 0.02$ , en el escenario 3 el valor  $-0.05 \cdot 0.4 - 0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.07$  y en el escenario 4 el valor  $-0.15 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.1 + -0.15 \cdot 0.5 = -0.115$ . Así, para calcular el VaR y el CVaR, necesitamos reordenar nuestros escenarios de peor a mejor, de forma que el 4 pasa a ser el 1, el 1 pasa a ser el 2, el 2 pasa a ser el 3 y el 3 pasa a ser el 4. Obtenemos así, los datos de la tabla 2.3.1.

Activo/Cartera	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3	Escenario 4
$A_1$	-0.15	-0.1	0.1	-0.05
$A_2$	0.2	-0.05	0.05	-0.1
$A_3$	-0.15	0	-0.05	0.2
$\mathbf{x} = (0.4, 0.1, 0.5)$	-0.115	-0.045	0.02	0.07

Tabla 2.6: Retornos de cada uno de los activos del ejemplo 2.3.1 reordenando los escenarios.

Por tanto, la variable aleatoria  $R$  toma el valor  $r_1 = -0.115$  con probabilidad 0.25, el valor  $r_2 = -0.045$  con probabilidad 0.25, el valor  $r_3 = 0.02$  con probabilidad 0.25 y el valor  $r_4 = 0.07$  con probabilidad 0.25.

Así, se tiene que

$$\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) = -\text{VaR}_\alpha(R) = -\inf \{r \in \{-0.115, -0.045, 0.02, 0.07\} : F(r) > 0.3\} = 0.045.$$

Por tanto, el VaR de la cartera de inversión es, en este caso, 0.045.

Procedemos ahora a calcular el CVaR utilizando la fórmula genérica (2.4) para una variable aleatoria, en este caso la variable de los retornos  $R$ . Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) &= -\text{CVaR}_\alpha(R) = -\frac{1}{\alpha} \left[ \sum_{t=1}^{q-1} r_t p_t + r_q \left( \alpha - \sum_{t=1}^{q-1} p_t \right) \right] \stackrel{q=2}{=} -\frac{1}{0.3} [r_1 p_1 + r_2 (0.3 - p_1)] \\ &= -\frac{1}{0.3} (-0.115 \cdot 0.25 - 0.045 \cdot 0.05) = 0.1033. \end{aligned}$$

Así, el CVaR nos indica que la media de las pérdidas que tendría el inversor en los peores casos (tal que su probabilidad suma 0.3) es de 0.1033, es decir, del 10.33%.

Por último, si no hubiésemos calculado la distribución de probabilidad de  $R$ , simplemente podríamos haber sustituido en la fórmula (2.2) o en la fórmula (2.3), ya que los escenarios son equiprobables. A continuación, se muestran los cálculos para que ver que, efectivamente, el resultado obtenido es el mismo.

$$\begin{aligned}
\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\alpha} \left[ \sum_{t=1}^{q-1} \left( p_t \sum_{j=1}^m x_j r_{jt} \right) + \left( \sum_{j=1}^m x_j r_{jq} \right) \cdot \left( \alpha - \sum_{t=1}^{q-1} p_t \right) \right] = \\
&= -\frac{1}{0.3} [p_1(x_1 r_{11} + x_2 r_{21} + x_3 r_{31}) + (x_1 r_{12} + x_2 r_{22} + x_3 r_{33}) \cdot (0.3 - p_1)] = \\
&= -\frac{1}{0.3} [0.25 \cdot (0.4 \cdot (-0.15) + 0.1 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot (-0.15)) + \\
&\quad + 0.4 \cdot (-0.1) + 0.1 \cdot (-0.05) + 0.5 \cdot 0 \cdot (0.3 - 0.25)] = \\
&= 0.1033.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{q-1} \sum_{j=1}^m x_j r_{jt} + \left( \alpha - \frac{q-1}{T} \right) \sum_{j=1}^m x_j r_{jq} \right] = \\
&= -\frac{1}{0.3} \left[ \frac{1}{4} (x_1 r_{11} + x_2 r_{21} + x_3 r_{31}) + \left( 0.3 - \frac{1}{4} \right) \cdot (x_1 r_{12} + x_2 r_{22} + x_3 r_{33}) \right] \\
&= -\frac{1}{0.3} \left[ \frac{1}{4} \cdot (0.4 \cdot (-0.15) + 0.1 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot (-0.15)) + \right. \\
&\quad \left. + \left( 0.3 - \frac{1}{4} \right) \cdot (0.4 \cdot (-0.1) + 0.1 \cdot (-0.05) + 0.5 \cdot 0) \right] = \\
&= 0.1033.
\end{aligned}$$

Una vez vistas las definiciones de VaR y CVaR, podemos ver cuales son las principales diferencias entre ambos. Así, en [Acerbi y Tasche \(2002\)](#) puede verse una amplia explicación de las ventajas del CVaR frente al VaR, siendo la principal de ellas el hecho de que el VaR no cumple la propiedad de subaditividad<sup>3</sup> y el CVaR sí la cumple. Del mismo modo, en [Rockafellar \(2014\)](#) puede verse una amplia explicación de otras muchas medidas de riesgo y sus propiedades.

Sin embargo, teniendo en cuenta que el objetivo de este trabajo es modelar problemas binivel que surgen entre bancos e inversores y utilizar técnicas matemáticas sofisticadas para resolverlos, no desarrollaremos en profundidad las diferentes medidas de riesgo que se utilizan en la actualidad. Así, consideraremos a lo largo de este trabajo el CVaR como medida de

<sup>3</sup>La propiedad de subaditividad nos dice que el riesgo de una cartera formada por dos activos es menor o igual que la suma de los riesgos individuales. Es decir, nos dice que la diversificación puede disminuir el riesgo pero nunca aumentarlo.



riesgo, por ser la que tiene una mayor aceptación en la literatura. No obstante, es importante destacar que en la práctica, la mayoría de las entidades financieras siguen utilizando el VaR como medida de riesgo, a pesar de que se ha demostrado que el CVaR tiene propiedades mejores desde el punto de vista matemático.

Para finalizar este capítulo mostraremos una forma alternativa de calcular el CVaR, resolviendo para ello un problema de optimización. Esto nos será de gran ayuda a la hora de plantear los problemas binivel entre inversores y bancos.

**Definición 2.3.5.** Consideremos una cartera de inversión  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ . Definimos

$$y_t = \sum_{j=1}^m r_{jt}x_j$$

como el retorno de la cartera  $\mathbf{x}$  en el escenario  $t$ .

Ahora, definimos la función

$$F_\alpha(\eta) = -\eta + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T [\eta - y_t]^+ p_t,$$

con  $\alpha \in (0, 1)$  y  $\eta \in \mathbb{R}$  y siendo  $[\eta - y_t]^+ = \max\{\eta - y_t, 0\}$

A continuación, se enuncia una proposición que nos permite calcular el CVaR resolviendo un problema de optimización matemática.

**Proposición 2.3.1.** *Dada una cartera de inversión  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ , con retornos  $y_t = \sum_{j=1}^m r_{jt}x_j$  en cada escenario  $t \in \{1, \dots, T\}$  y un nivel de confianza  $\alpha \in (0, 1)$  se tiene que*

$$CVaR_\alpha(\mathbf{x}) = \min_{\eta \in \mathbb{R}} F_\alpha(\eta). \quad (2.4)$$

En [Rockafellar y Uryasev \(2000\)](#) se demuestra una proposición análoga a la [2.3.1](#), pero para variables continuas. Para el caso de variables discretas, como es nuestro caso, puede encontrarse una breve explicación de por qué se cumple lo anterior en [Mansini et al. \(2003\)](#). La principal diferencia radica en que la función  $F_\alpha(\eta)$  es diferenciable para el caso continuo, pero no lo es para el caso discreto, por lo que no podemos utilizar el mismo razonamiento que se utiliza en [Rockafellar y Uryasev \(2000\)](#). Sin embargo, podemos demostrarla siguiendo otro procedimiento, tal y como se muestra a continuación.

*Demostración.* Lo primero que debemos destacar es que la función  $F_\alpha(\eta)$  es convexa, pues se trata de una suma de funciones convexas, ya que el máximo entre dos funciones convexas siempre es una función convexa. Así, por la proposición 1.2.4, sabemos que cualquier mínimo local será global. Lo que haremos a continuación será probar que  $\eta = \text{VaR}_\alpha(R)$  (siendo  $R$  la variable de los retornos de la cartera  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ ) es un mínimo local (y por tanto global) de la función  $F_\alpha(\eta)$ . Para ello basta ver que existe un  $\delta$  tal que

$$F_\alpha(\text{VaR}_\alpha(R)) \leq F_\alpha(\text{VaR}_\alpha(R) - \varepsilon) \text{ y } F_\alpha(\text{VaR}_\alpha(R)) \leq F_\alpha(\text{VaR}_\alpha(R) + \varepsilon)$$

para todo  $\varepsilon \in (0, \delta)$ .

Consideramos los retornos  $y_t = \sum_{j=1}^m r_{jt}x_j$  ordenados de forma creciente y denotemos por  $q$  el índice tal que  $\text{VaR}_\alpha(R) = y_q$ . De esta forma, se tiene que

$$F_\alpha(y_q) = -y_q + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T [y_q - y_t]^+ p_t = -y_q + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{q-1} (y_q - y_t) p_t$$

Por otra parte, podemos tomar  $\delta > 0$  lo suficientemente pequeño de forma que  $y_{q-1} < y_q - \delta < y_q + \delta < y_{q+1}$ . De este modo se tiene que para todo  $\varepsilon \in (0, \delta)$

$$\begin{aligned} F_\alpha(y_q + \varepsilon) &= -y_q - \varepsilon + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T [y_q + \varepsilon - y_t]^+ p_t \\ &= -y_q - \varepsilon + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^q (y_q + \varepsilon - y_t) p_t \\ &= -y_q - \varepsilon + \frac{1}{\alpha} (y_q + \varepsilon - y_q) p_q + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{q-1} (y_q + \varepsilon - y_t) p_t \\ &= -y_q - \varepsilon + \frac{1}{\alpha} (y_q + \varepsilon - y_q) p_q + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{q-1} (y_q - y_t) p_t + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{q-1} \varepsilon p_t \\ &= -y_q - \varepsilon + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{q-1} (y_q - y_t) p_t + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^q \varepsilon p_t \\ &= F_\alpha(y_q) + \varepsilon \left( \frac{\sum_{t=1}^q p_t}{\alpha} - 1 \right) \geq F_\alpha(y_q), \end{aligned}$$

ya que utilizando la definición 2.3.1 de VaR sabemos que  $\sum_{t=1}^q p_t \geq \alpha$ , pues  $\text{VaR}_\alpha(R) = y_q$ .

De forma similar, se tiene que

$$\begin{aligned}
F_\alpha(y_q - \varepsilon) &= -y_q + \varepsilon + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T [y_q - \varepsilon - y_t]^+ p_t \\
&= -y_q + \varepsilon + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{q-1} (y_q - \varepsilon - y_t) p_t \\
&= -y_q + \varepsilon + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{q-1} (y_q - y_t) p_t - \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{q-1} \varepsilon p_t \\
&= F_\alpha(y_q) + \varepsilon \left( 1 - \frac{\sum_{t=1}^{q-1} p_t}{\alpha} \right) > F_\alpha(y_q),
\end{aligned}$$

ya que utilizando de nuevo la definición 2.3.1 de VaR sabemos que  $\sum_{t=1}^{q-1} p_t < \alpha$ , pues en caso contrario  $\text{VaR}_\alpha(R) = y_{q-1}$  y sabemos que eso es falso, pues  $\text{VaR}_\alpha(R) = y_q$ .

De esta forma, hemos probado que  $F_\alpha(\eta)$  tiene un mínimo global en el punto  $\eta = \text{VaR}_\alpha(R)$ . Ahora, veamos cuánto vale  $F_\alpha(\text{VaR}_\alpha(R))$ .

$$\begin{aligned}
F_\alpha(\text{VaR}_\alpha(R)) &= -y_q + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T [y_q - y_t]^+ p_t \\
&= -y_q + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{q-1} (y_q - y_t) p_t \\
&= -y_q - \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^{q-1} (-y_q p_t + y_t p_t) \\
&= -\frac{1}{\alpha} \left[ \alpha y_q + \sum_{t=1}^{q-1} y_t p_t + \sum_{t=1}^{q-1} -y_q p_t \right] \\
&= -\frac{1}{\alpha} \left[ \sum_{t=1}^{q-1} y_t p_t + y_q \left( \alpha - \sum_{t=1}^{q-1} p_t \right) \right].
\end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta que  $y_t = \sum_{j=1}^m x_j r_{jt}$ , se tiene que  $F_\alpha(\text{VaR}_\alpha(R)) = \text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x})$  comparando la anterior expresión con la expresión (2.2).  $\square$

**Corolario 2.3.2.** Sea  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  una cartera de inversión con retornos  $y_t = \sum_{j=1}^m r_{jt} x_j$

en cada escenario  $t \in \{1, \dots, T\}$  y sea  $\alpha \in (0, 1)$  un nivel de confianza. Entonces, se tiene que el  $\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x})$  es el valor óptimo del siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{aligned} \underset{\eta, d}{\text{minimizar}} \quad & -\eta + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T d_t p_t \\ \text{sujeto a} \quad & d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T \\ & \eta \in \mathbb{R} \\ & d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T. \end{aligned} \tag{2.5}$$

*Demostración.* La demostración del corolario anterior es inmediata teniendo en cuenta la proposición 2.3.1. En efecto, como  $d_t \geq 0$  y  $d_t \geq \eta - y_t$ , se tiene que  $d_t \geq [\eta - y_t]^+$  para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ . Además, como el problema (2.5) es un problema de minimizar,  $d_t$  va a alcanzar su cota inferior en el óptimo, es decir  $d_t = [\eta - y_t]^+$  en el óptimo, por lo que el problema (2.5) es equivalente al problema (2.4).  $\square$

Así, tenemos una forma de calcular el CVaR resolviendo un problema de optimización lineal, lo cual será de gran utilidad más adelante cuando optimicemos con respecto al CVaR.

## Capítulo 3

# Problemas binivel entre inversores y bancos

Hasta ahora, hemos estudiado problemas relacionados con la optimización de carteras desde el punto de vista del inversor. Sin embargo, en este capítulo daremos un paso más, teniendo en cuenta tanto el rendimiento y el riesgo del inversor como el beneficio que obtiene el banco con dicha inversión.

En efecto, si un inversor decide invertir en una serie de activos financieros a través de un banco, el banco fija unas ciertas comisiones para dichos activos, obteniendo un cierto beneficio por cada unidad monetaria que invierta el inversor en cada activo.

El objetivo de este capítulo es plantear diferentes modelos matemáticos que representen este tipo de situaciones: por un lado los intereses del inversor y por otro los intereses del banco. Para ello, se plantearán lo que se denominan problemas de optimización binivel. Por consiguiente, lo primero que haremos será una breve introducción a los problemas binivel.

### 3.1. Problemas de optimización binivel

Un problema de optimización binivel es un problema de optimización matemática en el cual alguna de sus restricciones consiste en resolver a su vez otro problema de optimización matemática.

Los primeros problemas de optimización binivel que se conocen, fueron planteados por el economista alemán Heinrich Freiherr von Stackelberg, tal y como se puede ver en [Stackelberg \(2013\)](#)<sup>1</sup>. Dichos problemas surgieron dentro del campo de la teoría de juegos y tenían la peculiaridad de que dos jugadores competían entre ellos de forma que uno elegía primero qué hacer (líder) y posteriormente el otro jugador (seguidor) tomaba su decisión teniendo en cuenta lo que había hecho el jugador líder.

---

<sup>1</sup>La referencia aportada se trata de una traducción al inglés del trabajo original, publicado en alemán en 1934 por Stackelberg.

Así, si el líder quiere encontrar su estrategia óptima, tendrá que anticipar la estrategia óptima que adoptará el seguidor para cada una de las posibles estrategias que pueda adoptar el líder. Aquí se puede ver claramente que tenemos dos problemas de optimización, estando uno embebido dentro de otro.

A continuación se muestra un sencillo ejemplo, que ilustra una situación real en la que surge un problema binivel.

**Ejemplo 3.1.1.** Consideremos 2 empresas del mercado textil que producen el mismo tipo de tela. Cada empresa tiene que decidir cuántos metros produce de dicha tela. Evidentemente dicho número no puede ser negativo y además supondremos que por cuestiones logísticas ninguna de ellas puede producir más de 5 metros de tela.

Por otra parte, sabemos que el precio de producir 1 metro de tela es el mismo para las dos empresas: 5 unidades monetarias. Además, el precio al que se va a vender el metro de tela en el mercado viene dado por  $10 - (x_1 + x_2)$ , siendo  $x_1$  los metros de tela que produce la empresa 1 y  $x_2$  los metros que produce la empresa 2.

Los beneficios de cada una de las empresas vienen dados por la diferencia entre lo que ingresan al vender el producto y lo que le ha costado la producción del mismo. Así, denotamos por  $f_1(x_1, x_2) = [10 - (x_1 + x_2)]x_1 - 5x_1$  los beneficios de la empresa 1 y por  $f_2(x_1, x_2) = [10 - (x_1 + x_2)]x_2 - 5x_2$  los beneficios de la empresa 2.

Como se puede observar, el beneficio de la empresa 1 depende de cuántas unidades produzca la empresa 2 y viceversa. Del mismo modo, el número óptimo de metros de tela que debe producir cada empresa depende de los metros que produzca la otra.

Supongamos ahora que la empresa 1 decide primero cuántos metros de tela producir y posteriormente la empresa 2 toma su decisión, sabiendo lo que ha decidido la empresa 1. Siguiendo lo dicho anteriormente, la empresa 1 es la líder y la empresa 2 la seguidora.

Por tanto, la empresa 1 tiene que decidir cuántos metros de tela producir teniendo en cuenta lo que va a hacer la empresa 2 después de que ella decida. Esta situación se puede modelar como un problema de optimización matemática binivel, tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & f_1(x_1, x_2) = [10 - (x_1 + x_2)]x_1 - 5x_1 \\ \text{sujeto a} \quad & x_2 \in \arg \max_{x_2 \in [0,5]} f_2(x_1, x_2) = [10 - (x_1 + x_2)]x_2 - 5x_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

En este caso, el problema resultante es relativamente fácil de resolver recurriendo a derivadas de primer y segundo orden. El primer paso es resolver el subproblema de la empresa 2, para lo que basta con calcular la derivada de  $f_2(x_1, x_2)$  con respecto a  $x_2$ . Así, se tiene que

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 10 - x_1 - 2x_2 - 5 = 5 - x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5 - x_1}{2}.$$

Como además  $\frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_2} = -2 < 0$ , se tiene que lo óptimo para la empresa 2 es producir  $\frac{5-x_1}{2}$  metros de tela, siendo  $x_1$  la cantidad de tela que ha producido la empresa 1. Es decir, gracias a esto, la empresa 1 puede predecir la estrategia de la empresa 2, ya que sabe que si produce  $x_1$  unidades, entonces la empresa 2 producirá  $\frac{5-x_1}{2}$ .

Debido a lo anterior, podemos reescribir nuestro problema binivel como un problema de programación matemática estándar, tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & f_1(x_1, x_2) = [10 - (x_1 + x_2)]x_1 - 5x_1 \\ \text{sujeto a} \quad & x_2 = \frac{5-x_1}{2} \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de encontrar el máximo de la función  $f_1(x_1) = [10 - (x_1 + \frac{5-x_1}{2})]x_1 - 5x_1$ . Haciendo operaciones obtenemos que

$$f_1(x_1) = [10 - \frac{5+x_1}{2}]x_1 - 5x_1 = \frac{15-x_1}{2}x_1 - 5x_1 = \frac{15x_1 - x_1^2 - 10x_1}{2} = \frac{5x_1 - x_1^2}{2}.$$

Derivando, se tiene que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{5 - 2x_1}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2.5.$$

Además,  $\frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_1} = -1 < 0$ , por lo que tenemos garantizado que el óptimo es  $x_1 = 2.5$ .

De este modo, el óptimo del problema binivel original es  $(2.5, 2.5)$ , es decir, que ambas

empresas produzcan 2.5 metros de tela.

*Observación 3.1.1.* En este caso el problema resulta ser simétrico y por tanto es indiferente que empresa decide primero y cual después. Sin embargo, esto no va a ocurrir siempre, como veremos en los problemas más complejos que se plantearán a lo largo de este trabajo.

Además, en este problema las condiciones de optimalidad de los subproblemas se pueden obtener simplemente derivando. En casos más complejos habrá que utilizar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (teorema 1.3.1) y conceptos de dualidad (teoremas 1.4.1 y 1.4.3).

## 3.2. Modelado de los problemas del banco y del inversor

Consideremos la siguiente situación: una persona va a un banco porque quiere invertir su dinero en una cierta cartera a través del banco. Es decir, el inversor quiere distribuir su dinero en diferentes activos, configurando para ello una cartera de inversión. Por otra parte, el banco cobrará una serie de comisiones al inversor en cada uno de los activos en los que decida invertir. Está claro que en esta situación aparecen dos problemas optimización bien diferenciados. Por una parte el problema del inversor, que desea o bien maximizar el retorno esperado de su cartera o minimizar el riesgo o bien alguna combinación de ambas. Por otra parte, el problema del banco, que desea ganar lo máximo posible gracias a las comisiones que le pone al inversor en cada activo.

El problema del inversor que aquí consideraremos será el problema de minimizar el riesgo de la inversión (utilizando para ello el CVaR como medida de riesgo) sujeto a que se garantiza un cierto retorno esperado.

Recordemos que por el corolario 2.3.2, el CVaR se puede obtener resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \underset{\eta, d}{\text{minimizar}} \quad & -\eta + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T d_t p_t \\ \text{sujeto a} \quad & d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T \\ & \eta \in \mathbb{R} \\ & d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

donde  $\eta$  y  $d_t$ ,  $t \in \{1, \dots, T\}$  son las variables del problema.



Por otra parte, el retorno esperado de la cartera de inversión  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  viene dado por  $\sum_{t=1}^T (p_t \cdot \sum_{j=1}^m r_{jt} x_j)$ , tal y como vimos en la definición 2.1.7. Sin embargo, ahora hay que tener en cuenta las comisiones que pone el banco a cada activo, las cuales tiene que pagar el inversor. Por tanto, el retorno esperado del inversor es  $\sum_{t=1}^T (p_t \cdot \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j) x_j)$ . De esta forma, la condición de que el inversor se garantice un cierto retorno esperado  $E_0$  puede escribirse como

$$\sum_{t=1}^T y_t p_t \geq E_0$$

siendo  $y_t = \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j) x_j$  para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ .

Teniendo en cuenta lo anterior y fijadas unas comisiones  $P_j$ , el problema del inversor puede formularse como

$$\underset{\eta, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{x}}{\text{minimizar}} \quad -\eta + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T d_t p_t \quad (\text{PInv})$$

$$\text{sujeto a} \quad d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.1)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j) x_j, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.2)$$

$$\sum_{t=1}^T y_t p_t \geq E_0 \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^m x_j = 1 \quad (3.4)$$

$$\eta \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

$$y_t \in \mathbb{R}, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.6)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.8)$$

donde las variables del problema son  $\eta$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{d}$  y  $\mathbf{x}$  y tenemos los siguientes parámetros:

- $P_j$  es la comisión que el banco le pone al activo  $j \in \{1, \dots, m\}$ .
- $p_t$  es la probabilidad del escenario  $t \in \{1, \dots, T\}$ .
- $r_{jt}$  es el retorno del activo  $j$  en el escenario  $t$ .

- $E_0$  es el mínimo retorno esperado que se quiere garantizar el inversor.
- $T$  es el número de escenarios.
- $m$  es el número de activos en los que se puede invertir.

En efecto, por una parte, el conjunto de restricciones (3.1), (3.2), (3.5), (3.6) y (3.7), junto a la función objetivo, vienen de la formulación del CVaR. Por otra parte, la restricción (3.3) es la que garantiza que el inversor obtenga un retorno esperado al menos de  $E_0$  unidades, mientras que las restricciones (3.4) y (3.8) son las condiciones de que  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  sea una cartera de inversión.

A continuación, presentaremos un modelo para el problema del banco. Como se dijo anteriormente, el objetivo del banco es maximizar el beneficio que obtiene gracias a las comisiones que le pone a cada activo. Sin embargo, si no restringimos de ninguna forma las comisiones que el banco puede poner a cada activo, está claro que el problema no tendrá un óptimo finito ya que, dada una combinación de comisiones, el banco podría subirlas incrementando su beneficio tanto como desee. Esto es algo que no se da en la práctica, ya que las comisiones que puede fijar un banco están reguladas por diversos factores, ya sean legislativos o simplemente de competencia con otros bancos. En este trabajo optaremos por poner un máximo a la suma de las comisiones de todos los activos (que será 0.3) y un máximo individual a cada una de las comisiones (que será 0.1). Evidentemente, estos valores se podrían cambiar sin que afectasen al modelado que se expone en este trabajo.<sup>2</sup>

Así, dada una cartera de inversión  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ , el problema del banco viene dado por

$$\underset{\mathbf{P}}{\text{maximizar}} \quad \sum_{j=1}^m P_j x_j \quad (\text{PBank})$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^m P_j \leq 0.3 \quad (3.9)$$

$$0 \leq P_j \leq 0.1, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.10)$$

<sup>2</sup>Conviene recordar que el objetivo de este trabajo es, fundamentalmente, utilizar técnicas matemáticas sofisticadas para resolver problemas binivel fruto de la interacción entre inversores y bancos y no tanto dar un reflejo 100% real de lo que ocurre en la práctica. Esto también se aplica a cómo construimos los escenarios futuros, ya que como se dijo anteriormente, se podrían haber utilizado series de tiempo para obtenerlos.

donde las variables del problema son las comisiones  $P_j$  con  $j \in \{1, \dots, m\}$  y los  $x_j$  con  $j \in \{1, \dots, m\}$  son los parámetros que representan la cartera de inversión fijada por el inversor.

### 3.3. Banco líder e inversor seguidor

Hasta ahora, hemos visto por separado el problema del banco y el problema del inversor. Sin embargo, dichos problemas están íntimamente relacionados, tal y como se puede deducir del hecho de que en el problema del banco aparece la cartera elegida por el inversor y en el problema del inversor aparecen las comisiones puestas por el banco.

En esta sección, consideraremos el problema en el cual el banco es el líder y el inversor es el seguidor. Es decir, primero el banco decide qué comisiones poner a los diferentes activos y, en función de esa elección, el inversor decide a posteriori su cartera de inversión óptima.

Matemáticamente, esto se puede modelar como un problema binivel, tal y como vimos en la sección 3.1. El problema resultante es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \underset{P, \eta, d, y, x}{\text{maximizar}} && \sum_{j=1}^m P_j x_j && \text{(BoT)} \\
 & \text{sujeto a} && \sum_{j=1}^m P_j \leq 0.3 \\
 & \mathbf{x} \in \arg \min_{\eta, d, y, x} && -\eta + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T d_t p_t \\
 & \text{sujeto a} && d_t \geq \eta - y_t, && t = 1, \dots, T \\
 & && y_t = \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j) x_j, && t = 1, \dots, T \\
 & && \sum_{t=1}^T y_t p_t \geq E_0 \\
 & && \sum_{j=1}^m x_j = 1 \\
 & && \eta \in \mathbb{R} \\
 & && y_t \in \mathbb{R}, && t = 1, \dots, T \\
 & && d_t \geq 0, && t = 1, \dots, T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_j &\geq 0, & j = 1, \dots, m \\ 0 \leq P_j &\leq 0.1, & j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

el cual denotaremos por **BoT** (*Bank on Top*).

En primer lugar debemos resaltar que el problema del inversor **PInv** es un problema lineal. No obstante, es importante destacar que para unas ciertas comisiones  $P_j$  fijadas, el problema del inversor puede tener múltiples óptimos. De la forma que está modelado el problema, estamos asumiendo implícitamente que el banco puede garantizarse que el inversor, en caso de tener múltiples óptimos, elegirá el óptimo más beneficioso para el banco. Aunque en la literatura es frecuente observar enfoques más “conservadores” tipo “maxmin” (maximizar lo que se obtiene en el peor de los casos), en este contexto parece razonable suponer que el banco va a poder ofrecer algún pequeño incentivo al inversor para que el óptimo deseado por el banco pase a ser el único óptimo del inversor.

De este modo, ya tenemos el problema binivel planteado y el siguiente paso sería resolverlo. Para ello, utilizaremos técnicas de dualidad con el fin de convertir el anterior problema binivel en un problema de un solo nivel, ya que una resolución analítica directa como la mostrada en el ejemplo 3.1.1 no es posible.

Como dijimos anteriormente, el problema del inversor **PInv** es un problema lineal. Por tanto, podemos aplicar el corolario 1.4.2. Para ello, debemos construir el problema dual de **PInv** que, siguiendo las indicaciones de las tablas 1.1 y 1.2, obtenemos que es el siguiente<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} &\underset{\gamma, \delta, \mu, \beta}{\text{maximizar}} && -E_0\mu - \beta && \text{(PInvDual)} \\ \text{sujeto a} &&& -\sum_{t=1}^T (r_{jt} - P_j)\delta_t - \beta \leq 0, && j = 1, \dots, m \\ &&& -\gamma_t \leq \frac{p_t}{\alpha} && t = 1, \dots, T \\ &&& -\gamma_t + \delta_t - p_t\mu = 0 && t = 1, \dots, T \\ &&& -\sum_{t=1}^T \gamma_t = -1 \\ &&& \gamma_t \leq 0, && t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

<sup>3</sup>En el apéndice A se muestra detalladamente la construcción de dicho problema dual.

$$\begin{aligned}\delta_t &\in \mathbb{R}, & t = 1, \dots, T \\ \mu &\leq 0 \\ \beta &\in \mathbb{R},\end{aligned}$$

donde las variables son  $\gamma$  (asociada al conjunto de restricciones primales (3.1)),  $\delta$  (asociada al conjunto de restricciones primales (3.2)),  $\mu$  (asociada a la restricción primal (3.3)) y  $\beta$  (asociada a la restricción primal (3.4)).

Ahora, aplicando el corolario 1.4.2 se tiene que resolver el problema **PInv** es equivalente a resolver el problema de encontrar una solución factible del primal y del dual de forma que el valor de las funciones objetivo del primal y dual coincidan. Por tanto, podemos reformular el problema binivel **BoT** como un problema de un solo nivel de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}&\underset{\mathbf{P}, \eta, \mathbf{y}, \mathbf{d}, \mathbf{x}, \gamma, \delta, \mu, \beta}{\text{maximizar}} && \sum_{j=1}^m P_j x_j && (\text{BoT}') \\ &\text{sujeto a} && \sum_{j=1}^m P_j \leq 0.3 \\ &&& -\eta + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T d_t p_t = -E_0 \mu - \beta \\ &&& d_t \geq \eta - y_t, && t = 1, \dots, T \\ &&& y_t = \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j) x_j, && t = 1, \dots, T \\ &&& \sum_{t=1}^T y_t p_t \geq E_0 \\ &&& \sum_{j=1}^m x_j = 1 \\ &&& -\sum_{t=1}^T (r_{jt} - P_j) \delta_t - \beta \leq 0, && j = 1, \dots, m \\ &&& -\gamma_t \leq \frac{p_t}{\alpha} && t = 1, \dots, T \\ &&& -\gamma_t + \delta_t - p_t \mu = 0 && t = 1, \dots, T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^T \gamma_t &= -1 \\
\gamma_t &\leq 0, & t = 1, \dots, T \\
\delta_t &\in \mathbb{R}, & t = 1, \dots, T \\
\mu &\leq 0 \\
\beta &\in \mathbb{R} \\
\eta &\in \mathbb{R} \\
y_t &\in \mathbb{R}, & t = 1, \dots, T \\
d_t &\geq 0, & t = 1, \dots, T \\
x_j &\geq 0, & j = 1, \dots, m \\
0 \leq P_j &\leq 0.1, & j = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

De este modo, ya hemos modelado nuestra situación inicial en la que el banco es el líder y el inversor es el seguidor mediante un problema de programación matemática de un solo nivel. En particular, estamos ante un problema de programación matemática no lineal, lo cual dificulta su resolución de forma global. No obstante, en el siguiente capítulo se comentará la técnica utilizada para resolverlo, así como los resultados obtenidos.

### 3.3.1. Caso con varios inversores

Hasta ahora, hemos visto como modelar la situación en la que tenemos un banco líder y un inversor seguidor. Sin embargo, también podemos considerar una situación en la cual haya varios inversores. Además, cada uno de ellos puede tener diferentes perfiles de riesgo, es decir, diferentes valores de  $\alpha$ . Así, modelaremos ahora una situación con  $n$  inversores, cada uno de ellos con un perfil de riesgo dado por  $\alpha_i, i \in \{1, \dots, n\}$ . De este modo, valores altos de  $\alpha$  indicarán poca aversión al riesgo, mientras que valores pequeños de  $\alpha$  indicarán una alta aversión al riesgo. En efecto, recordemos que el CVaR mide cómo de grandes son las pérdidas en los  $q$  peores escenarios tales que su probabilidad suma  $\alpha$ . Por tanto, un  $\alpha$  cercano a 1 indica que el inversor se centra en mirar las pérdidas en casi todos los escenarios (no le importa el riesgo) mientras que un valor cercano a 0 indica que el inversor se centra en mirar solamente el peor escenario (una clara aversión al riesgo).

Es importante destacar que, un inversor con un perfil de riesgo dado por un cierto  $\alpha$ , puede verse como el conjunto de todos los inversores con ese perfil de riesgo, es decir, como una masa de inversores que se comportan de la misma forma (pues todos resuelven el mismo problema de optimización). Así, podemos entender una situación con  $n$  inversores como una situación con un número elevado de inversores entre los cuales hay  $n$  perfiles diferentes de riesgo ( $n$  valores de  $\alpha$ ).

De nuevo, consideramos por una parte el problema del banco y por otra el problema del inversor. La principal diferencia con el caso anterior es que ahora tendremos  $n$  problemas de inversores, uno para cada tipo de inversor. Así, los modelos resultantes en este caso son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 & \underset{\eta_i, y_i, d_i, x_i}{\text{minimizar}} && -\eta_i + \frac{1}{\alpha_i} \sum_{t=1}^T d_{it} p_t && \text{(PInv}_i\text{)} \\
 & \text{sujeto a} && d_{it} \geq \eta_i - y_{it}, && t = 1, \dots, n \\
 & && y_{it} = \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j) x_{ij}, && t = 1, \dots, T \\
 & && \sum_{t=1}^T y_{it} p_t \geq E_{0,i} \\
 & && \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \\
 & && \eta_i \in \mathbb{R} \\
 & && y_{it} \in \mathbb{R}, && t = 1, \dots, T \\
 & && d_{it} \geq 0, && t = 1, \dots, T \\
 & && x_{ij} \geq 0, && j = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mathbf{P}}{\text{maximizar}} && \sum_{j=1}^m \left( P_j \sum_{i=1}^n x_{ij} \right) && \text{(PBankMult)} \\
 & \text{sujeto a} && \sum_{j=1}^m P_j \leq 0.3
 \end{aligned}$$

$$0 \leq P_j \leq 0.1, \quad j = 1, \dots, m$$

siendo  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$  la cartera de inversión del inversor  $i$ , es decir,  $x_{ij}$  es lo que el inversor  $i$  invierte en el activo  $j$ . Además, denotamos por  $E_{0,i}$  el retorno esperado que se quiere garantizar el inversor  $i$ .

De este modo, tendremos  $n$  problemas de la forma **PInv<sub>i</sub>**, uno para cada inversor, y el problema del banco **PBankMult**.

Así, esta situación se modelaría mediante el siguiente problema binivel:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{P}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{x}}{\text{maximizar}} && \sum_{j=1}^m \left( P_j \sum_{i=1}^n x_{ij} \right) && \text{(BoTMult)} \\ & \text{sujeto a} && \sum_{j=1}^m P_j \leq 0.3 \\ & && \mathbf{x}_i \in \arg \min_{\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{d}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i} \{ \text{PInv}_i \}, \quad i = 1, \dots, n \\ & && 0 \leq P_j \leq 0.1, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso, tenemos  $n$  subproblemas dentro del problema original. Procederemos de forma análoga al caso con un inversor y, utilizando técnicas de dualidad para programación lineal en los  $n$  subproblemas, obtenemos el siguiente problema de un único nivel:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{P}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{y}, \mathbf{d}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\beta}}{\text{maximizar}} && \sum_{j=1}^m \left( P_j \sum_{i=1}^n x_{ij} \right) && \text{(BoTMult')} \\ & \text{sujeto a} && \sum_{j=1}^m P_j \leq 0.3 \\ & && -\eta_i + \frac{1}{\alpha_i} \sum_{t=1}^T d_{it} p_t = -E_{0,i} \mu_i - \beta_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & && d_{it} \geq \eta_i - y_{it}, \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \\ & && y_{it} = \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j) x_{ij}, \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^T y_{it} p_t &\geq E_{0,i} && i = 1, \dots, n \\
\sum_{j=1}^m x_{ij} &= 1 && i = 1, \dots, n \\
-\sum_{t=1}^T (r_{jt} - P_j) \delta_{it} - \beta_i &\leq 0, && j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n \\
-\gamma_{it} &\leq \frac{p_t}{\alpha_i} && t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \\
-\gamma_{it} + \delta_{it} - p_t \mu_i &= 0 && t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \\
\sum_{t=1}^T \gamma_{it} &= -1, && i = 1, \dots, n \\
\gamma_{it} &\leq 0, && t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \\
\delta_{it} &\in \mathbb{R}, && t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \\
\mu_i &\leq 0 && i = 1, \dots, n \\
\beta_i &\in \mathbb{R} && i = 1, \dots, n \\
\eta_i &\in \mathbb{R} && i = 1, \dots, n \\
y_{it} &\in \mathbb{R}, && t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \\
d_{it} &\geq 0, && t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \\
x_{ij} &\geq 0, && j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n \\
0 &\leq P_j \leq 0.1, && j = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

De esta manera, hemos conseguido modelar el problema en el cual hay un banco que decide primero qué comisiones poner a cada activo y, posteriormente,  $n$  inversores con diferentes perfiles de riesgo deciden su cartera, conocedores de las comisiones que ha fijado el banco. Podría parecer que resolver el problema [BoTMult'](#) es equivalente a resolver  $n$  problemas [BoT'](#). Sin embargo, esto no es cierto, pues en el caso del problema [BoTMult'](#), el banco tiene que fijar unas comisiones para cada activo, comunes a todos los inversores, mientras que si resolviésemos  $n$  problemas [BoT'](#) el banco tendría libertad para fijar precios diferentes adaptados a cada inversor. En cualquier caso, en el siguiente capítulo se podrá comprobar esto en vista de los resultados obtenidos.

En esta sección se ha estudiado el caso en el que hay varios inversores (seguidores). Del mismo modo, también podría plantearse el problema que surge cuando tenemos varios bancos. Sin embargo, plantearse un problema con varios líderes daría lugar a un problema multiobjetivo, el cual se escapa del objetivo de este memoria.

### 3.4. Inversor líder y banco seguidor

Consideremos ahora la situación inversa a la planteada anteriormente. Es decir, consideremos un inversor y un banco de forma que primero el inversor decide en que carteras invertir y, posteriormente, el banco decide qué comisiones poner. Así, ahora el inversor es el líder y el banco es el seguidor.

Considerando los problemas [PBank](#) y [PInv](#), el problema binivel que modela esta situación es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mathbf{P}, \eta, \mathbf{y}, \mathbf{d}, \mathbf{x}}{\text{minimizar}} && -\eta + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T d_t p_t && \text{(IoT)} \\
 & \text{sujeto a} && d_t \geq \eta - y_t, && t = 1, \dots, T \\
 & && y_t = \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j) x_j, && t = 1, \dots, T \\
 & && \sum_{t=1}^T y_t p_t \geq E_0 \\
 & && \sum_{j=1}^m x_j = 1 \\
 & && \mathbf{P} \in \arg \max_{\mathbf{P}} \sum_{j=1}^m P_j x_j \\
 & && \text{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^m P_j \leq 0.3 \\
 & && 0 \leq P_j \leq 0.1, \quad j = 1, \dots, m \\
 & && \eta \in \mathbb{R} \\
 & && y_t \in \mathbb{R}, && t = 1, \dots, T \\
 & && d_t \geq 0, && t = 1, \dots, T
 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m$$

Denotaremos dicho problema por **IoT** (*Investor on Top*).

Al igual que comentamos en el caso del problema **BoT**, el subproblema de optimización (en este caso es el del banco) puede tener múltiples óptimos. Sin embargo, en este caso al inversor le va a resultar indiferente qué óptimo elija el banco, ya que como el banco gana lo mismo con todos los óptimos, el inversor también obtiene el mismo beneficio (tanto en CVaR como en retorno esperado) independientemente del óptimo que elija el banco. Esto se debe a que lo que gana el banco es a costa de lo que paga el inversor y viceversa.

Nuevamente, el subproblema (en este caso es **PBank**) es lineal, por lo que podemos aplicar los resultados de dualidad sobre el subproblema **PBank**. Obtenemos el siguiente problema dual:

$$\begin{aligned} \underset{v, u}{\text{minimizar}} \quad & -0.3v - \sum_{j=1}^m 0.1u_j & (\text{PBankDual}) \\ \text{sujeto a} \quad & v + u_j \leq -x_j, \quad j = 1, \dots, m \\ & v \leq 0 \\ & u_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Así, aplicando el corolario 1.4.2, obtenemos que el problema binivel **IoT** es equivalente al siguiente problema:

$$\begin{aligned} \underset{\eta, y, d, x, P, v, u}{\text{minimizar}} \quad & -\eta + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T d_t p_t & (\text{IoT}') \\ \text{sujeto a} \quad & d_t \geq \eta - y_t, & t = 1, \dots, T \\ & y_t = \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j)x_j, & t = 1, \dots, T \\ & \sum_{t=1}^T y_t p_t \geq E_0 \\ & \sum_{j=1}^m x_j = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m P_j x_j &= -0.3v - \sum_{j=1}^m 0.1u_j \\
\sum_{j=1}^m P_j &\leq 0.3 \\
v + u_j &\leq -x_j, & j = 1, \dots, m \\
v &\leq 0 \\
u_j &\leq 0, & j = 1, \dots, m \\
0 \leq P_j &\leq 0.1, & j = 1, \dots, m \\
\eta &\in \mathbb{R} \\
y_t &\in \mathbb{R}, & t = 1, \dots, T \\
d_t &\geq 0, & t = 1, \dots, T \\
x_j &\geq 0, & j = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

Así, hemos transformado nuestro problema binivel original en un problema de un solo nivel. De nuevo, estamos ante un problema de programación matemática no lineal.

Ahora, cabría plantearse una situación con varios seguidores, en este caso con varios bancos. Sin embargo, dicho modelo no aportaría nada nuevo, ya que al no haber diferentes “perfiles” para los bancos (en el caso de los inversores tenemos la aversión al riesgo dada por  $\alpha$ ), el hecho de incluir varios bancos no añade riqueza al modelo. Esto se debe a que, como los bancos son idénticos, reaccionarán de la misma forma a la elección del inversor y así el inversor puede invertir todo en un mismo banco, sin que invertir en diferentes bancos pueda darle un beneficio mayor.

Del mismo modo, al igual que se comentó en la sección anterior, un problema con varios inversores (líderes en este caso) daría lugar a un problema de optimización multiobjetivo, el cual no trataremos en esta memoria.

### 3.5. Modelo cooperativo

Para finalizar este capítulo, consideraremos la situación en la cual no hay líder ni seguidor, sino que el objetivo es maximizar el “bien común”. Con “bien común” nos referimos a maximizar el beneficio del banco y minimizar el riesgo (CVaR) del inversor. Por tanto, esta situación se

podrá modelar directamente como un problema de programación matemática de un solo nivel, ya que lo que se busca es la estrategia óptima de precios y elección de cartera que maximice el bien común. Nuevamente, podemos ver un inversor con un perfil de riesgo dado por  $\alpha$  como una masa de inversores con ese perfil de riesgo.

El objetivo de este modelo es buscar la frontera eficiente y comparar los resultados con los obtenidos para los modelos **BoT** e **IoT**.

Podemos modelar esta situación de la siguiente forma:

$$\underset{\eta, y, d, x, P}{\text{maximizar}} \quad \eta - \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T d_t p_t + \sum_{j=1}^m P_j x_j \quad (\text{SW})$$

$$\text{sujeto a} \quad d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.11)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j) x_j, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.12)$$

$$\sum_{t=1}^T y_t p_t \geq E_0 \quad (3.13)$$

$$\sum_{j=1}^m x_j = 1 \quad (3.14)$$

$$\sum_{j=1}^m P_j \leq 0.3 \quad (3.15)$$

$$\eta \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

$$y_t \in \mathbb{R}, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.17)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.18)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.19)$$

$$0 \leq P_j \leq 0.1, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.20)$$

Denotaremos este problema por **SW** (*social welfare*). Por una parte tenemos las restricciones (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.16), (3.17), (3.18) y (3.19) asociadas al problema del inversor y las restricciones (3.15) y (3.20) asociadas al problema del banco. Por otra parte, la función objetivo consiste en maximizar el beneficio del banco más el opuesto al CVaR.

La forma en la que resolveremos este problema es similar a la presentada en la sección 2.2, obteniendo una frontera eficiente. Para ello, lo que haremos será resolver el problema de

minimizar el CVaR del inversor, sujeto a que el beneficio del banco es mayor o igual que una cierta cantidad, que denotaremos  $B_0$ . De esta forma, haremos una malla uniforme sobre  $B_0$  y la resolución de los diferentes problemas nos proporcionará una frontera eficiente para el problema SW. Así, los problemas que resolveremos para obtener la frontera eficiente son de la siguiente forma:

$$\underset{\eta, y, d, x, P}{\text{minimizar}} \quad -\eta + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T d_t p_t \quad (\text{SW}') \quad (3.21)$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^m P_j x_j \geq B_0, \quad (3.22)$$

$$d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.23)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j) x_j, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.24)$$

$$\sum_{t=1}^T y_t p_t \geq E_0 \quad (3.25)$$

$$\sum_{j=1}^m x_j = 1 \quad (3.26)$$

$$\sum_{j=1}^m P_j \leq 0.3 \quad (3.27)$$

$$\eta \in \mathbb{R} \quad (3.28)$$

$$y_t \in \mathbb{R}, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.29)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.30)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.31)$$

$$0 \leq P_j \leq 0.1, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.32)$$

Aunque la extensión del modelo SW a situaciones con múltiples perfiles de inversores y múltiples bancos podría ser interesante y aportar nuevos resultados e interpretaciones económicas, dicha extensión va más allá del alcance de esta memoria.

Con los tres modelos planteados a lo largo de este capítulo se cubre un amplio abanico de casos que se puedan dar en la realidad. Una posible extensión de este trabajo sería plantear un juego no cooperativo entre el banco y el inversor y tratar de buscar posibles equilibrios

de Nash. En [Leyffer y Munson \(2010\)](#) puede verse una forma de abordar estos problemas. Un método habitual consiste en reescribirlos utilizando técnicas de dualidad y condiciones de optimalidad (en particular condiciones de Karush-Kuhn-Tucker) y posteriormente crear un algoritmo iterativo que converja eventualmente a un equilibrio de Nash.

Finalmente, comentar que un estudio similar a las situaciones planteadas en este capítulo, pero considerando que las comisiones que pone el banco son discretas y no continuas, puede verse en [Leal et al. \(2018\)](#). A pesar de que los problemas económicos subyacentes están muy relacionados, los problemas de programación matemática que surgen en ese caso son sustancialmente diferentes, así como las técnicas de resolución.





# Capítulo 4

## Resultados numéricos

En este capítulo se presentarán los resultados obtenidos al realizar diferentes ejecuciones de los modelos visto en el capítulo anterior, dando una interpretación de los mismos. En primer lugar, se mencionarán los principales detalles relativos a las ejecuciones realizadas.

### 4.1. Datos utilizados y método de resolución

La ejecuciones que se presentan en este capítulo han sido realizadas bajo una serie de directrices, que son las que explicaremos a continuación.

En primer lugar, los datos utilizados para generar los futuros escenarios son los datos de las principales empresas (se han escogido 30) del Dow Jones. Dichas empresas son las siguientes: AAPL, AXP, BA, CAT, CSCO, CVX, DIS, DWDP, GS, HD, IBM, INTC, JNJ, JPM, KO, MCD, MMM, MRK, MSFT, NKE, PFE, PG, TRV, UNH, UTX, V, VZ, WBA, WMT y XOM.<sup>1</sup> Además, se han considerado datos semanales, mirando cual es el valor de cada una de las empresas al cierre del mercado. El periodo de tiempo que se ha tenido en cuenta es desde el 15 de agosto de 2018 al 17 de marzo de 2019, dando lugar a un total de 30 semanas. Con dichos datos se han calculado los retornos de cada uno de los posibles escenarios futuros (equiprobables), tal y como se explicó en la definición 2.1.3. Para realizar este proceso, el autor de esta memoria ha realizado un script en Python (consultar, por ejemplo, [Rossum y Drake \(2011\)](#)). En la gráfica 4.1 se puede ver para cada activo su retorno esperado y su varianza.

---

<sup>1</sup>Para conocer el nombre y las características detalladas de cada empresa, basta buscar el código de la empresa en <https://es.finance.yahoo.com>.

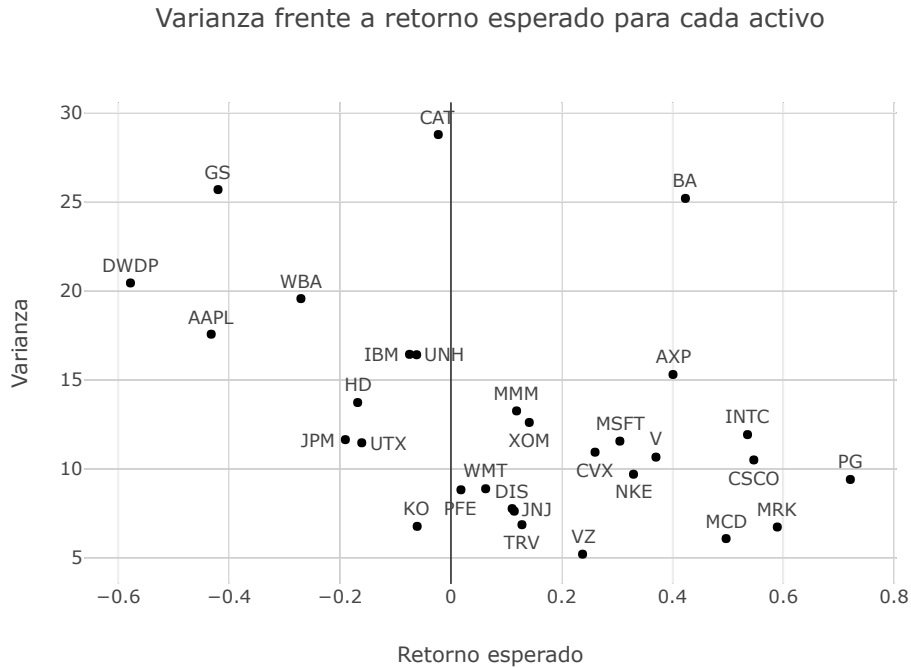


Figura 4.1: Retorno esperado y varianza para cada una de las empresas consideradas.

Por otra parte, los modelos se han implementado en AMPL (Fourer et al., 1990), por ser un lenguaje de programación matemática flexible y ampliamente usado. Además, para el modelado y la ejecución de los problemas en AMPL se ha hecho uso de las instalaciones de ITMATI (Instituto Tecnológico de Matemática Industrial), al cual el autor de esta memoria le reitera de nuevo su agradecimiento.

Finalmente, la principal herramienta utilizada para resolver dichos problemas es RAPOSa (*Reformulation Algorithm for Polynomial Optimization - Santiago*), un algoritmo de optimización para problemas de programación polinómica con convergencia a un óptimo global. Dicha herramienta está siendo desarrollada por el autor de esta memoria, junto a otros investigadores de la USC y el ITMATI, y puede encontrarse en <http://www.itmati.com/RAPOSa/index.html>. RAPOSa utiliza una técnica de ramificación y acotación que resuelve múltiples relajaciones lineales del problema original. Dicha técnica puede verse detalladamente en Sherali y Tunc-

bilek (1991) y en González-Rodríguez (2017) (trabajo de Fin de Grado realizado por el autor de esta memoria).

La otra herramienta que se ha utilizado para resolver estos problemas ha sido BARON (Tawarmalani y Sahinidis, 2005), una de los solvers más populares actualmente para resolver problemas de programación matemática no lineales con optimalidad global.

## 4.2. Modelo BoT

En esta sección se presentarán los resultados relativos al modelo *Bank on Top* (BoT). Para resolverlo, se ha modelado el problema equivalente de un solo nivel BoT' cuya formulación en AMPL se puede ver en el apéndice B.2.

Recordemos que en dicho problema hay una restricción que nos indica que el valor esperado de la cartera del inversor tiene que ser mayor o igual que una cierta cantidad  $E_0$ . Así, lo que se ha hecho en esta memoria es una malla sobre el valor de  $E_0$ , obteniendo diferentes valores de las variables del problema para cada uno de los valores de  $E_0$ . Dicha malla se ha hecho de forma uniforme en el intervalo  $[-0.1, 0.9]$  con una longitud de 40 elementos.

Además, se han considerado inversores con diferentes perfiles de riesgo, es decir, con diferentes valores de  $\alpha \in \{0.05, 0.25, 0.50, 0.99\}$ , siendo el inversor con  $\alpha = 0.05$  el más averso al riesgo.

Veamos ahora los resultados obtenidos al ejecutar el modelo BoT con los datos del Dow Jones mencionados anteriormente para inversores con diferentes perfiles de riesgo.

En primer lugar, podemos observar en la gráfica 4.2 los valores del CVaR de cada inversor en el eje  $y$ , frente a cada valor de  $E_0$  en el eje  $x$ . Es importante destacar que en esta gráfica los CVaR de los inversores no son comparables entre ellos, pues cada uno de ellos se calcula con un  $\alpha$  diferente. Sin embargo, sí podemos ver como evolucionan individualmente, viendo que, hasta el punto en el que  $E_0$  es aproximadamente 0.6, el valor del CVaR va creciendo y posteriormente decrece. El crecimiento se debe a que según va aumentando el valor de  $E_0$ , el inversor se quiere garantizar un retorno esperado mayor y para ello necesita asumir más riesgo, incrementando el valor de su CVaR. Sin embargo, lo que ocurre al final es que el banco tiene que relajar sus comisiones para que el problema sea factible, de ahí que el CVaR disminuya en el último tramo. De hecho, se comentó anteriormente que la malla de  $E_0$  iba de  $-0.1$  a  $0.9$  y sin embargo la gráfica se corta aproximadamente en  $E_0 = 0.7$ . Esto se debe a que a partir de

ese valor los problemas son infactibles, es decir, el inversor no puede garantizarse un retorno esperado tan elevado, incluso aunque el banco no ponga comisión alguna. Lo anterior se puede ver si analizamos la gráfica 4.1, ya que el activo de mayor retorno esperado es PG, con un retorno esperado aproximado de 0.7, por lo que es imposible garantizarse un retorno esperado mayor que ese. También es importante destacar que el CVaR del inversor con  $\alpha = 0.99$  es prácticamente constante. Esto se debe a que a dicho inversor no le preocupa el riesgo, es más, su CVaR se convierte prácticamente en su retorno esperado cambiado de signo. Por tanto el inversor con  $\alpha = 0.99$  al minimizar su CVaR está realmente maximizando su retorno esperado, de ahí que el valor que toma el CVaR esté entre  $-0.6$  y  $-0.7$ , lo cual es equivalente a retornos esperados de 0.6 y 0.7, que vimos que era lo máximo que podía garantizarse un inversor (0.6 cuando el banco pone al máximo las comisiones y 0.7 cuando tiene que reducir las comisiones).

Por otra parte, en las gráficas 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 se puede ver una comparación del comportamiento de los diferentes inversores pero fijando un  $\alpha$  concreto para el cálculo del CVaR, para que así sean comparables. De esta forma, lo que se observa es que si calculamos los valores de los CVaR para un  $\alpha$  concreto, justamente el inversor con ese valor de  $\alpha$  dominará en CVaR al resto, es decir, su  $\text{CVaR}_\alpha$  será menor que el del resto. Así, considerando por ejemplo  $\alpha = 0.25$ , se puede ver que el menor CVaR de la gráfica 4.4 es el del inversor con  $\alpha = 0.25$ . Esto es lo que cabría esperar, pues en el problema del inversor el objetivo es minimizar el CVaR correspondiente. Es importante destacar también que en todas las gráficas 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 las líneas se solapan a partir de  $E_0 = 0.6$ . Esto se debe al hecho comentado anteriormente: a partir de ahí la única forma de que el problema sea factible es invertir todo el dinero en el activo de mayor retorno esperado (empresa PG), por lo que la configuración de las carteras es igual para todos los inversores.

Como comentamos anteriormente, el banco necesita reducir sus comisiones a partir del valor  $E_0 = 0.6$  ya que si no el problema no sería factible. Así, y siempre redondeando ligeramente los valores, en el punto  $E_0 = 0.6$  el inversor invierte todo en el activo de la empresa PG (con retorno esperado 0.7) y el banco fija la máxima comisión posible (0.1) en ese activo. Por tanto, el retorno esperado del inversor es  $0.7 - 0.1 = 0.6$ . Sin embargo, a partir de ahí, por ejemplo en  $E_0 = 0.65$ , la única forma de que el retorno esperado de la cartera del inversor sea 0.65, es que el inversor invierta todo en el activo de la empresa PG, pero que a su vez el banco solamente le cobre una comisión de 0.05. Esto ocurre hasta el punto  $E_0 = 0.7$ , a partir del cual nuestro problema deja de ser factible, tal y como explicamos anteriormente.

Este comportamiento se puede ver claramente en la gráfica 4.7, que representa el beneficio del banco. Además, en dicha gráfica se pueden ver otros detalles interesantes. El primero de ellos es que al inversor con  $\alpha = 0.99$  el banco siempre (hasta que tiene aflojar las comisiones) le gana el máximo posible: 0.1. Esto se debe a que a dicho inversor no le preocupa el riesgo y maximizar su CVaR es equivalente a maximizar su retorno esperado, por lo que invierte todo en el activo de mayor retorno esperado, la empresa PG. De este modo, el banco puede fijar una comisión de 0.1 en dicho activo y ganar así lo máximo. Esto se aprecia en la gráfica 4.9, donde se ve que el inversor con  $\alpha = 0.99$  invierte solamente en un activo. Un segundo detalle interesante en la gráfica 4.7 es que a los inversores a los que el banco les gana más dinero es a los que tienen valores de  $\alpha$  más extremos. Esto se debe a que dichos inversores son justamente los que menos diversifican su cartera (trivial en el caso del inversor con  $\alpha = 0.99$ ), por lo que al banco le resulta más fácil ganarles más dinero, ya que recordemos que el banco solo puede cobrar un máximo de 0.3 en total. De nuevo, esta menor diversificación se aprecia en la gráfica 4.9. Del mismo modo, en dicha gráfica se puede ver como el número de activos es los que invierten los inversores va decreciendo según aumenta el valor de  $E_0$ , lo cual es lógico, ya que para garantizarse un retorno esperado más grande tienen que restringirse a activos con retornos esperados elevados y no pueden diversificar tanto su cartera.

Finalmente, en la gráfica 4.8 se representa el retorno esperado obtenido por cada inversor en función del valor de  $E_0$ . Lo que se observa aquí es que la restricción de que el retorno esperado de la cartera sea mayor que un cierto valor  $E_0$  se satura a partir de un cierto punto, diferente para cada inversor. Así, cuanto mayor sea la aversión al riesgo, antes se saturará dicha restricción, pues el inversor más averso al riesgo obtiene retornos esperados menores.

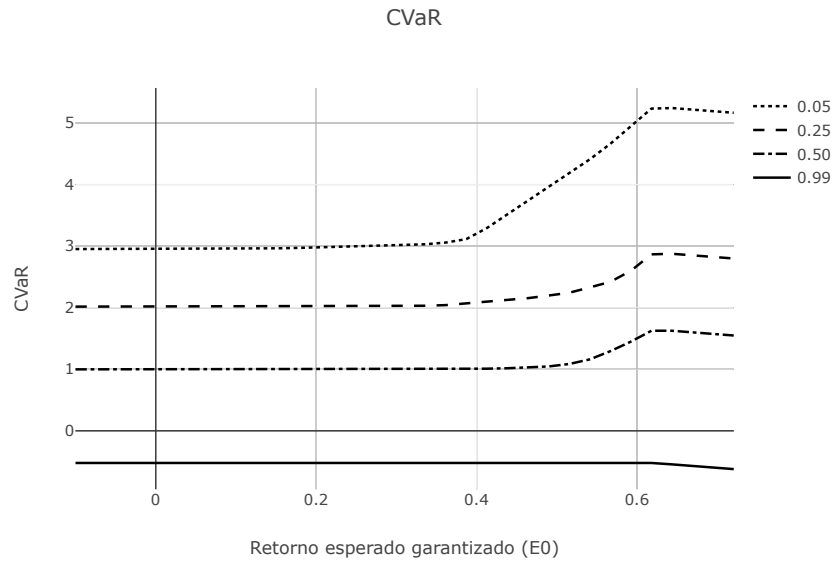


Figura 4.2: CVaR correspondiente de cada inversor para el modelo BoT con un solo inversor.

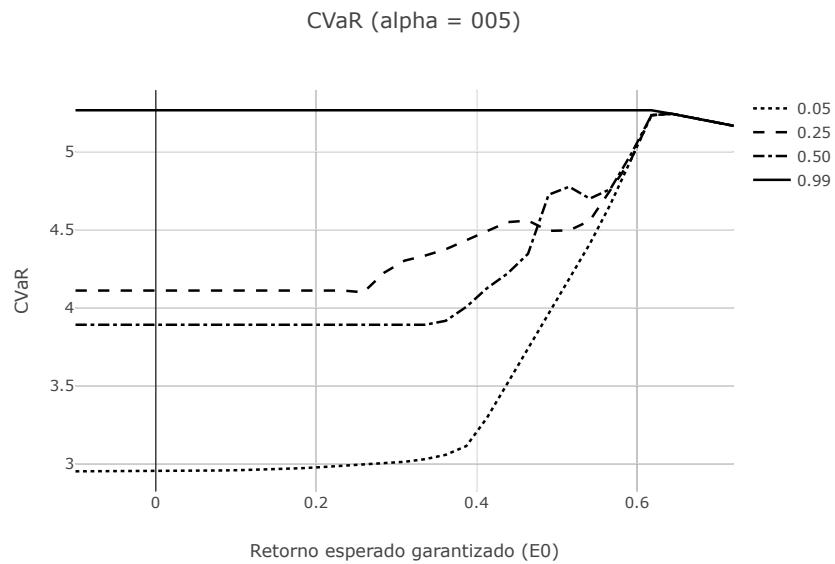


Figura 4.3:  $CVaR_{0.05}$  de cada inversor para el modelo BoT con un solo inversor.

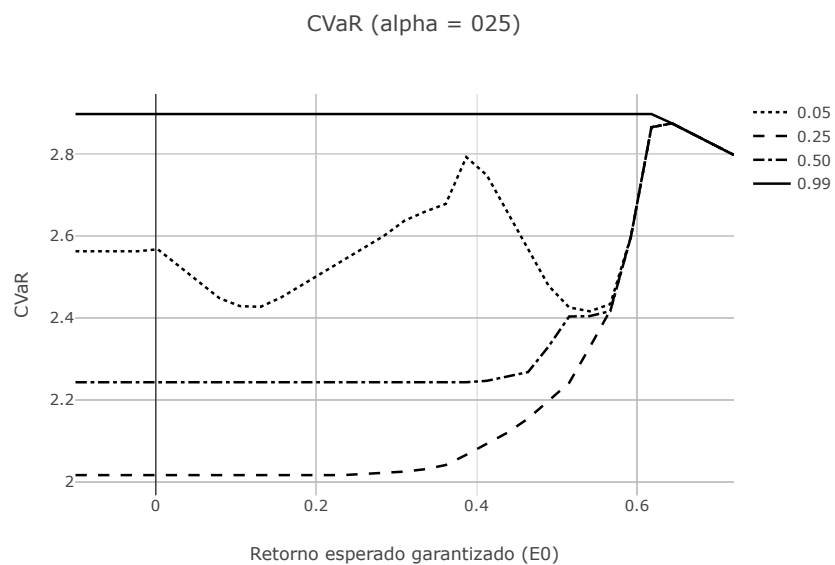


Figura 4.4:  $CVaR_{0.25}$  de cada inversor para el modelo BoT con un solo inversor.

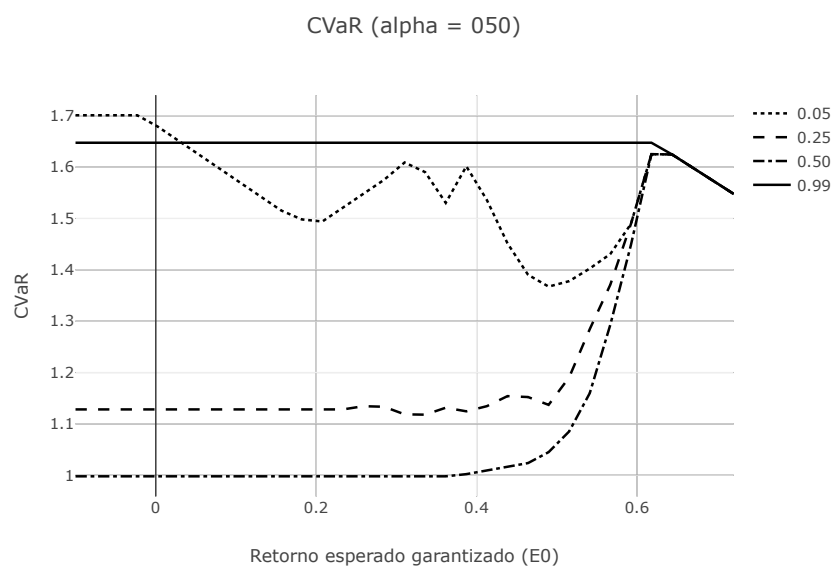


Figura 4.5:  $CVaR_{0.50}$  de cada inversor para el modelo BoT con un solo inversor.

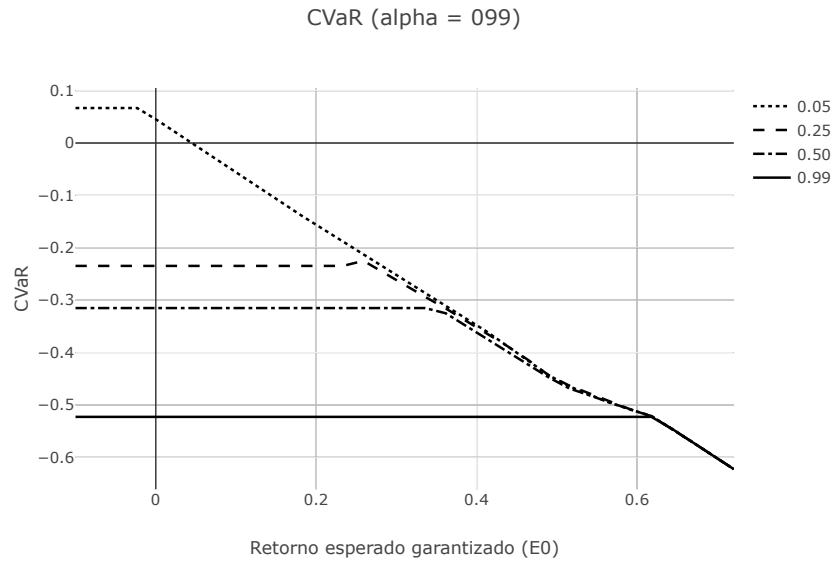


Figura 4.6:  $CVaR_{0.99}$  de cada inversor para el modelo BoT con un solo inversor.

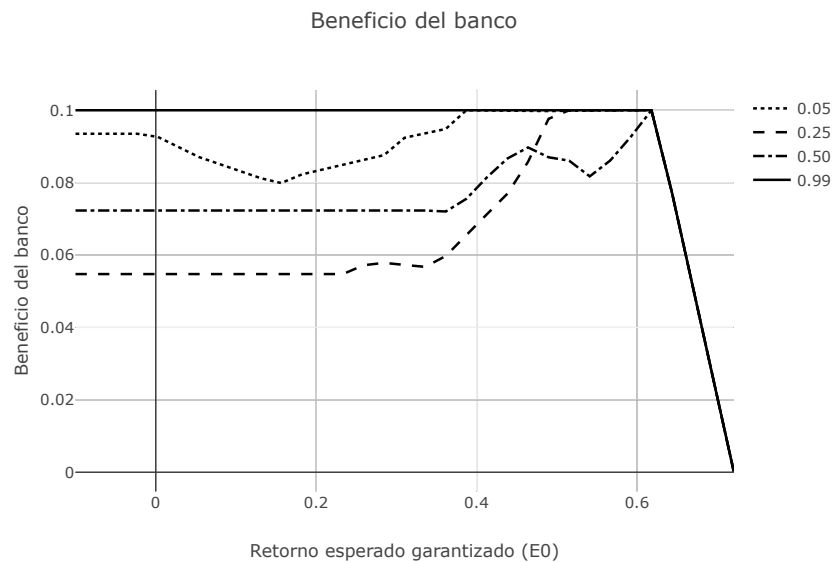


Figura 4.7: Beneficio del banco para el modelo BoT con un solo inversor.



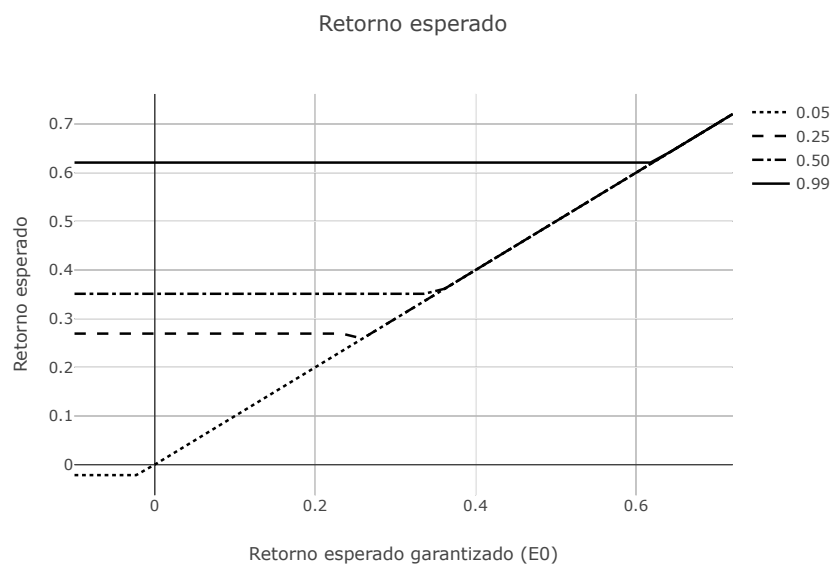


Figura 4.8: Retorno esperado de cada inversor para el modelo BoT con un solo inversor.

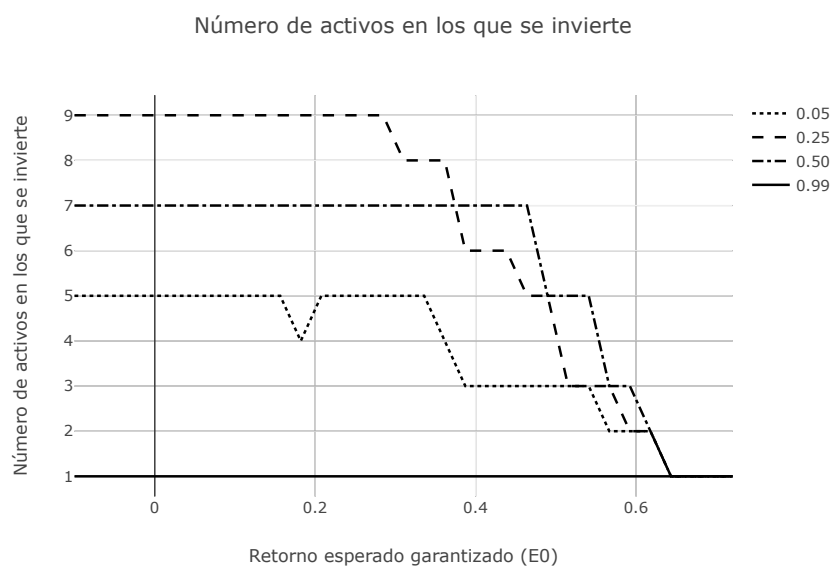


Figura 4.9: Número de activos en los que invierte cada inversor para el modelo BoT con un solo inversor.

### 4.2.1. Modelo BoT con varios inversores

En esta subsección analizaremos los resultados obtenidos para el modelo BoT con más de un inversor. Para resolver dicho problema, se ha modelado el problema de un solo nivel `BoTMult'` en AMPL, tal y como se puede ver en el apéndice B.2. Las gráficas que se presentarán en esta subsección son similares a las vistas anteriormente, con una malla sobre  $E_0$  y con diferentes perfiles de riesgo, aunque ahora incluyendo a todos los inversores en el mismo modelo y no resolviendo un problema independiente para cada inversor.

En este caso, se han considerados 3 inversores, con perfiles de riesgo  $\alpha \in \{0.05, 0.50, 0.99\}$ . El principal motivo de no incluir los 4 tipos de inversores analizados anteriormente es que, al considerar todos los inversores bajo el mismo modelo, la complejidad de resolución aumenta. De hecho, los problemas relativos al modelo BoT con varios inversores no se llegaron a resolver completamente en una hora, aunque la precisión de las soluciones es lo suficientemente buena como para poder interpretar los resultados.

Las gráficas relativas a los resultados obtenidos en este caso se incluyen en el apéndice C.1 (gráficas C.1, C.2, C.3, C.4, C.5, C.6 y C.7). Se puede ver que el comportamiento cualitativo es igual al caso de considerar varios modelos con los inversores separados, por lo que no precisan de más comentarios. El único detalle es que se observan algunas pequeñas irregularidades, pero esto se debe a que, como comentamos anteriormente, los problemas no se han resuelto con una tolerancia tan pequeña como en el caso anterior, debido a la dificultad de los mismos.

Lo que es realmente interesante es comparar ambos casos y ver si a los inversores les compensa interactuar de alguna forma o no. La intuición nos dice que el modelo en el que se consideran varios inversores a la vez debería ser más beneficioso para los inversores y menos para el banco, ya que en este modelo el banco tiene que fijar unas comisiones comunes a todos los inversores, mientras que en el caso de varios modelos individuales, el banco puede fijar diferentes comisiones a los inversores.

Así, en las gráficas 4.10, 4.11 y 4.12 se puede ver el CVaR obtenido por cada uno de los inversores en el modelo con un único inversor y en el modelo con los inversores juntos. A la vista de dichas gráficas se concluye que cuando los inversores están juntos, su CVaR es menor, tal y como cabría esperar. Además se puede ver que a partir de un cierto  $E_0$ , los valores del CVaR coinciden en ambos modelos ya que para garantizarse un  $E_0$  tan grande solamente pueden realizar una inversión concreta, es decir, el valor de  $\alpha$  deja de influir en su elección. De

nuevo se ve que las líneas correspondientes al modelo con varios inversores presentan algunos pequeños picos debido a los problemas de precisión de la solución.

Por otra parte, en las gráficas 4.13, 4.14 y 4.15 se representa el beneficio del banco en uno y otro modelo para cada inversor, respectivamente. En este caso, se puede ver que el modelo con varios inversores es peor para el banco, pues los beneficios que obtiene de cada inversor son menores, tal y como cabría esperar. De hecho, al inversor con  $\alpha = 0.99$  en el modelo con un solo inversor siempre le gana 0.1 (hasta que el  $E_0$  es muy grande) ya que le fija la comisión al máximo en el único activo en el que invierte. Sin embargo, en el modelo con varios inversores, al banco no le compensa poner la comisión al máximo en dicho activo, pues dejaría de ganarle dinero a los otros dos inversores.

Algo destacable de ambos modelos es que la evolución del beneficio del banco no es creciente o decreciente durante todo el recorrido, sino que presenta altibajos. Esto se debe a que, al fin y al cabo, para que el banco gane más dinero lo que necesita es que el inversor no diversifique mucho su cartera. Recordemos que el banco podía fijar en total una comisión de 0.3, por lo que solamente ganará el máximo 0.1 cuando el inversor tenga una cartera con 3 o menos activos. Así, la evolución del beneficio del banco está sujeta a la diversificación del inversor, esto es, no solo al número de activos en los que invierte, sino también cómo distribuye su dinero entre los diferentes activos.

En el apéndice C.1 se incluyen las gráficas relativas a la comparación entre los dos modelos del retorno esperado (gráficas C.8, C.9 y C.10) y el número de activos en los que invierte (gráficas C.11, C.12 y C.13) cada inversor. Respecto al número de activos en los que invierte cada inversor, se puede ver que el comportamiento es similar en cada modelo. Por otra parte, respecto al retorno esperado se ve que de nuevo el modelo con los inversores juntos es mejor (en términos de retorno esperado) que el modelo con un solo inversor. Sin embargo, a pesar de que esto parezca lógico, no tendría por qué ser necesariamente así, ya que la función objetivo del problema del inversor es minimizar el CVaR, no maximizar el retorno esperado. No obstante, cabe esperar este comportamiento, pues al estar el banco más restringido a la hora de fijar las comisiones, el inversor debería de tener un retorno esperado mayor.

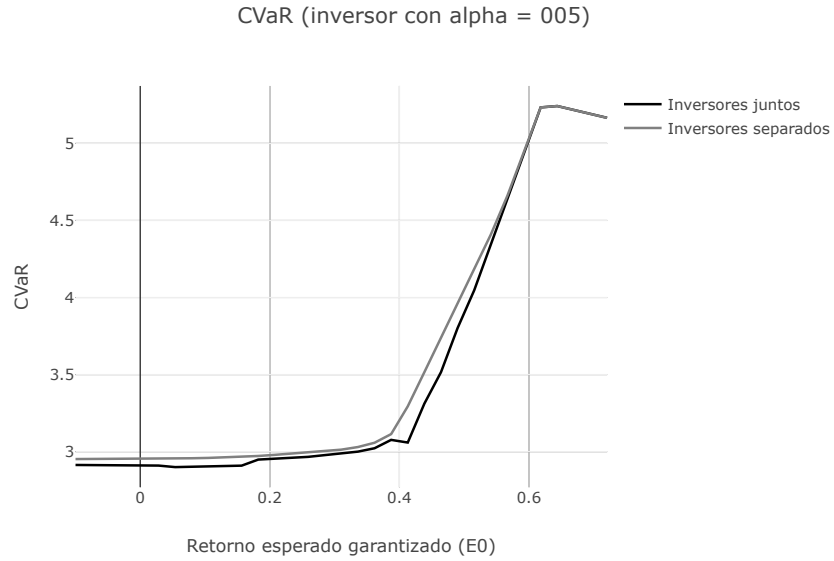


Figura 4.10: Comparación del CVaR del inversor con  $\alpha = 0.05$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.

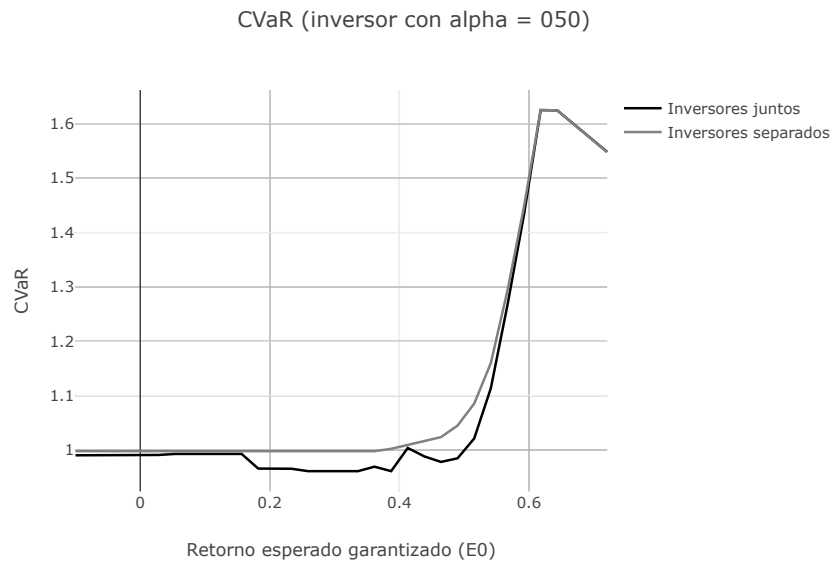


Figura 4.11: Comparación del CVaR del inversor con  $\alpha = 0.50$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.

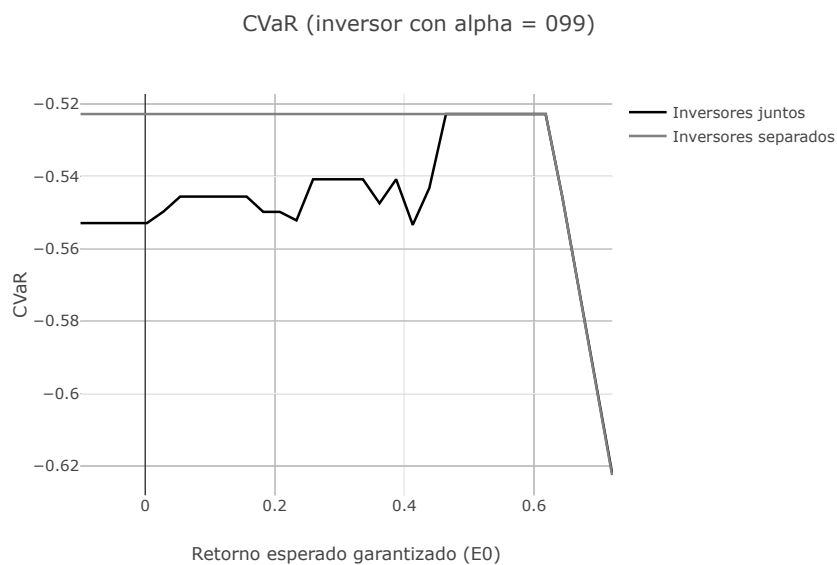


Figura 4.12: Comparación del CVaR del inversor con  $\alpha = 0.99$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.

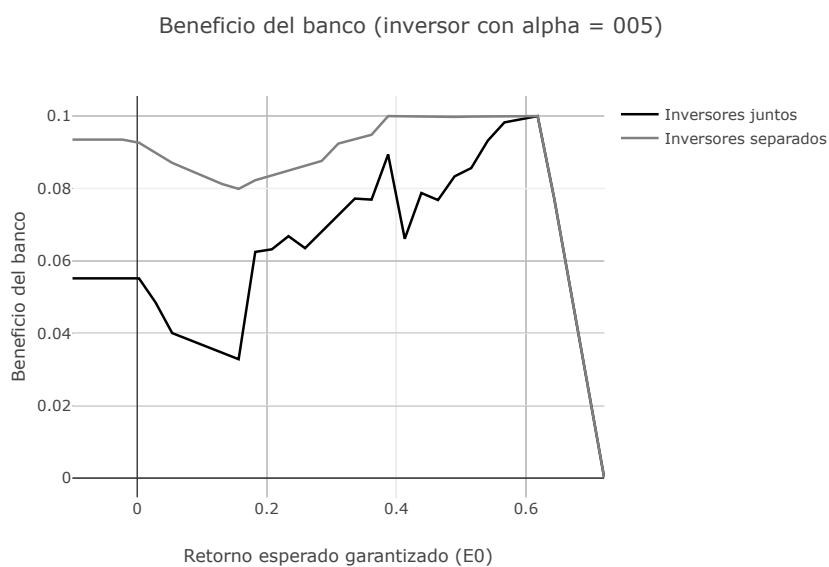


Figura 4.13: Comparación del beneficio obtenido por el banco al inversor con  $\alpha = 0.05$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.

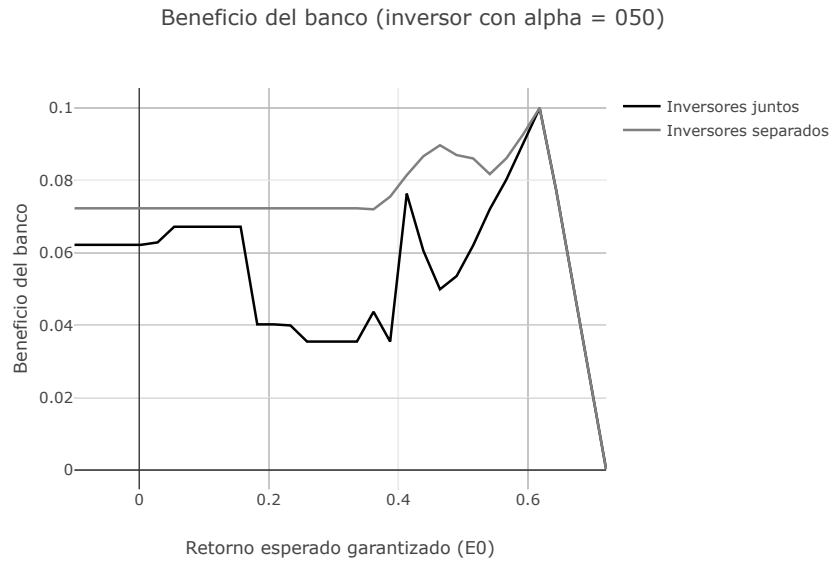


Figura 4.14: Comparación del beneficio obtenido por el banco al inversor con  $\alpha = 0.50$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.

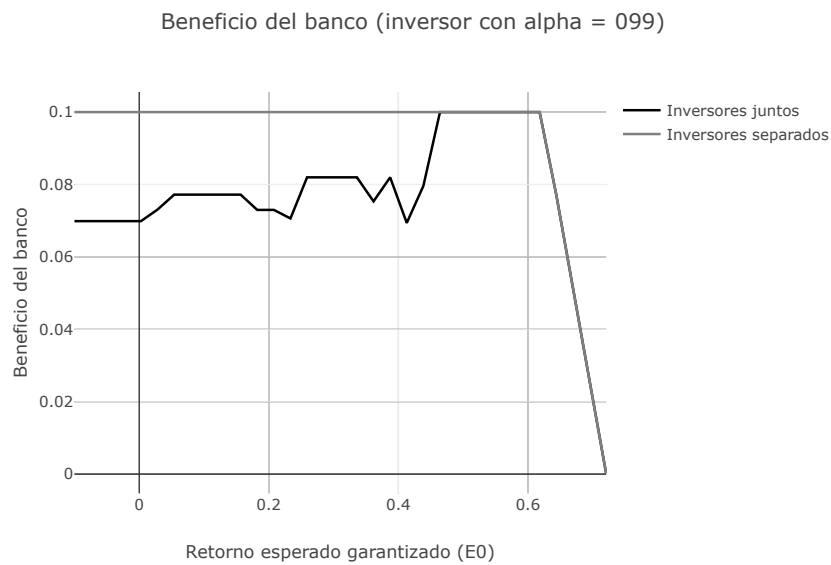


Figura 4.15: Comparación del beneficio obtenido por el banco al inversor con  $\alpha = 0.99$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.

### 4.3. Modelo IoT

En esta sección se presentarán los resultados relativos al modelo *Investor on Top* (IoT). Para resolverlo, se ha modelado en AMPL el problema equivalente de un solo nivel IoT' tal y como se puede ver en el apéndice B.3.

En esta sección, prescindiremos de algunos comentarios que se hicieron en la sección anterior, pues el procedimiento para obtener los resultados ha sido el mismo. Así, en vez de mostrar los resultados relativos al problema IoT, mostraremos directamente unas gráficas comparando el modelo IoT con el modelo BoT (para el caso con un solo inversor). Esto se debe a que el comportamiento cualitativo es similar en ambos casos, aunque con algunas pequeñas diferencias que se comentan a continuación:

- Para el problema IoT veremos que las gráficas se cortan a partir de  $E_0 = 0.5$ , mientras que el modelo BoT se cortaban en torno a  $E_0 = 0.7$ , porque a partir de ahí dejaba de ser factible. Sin embargo, esto no se debe a que el modelo IoT deje de ser factible a partir de  $E_0 = 0.5$ , de hecho el algoritmo de optimización utilizado devuelve una solución factible al cabo de 1 hora. Sin embargo, no devuelve ninguna garantía de que dicha solución sea óptima, pues no es capaz de resolver el problema en 1 hora de forma global. Este es el motivo de que las líneas que representan al modelo IoT finalicen antes, lo cual pone de relieve una vez más la dificultad de resolver estos problemas.
- Haciendo varias ejecuciones del modelo IoT con diferentes soluciones iniciales para los problemas del modelo IoT, observamos que los resultados obtenidos eran diferentes (en términos de solución óptima), por lo que en este caso estamos ante un problema con más de un óptimo global. Por tanto los valores del beneficio del banco pueden variar dependiendo de que óptimo global se considere. Lo que sí tiene que ser igual para todas las soluciones es el CVaR, pues es lo que aparece en la función objetivo del problema IoT'. El hecho de que tengamos más de un óptimo global se debe a que el inversor puede diversificar más y que el banco le quite menos en comisiones o puede elegir pocos y mejores activos pero perdiendo más en comisiones.

Así, en la gráfica 4.16, se puede ver una comparativa entre los CVaR obtenidos para diferentes perfiles de inversores en el modelo IoT (gris) y en el modelo BoT (negro). Como se dijo anteriormente, el comportamiento cualitativo es similar. Sin embargo, está claro que el

modelo BoT es mejor para el inversor, pues podemos ver que el riesgo que toma en el modelo IoT es mayor. Además, la mayor diferencia se ve en el inversor con  $\alpha = 0.05$ , justamente el más averso al riesgo.

Respecto al banco, en las gráficas 4.17, 4.18, 4.19 y 4.20 se representa por un lado el beneficio del banco para el modelo BoT (línea negra) y por otro lado una banda para el beneficio del banco en el modelo IoT (banda gris). Esta banda se ha obtenido después de ejecutar los problemas con diferentes soluciones iniciales y quedarnos con los valores más grandes y más pequeños obtenidos para el beneficio del banco. Evidentemente, no hay garantía de que esta banda contenga a todos los posibles óptimos, pero tenemos que conformarnos con esto, ya que no hay ningún método matemático que nos permita obtener todos los óptimos globales de un problema. Teniendo en cuenta esto, lo que vemos en las gráficas 4.17, 4.18, 4.19 y 4.20 es que de nuevo, el modelo BoT es más beneficioso para el banco que el modelo IoT, en general. El único tipo de inversor para el que no está tan claro es el inversor con  $\alpha = 0.05$ , pues la línea negra está entre medias de la banda gris en algunos puntos.

En el anexo C.2 se pueden encontrar la gráfica relativa al retorno esperado y al número de activos en los que se invierte, aunque no aportan nada nuevo a lo comentado anteriormente.

Así, hemos visto que claramente el modelo BoT es mejor que el modelo IoT tanto para el banco como para el inversor. Además, es importante destacar que justamente la situación que representa el modelo BoT es la que se da en la práctica, pues primero el banco decide que comisiones poner y posteriormente, sabiendo esas comisiones, es el inversor el que decide dónde y cuánto invertir.



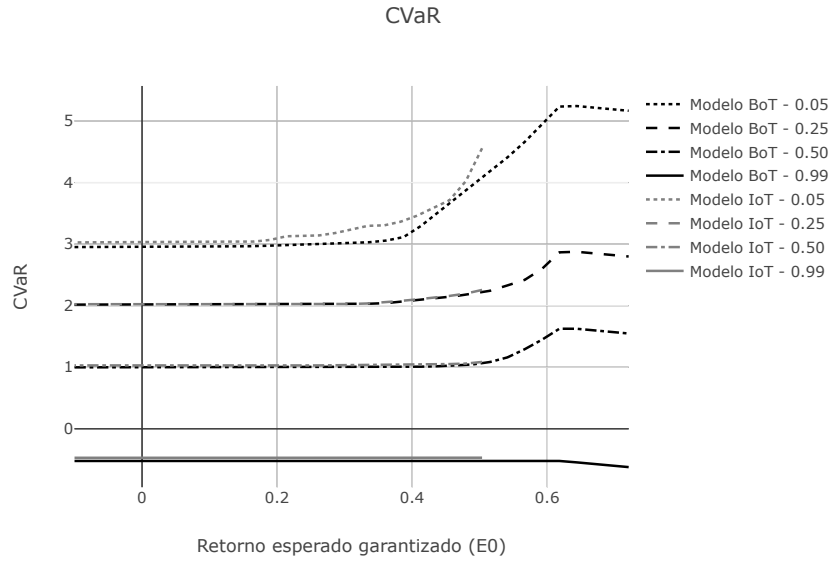


Figura 4.16: Comparativa del CVaR para diferentes perfiles de inversores en el modelo IoT frente al modelo BoT.

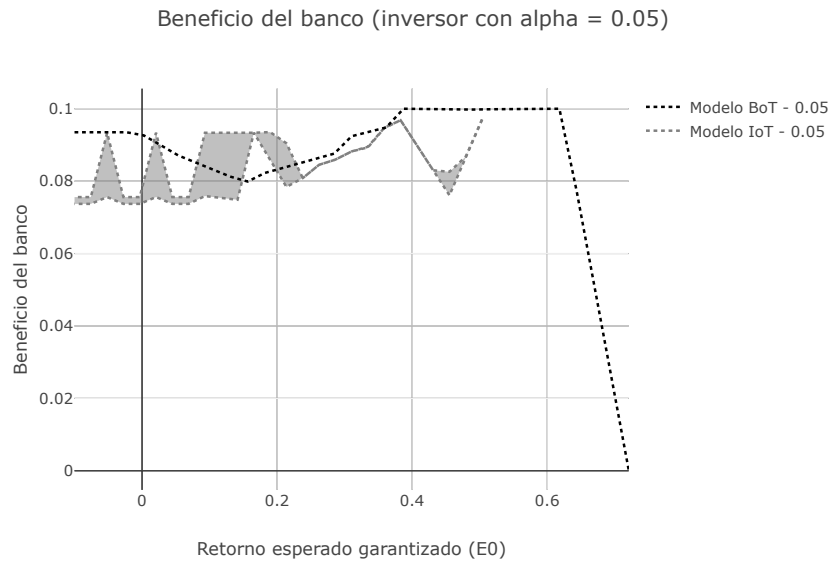


Figura 4.17: Comparativa del beneficio del banco para un inversor con  $\alpha = 0.05$  en el modelo IoT frente al modelo BoT.

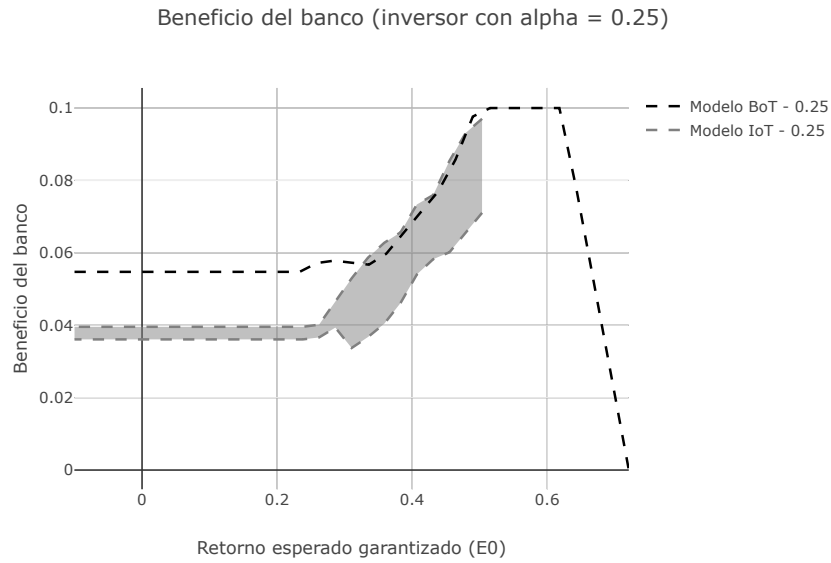


Figura 4.18: Comparativa del beneficio del banco para un inversor con  $\alpha = 0.25$  en el modelo IoT frente al modelo BoT.

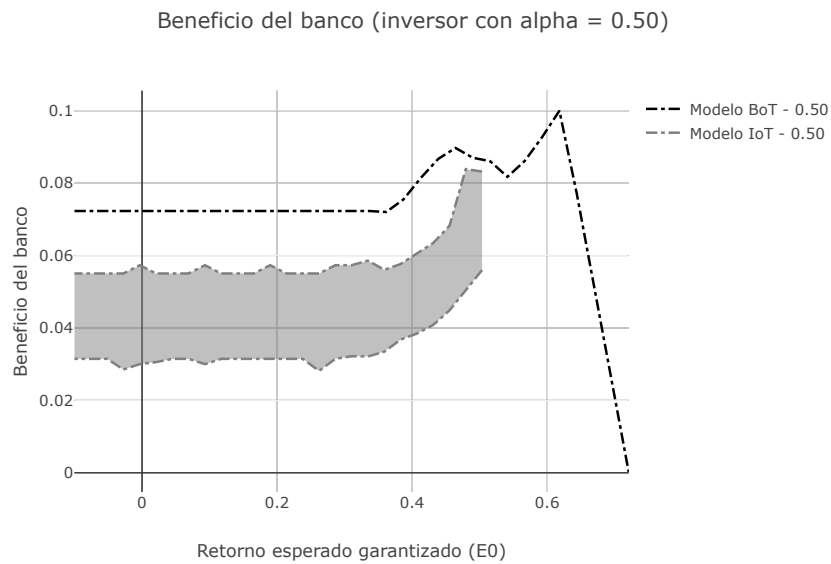


Figura 4.19: Comparativa del beneficio del banco para un inversor con  $\alpha = 0.50$  en el modelo IoT frente al modelo BoT.

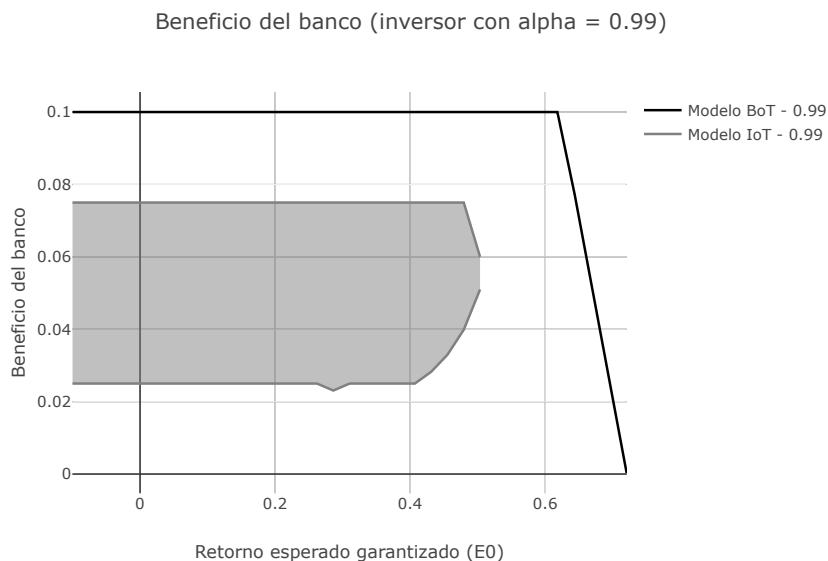


Figura 4.20: Comparativa del beneficio del banco para un inversor con  $\alpha = 0.99$  en el modelo IoT frente al modelo BoT.

#### 4.4. Modelo SW

En esta sección mostraremos los resultados obtenidos en el modelo cooperativo (SW) y los compararemos con los obtenidos para los modelos BoT y IoT. Como ya se comentó en la sección 3.5, lo que haremos es generar fronteras eficientes resolviendo el problema SW', donde la función objetivo es minimizar el CVaR y se añade una restricción de que el banco gane un beneficio mayor o igual que una cierta cantidad. Haciendo una malla sobre esa cantidad, construimos la frontera eficiente. El modelado en AMPL del problema SW' puede verse en el apéndice B.4.

Lo que haremos es generar la frontera eficiente del modelo SW para unos ciertos valores de  $E_0$  (mínimo retorno esperado que se quiere garantizar el inversor). Los valores de  $E_0$  escogidos son  $-0.1$ ,  $0.13$  y  $0.39$ . Por otra parte, a la hora de generar la frontera eficiente haremos una malla uniforme de los valores de  $B_0$  (mínimo beneficio del banco) entre  $0$  y  $0.1$  ya que son el valor mínimo y máximo, respectivamente, del beneficio que puede obtener el banco.

Así, en las gráficas 4.21, 4.22 y 4.23 podemos ver las fronteras eficientes para  $E_0 = -0.1$ ,  $E_0 = 0.13$  y  $E_0 = 0.39$ , respectivamente. Además, se representa con un punto el valor obtenido

para dicho  $E_0$  en el modelo BoT y con una cruz en el modelo IoT. De esta forma, podemos ver que los puntos del modelo BoT son eficientes, pues están sobre la línea. Sin embargo, las cruces relativas al modelo IoT están por encima de las fronteras eficientes y además, casi siempre a la izquierda de los puntos del modelo IoT. Esto refuerza lo discutido en la sección anterior, donde vimos que el modelo BoT era más beneficioso tanto para el banco como para el inversor.

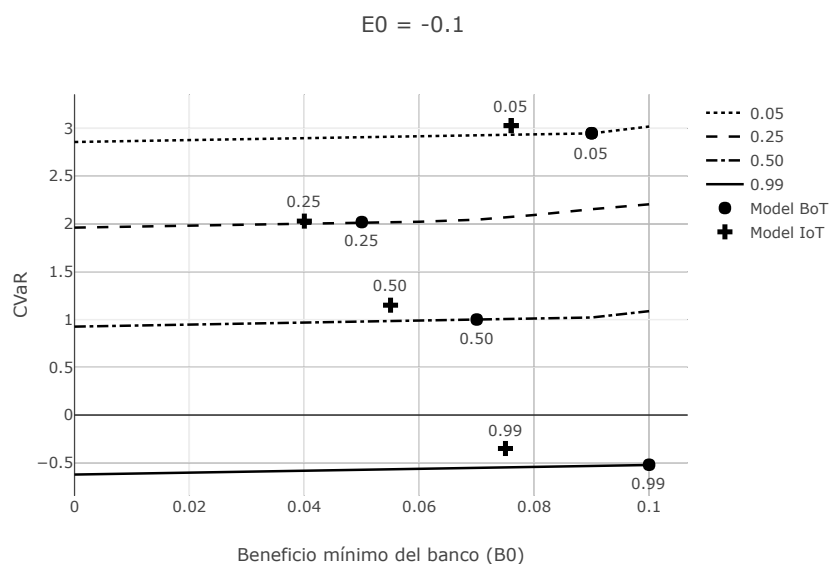


Figura 4.21: Frontera eficiente para el modelo SW con  $E_0 = -0.1$ .

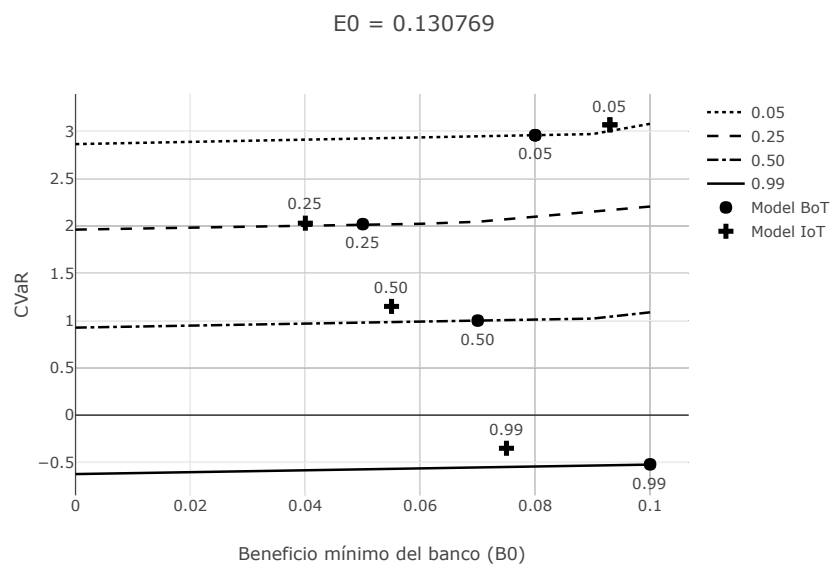


Figura 4.22: Frontera eficiente para el modelo SW con  $E_0 = 0.13$ .

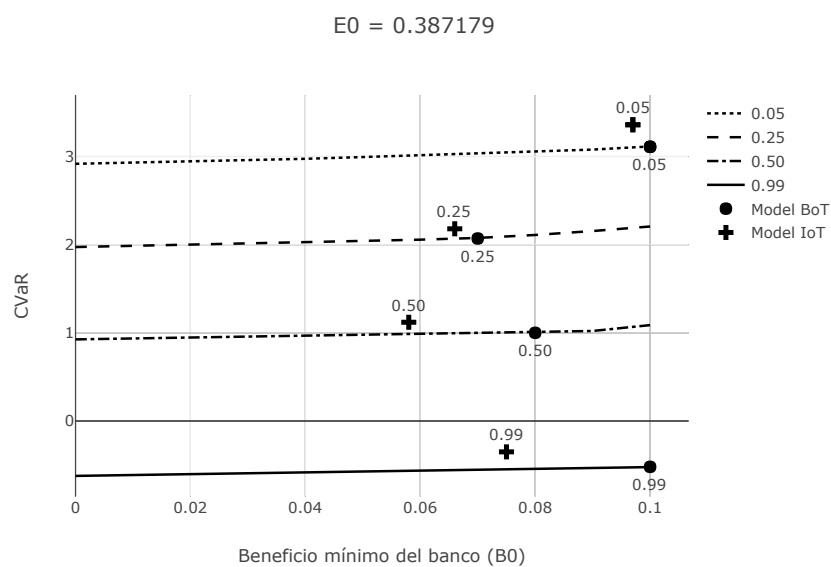


Figura 4.23: Frontera eficiente para el modelo SW con  $E_0 = 0.39$ .



# Apéndice A

## Construcción detallada de un problema dual

En este apéndice se explicarán detalladamente los pasos realizados para construir el dual del problema [PInv](#). Dicho problema se puede escribir de la siguiente forma:

$$\text{minimizar } -\eta + \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^T d_t p_t \quad (\text{PInv})$$

$$\text{sujeto a } \eta - y_t - d_t \leq 0, \quad t = 1, \dots, T \quad (\text{A.1})$$

$$y_t - \sum_{j=1}^m (r_{jt} - P_j) x_j = 0, \quad t = 1, \dots, T \quad (\text{A.2})$$

$$-\sum_{t=1}^T y_t p_t \leq -E_0 \quad (\text{A.3})$$

$$-\sum_{j=1}^m x_j = -1 \quad (\text{A.4})$$

$$\eta \in \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

$$y_t \in \mathbb{R}, \quad t = 1, \dots, T \quad (\text{A.6})$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \quad (\text{A.7})$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{A.8})$$

En primer lugar, denotaremos las variables del dual por  $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \mu, \beta)$ , siendo

- $\boldsymbol{\gamma}$  el vector  $T$  dimensional de variables duales asociado al conjunto de restricciones [A.1](#)
- $\boldsymbol{\delta}$  el vector  $T$  dimensional de variables duales asociado al conjunto de restricciones [A.2](#)
- $\mu$  la variable dual asociada a la restricción [A.3](#)
- $\beta$  la variable asociada a la restricción [A.4](#).

Por tanto, en virtud de la tabla 1.1, sabemos que  $\gamma$  y  $\mu$  van a ser variables menores o iguales que 0, mientras que  $\delta$  y  $\beta$  van a ser variables libres.

Por otra parte, la función objetivo del problema dual viene dada por  $\pi^\top \mathbf{b}$ . En este caso, denotando por  $\mathbf{0}_T$  el vector  $T$  dimensional con todos sus elementos iguales a 0, se tiene que  $\mathbf{b} = (\mathbf{0}_T, \mathbf{0}_T, -E_0, -1)$ , por lo que la función objetivo del problema dual será  $\pi^\top \mathbf{b} = -E_0\mu - \beta$ .

Respecto a las restricciones del problema dual, sabemos que cada variable del primal tendrá asociada una restricción en el dual. Recordemos que el vector de variables del primal es  $(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \eta)$  y que el vector de coeficientes de la función objetivo es  $\mathbf{c} = (\mathbf{0}_m, \frac{1}{\alpha}\mathbf{p}, \mathbf{0}_T, -1)$ . Además, la matriz  $\mathbf{A}$  del problema primal es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{T \times m} & -\mathbf{I}_{T \times T} & -\mathbf{I}_{T \times T} & \mathbf{1}_m^c \\ \mathbf{0}_{T \times m} & \mathbf{0}_{T \times T} & \mathbf{I}_{T \times T} & \mathbf{0}_m^c \\ \mathbf{0}_m^f & \mathbf{0}_T^f & -\mathbf{p}^f & 0 \\ -\mathbf{1}_m^f & \mathbf{0}_T^f & \mathbf{0}_T^f & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad,  $\mathbf{1}$  es un vector con todos los elementos igual a 1 y los super-índices  $f$  y  $c$  denotan vectores fila y columna, respectivamente.

Por tanto, en virtud de la tabla 1.1, se tiene que

- El conjunto de restricciones asociadas al vector de variables primales  $\mathbf{x}$  es

$$\sum_{t=1}^T -(r_{jt} - P_j)\delta_t - \beta \leq 0, \quad j = 1 \dots, m$$

- El conjunto de restricciones asociadas al vector de variables primales  $\mathbf{d}$  es

$$-\gamma_t \leq \frac{1}{\alpha}p_t, \quad t = 1 \dots, T$$

- El conjunto de restricciones asociadas al vector de variables primales  $\mathbf{y}$

$$-\gamma_t + \delta_t - p_t\mu = 0 \leq \frac{1}{\alpha}p_t, \quad t = 1 \dots, T$$



- La restricción asociada a la variable primal  $\eta$  es

$$\sum_{t=1}^T \gamma_t = -1$$

Así, el problema dual del problema del inversor es

$$\begin{aligned}
 & \text{maximizar} && -E_0\mu - \beta && \text{(PInvDual)} \\
 & \text{sujeto a} && -\sum_{t=1}^T (r_{jt} - P_j)\delta_t - \beta \leq 0, && j = 1, \dots, m \\
 & && -\gamma_t \leq \frac{p_t}{\alpha} && t = 1, \dots, T \\
 & && -\gamma_t + \delta_t - p_t\mu = 0 && t = 1, \dots, T \\
 & && -\sum_{t=1}^T \gamma_t = -1 \\
 & && \gamma_t \leq 0, && t = 1, \dots, T \\
 & && \delta_t \in \mathbb{R}, && t = 1, \dots, T \\
 & && \mu \leq 0 \\
 & && \beta \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$



# Apéndice B

## Código utilizado a lo largo del trabajo

En este apéndice se mostrarán los scripts citados a lo largo del trabajo, los cuales se han creado para el desarrollo de esta memoria.

### B.1. Modelos clásicos

A continuación se muestran los modelos de AMPL utilizados para resolver el ejemplo [2.2.1](#) de diferentes formas.

- Código utilizado para resolver el problema mediante una combinación convexa de del retorno esperado y la varianza.

```
param m;
param T;
param returns{j in 1..m, t in 1..T};
param lambda;

var money{j in 1..m} >=0;

maximize objective: lambda*sum{j in 1..m}(money[j]* (sum{t in 1..T}
  returns[j,t]/T) ) - (1-lambda)*(sum{j1 in 1..m}sum{j2 in 1..m} (
  money[j1]*money[j2]* (sum{t in 1..T}(returns[j1,t]*returns[j2,t])
  /T - ((sum{t in 1..T} returns[j1,t]/T)*(sum{t in 1..T} returns[j2
  ,t]/T))))));

subject to total_money: sum{j in 1..m} money[j] = 1;
```

- Código utilizado para resolver el problema minimizando la varianza sujeto a que el retorno esperado es mayor que una cierta cantidad.

```

param m;
param T;
param returns{j in 1..m, t in 1..T};
param minev;

var money{j in 1..m} >=0;

minimize variance: sum{j1 in 1..m}sum{j2 in 1..m} (money[j1]*money[
    j2]* (sum{t in 1..T}(returns[j1,t]*returns[j2,t])/T - ((sum{t in
    1..T} returns[j1,t]/T)*(sum{t in 1..T} returns[j2,t]/T))));

subject to total_money: sum{j in 1..m} money[j] = 1;
subject to ev_min: sum{j in 1..m}(money[j]* (sum{t in 1..T} returns[
    j,t]/T)) >= minev;

```

- Código utilizado para resolver el problema maximizando el retorno esperado sujeto a que la varianza es menor que una cierta cantidad.

```

param m;
param T;
param returns{j in 1..m, t in 1..T};
param maxvar;

var money{j in 1..m} >=0;

maximize ev: sum{j in 1..m}(money[j]* (sum{t in 1..T} returns[j,t]/T
    ));

subject to total_money: sum{j in 1..m} money[j] = 1;
subject to var_max: sum{j1 in 1..m}sum{j2 in 1..m} (money[j1]*money[
    j2]* (sum{t in 1..T}(returns[j1,t]*returns[j2,t])/T - ((sum{t in

```

```

1..T} returns[j1,t]/T)*(sum{t in 1..T} returns[j2,t]/T))) <=
maxvar;

```

El archivo de datos de AMPL es el que se muestra a continuación. Dependiendo en qué caso estemos, habrá que eliminar dos de las tres últimas líneas.

```

param m := 3;
param T := 2;
param returns:      1      2 :=
                    1 -0.1  0.2
                    2 -0.01 0.05
                    3 0.001 0.005;
param lambda := 0.075;
param minev := 0.05;
param maxvar := 0.000004;

```

## B.2. Modelo BoT

A continuación se muestra el modelado en AMPL del problema [BoTMult'](#). Es importante destacar que este código también sirve para modelar el problema [BoT'](#) simplemente indicando que el número de inversores es 1 ( $n = 1$ ).

```

# Model BoT (Bank leader, several investors followers)

param n;
param m;
param T;

param probs{1..T};
param returns{1..m,1..T};
param pricebounds{1..m};
param sumpricebounds;
param alpha{1..n};

```

```

param E0{1..n};

# Leader problem variables
var prices{j in 1..m} >=0, <=pricebounds[j];

# Follower subproblem primal variables
var x{1..n,1..m} >=0, <=1;
var y{1..n,1..T};
var eta{1..n};
var d{1..n,1..T}>=0;

# Follower subproblem dual variables
var beta{1..n};
var mu{1..n} <=0;
var delta{1..n,1..T};
var gamma{1..n,1..T} <=0;

# Problem definition

maximize bankprofit:
sum{j in 1..m} prices[j]*(sum{i in 1..n} x[i,j]);

subject to polyhedron:
sum{j in 1..m} prices[j] <= sumpricebounds;

subject to strongduality{i in 1..n}:
-eta[i]+(1/alpha[i])*sum{t in 1..T} (d[i,t]*probs[t]) = -beta[i]-mu[i]*
    E0[i];

subject to CVaR{i in 1..n, t in 1..T}:
d[i,t] >= eta[i]-y[i,t];

```

```

subject to ydef{i in 1..n, t in 1..T}:
y[i,t] = sum{j in 1..m} (returns[j,t]-prices[j])*x[i,j];

subject to avgreturn{i in 1..n}:
sum{t in 1..T} probs[t]*y[i,t] >= E0[i];

subject to spendall{i in 1..n}:
sum{j in 1..m} x[i,j] = 1;

subject to dual1{i in 1..n, j in 1..m}:
-beta[i]-sum{t in 1..T} delta[i,t]*(returns[j,t]-prices[j]) <= 0;

subject to dual2{i in 1..n, t in 1..T}:
-gamma[i,t] <= probs[t]/alpha[i];

subject to dual3{i in 1..n, t in 1..T}:
-gamma[i,t] + delta[i,t] - mu[i]*probs[t] = 0;

subject to dual4{i in 1..n}:
sum{t in 1..T} gamma[i,t] = -1;

```

El archivo de datos utilizado para un  $E_0$  y un  $\alpha$  concretos es el siguiente:

```

# Model BoT (Bank leader, several investors followers)

param n:= 1;
param m:= 30;
param T:= 30;

param pricebounds:= 1 0.1 2 0.1 3 0.1 4 0.1 5 0.1 6 0.1 7 0.1 8 0.1 9 0.1
10 0.1 11 0.1 12 0.1 13 0.1 14 0.1 15 0.1 16 0.1 17 0.1 18 0.1 19
0.1 20 0.1 21 0.1 22 0.1 23 0.1 24 0.1 25 0.1 26 0.1 27 0.1 28 0.1 29
0.1 30 0.1;

```

```
param sumpricebounds:= 0.3;
param alpha:= 1 0.05;
param E0:= 1 0.1;

# 1 AAPL 2 AXP 3 BA 4 CAT 5 CSCO 6 CVX 7 DIS 8 DWDP 9 GS 10 HD 11 IBM 12
  INTC 13 JNJ 14 JPM 15 KO 16 MCD 17 MMM 18 MRK 19 MSFT 20 NKE 21 PFE
  22 PG 23 TRV 24 UNH 25 UTX 26 V 27 VZ 28 WBA 29 WMT 30 XOM
param returns: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
  23 24 25 26 27 28 29 30 :=
1 -0.6526325889086171 5.306254990631858 -2.7808293550755785
  1.1477600386657065 -2.760897118672226 3.7122120975427393
  -0.6423371878635277 -0.9719524134097228 -1.2606379665002134
  -1.3724841673656865 -4.077673082602779 -1.4507398583138607
  -5.350419106223799 -10.975045786054075 3.6508266617667093
  -5.650127050620153 -1.7864614580550322 -8.913464078159635
  3.648908741429277 -5.101453756678069 2.718196503379085
  2.974597286901178 0.5994056612942248 5.552744217569224
  2.336055672926831 0.00586467916520092 1.496305028709133
  1.1562698667036488 -1.1773429663522776 7.639807237526871
2 2.6497166131196375 0.2080190959149153 0.094356479684188
  3.280539153835989 1.2230777879349792 -3.976558990503896
  0.6949056379924023 -3.944794256883492 3.6213621359223267
  -5.134454085979925 2.429628641975305 4.406518218171044
  1.0897672801049736 -3.3985026804175256 6.175524043418275
  -4.979065778366411 -0.9186379827521659 -13.59507607176186
  3.383330704405343 3.410295560480732 0.9319991902089232
  1.9583966933009556 0.28860866972705723 2.272502796640938
  1.4166495520405604 2.7363184864997647 0.055880984984571995
  1.35889796427963 -0.8448108201136711 5.130574037861443
3 0.8602803266792177 -1.8861972367308155 1.8932844685096926
  3.01190707458746 3.454703561579887 -0.08865942837693386
  3.9177217625876146 -6.820714656193982 -1.0691108717799014
```



0.8448826462447994 -0.4230770859071141 3.239691404612155  
-9.040446299241301 -7.0337860264758785 11.027152352746986  
-6.788559326665148 -1.3829592804190431 -4.4549057254902005  
3.8844253705897365 3.38200323373787 7.894095642115816  
3.3522293004062784 -0.145312692681046 6.378358109444545  
4.511785694402857 3.2254073426153256 1.4546467415014217  
3.907559832309212 -4.1033058429407 -10.30672080096444  
4 -0.8109581114097514 0.46306270717432013 1.778898734797315  
2.533248530054197 7.922713233514708 -2.487530295193439  
0.5377355715871417 -7.331544678514708 -7.566692102718063  
-12.389585084320014 9.33506972616072 0.8903752214772594  
2.4032802016143577 -5.878736987140973 10.913994440810988  
-8.933437885065784 2.6062273750005494 -5.285159863181199  
4.6139760139918415 2.022126406957035 3.082334908263839  
3.406510064806507 0.1903330809516974 -4.347506178960224  
-1.7645694976832933 5.909790548532314 1.8208487919423375  
-0.872506533801166 -4.451876740729775 1.00494247407951  
5 0.9810355565955001 3.130397236614859 -1.5072241992882633  
0.743895871283655 2.4472551710018897 0.1853397820152452  
-1.0688612099132095 -5.028053084810858 -0.8094487160238177  
-2.4040582267313706 2.7796610169491456 3.5839951627088835  
-1.6132519292453371 -3.905063814673741 7.476421026573402  
-2.9872572171977687 -1.3350538616505998 -8.664343081623747  
2.198332243647906 0.3507084404956664 1.3280615716710829  
3.5410368571608704 2.4428203962429658 2.6230196699974133  
-0.3168588931136526 4.746770602813531 1.3756848067974858  
2.5942905089944017 -0.6613499319198528 4.170747992950852  
6 1.0271638108532104 -0.4621485511780798 -3.258484748087831  
2.425828140066812 3.1947521688895595 0.9493948885345062  
2.494277907215218 -6.032079214360812 0.3141733968117529  
-5.595056759734694 2.8691867916182736 4.166302514609019  
-0.37654086893915956 -4.585923141036836 4.700707829237821

-2.900625476700435 -1.4373504448411252 -8.451201643658056  
4.260630498614633 1.9972369627751987 1.552067316368896  
1.6260902645629025 -1.0055101598624603 4.548668039669069  
-0.6673996620579656 1.505354626546108 0.03351571065799576  
2.211240490922527 -0.3359796798818352 3.0340362678662296  
7 -0.4889784720222577 0.08040471723398264 -0.9373290734867697  
-1.540956100378873 1.0433827376279936 5.9239129361610035  
-1.8471036113031734 -1.8905715446120597 5.585650425489299  
-4.8023548393211914 1.7581040417332972 2.4483417259940903  
-1.5338966101694858 -3.5373095182492666 3.0424660413550018  
-3.039219898505846 0.19645829086109223 -7.1122960903465975  
2.9552887837719437 2.1528405735459235 2.7734704609664256  
-1.4292063661037457 0.04502431515647732 0.1890422248282415  
0.18867834172474934 0.9685176043670048 2.3625580375720068  
-1.0759201735357917 -0.1754267138772675 1.0104569196108792  
8 2.0947012524752617 1.329284804642183 -0.18536575725221124  
-2.0285685714285813 1.6185476343380885 -7.719907943179587  
-1.741562797125251 -5.586325456343184 -3.6372745558162918  
-9.549490013933202 11.019230769230763 1.6455915468560591  
0.8691189502385831 -4.662948211909921 2.5163884458621295  
-7.087291515550268 -1.8046530232558204 -4.149297160843056  
4.803320814390195 3.2251980384760346 1.0049314818198423  
5.028947268975173 -0.5167120131465321 -7.427280381831037  
-3.2915690426113886 4.892676559518002 1.3458683132054579  
-2.965255540017181 2.5121859767528987 1.0972915142648076  
9 0.7412785855412077 1.1483973410386723 -1.6399621684534982  
-1.9964939165235491 2.6609626884277975 -4.71657652275987  
0.6555485048263328 -5.245674375438747 6.120546269241743  
-6.432854049039565 8.160670991897378 -3.0650041093212237  
-9.220749855488432 -6.4417125084532 0.840822818376846  
-5.779015094876343 -3.840370722328384 -7.3623897120474675  
1.8619156164589385 7.3728786565225946 1.0739731321227068

14.474651564588042 -0.8887074465337881 -2.0922645687888606  
-2.477864645085246 3.5634173690553324 -1.2594458438287153  
1.12244744897959 -1.493436954996523 1.546809015908398  
10 2.9351631513107277 -0.26328812324955786 2.7195257713896344  
1.3771085948137263 1.5879810058072963 -2.4671618365608623  
-5.199125904874505 -1.9910397700621378 -6.55686337321731  
-4.236869472220094 4.470764198357176 3.3679832355687362  
-4.822840345641152 -4.615296472369299 6.793011899567239  
-4.175917096099044 -0.2893686094425619 -6.854720227424938  
6.0692953905607006 1.9974115732733384 3.334874534468221  
0.09475391349972935 0.45661654464174967 2.200665815986666  
0.09220480805459748 4.253823722644218 0.0 -3.752794343535496  
-2.12777558057758 0.5517850367331024  
11 -0.013696426313793053 0.30128938721600057 -0.7031670044556826  
1.9800653553812113 2.036003478244408 -0.09250016151305425  
-1.441708814946346 -5.488823092590906 -8.342207667353595  
-3.338501006731172 -7.308280252357716 6.8038412173224  
-1.5946260191466328 -3.6028609031833403 6.041466745601725  
-3.9671691631247117 0.46925257145140287 -7.47289395374655  
1.8838984697332137 3.795453453025324 3.5288092396863306  
1.9430273500990207 8.197384105960268 0.09704038145077812  
-0.2908269817676349 3.230866632143706 0.8838665571532723  
-0.035908797127471304 -2.952586988920684 3.212670907178043  
12 1.1889639570685273 1.6156105749055878 -4.088372909353705  
-1.9590957597611327 2.459374122543388 1.3501950278611232  
-0.5498033294607038 -4.571545919020744 -1.9607864981999443  
3.8409068181818187 3.1079055177917527 2.1226915278562615  
1.496572407055247 -4.689741769824224 5.951869231803419  
-6.225915509512974 3.503457893449053 -6.310072998117977  
4.259589652096334 1.0053497326203282 3.6213446924746915  
0.5313693030860424 -4.370803097597143 3.592684872604489  
0.22573363431152585 5.77395577395576 1.6066627951993813

1.543145302223465 -1.5384596911530952 3.525156250000007  
13 1.1006142552196456 -0.9268076703230848 1.952635652941791  
1.5802489727516489 2.430281653513465 -3.296477348247586  
0.673089681885944 -3.759892720637279 3.8694316825813098  
-1.4958662028939385 2.7086164655865046 3.3124845264955463  
0.44723339609833407 -2.575524947752414 3.28341287445441  
-1.0006814568011462 -8.547062915694424 -3.6917323308270573  
-0.6401741163299044 0.44001336780104555 1.5019932488149432  
0.7244716763005724 -1.8823214954117093 4.655697719900106  
-1.3412839346039656 3.006050740455486 0.16131470298743303  
1.2811126816495162 -0.2096190729474925 -0.3331826790262591  
14 -0.07841509310137629 -0.08719741890479035 -0.22691743363732886  
-0.7172848145556274 3.8325973568281935 -4.251168506595986  
1.5774610626537044 -6.691681904771893 0.8976222785681841  
-4.160880209030475 4.795976693018304 2.68500099700132  
-1.1681220130459014 -3.0366361130400232 4.256915063161467  
-7.104956253171038 -2.9044437708931765 -6.1023062508494705  
2.824683080061217 3.986367778862603 -0.7746528796374501  
4.684207599471219 -1.147334397067953 0.4739317194499634  
-2.4258722302427542 4.133782516438616 -0.5210828842894526  
-0.5428571428571364 -1.359760605190086 3.43656046138122  
15 -2.0815387159458663 -2.3230352328942523 2.58021314785731  
0.5905533554122046 1.282887528467608 -0.8372756188374575  
-0.6711366241856819 -2.6155208671420915 3.692931960608775  
-0.8849643477243984 4.52962127742253 3.4999999999999996  
0.9863083735909821 -2.2922026028384463 2.8151815585475264  
-2.5992102143170492 0.5092686901609289 -3.5873530603972497  
-0.777799033003994 0.7838961698327082 -0.48349800294302475  
0.5703443177017183 -0.5040999684078917 2.807688469657769  
1.6427083851599915 -8.606056565656571 0.08841069458838578  
0.22085247837572497 -1.1899536978855436 1.025867528991963  
16 -1.098348784300905 1.7881734913987413 1.0294014924342305

-1.866990916424304 2.7729464753281827 1.2038656768808442  
-0.430381989435558 -1.6509574860016665 2.2402623874872574  
3.4927403578500202 1.9672343825368417 5.199435360678921  
0.8873797903906772 -3.0172200654026438 3.6167769214392305  
-2.9441346067618395 0.18035963455118334 -4.986632849072135  
0.8096491809238966 1.5493284523733 2.2941418122848347  
0.10967374320540788 0.7832573506994476 -3.9565211956521757  
-1.1147583685221891 2.987125035765377 1.7780724466407023  
1.026371687791366 -2.9991909808291135 3.247911977715882  
17 0.2539380719062786 2.742464412281403 0.7822913975184143  
-2.2063329000125558 4.06484356203474 -2.5978805288413103  
1.1769706789483436 -7.017217439680869 0.8172375688288909  
-7.455595973312111 4.249797852118922 4.299573718163723  
3.928390733116135 -5.837319138755979 5.650403877280423  
-4.655633461481659 -1.0794990647826048 -6.297810108175115  
3.0585006802721026 1.029736521881418 0.4651891947714524  
1.898961483311335 0.020419176858873442 1.6641194996667505  
0.3313933454229181 4.524068503310586 0.234609306546923  
-0.8884647464495469 -3.1808790018584308 3.579074635766223  
18 -0.028955981145538677 -0.6518032929924268 1.5745765606984545  
0.4449619763158162 1.6004500599978582 -0.22502954219491325  
0.12686354308250056 -1.7175855514231535 3.6384473181047885  
-2.6952260593013406 2.656242822265833 3.5837887194045313  
1.6029882233103314 -1.8275046496845642 6.254182570086572  
-3.3022373734427752 -0.31282324931148 -4.680963467012411  
3.3882042966199046 1.1941010537043586 -1.79624367888726  
1.2950613806392106 -3.8486963022790457 4.797806914234692  
1.3996076415804273 2.9540777717006224 1.2028555620312265  
1.0895196640901164 -2.2657672439493592 2.218041269998435  
19 0.7622234474396157 3.6254611877221117 -3.667767227494572  
4.7685094239766155 0.7850392312329771 0.09627253463552093  
-1.9585607600272548 -2.2830616859822173 -0.8305156520945446

-1.564517704232741 -0.747938488668082 3.212128741065225  
-1.1682020626083687 -4.820390573271867 7.587075773746007  
-5.473892194732556 1.1543589009731068 -7.3564048604772765  
2.198916760696838 1.5340183437993695 0.8535298734425556  
4.776260561004062 -0.5013471404822774 -4.0962947484612275  
2.811830149949703 2.413175970723487 2.5411199173801524  
1.405783532434146 -1.7950742183868709 4.886437338042941  
20 3.3855761755485845 -0.3032140801654608 -2.3114283082029705  
3.9725963646601556 2.4673674084888635 -0.970195173458974  
-5.4296481889796 -5.254616628009857 -2.2395006065340275  
-2.8837070864264573 6.2578076869710015 -0.2872825728053603  
-2.1215334976226585 -4.348407930115278 5.077640371454476  
-2.369551289820899 -1.1044410201494907 -0.22059286116908217  
1.340324664626589 1.7862095329266194 1.8620213834689556  
5.799573832199177 0.19888627217723912 1.116488014930062  
1.0428155798597536 3.6668236563037513 -0.7261595476514282  
2.831526596707726 -2.7076650891388176 2.3584904826005726  
21 0.7365217391304282 -2.0754763171945076 1.6377673410404556  
1.8009430852857162 2.560526130366056 0.022694053048252394  
1.9060585432266763 -2.5161456245824985 1.6445888909225501  
-4.269667415730338 0.7746526185282928 3.1446517586769085  
-1.738936353634501 -0.8503769639336686 7.16272849241372  
-4.996759679861556 -0.2732217792906092 -4.269404207064023  
2.456472692582885 0.09311219956033197 -0.27906744186046506  
-0.8162359884273405 -4.443922041945013 5.511816080507278  
-1.515860505693559 0.4025621596021875 1.3207475792100263  
0.9311033736290205 -5.69649894611394 2.176571342053575  
22 -0.39431352863393404 -0.4918474029288948 -1.2537589362420296  
2.0754448992579664 2.643223267034761 -3.0179410393847554  
-1.2976101899215309 -3.761416828693452 10.422470539399724  
0.6414638954823324 2.2194365784266226 2.8950073019709985  
1.5258045005603424 -2.430184395651236 3.2444843429704533

-2.179668771988814 4.532181866917753 -5.867133752764222  
0.23084423182540198 1.4367163851721791 -0.7784636345218607  
-0.38138717602878075 2.3845986082826127 4.134618678090139  
0.24622755467089813 0.7880503611508585 1.797316151584605  
-1.805484289276801 -0.030473384183805872 4.095110086572099  
23 0.06900552168388394 0.835193503761918 -1.1474239598438878  
-0.061496658052022674 3.407435712923448 -3.518294354086667  
0.3237976850930407 -4.979637862920247 1.957135431344346  
-3.7915435868961604 2.976338502957055 4.90792386056167  
-1.7247920455223413 -1.6851797255516128 2.977880773742184  
-5.2235922844056235 -2.4360594437691634 -3.724599658450453  
1.878338822649305 0.37212619032690347 1.508258341759344  
2.9384917162904345 0.7821957780469968 1.2081892812884663  
-0.5534010681223951 2.345181633315984 1.7710104951448493  
1.5341130656659143 -1.5109336353524316 2.4118370504705493  
24 0.743343154284515 1.5816527984775826 -0.06704611712514995  
-1.1070527102543966 0.5126135502816505 -0.23624853537618623  
1.187792397045069 -3.562417003161211 2.1917504444214617  
-2.6837524772145716 1.0961410940932197 5.953786216858105  
-1.9670957280967196 -3.500420687198215 7.545291024105392  
-4.328970944464605 -1.5454358080765738 -10.06716251882419  
3.3145964305546025 -2.688438054572005 3.3594871746825654  
7.199096436379835 0.9604474576271129 0.24995822794069292  
-2.537960321010877 3.524250176195113 -1.4826909327132527  
-7.846951509506468 -3.599431735107003 5.946311018686735  
25 -0.8033330734404345 -1.2447540398563846 0.23538193398744522  
4.386037587532671 3.105949859812415 -1.5976942342666915  
-0.5364423222436495 -6.7812405692685225 -0.7328642778344528  
-4.235304862038655 3.4082584579666126 2.573967668523882  
-0.443731901873419 -0.8376331039102023 -5.579663197904861  
-1.9615882127901605 -0.5441557273542605 -10.622897879893149  
-0.791113203993226 1.5948367797545808 2.737806094313376

3.5925467101195143 1.6769060285003266 2.7372463990544267  
2.950071366194203 4.302395367824237 0.00782326224447267  
-1.5653127079591307 -1.3914288317904626 1.5320118093536184  
26 2.0307047048651343 1.8654660582274443 -2.512085250950266  
3.240222833244904 1.4948640826532422 0.026653115095245757  
-3.151439220506077 -3.646122016743797 0.01428245058235695  
-1.6704718493650585 1.4810468461940358 2.968946937823338  
-2.605433323407443 -5.2147227600446575 6.653128872323659  
-3.246069982905286 -1.4732732734791516 -8.016873433026094  
5.375824796783758 2.069644080194836 3.2996664406883665  
0.31870346687966244 0.12274223826714263 1.0672791673365423  
0.16411773802860016 3.2269545794644863 0.6624739310613795  
2.4679551130443294 -1.41834146371618 5.503902728039239  
27 -0.018255155717190198 -0.7484483524725815 -0.6805205201493566  
1.0185166666666666 -0.23831531142649523 -1.892684744310348  
2.903165441153121 -2.20240084096107 2.177558161176259  
1.1111037846592473 2.017659953797867 3.2314991483048066  
2.9934998801488173 -2.60754031900914 2.830832244727693  
-4.344940370562859 -1.0402184466019406 -3.784169453953419  
0.637294269384357 1.9721385923647434 2.945349486420354  
-1.6028955532574969 -1.2086144683832594 -3.280147046803298  
-1.099904694773687 2.242815528400076 3.1907142857142916  
0.07027582818959995 -0.754915743590527 3.2902884006773228  
28 -1.1144435237732164 -0.9391720985287157 -0.5396674603170004  
3.064961048102032 3.870234830253763 -0.13698356164383474  
-0.5349794091912379 1.3653261242497277 5.238092517006802  
-1.4479573742199747 4.027285686975517 3.8965900165224445  
0.15778371353057122 -2.072223778679985 4.776636673100789  
-4.110069779380412 -3.017617858908301 -14.579624449571362  
1.1745479876732738 2.23364721967755 3.0760370849504146  
1.0040454748856023 -0.7455488057434816 -0.01391292271404826  
-2.4485170749242045 4.720474698211308 -4.085523627944982



```
-5.423823654692616 -10.073560875640876 4.557594171699693
29 -2.963721062109785 0.9584034004761482 -0.03129459595979314
-1.293964284796732 1.384930812345104 -2.075076077683502
-0.6389159561743897 1.6075447777846916 2.4680983539309933
1.8425115420996143 2.4257064397471835 4.164201861622329
-7.455471910865313 -2.6512477704729775 2.681392275108146
-4.567332215722836 -1.4379267853218927 -5.138814483153278
5.738551787164643 1.421909304957433 1.4982812179306164
3.0472449619251325 -0.8083505328450563 -3.177223990566876
1.8325175598495853 4.613931688346279 -0.4400390127020466
-1.627325917810366 -0.3471908506075845 0.8504990613997028
30 1.7377983200153724 0.6907749048942008 2.0706050161058833
1.3320248971764825 2.7134588208745494 -0.1761195297902944
0.37638086484523836 -4.640261525205598 0.7249987979232702
-5.4166182088981465 5.701016454288864 -1.3178694808249953
-2.361820117652278 -4.394631514622988 5.311964639342023
-2.339623899371065 -2.6532676797175254 -9.870334483452377
0.07339253933974399 4.3714303761604825 0.801122957101246
1.7707710294092212 -1.7399603162066173 5.856102818515034
-2.5553148723739563 5.041897605762466 0.9136520513917528
2.0147947466155167 -1.2374975 1.4428552982443925;
```

```
param probs:= 1 0.0333333333333333 2 0.0333333333333333 3
0.0333333333333333 4 0.0333333333333333 5 0.0333333333333333 6
0.0333333333333333 7 0.0333333333333333 8 0.0333333333333333 9
0.0333333333333333 10 0.0333333333333333 11 0.0333333333333333 12
0.0333333333333333 13 0.0333333333333333 14 0.0333333333333333 15
0.0333333333333333 16 0.0333333333333333 17 0.0333333333333333 18
0.0333333333333333 19 0.0333333333333333 20 0.0333333333333333 21
0.0333333333333333 22 0.0333333333333333 23 0.0333333333333333 24
0.0333333333333333 25 0.0333333333333333 26 0.0333333333333333 27
0.0333333333333333 28 0.0333333333333333 29 0.0333333333333333 30
```

```
0.03333333333333333;
```

### B.3. Modelo IoT

A continuación se muestra el modelado en AMPL del problema [IoT'](#).

```
# Model IoT (Investor leader, bank follower)

param m;
param T;

param probs{1..T};
param returns{1..m,1..T};
param pricebounds{1..m};
param sumpricebounds;
param alpha;
param E0;

# Leader variables
var x{1..m} >=0, <=1;
var y{1..T};
var eta;
var d{1..T}>=0;

# Follower subproblem primal variables
var prices{j in 1..m} >=0, <=pricebounds[j];

# Follower subproblem dual variables
var v <=0;
var u{1..m} <=0;

# Problem definition
```

```

minimize objCVaR:
  -eta+(1/alpha)*(sum{t in 1..T} d[t]*probs[t]);

subject to CVaR{t in 1..T}:
  d[t] >= eta-y[t];

subject to ydef{t in 1..T}:
  y[t] = sum{j in 1..m} (returns[j,t]-prices[j])*x[j];

subject to avgreturn:
  sum{t in 1..T} probs[t]*y[t] >= E0;

subject to spendall_proportion:
  sum{j in 1..m} x[j] = 1;

subject to strongduality:
  sum{j in 1..m}prices[j]*x[j] = -0.3*v-sum{j in 1..m}0.1*u[j];

subject to polyhedron:
  sum{j in 1..m} prices[j] <= sumpricebounds;

subject to dual{j in 1..m}:
  v+u[j] <= -x[j];

```

El archivo de datos utilizado para un  $E_0$  y un  $\alpha$  es igual que el del modelo [BoT](#) pero eliminando la línea param n:= 1;.

## B.4. Modelo SW

A continuación se muestra el modelado en AMPL del problema [SW'](#).

```
# Model SW (Social Welfare)
```

```
param m;
param T;
param probs{1..T};
param returns{1..m,1..T};

param pricebounds{1..m};
param sumpricebounds;
param alpha;
param E0;
param bankprofitmin;

# Variables
var prices{j in 1..m} >=0, <=pricebounds[j];
var x{1..m} >=0, <=1;
var y{1..T};
var eta;
var d{1..T}>=0;

# Problem definition

minimize cvar:
-eta+1/alpha*(sum{t in 1..T}(probs[t]*d[t]));

subject to CVaR{t in 1..T}:
d[t] >= eta-y[t];

subject to ydef{t in 1..T}:
y[t] = sum{j in 1..m} (returns[j,t]-prices[j])*x[j];

subject to avgreturn:
sum{t in 1..T} probs[t]*y[t] >= E0;
```

```
subject to spendall_proportion:
```

```
sum{j in 1..m} x[j] = 1;
```

```
subject to bank_profit_min:
```

```
sum{j in 1..m} prices[j]*x[j] >= bankprofitmin;
```

```
subject to polyhedron:
```

```
sum{j in 1..m} prices[j] <= sumpricebounds;
```

El archivo de datos utilizado para un  $E_0$  y un  $\alpha$  es igual que el del modelo [BoT](#) pero eliminando la línea `param n:= 1;` y añadiendo la línea `param bankprofitmin:= 0;` para una cota inferior del beneficio del banco fijada, en este caso 0.



# Apéndice C

## Gráficas

En este apéndice se incluyen todas las gráficas que no se han considerado suficientemente relevantes como para incluirlas a lo largo de la memoria y evitar así sobrecargar la misma con demasiadas gráficas

### C.1. Modelo BoT con varios inversores

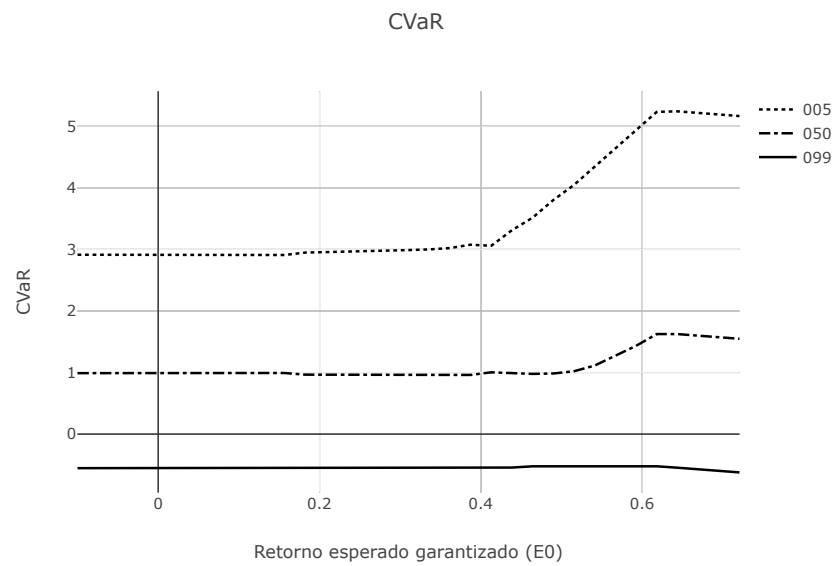


Figura C.1: CVaR correspondiente de cada inversor para el modelo BoT con varios inversor.

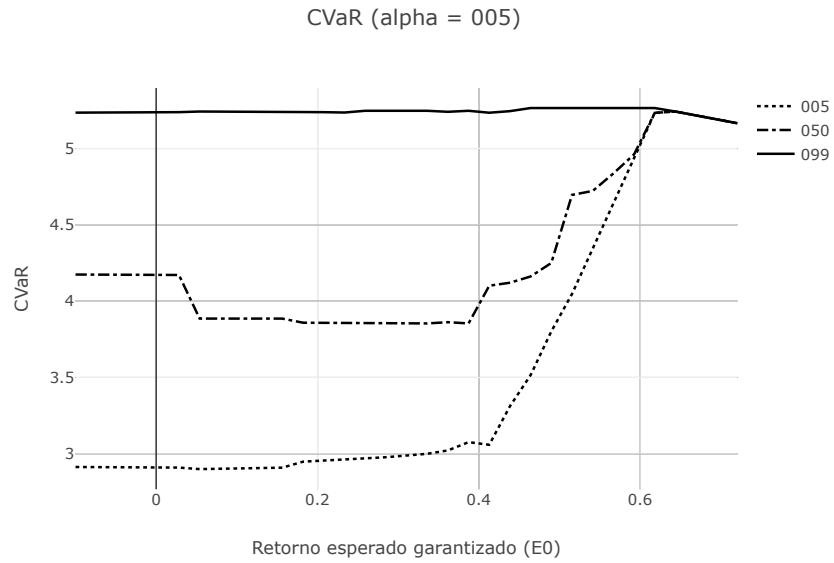


Figura C.2:  $CVaR_{0.05}$  de cada inversor para el modelo BoT con varios inversores.

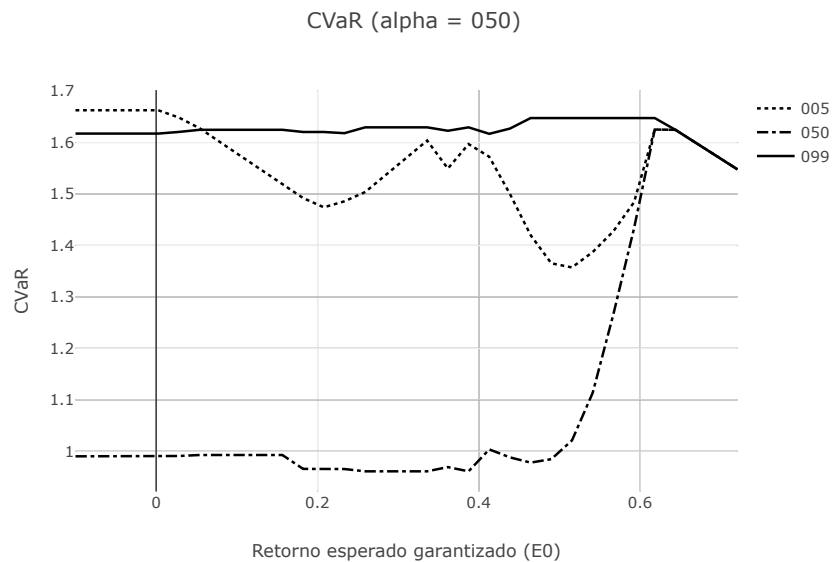


Figura C.3:  $CVaR_{0.50}$  de cada inversor para el modelo BoT con varios inversores.



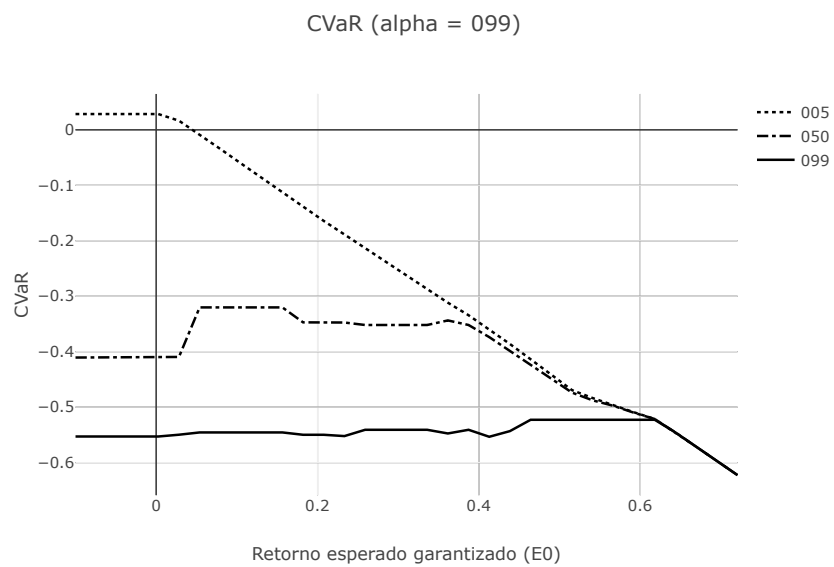
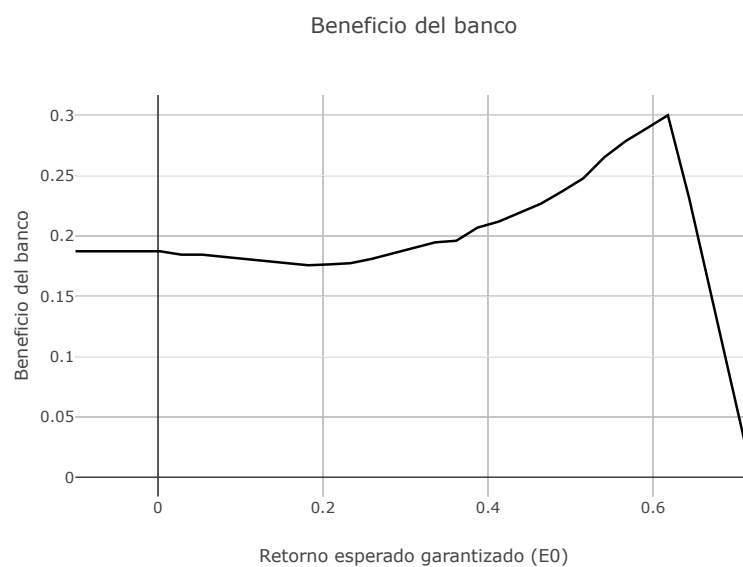
Figura C.4:  $CVaR_{0.89}$  de cada inversor para el modelo BoT con varios inversores.

Figura C.5: Beneficio del banco para el modelo BoT con varios inversores.

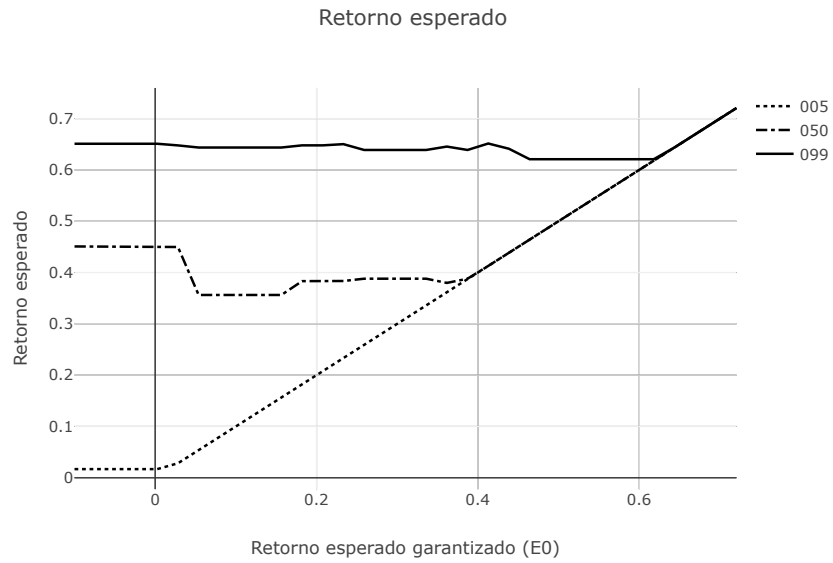


Figura C.6: Retorno esperado de cada inversor para el modelo BoT con varios inversores.

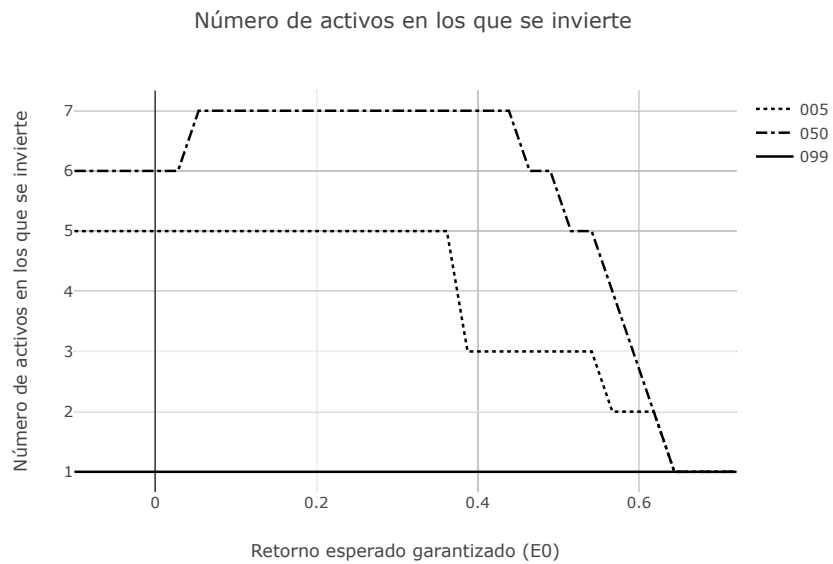


Figura C.7: Número de activos en los que invierte cada inversor para el modelo BoT con varios inversores.

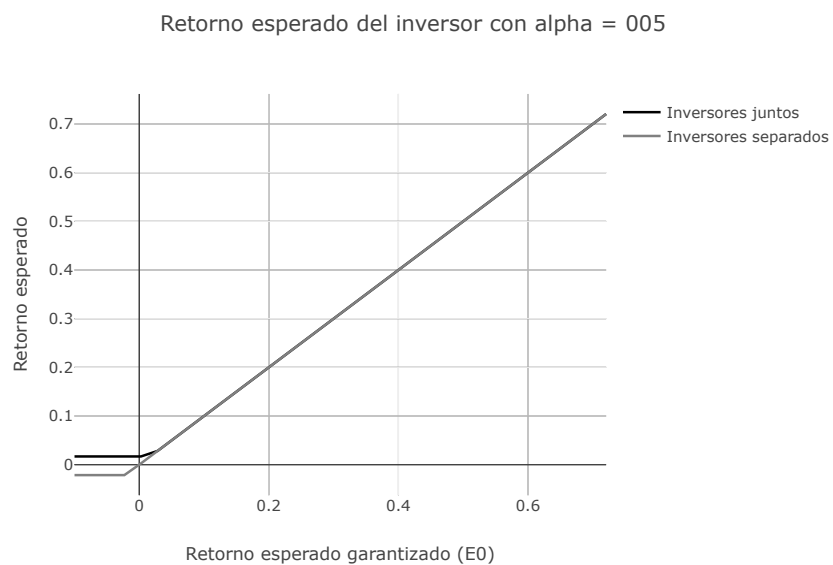


Figura C.8: Comparación del retorno esperado del inversor con  $\alpha = 0.05$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.

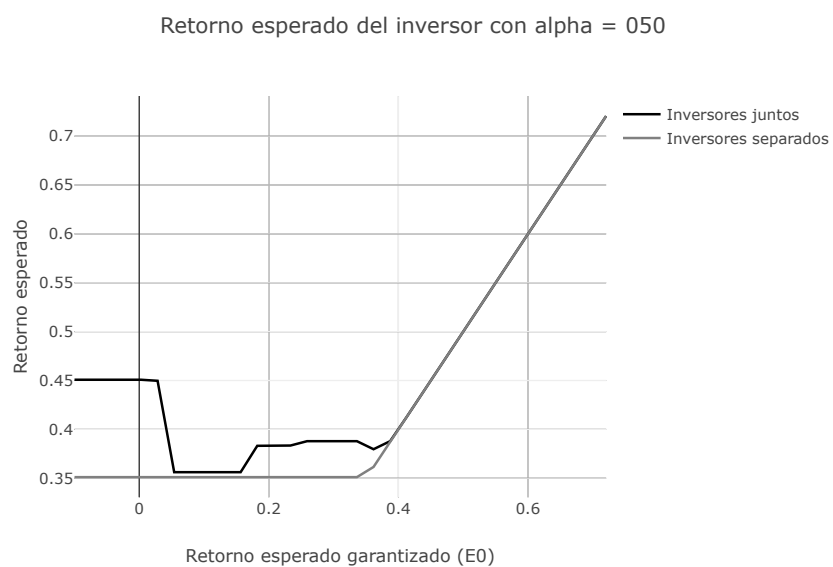


Figura C.9: Comparación del retorno esperado del inversor con  $\alpha = 0.50$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.



Figura C.10: Comparación del retorno esperado del inversor con  $\alpha = 0.99$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.



Figura C.11: Comparación del número de activos en los que invierte el inversor con  $\alpha = 0.05$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.

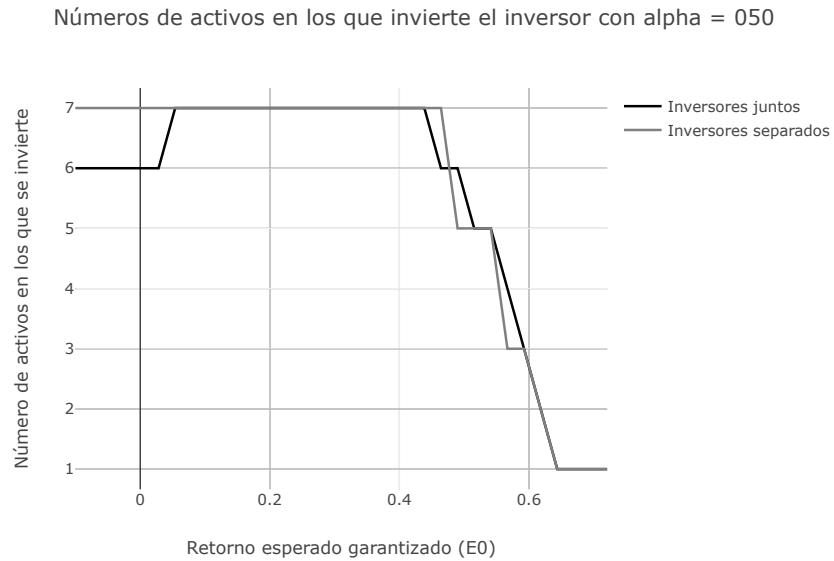


Figura C.12: Comparación del número de activos en los que invierte el inversor con  $\alpha = 0.50$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.



Figura C.13: Comparación del número de activos en los que invierte el inversor con  $\alpha = 0.99$  entre el modelo con un solo inversor y el modelo con varios inversores.

## C.2. Modelo IoT frente a modelo BoT

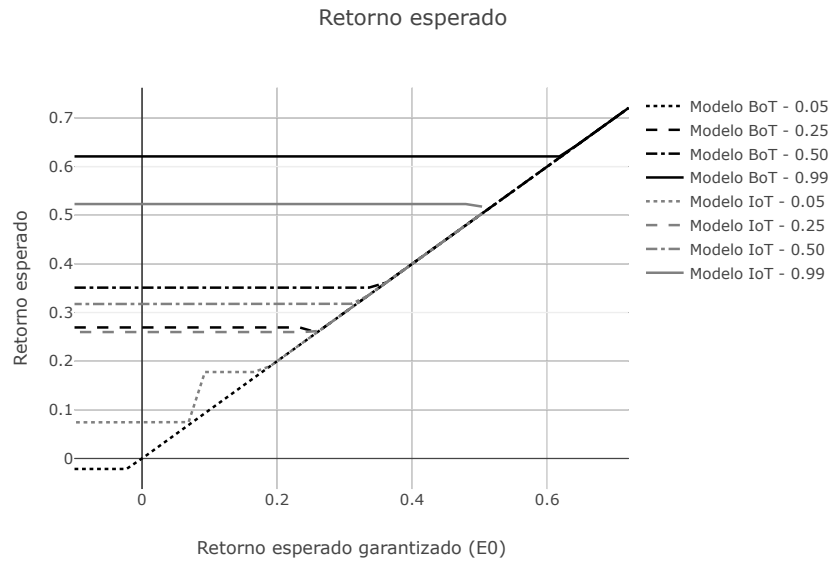


Figura C.14: Comparativa del retorno esperado en el modelo IoT frente al modelo BoT.

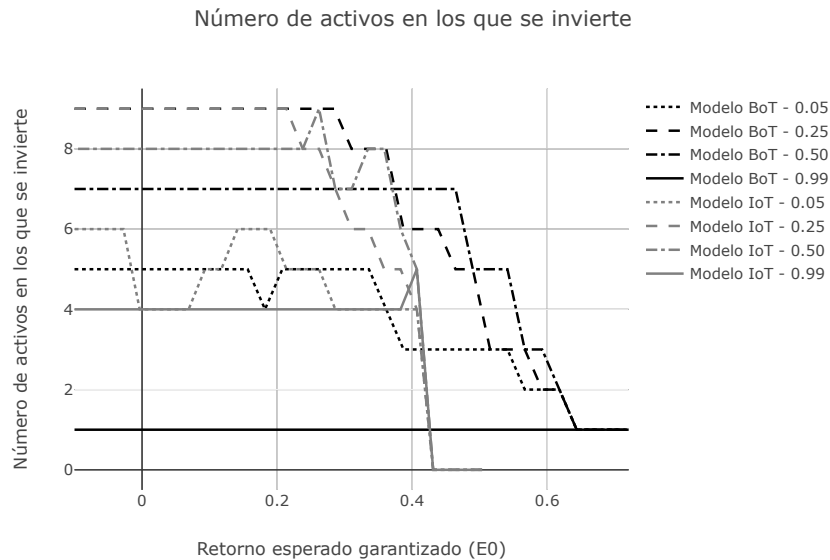


Figura C.15: Comparativa del número de activos en los que se invierte en el modelo IoT frente al modelo BoT.

# Bibliografía

- ACERBI, C. Y D. TASCHE (2002): “On the coherence of expected shortfall,” *Journal of Banking and Finance*, 26, 1487–1503.
- BAZARAA, M. S., H. D. SHERALI, Y C. SHETTY (2006): *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley.
- FOURER, R., D. M. GAY, Y B. W. KERNIGHAN (1990): “AMPL: A Mathematical Programming Language,” *Management Science*, 36, 519–554.
- GONZÁLEZ-DÍAZ, J. (2018): “Computational advances in RLT algorithms: RAPOSa, a freely available implementation,” in *International Symposium on Mathematical Programming, Bordeaux*.
- GONZÁLEZ-RODRÍGUEZ, B. (2017): *Introducción a la programación no lineal*, Universidad de Santiago de Compostela.
- LEAL, M., D. PONCE, Y J. PUERTO (2018): “An extended version of portfolio problems with two levels decision-makers: Optimal portfolio selection with Pricing decisions on transaction costs,” *arXiv e-prints*.
- LEYFFER, S. Y T. MUNSON (2010): “Solving multi-leader–common-follower games,” *Optimization Methods and Software*, 25, 601–623.
- MANSINI, R., W. OGRYCZAK, Y M. G. SPERANZA (2003): “On LP Solvable Models for Portfolio Selection,” *Informatica*, 14, 37–62.
- MARKOWITZ, H. (1952): “Portfolio Selection,” *The Journal of Finance*, 7, 77–91.
- ROCKAFELLAR, R. T. (2014): “Coherent Approaches to Risk in Optimization Under Uncertainty,” *Tutorials in Operations Research*, 38–61.
- ROCKAFELLAR, R. T. Y S. URYASEV (2000): “Optimization of Conditional Value-at-Risk,” *Journal of Risk*, 109, 89–92.

ROSSUM, G. V. Y F. L. J. DRAKE (2011): *The Python Language Reference Manual*, Network Theory LTD.

SHERALI, H. D. Y C. H. TUNCBILEK (1991): “A global optimization algorithm for polynomial programming problems using a Reformulation-Linearization Technique,” *Journal of Global Optimization*, 103, 225–249.

STACKELBERG, H. F. (2013): “Market Structure and Equilibrium,” *Journal of Economics*, 2, 21–41.

STAMBAUGH, F. (1996): “Risk and value at risk,” *European Management Journal*, 14, 612–621.

TAWARMALANI, M. Y N. SAHINIDIS (2005): “A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization,” *Mathematical Programming*, 2, 101–112.