Trabajo Fin de Máster

# Valores para Juegos con Externalidades: Revisión teórica y aplicación al ámbito parlamentario en el Parlamento Vasco

Gonzalo Arévalo Iglesias

**Máster en Técnicas Estadísticas**

**Curso 2017-2018**

# Propuesta de Trabajo Fin de Máster

| |
|---|
| **Título en galego:** Valores para Xogos con Externalidades: Revisión teórica e aplicación ao ámbito parlamentario no Parlamento Vasco |
| **Título en español:** Valores para Juegos con Externalidades: Revisión teórica y aplicación al ámbito parlamentario en el Parlamento Vasco |
| **English title:** Values for Games with Externalities: Theorical review and application to the parliamentary scope in the Basque Parliament |
| **Modalidad:** Modalidad A |
| **Autor/a:** Gonzalo Arévalo Iglesias, Universidade de Santiago de Compostela |
| **Director/a:** Jose María Alonso Meijide, Universidade de Santiago de Compostela; Mikel Álvarez Mozos, Universitat de Barcelona |
| **Breve resumen del trabajo:** Este trabajo constituye una revisión del modelo de Juegos Simples en Forma de Función de Partición y de su aplicación a juegos de Parlamento cuando el valor de una coalición depende de la estructura coalicional que se forme a su alrededor, y no sólo de los integrantes de la propia coalición. |

Don Jose María Alonso Meijide, Titular de Universidad de la Universidade de Santiago de Compostela, y don Mikel Álvarez Mozos, Profesor Lector de la Universitat de Barcelona, informan que el Trabajo Fin de Máster titulado

**Valores para Juegos con Externalidades: Revisión teórica y aplicación al ámbito parlamentario en el Parlamento Vasco**

fue realizado bajo su dirección por don Gonzalo Arévalo Iglesias para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, dan su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Santiago de Compostela, a 20 de Junio de 2018.

El director:

Don Jose María Alonso Meijide

El director:

Don Mikel Álvarez Mozos

El autor:

Don Gonzalo Arévalo Iglesias

# Agradecimientos

*Mi más sincero agradecimiento a los directores de este trabajo, Don Jose María Alonso Meijide y Don Mikel Álvarez Mozos, por su atención y dedicación constante y su continua voluntad de orientarme y ayudarme para que este trabajo llegase a buen puerto. Gracias también a todo el profesorado del máster y, en especial, a mis compañeros del campus de Santiago por estar siempre dispuestos a solucionar mis dudas, por absurdas que fuesen, sin el más mínimo rasgo de condescendencia. A todos, gracias por hacerlo todo más fácil.*

# Índice

**Prefacio** **12**

**1. Juegos en Forma de Función de Partición** **14**

1.1. Coaliciones incrustadas, función de partición y definición de un JFFP . 14

1.2. Externalidades en juegos cooperativos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

1.3. Imputaciones, dominación y solución en JFFP . . . . . . . . . . . . . . 17

1.4. Índices de Poder . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

1.5. Juegos Simples en Forma de Función de Partición . . . . . . . . . . . . 19

**2. Extensiones del Valor de Shapley** **20**

2.1. El valor de Shapley en juegos en forma de función característica . . . . 20

2.2. Extensiones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

2.2.1. Extensión de Myerson . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

2.2.2. Extensión de de Clippel y Serrano . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

2.2.3. Extensión de Macho-Stadler . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

**3. Extensión del Valor de Banzhaf** **35**

3.1. El valor de Banzhaf en juegos simples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

3.2. Extensiones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

3.2.1. El valor $\Lambda$ de Banzhaf: Obtención, propiedades y caracterización 38

3.2.2. El valor Ordinal $\Lambda$ de Banzhaf: Obtención, propiedades y caracterización . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

**4. Índice de Deegan-Packel e Índice de Bien Publico** **44**

4.1. Valores en función característica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

4.2. Extensiones en JFFP . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47

4.2.1. Propiedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

4.2.2. Obtención de los valores y caracterización . . . . . . . . . . . . . 50

**5. Aplicación a datos reales: El parlamento vasco** **52**

5.1. Valores por legislaturas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56

5.1.1. I Legislatura: 1984 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

5.1.2. II Legislatura: 1986 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59

5.1.3. III Legislatura: 1990 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61

5.1.4. IV Legislatura: 1994 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62

5.1.5. V Legislatura: 1998 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

5.1.6. VI Legislatura: 2001 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64

5.1.7. VII Legislatura: 2005 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65

5.1.8. VIII Legislatura: 2009 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66

5.1.9. IX Legislatura: 2012 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67

5.1.10. X Legislatura: 2016 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68

5.2. Índices de poder para los principales partidos e ideologías . . . . . . . . 69

5.2.1. Izquierda-Periferia . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70

5.2.2. Derecha-Periferia . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71

5.2.3. Izquierda-Centro . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73

5.2.4. Derecha-Centro . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74

5.3. Comparativa de valores para JSFFP y JSFFC . . . . . . . . . . . . . . . 75

5.3.1. 7 partidos y alta fragmentación . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 76

5.3.2. 6 partidos y un término medio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77

5.3.3. 5 partidos y alta concentración . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78

**6. Conclusiones** **79**

6.1. Conclusiones políticas: Un sistema de investidura marcadamente mayoritario . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79

6.2. Conclusiones matemáticas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80

**A. Códigos R** **82**

A.1. Código para el valor de Myerson . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82

A.2. Código para el Valor Libre de Externalidades . . . . . . . . . . . . . . . 84

A.3. Código para el valor de Macho-Stadler . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85

A.4. Código para el valor Λ de Banzhaf . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88

A.5. Código para el DP-Index y el PG-Index . . . . . . . . . . . . . . . . . . 98

**Referencias** **107**

# Valores para Juegos con Externalidades: Revisión teórica y aplicación al ámbito parlamentario en el Parlamento Vasco

Gonzalo Arévalo Iglesias

20 de Junio de 2018

## Prefacio

La Teoría de Juegos es una herramienta clásica a la hora de analizar el poder relativo de los agentes en los procesos de elección o de toma de decisiones en el ámbito político mediante la formación de coaliciones en el voto. En el ámbito de los juegos en forma de función característica se han propuesto índices basados en las contribuciones marginales de cada jugador, como el conocido valor de Shapley, el índice de Banzhaf o el índice Shapley-Shubik, estos dos últimos pensados especialmente para la subclase de juegos conocida como juegos simples, entre los cuales se sitúan los juegos de votación.[1]
En este ámbito se han propuesto además otros índices basados en el número relativo de coaliciones ganadoras minimales o de tamaño mínimo al que pertenece cada jugador, como el índice de Deegan-Packel o el índice de Bien Público o Public Good Index.
Sin embargo, pese a que estos índices cumplen una serie de propiedades deseables y funcionan bien cuando se aplican reglas de decisión de tipo cuota (generalmente la regla de mayoría absoluta) a la hora de determinar las coaliciones ganadoras (es decir, a la hora de efectuar la toma de decisiones), resultan claramente inadecuados cuando se emplea la norma de mayoría relativa o regla de pluralidad (Alonso-Meijide et al. 2017),

[1]Cuando hablamos de juegos de votación nos referimos al equivalente en un contexto general a un juego simple, es decir, a juegos en los que sólo la coalición ganadora obtiene un pago de 1 y el resto obtienen 0

que identifica como ganadora a la coalición que más votos (escaños en el contexto parlamentario) reúne. Esto es así porque, mientras que una coalición con mayoría absoluta siempre es ganadora, a la hora de formar mayorías relativas la estructura coalicional, es decir, la partición de $n$ jugadores que se forme, se vuelve relevante, dado que pueden surgir gobiernos en minoría en función de si el resto de jugadores se ponen o no de acuerdo para vetar estos gobiernos o para elegir a un candidato alternativo.

Otra de las limitaciones asociadas a los juegos simples en forma de función característica a la hora de analizar la toma de decisiones políticas en contextos parlamentarios o camerales es que estos no incluyen adecuadamente la abstención en el modelo, sino que únicamente se contempla la opción de votar a favor o votar en contra de una propuesta, y la abstención es, a efectos prácticos, considerada equivalente al voto en contra (Carreras y Magaña 2018). Felsenthal y Machover indican incluso que la abstención ha sido sistemáticamente evitada por los teóricos de juegos cuando se ha aplicado la teoría de juegos simples a la ciencia política (Felsenthal y Machover 1995).

Por último, dado que, como hemos indicado, los modelos de juegos simples sólo contemplan la opción de votar a favor o en contra de una propuesta, resultan inadecuados a la hora de modelar situaciones de elección en los que se presentan más de dos candidatos de manera simultánea, y por lo tanto hay más de dos alternativas de voto.

Lógicamente, solamente en situaciones con más de dos opciones de voto (ya sea porque se presentan tres o más candidatos o porque se permite la abstención) es posible que se formen mayorías relativas, por lo que las tres situaciones que acabamos de describir están directamente conectadas. Todas ellas se corresponden con modelos de juegos cooperativos con externalidades,[2] que no pueden ser modelados a través de funciones características. Para representarlas a través de un modelo matemático se emplean los juegos en forma de función de partición (Thrall y Lucas 1963), que tienen en cuenta los contextos coalicionales y, en juegos de votación, permiten a los jugadores elegir entre $r > 2$ alternativas de voto. A lo largo de este trabajo realizaremos una revisión de cómo algunos de los índices de poder anteriormente propuestos para el contexto de juegos en forma de función característica han sido extendidos a los juegos en forma de función de partición, permitiendo así analizar adecuadamente situaciones de elección política, modeladas por juegos de votación, en las que se permite la abstención, se presentan varios candidatos simultáneamente o se toman las decisiones en base a una regla de pluralidad, es decir, se permiten mayorías simples o relativas. En el apartado 1 se introducen los conceptos de juegos en forma de función de partición y de coalición incrustada, así como

[2]El concepto de externalidad se explica en detalle en la sección 1.2

toda la notación asociada.[3] En las secciones 2 y 3 se analizan algunas de las extensiones existentes para los índices de Shapley y de Shapley-Shubik y para el índice de Banzhaf, respectivamente. En la sección 4 presentamos dos extensiones muy recientes para los índices de Deegan-Packel y de Bien Público. Por último, en la sección 5 se aplican todos estos índices a un caso real: los resultados, en términos de escaños, de las elecciones al Parlamento Vasco o Eusko Legelbitzarra en las 10 elecciones que se han producido desde el año 1984. Analizamos qué nos dicen los valores obtenidos de la distribución del poder en el parlamento y de su evolución, y comparamos los índices entre sí, obteniendo conclusiones al respecto en la sección 6.

# 1. Juegos en Forma de Función de Partición

## 1.1. Coaliciones incrustadas, función de partición y definición de un JFFP

El concepto de juegos en función de partición (en adelante JFFP) fue introducido por primera vez en Thrall y Lucas (1963). Antes de poder definirlo es necesario explicar los conceptos de *coalicion incrustada* y de *función de partición*:
Sea $N = \{1, ..., n\}$ un conjunto de $n$ jugadores y sea $P = \{P_1, ..., P_r\}$ una partición cualquiera de $N$ formada por $1 \leq r \leq n$ coaliciones, donde $n$ es el cardinal de $N$. Denotaremos por $\mathcal{P}(N)$ el conjunto de todas las posibles particiones de $N$. $\mathcal{P}(N)$ es entonces el conjunto de todas las posibles estructuras coalicionales que existen para $N$ (Thrall y Lucas 1963).
Introduzcamos ahora el concepto de coalición incrustada: Una coalición incrustada en $N$ es un par $(S, P)$ donde $P \in \mathcal{P}(N)$ es la estructura coalicional o partición de $N$ en la que nos encontramos y $S \in P$ es la coalición activa, es decir, la coalición cuyo valor queremos evaluar en la partición $P$ (Alonso-Meijide et al. 2017). Denotaremos por $EC^N$ al conjunto de coaliciones incrustadas en $N$, de modo que $EC^N = \{(S, P) : P \in \mathcal{P}(N), S \in P\}$. Diremos además que un jugador $i \in N$ forma parte de la coalición incrustada $(S, P)$ si pertenece a la coalición activa $S$, es decir, si $P(i) = S$, siendo $P(i)$ el elemento de $P$ que contiene a $i$. Para indicar la unión entre coaliciones emplearemos la notación $S \cup \{i\}$ y $S \cup T$, y para indicar el conjunto de una coalición sin un jugador $i$ determinado o el

[3] La notación empleada en el ámbito de los juegos en forma de función de partición difiere notablemente entre autores. En este artículo se utilizará, de manera general, la notación empleada en Alonso-Meijide et al. (2017).

conjunto de una partición sin una coalición $S$ determinada emplearemos $S_{-i}$, $P_{-S}$. Podemos además definir la inclusión entre coaliciones incrustadas como sigue (Alonso-Meijide et al. 2017): Sea $N$ un conjunto finito y $(S,P),(T,Q) \in EC^N$ dos coaliciones incrustadas. Decimos que $(S,P)$ está incluido en $(T,Q)$ si:

$$(S,P) \subseteq (T,Q) \Longleftrightarrow S \subseteq T \text{ y } \forall\, T' \in Q_{-T},\ \exists\, S' \in P \text{ tal que } T' \subseteq S' \tag{1}$$

Lo que significa que $(S,P)$ está contenido en $(T,Q)$ si $S$ está contenido en $P$ y, para toda coalición contenida en $Q$ distinta de $T$, hay una coalición en $P$ que la contiene. La noción de inclusión entre coaliciones incrustadas resultará de gran importancia cuando estudiemos la extensión de los índices de Deegan-Packel y Bien Público en el apartado 4.2.

Por otro lado, una función de partición o función de pagos $v$ es una función que asigna a cada posible coalición incrustada $(S,P) \in EC^N$ un número real $v(S,P)$, es decir $v : EC^N \rightarrow R$, que se corresponde con el valor de la coalición activa $S$ cuando los jugadores se organizan de acuerdo a $P$. Obsérvese que mientras en la teoría clásica la función característica se define únicamente en términos de coaliciones y sus complementos, en la teoría de las funciones de partición se permite que la estructura complementaria $P_{-S}$ se divida en coaliciones de manera abitraria (Thrall y Lucas 1963). En el contexto de juegos de votación con $r > 2$ alternativas de voto o juegos simples en forma de función de partición, que presentaremos en el apartado 1.5, tendremos que $v(S,P) \in \{0,1\}$, de modo que la coalición ganadora en cada partición gana la elección y se lleva 1, mientras que el resto la pierden y se llevan 0. Por lo tanto, $v(N,N) = 1$. De manera equivalente, y en un contexto general, por convención $v(\emptyset,P) = 0$ (Alonso-Meijide et al. 2017).

Un juego en forma de función de partición (en adelante JFFP) es, entonces, un par $(N,v)$,[4] donde $N$ indica el número de jugadores y $v$ es la función de partición, que asigna un valor (0 o 1 en el contexto de juegos simples en forma de función de partición) a cada una de las coaliciones incrustadas que se pueden formar con $n$ jugadores (Thrall y Lucas 1963; Alonso-Meijide et al. 2017). Denotaremos por $\mathcal{G}^N$ el conjunto de JFFP con mismo conjunto $N$ de jugadores y por $\mathcal{G}$ el conjunto de JFFP con un conjunto de jugadores arbitrario. Equivalentemente, utilizaremos $G^N$ para referirnos al conjunto de juegos en forma de función característica con conjunto de jugadores $N$, y $G$ para referirnos al conjunto de juegos en forma de función característica con conjunto de jugadores arbitrario. Es interesante señalar que los JFFP no son necesariamente superaditivos. Es decir, los jugadores de una coalición pueden obtener mejores resultados dividiéndose

[4] Por simplicidad en la notación, a lo largo de este trabajo se hará referencia a cualquier JFFP $(N,v)$ denotándolo simplemente por su función de partición $v$ siempre que sea posible y no suponga la pérdida de información relevante.

en subcoaliciones menores, aunque esto no sucederá en juegos de votación, donde toda coalición que contenga a una coalición ganadora será a su vez ganadora. Por último, es importante señalar que Thrall y Lucas demuestran que los JFFP son una generalización de los juegos de von Neuman-Morgenstern (Thrall y Lucas 1963).

## 1.2. Externalidades en juegos cooperativos

Decimos que un juego cooperativo es un juego con externalidades si el pago que recibe una coalición $S$ depende de la organización del complementario $P_{-S}$. En otras palabras, en un juego con externalidades se cumple que $v(S, P) \neq v(S, P')$ para al menos dos particiones $P, P' \in \mathcal{P}$. Complementariamente, decimos que un juego cooperativo es un juego sin externalidades si el pago obtenido por una coalición $S$ no depende de la estructura coalicional $P$, es decir, si y sólo si $v(S, P) = v(S, P'),\ \forall\ P, P' \in \mathcal{P}$ (Macho-Stadler et al. 2007).

Supongamos que $i \in S \in P$ planea unirse a $T \in P$, otra coalición de la misma partición tal que $S \cap T = \emptyset$. El efecto total del movimiento de $i$ sobre $S$ puede ser descompuesto en dos (De Clippel y Serrano 2007): En primer lugar, $i$ abandona $S$ y se establece por sí solo, dando lugar a la partición $\{S_{-i}, \{i\}, P_{-S}\}$. El efecto de este movimiento sobre $S$ será, por lo tanto, $v(S, \{S, P_{-S}\}) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, \{i\}, P_{-S}\})$. En segundo lugar, $i$ se une a $T$, dando lugar a una nueva partición: $\{S_{-i}, T \cup \{i\}, P_{-S,-T}\}$. El efecto de este segundo movimiento es $v(S_{-i}, \{S_{-i}, \{i\}, P_{-S}\}) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, T \cup \{i\}, P_{-S,-T}\})$.

El primer movimiento se identifica con lo que De Clippel y Serrano denominan la *contribución marginal intrínseca* de $i$ a $S$ en $P$. El segundo es el efecto de externalidad, relacionado con el cambio de valor de $S_{-i}$ cuando $i$ se une a $T$ (De Clippel y Serrano 2007).

De manera general, las externalidades se identifican con el cambio de valor de una coalición cuando la estructura coalicional, es decir, la partición en la cual que se ubica, cambia. Hablamos de externalidades positivas si $v(S, P) \geq v(S, P')$, siendo $P$ más grueso que $P'$, y respectivamente de externalidades negativas si es más fino. Decimos que $P$ es más grueso que $P'$ (y respectivamente $P'$ más fino que $P$) cuando todo elemento de $P'$ es un subconjunto de algún elemento de $P$.

Si $v(S, P) = v(S, P'), \quad \forall\ (S, P) \in EC^N, \forall\ (S, P') \in EC^N$, no hay externalidades y por lo tanto la función de partición $v(S, P)$ se corresponde con la función característica $v(S)$ asociada a la coalición activa en $(S, P)$.

## 1.3. Imputaciones, dominación y solución en JFFP

Los conceptos de *imputación, dominación* y *solución*, tal y como se encuentran formulados en la teoría de juegos clásica, son extensibles al contexto de los JFFP, y nos permiten incluso definir el núcleo de juego en forma de función de partición. Si bien este trabajo se centra en la extensión de los índices de poder y no de soluciones de tipo conjunto, resulta interesante definir brevemente estos conceptos.

### Imputaciones en JFFP

Antes de entrar a definir qué es una imputación, es necesario introducir el concepto de *valor*,[5] tal y como lo presentan Thrall y Lucas (Thrall y Lucas 1963). Sea $M$ un subconjunto no vacío de $N$, podemos definir el valor de $M$, $\mathcal{V}(M)$ como:[6]

$$\mathcal{V}(M) = \min_{\{P|M\in P\}} v(M,P)$$

Es decir, el pago más bajo para la función de partición que obtenga la coalición $M$ entre todas las particiones en las que se forma. Es interesante señalar que la función $\mathcal{V} : 2^N \to R$ no necesita cumplir la condición de superaditividad. Por ejemplo, cuando dos subconjuntos de $N$, sean $M_1$ y $M_2$, representan en la arena política a dos partidos con dos ideologías claramente opuestas, su colaboración puede verse castigada con una disminución de sus apoyos, y por lo tanto el valor de su unión es menor que la suma de sus respectivos valores. Una vez clarificado el concepto de valor, podemos explicar la idea de imputación.
Un vector $a = (a_1, ..., a_n)$ es una imputación si cumple las propiedades de racionalidad individual (2) y factibilidad (3):

$$a_i \geq \mathcal{V}(\{i\}), \quad \forall i \in N \tag{2}$$

$$\sum_{i\in N} a_i = \sum_{P_j\in P} v(M,P_j) \quad \text{para algún } P \in \mathcal{P} \tag{3}$$

A la hora de interpretarlo, una imputación no es otra cosa que un posible conjunto de pagos individuales a los jugadores al final del juego. Como veremos más adelante

[5] A lo largo de este trabajo se empleará de modo general el término *valor* como sinónimo de *índice de poder*. Sin embargo, el concepto de valor propuesto por Thrall y Lucas, y que vamos a introducir en este apartado, no se corresponde con los índices de poder, que introduciremos en el apartado 1.4.

[6] No confundir con $v(S,P)$, la función de partición.

una imputación es una solución si cumple determinadas características. Al igual que en la teoría clásica, el núcleo es una imputación del JFFP.

### Dominación en en JFFP

Sean $a$ y $b$ dos imputaciones y $M$ un subconjunto no vacío de $N$, decimos que $a$ domina a $b$ a través de $M$ y denotamos $a \underset{M}{dom}\ b$ si:

$$a_i > b_i \quad \forall\ i \in M \tag{4}$$

$$\sum_{i \in M} a_i \leq \mathcal{V}(M) \tag{5}$$

$$\sum_{i \in N} a_i = \sum_{S_j \in P} v(S_j, P) \quad \text{para algún } P \in \mathcal{P} \text{ con } M \in P \tag{6}$$

La condición (4) se llama M-Preferible e indica que cada jugador de $M$ prefiere su pago $a$ a su pago en $b$. La condición (5) se llama M-Efectiva e indica que $M$ tiene asegurado obtener al menos lo que obtiene en $a$ haga lo que haga $N - M$. Por último, la condición (6) se llama M-Realizable e indica que $a$ puede surgir cuando $M$ actúa como una coalición. Diremos que $a$ domina a $b$, y denotaremos como $a\ dom\ b$ si existe un subconjunto de $N$, $M$, a través del cual $a \underset{M}{dom}\ b$.

### Soluciones en JFFP

Sea $A$ un conjunto de imputaciones en el juego $(N, v)$, y sea $R$ el conjunto formado por todas las imputaciones del juego, definimos:

$$\underset{M}{dom}\ A = \{b \in R \mid a \underset{M}{dom}\ b \text{ para algún } a \in A\}$$
$$dom\ A = \{b \in R \mid a\ dom\ b \text{ para algún } a \in A\}$$

Un conjunto de imputaciones $K$ es una solución si y sólo si se cumple que:

$$K \cap dom\ K = \emptyset \tag{7}$$

$$K \cup dom\ K = R \tag{8}$$

La condición (7) indica que si $a$ y $b$ están en el conjunto $K$, ninguna domina a la otra. La condición (8) indica que si $c$ no está en el conjunto $K$, existe un $a \in K$ que domina a $c$. El conjunto que contiene a todas las imputaciones no dominadas de $R$ es el *núcleo*, que está contenido en todas las soluciones y es un conjunto más estable que cualquiera de ellas. Podemos definir matemáticamente el núcleo como $C = R_{-dom\ R}$ (Thrall y Lucas 1963).

## 1.4. Índices de Poder

Un índice de poder o función de valor es una función del espacio de JFFP $\mathcal{G}$ en el espacio de pagos $R^N$ (Myerson 1977). Sea $f$ una función de valor, interpretaremos el valor $f_i(v)$ como el pago esperado por parte del jugador $i$ en el juego $v$. Para que la función aproxime los pagos esperados del modo más realista posible, es necesario pedirle que satisfaga determinadas propiedades, que varían en función del índice de poder en cuestión. La mayoría de los índices de poder empleados en el contexto de JFFP son extensiones de los índices de poder clásicos más conocidos, como el valor de Shapley o el índice de Banzhaf, y por lo tanto las propiedades que se les requieren son extensiones de las mismas propiedades que estos índices cumplen en los juegos en forma de función característica. En los siguientes apartados estudiaremos algunas de estas extensiones.

## 1.5. Juegos Simples en Forma de Función de Partición

Para terminar este primer apartado vamos a definir la subclase de JFFP en la que se centra este trabajo: Los Juegos Simples en Forma de Función de Partición (en adelante JSFFP). Estos juegos son una extensión del modelo de Juegos Simples, en el que la función característica sólo contiene unos y ceros en función de si la coalición en cuestión es ganadora o perdedora, al contexto de juegos con externalidades. Por ello, comparten sus propiedades principales. Veamos la definición:

*Un JFFP $v \in \mathcal{G}$ es un Juego Simple en Forma de Función de Partición si cumple las siguientes condiciones*(Álvarez-Mozos y Tejada 2015; Alonso-Meijide et al. 2017):

$$v(S,P) \in \{0,1\}, \quad \forall\ (S,P) \in EC^N$$
$$v(N,N) = 1$$
$$v(S,P) \leq v(T,Q), \quad \forall\ (S,P),(T,Q) \in EC^N \text{ tal que } (S,P) \subseteq (T,Q)$$

La primera condición indica que toda coalición incrustada es o bien ganadora (recibe

pago 1) o bien perdedora (recibe pago 0). La segunda indica que la gran coalición siempre es ganadora. La tercera es una propiedad de monotonía: Una coalición incrustada ganadora $S$ no puede volverse perdedora cuando se unen más jugadores y el resto de la estructura coalicional se mantiene organizada del mismo modo o la partición $P$ se fragmenta. Denotamos por $\mathcal{SG}^N$ al conjunto de juegos simples en forma de función de partición con conjunto de jugadores $N$, y por $\mathcal{SG}$ al conjunto de juegos simples en forma de función de partición con conjunto de jugadores arbitrario, siendo $\mathcal{SG}$ un subconjunto de $\mathcal{G}$ que además contiene a todos los juegos coalicionales simples. Equivalentemente, emplearemos $SG^N$ y $SG$ para hacer referencia a los conjuntos de juegos simples en forma de función característica con conjunto de jugadores $N$ y conjunto de jugadores arbitrario, respectivamente.
A lo largo de este trabajo se estudiarán algunos índices especialmente diseñados para este tipo de juegos y otros válidos para todos los JFFP en general, pero en todos los casos con la intención posterior de aplicar los índices a juegos de votación con externalidades, que son modelados a través de Juegos Simples en Forma de Función de Partición.

# 2. Extensiones del Valor de Shapley

## 2.1. El valor de Shapley en juegos en forma de función característica

El valor de Shapley (Shapley 1953) en juegos con función característica se calcula promediando los vectores de contribuciones marginales asociados a todas las posibles ordenaciones de los jugadores. La expresión matemática más habitual (existen algunas equivalentes) es la siguiente:

$$Sh_i(v) = \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} m_i\pi(N, v) \tag{9}$$

Donde $\Pi^N$ es el conjunto de posibles permutaciones de $N$ elementos, y $m_i\pi$ es la contribución marginal del jugador $i$ en la permutación $\pi$. El valor $Sh_i(v)$ se puede interpretar como la expectativa de ganancia/pérdida del jugador $i$ al participar en el juego $v$.
Por otro lado, el índice de poder de Shapley-Shubik (Shapley y Shubik 1954), ideado

para el contexto de juegos simples, se basa en el número relativo de coaliciones en las que un jugador es *pivote* en un juego simple, es decir, el número relativo de *cambios* [7] para el jugador $i$. Sea $W_i$ el conjunto de cambios del jugador $i$, el valor de Shapley-Shubik se obtiene como sigue:

$$\tilde{\mathcal{S}}_i(v) = \sum_{S \in W_i} \frac{(|S|-1)!\,(|N|-|S|)!}{|N|!}, \quad \forall\, i \in N \tag{10}$$

El índice obtenido puede interpretarse como la probabilidad de que una coalición $S \subseteq N$ al azar sea un cambio para el jugador $i$, es decir, de que el jugador $i$ sea pivote en $S \subseteq N$. Es fácil de ver que, en juegos simples, ambos índices (Shapley y Shapley-Shubik) son equivalentes, puesto que si $i$ es pivote en una permutación, entonces su contribución marginal será 1 y la del resto de los jugadores será 0, y en consecuencia el número relativo de cambios para el jugador $i$ será igual al promedio de sus contribuciones marginales. Por ello ambos índices serán tratados de manera equivalente en este trabajo.
En cuanto a los propiedades que verifica el valor de Shapley, su caracterización original es la siguiente:

*Teorema 1 (Shapley 1953): Existe un único valor en $G^N$ que verifica las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad, y ese es el valor de Shapley.*

Es decir, si $f$ es una regla de reparto en el conjunto de juegos en forma de función característica con conjunto de jugadores $N$, $\mathcal{G}^N$, que verifica las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad, entonces necesariamente $f = Sh$. Algunos autores han propuesto caracterizaciones alternativas del valor de Shapley basadas en otras propiedades, y criticando la propiedad de aditividad:

*Teorema 2 (Young 1985): Existe un único valor en $G^N$ que verifica las propiedades de eficiencia, simetría y monotonía fuerte, y ese es el valor de Shapley.*

*Teorema 3 (Myerson 1980): Existe un único valor en $G^N$ que verifica las propiedades de eficiencia y contribuciones equilibradas, y ese es el valor de Shapley.*

A continuación se caracterizan las citadas propiedades en juegos con función característica:

[7] Coaliciones ganadoras que contienen al jugador $i$ y que dejarían de ser ganadoras si el jugador $i$ las abandonase.

### Eficiencia en JFFC

La propiedad de *eficiencia* indica que la suma de las asignaciones de los $n$ jugadores ha de coincidir con el valor de la gran coalición. En otras palabras, en juegos aditivos o superaditivos, debe repartirse toda la ganancia. En el caso de los juegos simples esto implica que la suma de los valores de todos los jugadores ha de ser igual a 1. La formulación matemática de la propiedad es la siguiente:

*Un índice de poder $f$ en $G^N$ satisface Eficiencia si cumple que:*

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N), \quad \forall v \ \in G^N \tag{11}$$

### Jugador nulo en JFFC

Sea $i \in N$ un jugador en un juego $v \in G^N$, decimos que $i$ es un *jugador títere* si no aporta beneficio adicional al unirse a una coalición, es decir, si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i)$, para todo $S \subset N_{-i}$. Si además $v(i) = 0$, se dice que $i$ es un *jugador nulo*. La propiedad de jugador nulo indica que un jugador de este tipo nunca va a recibir más de su pago individual, es decir, 0:

*Un índice de poder $f$ en $G^N$ satisface Jugador Nulo si cumple que:*

$$f_i(v) = 0, \quad \forall v \in G^N, \ \forall \ i \in N \text{ jugador nulo} \tag{12}$$

### Simetría en JFFC

La propiedad de *simetría* indica que si dos jugadores son simétricos, es decir, intercambiables en el juego sin que su resultado se vea alterado, deben recibir el mismo pago. En juegos de votación, esto puede ser así incluso si no cuentan con el mismo número de votos. La propiedad se formula como sigue:

*Un índice de poder $f$ en $G^N$ satisface Simetría si cumple que:*

$$f_i(v) = f_j(v), \quad \forall \ v \in G^N, \ \forall \ i, j \in N \text{ simétricos} \tag{13}$$

### Aditividad en JFFC

Un índice de poder verifica la propiedad de *Aditividad* o *Linealidad* si el pago que reciben los jugadores en un juego es igual a la suma de los pagos obtenidos si el juego se descompone en suma de dos. La formulación matemática es la siguiente:

*Un índice de poder $f$ en $G^N$ satisface Aditividad si cumple que:*

$$f(v+w) = f(v) + f(w), \quad \forall\ v, w \in G^N \tag{14}$$

### Monotonía Fuerte en JFFC

La propiedad de *Monotonía Fuerte* hace referencia a la comparación de los valores del índice entre juegos. Concretamente indica que si la contribución marginal, coalición por coalición, de un jugador a todas las coaliciones de un juego es mayor o igual a su contribución marginal a todas las coaliciones de otro, entonces su pago en el primer juego ha de ser mayor o igual a su pago en el segundo. La formulación es la siguiente:

*Un índice de poder $f$ en $G^N$ satisface Monotonía Fuerte si cumple que:*

$$f_i(w) \geq f_i(v), \quad \forall\ v, w \in\ G^N \text{ tales que } w(S \cup \{i\}) - w(S) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S),\ \forall\ i \in N \tag{15}$$

### Contribuciones equilibradas en JFFC

Por último, la propiedad de *contribuciones equilibradas* indica que, para cada par de jugadores $i, j \in N$, el cambio en la utilidad del jugador $i$ si $j$ abandona el juego es similar al cambio en la utilidad del jugador $j$ si $i$ abandona el juego. La propiedad se formula como sigue:

*Un índice de poder $f$ en $G^N$ satisface Contribuciones Equilibradas si cumple que:*

$$f_i(N,v) - f_i(N_{-j}, v_{-j}) = f_j(N,v) - f_j(N_{-i}, v_{-i}), \quad \forall\ (N,v) \in G^N,\ \forall\ i,j \in N \tag{16}$$

Donde los juegos $(N_i, v_{-i})$ y $(N_{-j}, v_{-j})$ se forman a partir del juego $(N, v)$ cuando el jugador $i$ o el jugador $j$ abandonan el juego.

En lo que resta de este apartado introduciremos tres extensiones del valor de Shapley y/o el valor de Shapley-Shubik al contexto de los JFFP, las debidas a Myerson, de Clippel & Serrano y Macho-Stadler (Myerson 1977; de Clippel y Serrano 2007; Macho-Stadler et al. 2007). Todas ellas parten de los índices presentados en este apartado a los juegos en forma de función de partición, y todas ellas son extensiones consistentes del valor de Shapley a los contextos de JFFP o JSFFP.

## 2.2. Extensiones

### 2.2.1. Extensión de Myerson

Myerson (Myerson 1977) obtiene una extensión natural del valor de Shapley a los JFFP a partir de la extensión de los axiomas de eficiencia, anonimidad y aditividad, no así de la propiedad de jugador nulo. Su índice está pensando para el contexto de JFFP en general, y es por lo tanto también valido, pese a no estar específicamente diseñado para ello, en el contexto de JSFFP. La extensión propuesta por Myerson de estas las tres propiedades mencionadas al contexto de JFFP es la siguiente:

#### Eficiencia en JFFP: El axioma *soporte*

Debemos desarrollar primero cierta notación. En primer lugar, para todo $P$ y $\tilde{P}$ contenidos en $\mathcal{P}$ definimos $P \wedge \tilde{P}$ como:

$$P \wedge \tilde{P} = \{S \cap \tilde{S} \mid S \in P, \tilde{S} \in \tilde{P}, S \cap \tilde{S} \neq \emptyset\}$$

Es decir, como la intersección no vacía de dos coaliciones contenidas en dos particiones distintas del conjunto $\mathcal{P}$.

Por otro lado, dados $v \in \mathcal{G}^N$ y $S \in C^N$,[8] decimos que $S$ es un *soporte* en $v$ si y sólo si $v(\tilde{S}, \tilde{P}) = v(\tilde{S} \cap S, \tilde{P} \wedge \{S, N_{-S}\}),\ \forall\ (\tilde{S}, \tilde{P}) \in EC^N$. La extensión de la propiedad de Eficiencia (17) indica que toda la riqueza disponible debe dividirse entre los miembros de un *soporte*:

[8] $C^N$ no es otra cosa que el conjunto de coaliciones que se pueden formar con $n$ jugadores o, en otras palabras, el conjunto de todos los subconjuntos de $N$.

*Un índice de poder $f$ en $\mathcal{G}^N$ satisface Eficiencia si cumple que:*

$$\sum_{i \in S} f_i(v) = v(N, N), \quad \forall\ v \in R^{EC^N},\ \forall\ S \in C^N \text{ si } S \text{ es un } \textit{carrier}. \tag{17}$$

Algunos autores también han denominado a esta propiedad de Eficiencia en JFFP definida por Myerson el axioma *soporte*.

### Anonimidad en JFFP

Supongamos que $\pi : N \to N$ es una permutación del conjunto $N$ de jugadores. Podemos entender también $\pi$ como una permutación de $C^N$ y $EC^N$ del siguiente modo:

$$\pi(S) = \{\pi(i) | i \in S\}, \quad \forall\ S \in C^N \text{ y}$$
$$\pi(S^1, \{S^1, ..., S^k\}) = (\pi(S^1), \{\pi(S^1), ..., \pi(S^k)\}), \quad \forall\ (S^1, \{S^1, ..., S^k\}) \in EC^N$$

Esto es, la permutación de cada coalición incrustada se obtiene sin más que permutar la coalición activa y cada una de las $k$ coaliciones que forman su estructura coalicional $P$. Entonces, para cualquier función de partición $v \in \mathcal{G}^N$ podemos definir $(\pi \circ v) \in \mathcal{G}^N$ como el juego resultante de permutar las etiquetas de los jugadores con respecto a $\pi$, por lo que la siguiente igualdad es inmediata:

$$(\pi \circ v)(\pi(S, P)) = v(S, P), \quad \forall\ (S, P) \in EC^N$$

La propiedad de Anonimidad en JFFP según Myerson indica entonces que el índice no debe variar cuando reetiquetamos a los jugadores de este modo.

*Un índice de poder $f$ en $\mathcal{G}^N$ satisface Anonimidad si cumple que:*

$$f_i(v) = f_{\pi(i)}(\pi \circ v), \quad \forall\ v \in \mathcal{G}^N,\ \forall\ i \in N \tag{18}$$

### Aditividad en JFFP

La extensión de la propiedad de Aditividad o Linealidad a JFFP según Myerson indica que la suma de dos juegos en forma de función de partición implica la suma de sus valores:

*Un índice de poder $f$ en $\mathcal{G}^N$ satisface Aditividad si:*

$$f(v+w) = f(v) + f(w), \quad \forall\, v, w \in \mathcal{G}^N \tag{19}$$

Como vemos la extensión de esta propiedad es absolutamente análoga a la propiedad original.

### Obtención del valor de Myerson

*Teorema 4 (Myerson 1977): Existe un único valor en $\mathcal{G}^N$ que satisface Eficiencia, Anonimidad y Aditividad en JFFP.*

Este valor es la extensión de Myerson al valor de Shapley y se obtiene como vemos a continuación:

$$\begin{gathered} Sh_i^M(v) = \sum_{(S,P)\in EC^N} (-1)^{|P|-1} \times (|P|-1)! \times \\ \times \left( \frac{1}{|N|} - \sum_{T\in P \ni T \neq S, i\notin T} \frac{1}{(|P|-1)(|N|-|T|)} \right) \times v(S,P) \end{gathered} \tag{20}$$

Como vemos, el valor calcula unos coeficientes para cada coalición incrustada en $EC^N$ y obtiene $Sh_i^M$ como la suma de los productos de cada coeficiente por su $v(S,P)$ correspondiente. En JSFFP el índice se obtendrá entonces como la suma de los coeficientes de las coaliciones incrustadas ganadoras. Para demostrar que $Sh^M$ es una extensión consistente del valor de Shapley, Myerson propone lo siguiente: Supongamos que $v \in \mathcal{G}^N$ y $w \in G^N$, función de partición y función característica respectivamente, satisfacen $v(S,P) = w(S),\ \forall\ (S,P) \in EC^N$. Entonces $Sh^M(v) = Sh(w)$.

### Jugador nulo en JFFP

Myerson no extiende el axioma de Jugador Nulo satisfecho por el valor de Shapley en el contexto de juegos con función característica, si bien, como ya hemos visto, su valor demuestra ser una extensión consistente del valor de Shapley. Un posible modo de extender el axioma de Jugador Nulo a JFFP es el propuesto por Skibski et al. (2015). En base a estos autores, al extender la propiedad de Jugador Nulo al contexto de juegos en forma de función de partición, esta implica que los jugadores sin impacto en el valor de ninguna coalición incrustada ganadora deben obtener cero. Decimos que un jugador $i \in N$ en un JFFP $v \in \mathcal{G}^N$ es un jugador nulo si $v(S,P) - v(S, \{P_{-S,-T}, S_{-i}, T \cup \{i\}\}) = 0, \ \forall \ (S,P) \in EC^N$ tal que $i \in S$. La propiedad se formula como sigue:

*Un índice de poder $f$ en $\mathcal{G}^N$ satisface Jugador Nulo si cumple que:*

$$f_i(v) = 0, \quad \forall \ i \text{ jugador nulo} \tag{21}$$

#### Críticas

Bolger (Bolger 1986) realiza una crítica al valor propuesto por Myerson basada en el concepto de monotonía en JFFP, concretamente en juegos de votación con $r > 2$ candidatos. Un juego de estas características es monótono cuando $v(S,P) = 1$ implica que $v(S \cup \tilde{S}, P') = 1$, siendo $P' = \{S \cup \tilde{S}, T^1_{-\tilde{S}}, ..., T^m_{-\tilde{S}}\}$. Para Bolger, es natural exigir que en juegos de este tipo un índice de poder $f$ satisfaga que $f_i(v) \geq 0, \ \forall \ i \in N$, propiedad que no satisface el valor debido a Myerson.

### 2.2.2. Extensión de de Clippel y Serrano

De Clippel y Serrano (2007) se basan en los axiomas de Anonimidad, Eficiencia y Marginalidad para proponer tanto un Valor Libre de Externalidades basado en una propiedad de Marginalidad como unas cotas para el valor de cada jugador basadas en una propiedad de Monotonía. La interpretación de ambas soluciones es complementaria. La combinación de ambos tipos de resultados puede ayudar a entender de qué modo afectan las externalidades a los jugadores en estos contextos.

#### Obtención de cotas en los valores

Las extensiones de los axiomas de Eficiencia (17) y Anonimidad (18) ya han sido explicadas en la sección 2.2.1 de este trabajo. Es en la extensión de la condición de Marginalidad donde radican la novedad y el interés del enfoque de los autores. Definamos primero el concepto de contribución marginal de un jugador a una coalición en

el contexto de JFFP, algo que ya ha sido introducido en la sección 1.2. La contribución marginal de un jugador $i$ a una coalición $S$ equivale, tanto en juegos en forma de función característica como en JFFP, a la pérdida que sufren los miembros de $S$ si $i$ abandona la coalición. En el contexto que nos ocupa, el de juegos con externalidades, esta cantidad dependerá de cómo se organice la estructura coalicional $P$. En JSFFP la contribución marginal valdrá 1 o 0 en función de si el jugador $i$ es o no es un jugador pivote en $(S, P)$.
En un primer intento de extender el axioma de marginalidad al contexto de juegos con externalidades, De Clippel y Serrano proponen el siguiente axioma de *Marginalidad Débil* en JFFP:

*Un índice $f$ en $\mathcal{G}^N$ verifica el axioma de Marginalidad Débil si, dadas dos funciones de partición $v$ y $w$ en $\mathcal{G}^N$, se cumple que si:*

$$v(S,P) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, T \cup \{i\}\}, P_{-S,-T}\}) = w(S,P) - w(S_{-i}, \{S_{-i}, T \cup \{i\}\}, P_{-S,-T}\}),$$
$$\forall\ (S,P) \in EC^N \text{ tal que } i \in S,\ \forall\ T \in P, T \neq S \tag{22}$$

*Entonces $f_i(v) = f_i(w)$*

Sin embargo, los autores demuestran que para funciones de partición de tipo general no hay modo de obtener un único valor que cumpla los axiomas de Eficiencia, Anonimidad y Marginalidad Débil. Sí es posible, sin embargo, obtener un único valor para JFFP simétricos. Una función de partición es simétrica si $\pi(v(S,P)) = v(S,P)$, $\forall\ (S,P) \in EC^N,\ \forall\ \pi \in \Pi^N$ donde $\Pi^N$ es el conjunto de permutaciones del conjunto $N$ de jugadores.
En esta clase de juegos sí podemos obtener un valor único que satisfaga los axiomas anteriormente indicados:

*Proposición 1 (De Clippel y Serrano 2007): Sea $f$ un valor que satisface Anonimidad, Eficiencia y Marginalidad Débil, sea $u$ una función de partición simétrica y $w$ una función característica. Entonces $f_i(u + w) = \frac{u(N)}{n} + Sh_i(w),\ \forall\ i \in N$.*

Los autores refuerzan el axioma de Marginalidad Débil extendiendo la propiedad de Monotonía, lo que no permite obtener un único valor para JFFP de carácter general, pero sí nos lleva a la determinación de cotas alrededor de un valor que cumple los axiomas de Eficiencia, Marginalidad y Monotonía. Estudiemos en primer lugar la extensión de la propiedad de Monotonía, que resulta intuitivamente equivalente a la propiedad de Monotonía Fuerte en juegos en forma de función característica vista en (15). La propiedad de Monotonía extendida a JFFP indica que, si para una función de partición $v$ el vector de contribuciones marginales de un jugador $\{i\}$ a las diferentes coaliciones, sea cual sea su complemento $P_{-S}$, domina coordenada por coordenada al vector equivalente en una función de partición distinta $w$, entonces el pago al jugador $i$ en $v$ debe ser mayor o igual al pago al mismo jugador en $w$. Veamos la formulación matemática:

*Un índice de poder $f$ en $\mathcal{G}^N$ satisface Monotonía si, para todo par $v, w$ de funciones de partición, si se cumple:*

$$v(S,P) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, T \cup \{i\}\}, P_{-S,-T}\}) \geq w(S,P) - w(S_{-i}, \{S_{-i}, T \cup \{i\}\}, P_{-S,-T}\}),$$
$$\forall\ (S,P) \text{ tal que } i \in S,\ \forall\ T \in P, T \neq S \tag{23}$$

*Entonces $f_i(v) \geq f_i(w)$.*

La cuestión ahora es cómo obtener las cotas en torno a los pagos de cada jugador basándonos en este axioma de Monotonía para JFFP, junto a los axiomas de Eficiencia y Anonimidad. El enfoque empleado por los autores consiste en descomponer las funciones de partición en la suma de una función de partición simétrica y una función característica, tal y como hicimos al obtener el valor basado en marginalidad débil para JFFP simétricos.
Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ los conjuntos de funciones de partición simétricas y de funciones características respectivamente. Para cada $v \in \mathcal{G}^N$, sea $M_i(v)$ el conjunto de pares $(u, w)$ contenidos en $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ tal que:

$$v(S,P) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, T \cup \{i\}, P_{-S,-T}\}) \geq [u(S,P) - u(S_{-i}, \{S_{-i}, T \cup \{i\}, P_{-S,-T}\})] +$$
$$[w(S) - w(S_{-i})], \quad \forall\ (S,P) \text{ tal que } i \in S,\ \forall\ T \in P, T \neq S$$

El axioma de Monotonía y la Proposición 1 implican que $f_i(v) \geq \frac{u(N)}{n} + Sh_i(w)$ para todo par $(u, w) \in M_i(v)$, por lo que resolviendo el problema de programación lineal resultante obtenemos que la mejor cota inferior posible es la siguiente:

$$\mu_i(N,v) = \max_{(u,w) \in M_i(v)} \left[\frac{u(N)}{n} + Sh_i(N,w)\right] \tag{24}$$

Equivalentemente, sea $N_i(v)$ el conjunto de pares $(u, w) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ tal que:

$$v(S,P) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, T \cup \{i\}, P_{-S,-T}\}) \leq [u(S,P) - u((S_{-i}, \{S_{-i}, T \cup \{i\}, P_{-S,-T}\})]+$$
$$[w(S) - w(S_{-i})], \quad \forall\ (S,P) \text{ tal que } i \in S,\ \forall\ T \in P, T \neq S$$

Siguiendo la misma lógica obtenemos que la mejor cota superior posible es la siguiente:

$$\nu_i(v) = \min_{(u,w)\in N_i(v)} \left[\frac{u(N)}{n} + Sh_i(w)\right] \tag{25}$$

Y por lo tanto podemos afirmar que, si $f$ es un valor que satisface Anonimidad, Eficiencia y Monotonía, entonces:

$$f_i(v) \in [\mu_i(v), \nu_i(v)], \quad \forall\ i \in N \tag{26}$$

**Valor Libre de Externalidades**

Para obtener el Valor Libre de Externalidades es necesario reforzar el axioma de Marginalidad Débil de un modo distinto. Para ello volveremos un momento sobre el concepto de *contribución marginal intrínseca* que ya fue introducido en la sección 1.2. Sea $i \in S \in P$ en un JFFP, imaginemos que el jugador $i$ abandona $S$ y se une a otra coalición cualquiera de $P$ (que puede ser el conjunto vacío). De Clippel y Serrano identifican dos fases en este proceso: Primero $i$ abandona $S$ pero no se une a ninguna otra coalición, dando lugar a la partición $\{S_{-i}, \{i\}, P_{-S}\}$, y provocando un efecto sobre el valor de $S$, que podemos medir como $v(S, \{S, P_{-S}\}) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, \{i\}, P_{-S}\})$. Luego, $i$ se une a $T$, dando lugar a una nueva partición: $\{S_{-i}, T \cup \{i\}, P_{-S,-T}\}$. El efecto de este segundo movimiento es $v(S_{-i}, \{S_{-i}, \{i\}, P_{-S}\}) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, T \cup \{i\}, P_{-S,-T}\})$.
En este proceso el efecto del segundo movimiento es el asociado a la externalidad, mientras que el efecto del primero es la contribución marginal intrínseca de $i$ a $S$, y es esta contribución lo que nos interesa. De este modo podemos definir el concepto de contribución marginal en JFFP como sigue:
Sea $S, P \in EC^N$ tal que $i \in S$, la contribución marginal intrínseca de $i$ a $(S, P)$ en el juego $v$, que denotamos como $mc_{(i,S,P)}(N, v)$, viene dada por:

$$mc_{(i,S,P)}(v) = v(S,P) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, \{i\}, P_{-S}), \quad \forall\ v \in \mathcal{G}^{\mathcal{N}}$$

El vector de contribuciones marginales del jugador $i$ en el juego $v$ contiene las contribuciones marginales intrínsecas de $i$ a todas las coaliciones incrustadas $(S, P)$

tales que $i \in S$:

$$mc_i(v) = (mc_{(i,S,P)})_{(S,P)\in EC^N, i\in S}$$

Podemos ahora definir el axioma de Marginalidad para JFFP como sigue:

*Un índice de poder $f$ en $\mathcal{G}^N$ satisface Marginalidad si, dados $i \in N$ y $(v, w)$ dos funciones de partición en $\mathcal{G}^N$, si $mc_i(v) = mc_i(w)$ entonces:*

$$f_i(v) = f_i(w) \tag{27}$$

La extensión del valor de Shapley, o *Valor Libre de Externalidades* adopta entonces la siguiente forma:

$$Sh_i^{EF}(v) = Sh_i(v^*), \quad \forall\ i \in N, \forall\ v \in \mathcal{G}^N \tag{28}$$

Donde $v^*$ es la función característica ficticia definida por:

$$v^*(S) = v(S, \{S, \{j\}_{j\in N_{-S}}\})$$

*Teorema 5 (de Clippel y Serrano 2007):Existe un único valor $f$ en $\mathcal{G}^N$ que verifica las propiedades de Eficiencia, Anonimidad y Marginalidad, y ese es el Valor Libre de Externalidades.*

Es interesante señalar que el axioma de marginalidad no significa que el valor omita el papel de las externalidades en el juego, dado que las contribuciones marginales de los jugadores a las coaliciones incrustadas dependen de la estructura coalicional, es decir, del complementario $P_{-S}$.

### 2.2.3. Extensión de Macho-Stadler

Macho-Stadler et al. (2007) proponen un valor para JSFFP que satisface las propiedades de Eficiencia, Aditividad y Jugador Nulo. Añaden además un axioma de Simetría Fuerte y otro de Influencia Similar. Para explicar más adelante la motivación de los mismos introduciremos ahora una nueva subclase de JSFFP. Definimos el juego $w_{S,P}$ como el juego en forma de función de partición para el cual:

$$w_{S,P}(S, P) = w_{S,P}(N, N) = 1$$
$$w_{S,P}(S', P') = 0, \quad \forall (S', P') \neq (S, P), (S', P') \neq (N, N)$$

Es decir, un JSFFP en el que sólo la coalición incrustada $(S, P)$ y la gran coalición son ganadoras.
Las propiedades de Aditividad y Jugador Nulo se definen del mismo modo que en (19) y en (21), respectivamente. Veremos a continuación cómo se extienden las propiedades de Simetría y de Simetría Fuerte.

### Simetría, simetría fuerte y enfoque promedio

*Un índice de poder $f$ en $\mathcal{SG}^N$ satisface Simetría si, para toda permutación $\pi \in \Pi^N$, cumple que:*

$$f(\pi(v)) = \pi(f(v)) \tag{29}$$

El axioma tradicional de *Simetría* en JFFP indica que el pago de un jugador está relacionado con su influencia en el valor de las coaliciones, no con su nombre. Es por lo tanto un axioma de Anonimidad, y resulta inmediato observar que este axioma es equivalente a la propiedad de Anonimidad en JFFP definida por Myerson e introducida en (18) en este trabajo. Imaginemos sin embargo el juego votación de tipo $w_{S,P}(S, P)$ de 5 jugadores donde $(S, P) = (\{1, 2\}, \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\})$ y la gran coalición son las únicas coaliciones incrustadas ganadoras . La propiedad de Simetría en este caso índica que los jugadores 4 y 5 deben recibir el mismo pago, pero no especifica nada al respecto del jugador 3, que participa del mismo número de coaliciones incrustadas ganadoras y tiene la misma influencia en el juego que 4 y 5. Para solucionar este problema los autores introducen el axioma de *Simetría Fuerte*.
El axioma de simetría fuerte requiere que, para cualquier permutación $\pi_{S,P}$ del complementario de $S$ en $P$, el valor del índice sea el mismo, por lo que trata de modo simétrico no sólo a los jugadores, sino también a las externalidades que generan para cada coalición incrustada:

*Un índice de poder $f$ en $\mathcal{G}^N$ satisface Simetría Fuerte si cumple que:*

$$f(\pi(v)) = \pi(f(v)), \quad \forall\ \pi \in \Pi^N \tag{30}$$

$$f(\pi_{S,P}(v)) = \pi_{S,P}(f(v)), \quad \forall (S, P) \in EC^N,\ \forall\ \pi_{S,P} \in \Pi^N_{S,P} \tag{31}$$

A través del procedimiento de *enfoque promedio* los autores computan un primer índice que satisface los axiomas de Aditividad, Jugador Nulo y Simetría Fuerte, basándose en el promedio de los valores de la función de partición para cada subconjunto de $N$ tomando todas las posibles organizaciones del complemento. De este modo construyen el *juego promedio* con función característica $\tilde{v}$ asignando a cada coalición $S$ un valor promedio, es decir, $\tilde{v}(S) = \sum_{P \ni S, P \in \mathcal{P}} \alpha(S,P)v(S,P)$, donde $\alpha(S,P)$ es el peso de la partición $P$ en el cálculo de $\tilde{v}(S)$, y la suma de estos pesos para cada coalición debe ser igual a 1. A continuación, se obtiene el índice calculando el valor de Shapley del juego $\tilde{v}$:

$$\begin{aligned} f_i^*(N,v) = \sum_{S \subseteq N} \beta_i(S)\tilde{v}(S) = \\ = \sum_{S \subseteq N} \left[ \beta_i(S) \sum_{P \ni S, P \in \mathcal{P}} \alpha(S,P)v(S,P) \right] \end{aligned} \tag{32}$$

Donde $\beta_i(S)$ es igual a:

$$\beta_i(S) = \begin{cases} \frac{(|S|-1)! \ (n-|S|)!}{n!} & \forall \ S \subseteq N, i \in S \\ -\frac{|S|! \ (n-|S|-1)!}{n!} & \forall \ S \subseteq N, i \in P_{-S} \end{cases}$$

Que coincide con el coeficiente de la función característica $v(S)$ en la expresión del valor de Shapley en un juego sin externalidades.
El siguiente teorema indica las condiciones bajo las cuales un valor construído mediante este procedimiento satisface los axiomas de Simetría Fuerte, Aditividad y Jugador Nulo:

*Teorema 6 (Macho-Stadler et al. 2007): Asumamos que un valor $f$ satisface Linealidad y Jugador Nulo. Entonces, $f$ puede ser construído mediante enfoque promedio si y sólo si satisface el axioma de Simetría Fuerte. Además, los pesos empleados deben ser simétricos y satisfacer la siguiente condición:*

$$\begin{aligned} \alpha(S,P) = \sum_{R \in P_{-S}} \alpha(S_{-i}, \{P_{-(R,S)}, R \cup \{i\}, S_{-i}\}), \\ \forall i \in S, \ \forall \ (S,P) \in EC^N \text{ con } |S| > 1 \end{aligned}$$

Además, los valores obtenidos con el enfoque promedio satisfacen la propiedad de Monotonía tal y como está definida en (23) cuando emplean pesos no negativos.
No obstante, los autores muestran que los axiomas de Aditividad, Jugador Nulo y Simetría Fuerte no siempre llevan a un único valor para juegos con externalidades, como sucede para el caso $n = 3$. Para solucionarlo definen un nuevo axioma y enuncian un nuevo índice, como veremos en el siguiente apartado.

**Influencia similar y valor de Macho-Stadler**

El axioma de *Influencia Similar* hace referencia a la idea de que estructuras coalicionales similares deben llevar a pagos similares. Sea $N = \{1,2,3\}$ y tomemos $w_{S,P}$ y $w_{S,P'}$ con $S = \{1\}$,$P = (\{1\},\{2,3\})$ y $P' = (\{1\},\{2\},\{3\})$. Ambos juegos son similares, en ambos sólo el jugador 1 puede ganar por sí mismo, pero para que esto ocurra en el primero los dos jugadores restantes deben colaborar y en el segundo deben mantenerse separados. El axioma de Influencia Similar se basa en la idea de que en dos juegos como estos, en los que los jugadores 2 y 3 tienen el mismo tipo de influencia, sus pagos deben ser similares. Véase que en ambos casos su decisión de colaborar o no colaborar determina el resultado para el jugador 1.
Definamos de un modo más riguroso el concepto de Influencia Similar:[9] Dos jugadores $i,j$ tienen influencia similar en dos juegos $v$ y $v'$ si cuando la única diferencia entre $P$ y $P'$ es que en una estructura $i$ y $j$ colaboran y en la otra no, se cumple que:

$$v(S,P) = v'(S,P), \quad \forall\ (S,P) \in EC^N_{-(S,P),-(S,P')},$$
$$v(S,P) = v'(S,P')$$
$$v(S,P') = v'(S,P)$$

Una vez definido este concepto podemos introducir el axioma de Influencia Similar propuesto por Macho-Stadler et al.

*Un índice $f$ en $\mathcal{G}^M$ satisface el axioma de Influencia Similar si, $\forall\ v, v'$ y $\forall\ i,j$ con similar influencia en ambos, cumple que*:

$$f_i(v) = f_i(v'), f_j(v) = f_j(v') \tag{33}$$

Una vez introducidos todos los axiomas requeridos, podemos presentar y caracterizar el valor de Macho-Stadler en el siguiente teorema:

*Teorema 7 (Macho-Stadler et al. 2007): Existe un único valor $f$ que satisface Aditividad, Simetría Fuerte, Jugador Nulo e Influencia Similar, y es el dado por:*

$$Sh_i^{MS}(v) = \sum_{SP \in EC^N} \frac{\prod_{T \in P_{-S}}(|T|-1)!}{(n-|S|)!}\beta_i(S)v(S,P), \quad \forall\ v, \forall\ i \in N \tag{34}$$

[9] Que no el axioma.

# 3. Extensión del Valor de Banzhaf

## 3.1. El valor de Banzhaf en juegos simples

Como se indica en la sección 2.1 de este trabajo, el índice de poder de Shapley-Shubik para juegos simples puede interpretarse como la probabilidad de que una coalición escogida al azar sea un cambio para el jugador $i$. Sin embargo, la probabilidad de escoger cada coalición no debe ser la misma, sino que es mayor para las coaliciones de tamaño intermedio, y menor para las coaliciones con tamaños muy grandes o muy pequeños. En concreto $P(\text{escoger } S \subseteq N) = \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}$.
Consideremos ahora el caso en el que la selección de una coalición sea equiprobable para todas ellas, cuando asumimos que cada jugador $i \in N$ elige con igual probabilidad $(1/2)$ votar a favor o en contra (recordemos que los juegos simples en forma de función característica sólo nos permiten modelar situaciones de elección con 2 alternativas de voto: "a favor o en contra", "candidato A o candidato B", etc.). De esta idea surge el índice de Banzhaf normalizado o índice de Banzhaf-Coleman (Banzhaf 1964), que hace referencia al porcentaje del nº total de cambios para cada jugador. En otras palabras, mientras el valor de Shapley-Shubik considera que todas las permutaciones del conjunto $N$ de jugadores son equiprobables, el índice de Banzhaf considera que todas las coaliciones son equiprobables (Álvarez-Mozos y Tejada 2015). La formulación del índice es la siguiente:

$$B_i(v) = \frac{|W_i|}{\sum_{j \in N} |W_j|}, \quad \forall\, i \in N \tag{35}$$

Donde $W_i$ es el conjunto de cambios del jugador $i$. El índice mide entonces la probabilidad relativa de ser pivote para cada jugador con respecto al resto de jugadores.
Otra opción es tomar como medida de poder la probabilidad de que una coalición tomada al azar de modo equiprobable sea un cambio para el jugador $i$. Esto es lo que mide el índice de poder de Banzhaf absoluto o índice de poder de Penrose (Penrose 1946; Dubey y Shapley 1979):

$$P_i(v) = \frac{|W_i|}{2^{|N|}} \tag{36}$$

Es importante señalar que este último índice no respeta la propiedad de Eficiencia, puesto que la suma de sus valores no necesariamente es 1. Curiosamente, pese a que los valores para JSFFP que trataremos en esta sección son extensiones del índice de Banzhaf normalizado, estos tampoco respetan la propiedad de Eficiencia.
Veamos algunas caracterizaciones del valor de Banzhaf normalizado:

*Teorema 9 (Lehrer 1988): Existe un único valor en $SG(N)$ que verifica las propiedades de 2-Eficiencia*, Simetría, Aditividad y Jugador Nulo, y ese es el valor de Banzhaf.*

*Teorema 10 (Feltkamp 1995): Existe un único valor en $SG(N)$ que verifica las propiedades de Poder Total, Transferencia, Anonimidad y Jugador Nulo, y ese es el valor de Banzhaf.*

*Teorema 11 (Nowak 1997): Existe un único valor en $SG(N)$ que verifica las propiedades de 2-Eficiencia, Simetría, Contribuciones Marginales y Jugador Nulo, y ese es el valor de Banzhaf.*

*Teorema 12 (Lorenzo-Freire et al. 2007): Existe un único valor en $SG(N)$ que verifica las propiedades de Poder Total, Simetría y Monotonía Fuerte, y ese es el valor de Banzhaf.*

*Teorema 13 (Casajus 2011): Existe un único valor en $SG(N)$ que verifica las propiedades de Jugador Nulo y 2-Eficiencia, y ese es el valor de Banzhaf.*[10]

Las propiedades de Jugador Nulo (12), Simetría (13), Aditividad (14) y Monotonía Fuerte (15) para juegos en forma de función característica ya han sido introducidas al caracterizar el valor de Shapley. A continuación presentaremos la caracterización de las propiedades de 2-Eficiencia, 2-Eficiencia*, Poder Total, Transferencia, Anonimidad y Contribuciones Marginales, tal y como se definen en (Álvarez-Mozos et al. 2009).

### 2-Eficiencia en JFFC

*Un índice $f$ es 2-Eficiente si, para todo juego $v \in G(N)$ y para todo par de jugadores $i, j \in N$, cumple que:*

$$f_i(N, v) + f_j(N, v) = f_p(N^{ij}, v^{ij}) \tag{37}$$

Donde $v^{ij}$ es el juego obtenido a partir de $v$ cuando $i$ y $j$ se fusionan en un único jugador $p$, dando lugar al conjunto de jugadores $N^{ij} = N_{-i,-j} \cup \{p\}$, y siendo su función característica la siguiente para todo $S \subseteq N^{ij}$:

$$v^{ij}(S) = \begin{cases} v(S) & \text{si } p \notin S \\ v((S_{-p}) \cup i \cup j) & \text{si } p \in S \end{cases}$$

[10]Casajus advierte de que su caracterización funciona sólo en juegos superaditivos.

### 2-Eficiencia* en JFFC

*Un índice $f$ es 2-Eficiente* si, para todo juego $v \in G(N)$ y para todo par de jugadores $i, j \in N$, cumple que:*

$$f_i(N, v) + f_j(N, v) \leq f_p(N^{ij}, v^{ij}) \tag{38}$$

### Poder Total en JFFC

*Un índice $f$ satisface la propiedad de Poder Total si, para todo juego $v \in G(N)$, cumple que:*

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq N_{-i}} [v(S \cup i) - v(S)] \tag{39}$$

### Transferencia en JFFC

*Un índice $f$ satisface la propiedad de Transferencia si, para todo par $v, w \in G(N)$, cumple que:*

$$f(v) + f(w) = f(v \vee w) + f(v \wedge w) \tag{40}$$

Donde $v \vee w$,$v \wedge w \in G(N)$ se definen para todo $S \subseteq N$ como:

$$v \vee w(S) = max\{v(S), w(S)\}$$
$$v \wedge w(S) = min\{v(S), w(S)\}$$

### Anonimidad en JFFC

La propiedad de Anonimidad en Juegos en Forma de Función Característica es análoga a la presentada en (18) para JFFP, y se formula como sigue:

*Un índice $f$ satisface la propiedad de Anonimidad si, para todo $v \in G(N)$ y para toda permutación del conjunto de jugadores $\pi \in \Pi^N$, cumple que:*

$$f_{\pi(i)}(v) = f_i(\pi(v)) \tag{41}$$

#### Contribuciones Marginales en JFFC

*Un índice $f$ satisface la propiedad de Contribuciones Marginales si, para todo par $v, w$ en $G(N)$ y todo $i \in N$ tal que $v(S \cup i) - v(S) = w(S \cup i) - w(s)$, para todo $S \subsetneq N_{-i}$, cumple que:*

$$f_i(v) = f_i(w) \tag{42}$$

## 3.2. Extensiones

#### Extensiones de Álvarez Mozos y Tejada

El trabajo de Álvarez-Mozos y Tejada (2015) se centra en la extensión del índice de Banzhaf a situaciones en las que pueden obtenerse gobiernos en minoría, es decir, en las que se aplica una regla de pluralidad. Los autores obtienen dos valores diferentes, cuya filosofía y caracterizaciones introducimos a continuación:

### 3.2.1. El valor $\Lambda$ de Banzhaf: Obtención, propiedades y caracterización

Introduzcamos primero algunos términos: Para todo $N \subseteq \Omega$,[11] sea $\lambda^N : EC^N \leftrightarrow R_+$ tal que:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(N): S \in P} \lambda^N(S, P) = 1, \quad \forall\ S \subseteq N$$

Podemos interpretar que $\lambda^N$ contiene las frecuencias con las que se forma cada estructura coalicional, es decir, $\lambda^N$ es la distribución de probabilidad de las estructuras coalicionales del conjunto $N \subseteq \Omega$ de jugadores.
Denotaremos por $\Lambda = \{\lambda^N : N \subseteq \Omega\}$ al conjunto de distribuciones de probabilidad $\lambda^N$ para cada posible conjunto de jugadores $N \subseteq \Omega$, y asumiremos que todo $\lambda^N \subseteq \Lambda$ cumple dos condiciones (43 y 44):

$$\lambda^N(S, P) = \lambda^{N'}(S', P'), \quad \forall N, N' \subseteq \Omega,\ \forall (S, P), (S', P') \in EC^N \text{ tal que } P_{-S} = P'_{-S'} \tag{43}$$

Esta primera condición indica que las distribuciones de probabilidad sobre $EC^{N,S}$ dependen únicamente del conjunto de jugadores $N - S$. Esto equivale asumir que exis-

[11] Donde $\Omega$ es el conjunto posiblemente infinito de jugadores potenciales.

ten creencias previas sobre cómo un conjunto de jugadores se organiza en una estructura coalicional independientemente del resto de jugadores.

$\Lambda$ *es consistente, lo que significa que se cumple que:*

$$\lambda^{N_{-j}}(S,P) = \sum_{T \in P_{-S}} \lambda^N(S, P_{-T} \cup \{T \cup \{j\}\}), \quad \forall N \subseteq \Omega,\ \forall (S,P) \in EC^{N_{-j}} \tag{44}$$

Es decir, $\Lambda$ es consistente si, dados $j \in N, S \subseteq N_{-j}$ y $(S,P) \in EC^{N_{-j}}$, la probabilidad de que el conjunto de jugadores[12] $N_{-j,-S}$ se organice de acuerdo a $P_{-S}$ es la misma esté o no esté presente el jugador $\{j\}$. Al conjunto de miembros de $\Lambda$ que satisface las condiciones (42) y (43) lo denotamos por $\mathcal{L}$.

Ahora, empleando el procedimiento de enfoque promedio introducido en la sección 2.2.4 (Macho-Stadler et al. 2007), podemos definir el siguiente tipo de juego: Dados $\Lambda \in \mathcal{L}, N \subseteq \Omega$ y $v \in G^N$, el valor esperado $v^\Lambda(S)$ en el juego $v$ de acuerdo a $\lambda^N \in \Lambda$ es:

$$v^\Lambda(S) = \sum_{P \in \mathcal{P}(N): S \in P} \lambda^N(S,P) \times v(S,P)$$

De modo que el juego $v^\Lambda$ es un juego en forma de función característica que promedia las externalidades en el valor de una coalición impuestas por el resto de jugadores a través de la estructura coalicional en la que se organizan potencialmente.

Una vez introducido el juego $v^\Lambda$, podemos definir el índice de poder como sigue:

*Dado* $\Lambda \in \mathcal{L}$*, el valor* $Ba^\Lambda$ *se define como:*

$$Ba_i^\Lambda(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N_{-i}} [v^\Lambda(S \cup \{i\}) - v^\Lambda(S)], \quad \forall\ v \in \mathcal{G}^N,\ \forall\ i \in N \tag{45}$$

Veamos ahora las propiedades que caracterizan a este valor. Estudiaremos en primer lugar dos propiedades de jugador títere, para lo cual debemos definir primero el concepto de jugador $\Lambda$-*títere*:

*Decimos que* $i \in N$ *es un* $\Lambda$*-títere en el juego* $v$ *si es un títere en* $v^\Lambda$*, es decir, si:*

$$v^\Lambda(S \cup \{i\}) = v^\Lambda(S) + v^\Lambda(\{i\}), \quad \forall\ S \subseteq N_{-i}$$

[12] Denotamos de este modo, y no con el subíndice que hemos empleado durante todo el trabajo, al conjunto de elementos de $N_{-j}$ sin la coalición $S$ para facilitar la comprensión de la expresión en cuestión.

La propiedad de *Jugador $\Lambda$-títere* se enuncia entonces como sigue:

*Un valor $f$ en $\mathcal{G}$ satisface $\Lambda$-DPP si, dado $\Lambda \in \mathcal{L}$, cumple que:*

$$f_i(v) = v^{\Lambda}(\{i\}), \quad \forall N \subseteq \Omega, \ \forall \ v \in \mathcal{G} \text{ tal que } i \in N \text{ es un jugador } \Lambda\text{-títere en } v \tag{46}$$

*Un valor $f$ en $\mathcal{G}$ satisface la propiedad de Jugador Títere Débil, DPP(W), si:*

$$f_i(v) = v(\{i\}), \quad \forall \ N \subseteq \Omega, \forall \ v \in \mathcal{CG} \text{ tal que } i \in N \text{ es títere en } v \tag{47}$$

Donde $\mathcal{CG}$ es el conjunto de juegos coalicionales con cualquier conjunto $N$ de jugadores.

Definimos a continuación una propiedad que no se parece a ninguna de las que hemos trabajado hasta ahora: La propiedad de *Neutralidad en Delegación.* Dados $\Lambda \in \mathcal{L}$, $N \subseteq \Omega$, $i, j \in N, i \neq j$ y $v \in G^N$, el *juego* $\{i, j\}$*-reducido* se define para todo $(S, P)$ contenido en $EC^{N_{-j}}$ como:

$$v_{(\Lambda,ij)}(S, P) = \begin{cases} v(S \cup \{j\}, \{P_{-S}, S \cup \{j\}\}) & \text{si } i \in S \\ \frac{\sum_{T \in P_{-S}} \lambda^N(S, P_{-T} \cup \{T \cup \{j\}\}) \ v(S, P_{-T} \cup \{T \cup \{j\}\})}{\sum_{T \in P_{-S}} \lambda^N(S, P_{-T} \cup \{T \cup \{j\}\})} & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

Si $\sum_{T \in P_{-S}} \lambda^N(S, P_{-T}, T \cup \{j\}) > 0$ y:

$$v_{(\Lambda,ij)}(S, P) = \begin{cases} v(S \cup \{j\}, \{P_{-S}, S \cup \{j\}\}) & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{si } i \neq S \end{cases}$$

En otro caso.

El juego $v_{(\Lambda,ij)}$ puede interpretarse como el JFFP que surge de $v$ cuando $j$ delega su rol en $i$. Esto significa que cuando $i$ participa en una determinada coalición $S$, $j$ lo imita, pero sin embargo, cuando $i$ no participa en esta coalición, se calcula el valor esperado que se obtiene cuando $j$ se une a cualquier coalición distinta de $i$ actualizando las creencias sobre las estructuras coalicionales con la regla de Bayes. Este enfoque hace referencia a aquellos casos en los que existen pactos entre dos partidos al respecto de algún proyecto u objetivo común o área de acuerdo, pero que no se aplican fuera de esta situación. Para esos casos, la propiedad de neutralidad en delegación indica lo siguiente:

*Un índice $f$ en $\mathcal{G}$ satisface $\Lambda$-DNP si, dado $\Lambda \in \mathcal{L}$, cumple que:*

$$f_i(v) + f_j(v) = f_i(v_{(\Lambda,ij)}), \quad \forall\ N \subseteq \Omega,\ \forall\ v \in \mathcal{G}^N,\ \forall\ i,j \in N \text{ tal que } i \neq j \tag{48}$$

En resumen, la propiedad indica que acuerdos de delegación de roles como los anteriormente indicados no afectan al índice.
Por último, el axioma de *pago estándar para 2 jugadores* se aplica en juegos donde $N = \{i,j\}$ con $i \neq j$, es decir, juegos donde sólo hay dos jugadores. En estos casos no hay posibilidad de externalidades, por lo que el juego en JFFP es realmente un juego en forma de función característica, y el conjunto $\mathcal{G}^{\{i,j\}}$ coincide con el conjunto $\mathcal{CG}^{\{i,j\}}$ de juegos coalicionales de dos jugadores. En estos casos, la propiedad es la siguiente:

*Un valor $f$ en $\mathcal{G}$ satisface 2-PSP si cumple que:*

$$f_i(v) = \frac{1}{2}[v(\{i,j\}) + v(\{i\}) - v(\{j\})], \quad \forall\ i,j \in \Omega \text{ tal que } i \neq j, v \in \mathcal{G}^{\{i,j\}} \tag{49}$$

Los autores caracterizan entonces el índice $Ba^{\Lambda}$ en los dos siguientes teoremas:

*Teorema 13 (Álvarez-Mozos y Tejada 2015): Existe un único valor $f \in SG^N$ que verifica $\Lambda$-DPP, $\Lambda$-DNP y 2-PSP, y ese es el valor $\Lambda$ de Banzhaf.*

*Teorema 14 (Álvarez-Mozos y Tejada 2015): Existe un único valor $f \in SG^N$ que verifica $\Lambda$-DNP, DPP(W) y 2-PSP, y ese el valor $\Lambda$ de Banzhaf.*

### 3.2.2. El valor Ordinal $\Lambda$ de Banzhaf: Obtención, propiedades y caracterización

Dado que el índice $Ba^{\Lambda}$ emplea toda la información contenida en $\lambda^N$, los cambios en $\lambda^N$ que preservan el orden relativo de las coaliciones en base a su probabilidad de ocurrencia pueden conducir a pagos muy diversos para los jugadores, lo cual resulta indeseable si estas probabilidades no pueden ser estimadas de modo preciso. Para remediar esto los autores proponen un nuevo valor que no se ve afectado por este tipo de cambios que no alteran la ordenación de la estructuras coalicionales en base a su probabilidad de ocurrencia. El Valor Ordinal $\Lambda$ de Banzhaf. El índice se basa en una propiedad de *Neutralidad en Amalgamiento* que definiremos a continuación.
Denotaremos por $\tilde{\mathcal{L}}$ al subconjunto de $\Lambda$ cuyos miembros cumplen las siguientes propiedades:

*Condición 1:*

$$\lambda^N(S,P) = \lambda^{N'}(S',P'), \quad \forall\ N, N' \subseteq \Omega, \forall\ (S,P) \in EC^N, (S',P') \in EC^{N'}$$
$$\text{tal que } P_{-S} = P'_{-S'}$$

*Condición 2: Dados $N \subseteq \Omega$ y $S \subseteq N$, existe un único $P^{N,S} \in \mathcal{P}(N)$ con $S \in P^{N,S}$ tal que:*

$$\{P^{N,S}\} = \underset{P \in \mathcal{P}(N): S \in P}{arg\ max}\ \lambda^N(S,P)$$

*Condición 3: Dados $N \subseteq \Omega$ y $(S,P) \in EC^N$ tal que $P \in \underset{P' \in (N_{-j}): S \in P'}{arg\ max}\ \lambda^{N_{-j}}(S,P')$ existe un único $T^{N,j,(S,P)} \in P_{-S}$ tal que:*

$$\{T^{N,j,(S,P)}\} = \underset{T \in P_{-S}}{arg\ max}\ \lambda^N(S, P_{-T} \cup \{T \cup \{j\}\})$$

*Condición 4: $\Lambda$ es ordinalmente consistente si para todo $N \subseteq \Omega$, $j \in N$ y $S \subseteq N_{-j}$ se cumple que:*

$$\underset{P \in \mathcal{P}(N): S \in P}{arg\ max}\ \lambda^N(S,P) \subseteq \left\{ P'_{-T} \cup \{T \cup \{j\}\} : T \in P'_{-S}, P' \in \underset{P'' \in \mathcal{P}(N_{-j}): S \in P''}{arg\ max}\ \lambda^{N_{-j}}(S,P'') \right\}$$

*Condición 5: Dados $N \subseteq \Omega$, $S,T \subseteq N_{-j}$ con $S \subseteq T$, y $(S,P) \in EC^{N_{-j}}$:*

$$\underset{R'' \in P_{-T}}{arg\ max}\ \lambda^N(T, ((P_{-T}) \cup \{T\})_{-R''} \cup \{R'' \cup \{j\}\}) \subseteq$$
$$\subseteq \left\{ R'_{-T} : R' \in \underset{R \in P_{-S}}{arg\ max}\ \lambda^N(S, P_{-R} \cup \{R \cup \{j\}\}) \right\}$$

La primera condición ya ha sido explicada en el apartado dedicado al valor $Ba^\Lambda$. La segunda indica que para cada conjunto debe haber una única estructura coalicional con mayor probabilidad de ocurrencia que el resto. La tercera requiere que dado $S \subseteq N_{-j}$, cuando $\{j\}$ se incorpora a una estructura coalicional $P_{-S} \in \mathcal{P}(N_{-j,-S)})$, existe únicamente una coalición $T \in P_{-S}$ con la probabilidad ex-ante más alta de que $\{j\}$ se una a ella entre todas las coaliciones de $P_{-S}$. Las condiciones 2 y 3 hacen referencia a la idea de que sólo son relevantes las estructuras coalicionales con mayor probabilidad de ocurrencia.

La cuarta condición indica que, si asumimos 2 y 3 como ciertas, $\Lambda$ será ordinalmente consistente cuando la estructura más probable $N_{-j,-S}$ para un $S \subseteq N_{-j}$ determinada es independiente de si consideramos o no al jugador $j \in N$. Por último, la condición 5 requiere que el conjunto de coaliciones con mayor probabilidad ex-ante de que $\{j\}$ se una a ellas no pueda crecer mientras algunos agentes no sean tomados en consideración. Definimos ahora el juego $\{ij\}$ reducido ordinal $\tilde{(v)}_{(\Lambda,ij)} \in \mathcal{G}^N_{-j}$ para todo $(S,P) \in EC^N_{-j}$ como:

$$\tilde{v}_{(\Lambda,ij)}(S,P) = \begin{cases} v(S \cup \{j\}, P_{-S} \cup \{S \cup \{j\}\}) & \text{si } i \in S \\ \underset{\substack{T \in arg\ max \lambda^N(S, P_{-T'} \cup \{T' \cup \{j\}\}) \\ T' \in P_{-S}}}{min} v(S, P_{-T} \cup \{T \cup \{j\}\}) & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

Al igual que sucedía en el *juego* $\{ij\}$*-reducido* anteriormente definido, el acuerdo de delegación entre $i$ y $j$ sólo funciona cuando se unen a la coalición activa $S$. En el caso contrario, asumimos que $j$ se une a la coalición que minimiza el valor creado por $S$ de entre aquellas coaliciones en $P_{-S}$ con mayor probabilidad de que $j$ se una a ellas. Los autores demuestran que el juego $\{ij\}$ reducido ordinal así definido es un juego simple si el juego original $v$ lo es.
Definido este juego, podemos enunciar la propiedad de $\Lambda$-*delegación en amalgamamiento* como sigue:

*Un índice $f$ en $\mathcal{G}$ satisface $\Lambda$-DNP(W) si, dado $\Lambda \in \tilde{\mathcal{L}}$, cumple que:*

$$f_i(v) + f_j(v) = f_i(N_{-j}, \tilde{v}_{(\Lambda,ij)}), \quad \forall\ N \subseteq \Omega,\ \forall\ S \in \mathcal{G},\ \forall\ i,j \in N \text{ con } i \neq j \tag{50}$$

Por último, definimos el nuevo índice. En primer lugar definimos el juego en forma de función característica $\tilde{v}^\Lambda$ para cada $S \subseteq N$, dados $v \in \mathcal{G}$ y $\Lambda \in \tilde{\mathcal{L}}$, como:

$$\tilde{v}^\Lambda(S) = v(S, P^{N,S})$$

Donde $P^{N,S}$ se obtiene tal y como se indica en la condición 2 anteriormente introducida en esta misma sección. El juego $\tilde{v}^\Lambda$ se diferencia del juego $v^\Lambda$ que daba lugar al valor $Ba^\Lambda$ en que ahora diferentes $\Lambda$ dan lugar al mismo juego, dado que las modificaciones en $\lambda^N$ que no afectan al orden de probabilidad de las estructuras coalicionales no producen cambios en $P^{N,S}$. Definiendo el nuevo índice en base a este nuevo juego conseguimos que este tipo de cambios en $\Lambda$ no afecten a los valores del índice, como sí ocurría en el valor $v^\Lambda$.
Ahora, dado $\Lambda \in \tilde{\mathcal{L}}$, el valor $\Lambda$ de Banzhaf Ordinal se obtiene como:

$$\tilde{Ba}_i^\Lambda(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N_{-i}} \left[\tilde{v}^\Lambda(S \cup \{i\}) - \tilde{v}^\Lambda(S)\right] \tag{51}$$

Y su caracterización es la siguiente:

*Teorema 15 (Álvarez-Mozos y Tejada 2015): Existe un único valor* $f \in \mathcal{SG}^N$ *que verifica las propiedades de* $\Lambda$*-DNP(W) y DPP(W), y ese es el valor* $\Lambda$ *de Banzhaf Ordinal.*

*Teorema 16 (Álvarez-Mozos y Tejada 2015): Existe un único valor* $f \in \mathcal{SG}^N$ *que verifica las propiedades de* $\Lambda$*-DNP(W) y 2-PSP, y ese es el valor* $\Lambda$ *de Banzhaf Ordinal.*

Es importante señalar que los dos valores son en realidad familias de valores, pues se redefinen para cada $\Lambda$, y que en situaciones de ausencia de externalidades, es decir, en juegos simples en forma de función característica, ambos índices coinciden con el valor de Banzhaf.

# 4. Índice de Deegan-Packel e Índice de Bien Publico

En esta sección estudiamos dos índices basados en el concepto de *coalición ganadora minimal*: El índice de Deegan-Packel (Deegan y Packel 1978) y el índice de Bien Público (Holler 1982). Ambos hacen referencia a la idea de que sólo las coaliciones ganadoras que no contienen a su vez ninguna otra coalición ganadora son relevantes a la hora de medir la distribución de poder entre los jugadores de un juego simple en forma de función característica. Alonso-Meijide et al. (2017) extienden estas ideas y estos índices al contexto de JFFP, como veremos en el punto 4.2

## 4.1. Valores en función característica

Una coalición ganadora en juegos simples en forma de función característica se denomina coalición ganadora minimal cuando no contiene a ninguna otra coalición que sea a su vez ganadora. Sea $W \subseteq 2^N$ el conjunto de coaliciones ganadoras de un juego simple $v$, podemos definir el conjunto de coaliciones ganadoras minimales $M$ como sigue:

$$M = \{S \subseteq W | \; \forall \; T \subseteq S, T \neq \emptyset, S_{-T} \nsubseteq W\}$$

Una vez definido esto, tanto el índice de Deegan-Packel como el de Bien Público parten de las mismas ideas básicas: 1) Sólo las coaliciones ganadoras minimales deben ser tenidas en cuenta. Existe una ligera discrepancia aquí: Para Deegan y Packel las coaliciones ganadoras minimales son las únicas coaliciones ganadoras que pueden llegar a formarse, dado que cualquier jugador $i \notin S \in M$ no tiene incentivos para colaborar con $S$, puesto que la coalición será ganadora esté o no esté él en ella y sus intereses se verán igualmente satisfechos, mientras que para Holler las coaliciones ganadoras no minimales sí pueden formarse, pero sólo las minimales deben ser tenidas en cuenta para medir el poder de un jugador en una situación de votación. 2) Todas las coaliciones ganadoras minimales son equiprobables. 3) Los miembros de una coalición ganadora minimal reparten equitativamente los beneficios que emergen de la colaboración. Los índices adoptan las siguientes formas:

*Índice de Deegan-Packel:*[13]

$$DP_i(v) = \frac{1}{|M|} \sum_{S \in Mi} \frac{v(S)}{|S|} = \frac{1}{|M|} \sum_{S \in Mi} \frac{1}{|S|} \tag{52}$$

*Índice de Bien Público:*

$$PG_i(v) = \sum_{S \in M_i} v(S) \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{S \in M_j} v(S)} = \frac{|M_i|}{\sum_{j=1}^{n} |M_j|} \tag{53}$$

Como vemos ambos índices se basan en la idea de comparar el conjunto de coaliciones ganadoras minimales a las que pertenece el jugador en cuestión con la unión de los conjuntos de coaliciones ganadoras minimales a las que pertenece cada uno de los jugadores, pero mientras el primero (Deegan-Packel) tiene en cuenta el tamaño de las coaliciones ganadoras minimales a las que pertenece el jugador $i$, en el segundo (Bien Público) sólo es relevante el número de coaliciones ganadoras minimales a las que $i$ pertenece. Resulta importante señalar que ninguno de los dos índices es monótono en relación al peso de los votantes, esto es, que jugadores con un mayor número de votos (escaños) pueden obtener pagos inferiores a los de jugadores con un peso menor. Esto es así porque el hecho de tener un número de votos mayor no necesariamente implica formar parte de más coaliciones ganadoras minimales.
Veamos por último la caracterización de los índices:

*Teorema 17 (Deegan y Packel 1978): Existe un único valor en $f$ en $G(N)$ que verifica las propiedades de Fusión, Jugador Nulo, Simetría y Eficiencia, y ese es el valor de Deegan-Packel.*

[13]Véase que $v(S)$ es siempre 1 para coalición $S \in M$, y por eso planteamos la segunda igualdad.

Las propiedades de Eficiencia (11), Jugador Nulo (12) y Simetría (13) para juegos en forma de función característica ya han sido anteriormente explicadas, por lo que en este apartado nos centramos en la introducción de la propiedad de Fusión. En primer lugar, dado un par de juegos simples en forma de función característica $v, w \in G(N)$ definimos el *juego máximo* $v \vee w$ como sigue:

$$v \vee w(S) = max \ \{v(S), w(S)\}, \quad \forall \ S \subseteq N$$

Decimos entonces que dos juegos simples $v, w \in G(N)$ son *fusionables* si para algún $S \in M^W$, $T \in M^V$, se cumple que $S \nsubseteq T$ y $T \nsubseteq S$, siendo el juego fusionado igual al juego máximo $v \vee w$. Podemos ahora definir la propiedad de Fusión para juegos en forma de función característica como sigue:

*Un índice de poder $f$ satisface el axioma de Fusión si, para cualquier par de juegos fusionables $v, w$, cumple que:*

$$f(v \vee w) = \frac{|M^v| f(v) + |M^w| f(w)}{|M^{v \vee w}|} \tag{54}$$

La condición de fusión garantiza que el conjunto de coaliciones ganadoras minimales del juego $v \vee w$ es la unión de los conjuntos de coaliciones ganadoras minimales de los dos juegos originales $v, w$ (Alonso-Meijide et al. 2010).
La caracterización del Índice de Bien Público es muy similar, dado que comparte 3 de las 4 propiedades que caracterizan al índice de Deegan-Packel:

*Teorema 18 (Holler y Packel 1983): Existe un único valor $f$ en $SG(N)$ que satisface PGI-Fusión, Jugador Nulo, Simetría y Eficiencia, y ese es el Índice de Bien Público.*

Como vemos, la única propiedad que cambia con respecto a la caracterización del índice de Deegan-Packel es la de Fusión, que se reformula en otra propiedad que hace referencia a juegos fusionables, y que definiremos a continuación:

*Un índice de poder $f$ en $SG(N)$ satisface PGI-Fusión si, para todo par $v, w$ de juegos fusionables cumple que:*

$$f(v \vee w) = \frac{\sum_{j \in N} |M_j^v|}{\sum_{j \in N} |M_j^{v \vee w}|} f(v) + \frac{\sum_{j \in N} |M_j^w|}{\sum_{j \in N} |M_j^{v \vee w}|} f(w) \tag{55}$$

En Alonso-Meijide et al. (2008) se propone la siguiente caracterización alternativa, que cambia la propiedad de PGI-Fusión por una propiedad de monotonía:

*Teorema 19 (Alonso-Meijide et al. 2008):Existe un único valor definido en $SG(N)$ que satisface PGI-Monotonía Minimal, Jugador Nulo, Simetría y Eficiencia, y ese es el Índice de Bien Público.*

Donde la propiedad de PGI-Monotonía Minimal se define como sigue:

*Un índice de poder $f$ en $SG(N)$ satisface PGI-Monotonía Minimal si, para todo par $v, w$ de juegos fusionables y para todo $i \in N$ tal que $M_i^w \subseteq M_i^w$ cumple que:*

$$f_i(v) \sum_{j \in N} |M_j^v| \geq f_i(w) \sum_{j \in N} |M_j^w| \tag{56}$$

La propiedad de PGI-Motonía Minimal indica que, si el conjunto de coaliciones ganadoras minimales que contienen al jugador $i$ en un juego $w$ es un subconjunto de ese mismo conjunto para el juego $v$, el poder de $i$ en $v$ no puede ser menor que su poder en $w$.

## 4.2. Extensiones en JFFP

Para extender los índices de Deegan-Packel y Bien Público al contexto de los JFFP Alonso-Meijide et al. (2017) asumen, al igual que ocurría con los índices originales, que un juego simple en forma de función de partición está completamente determinado por su conjunto de coaliciones ganadoras minimales, que en este caso son coaliciones *incrustadas* ganadoras minimales. Una coalición incrustada $(S, P) \in EC^N$ ganadora se dice minimal si cada subconjunto de la misma es una coalición perdedora, es decir, si $v(T, Q) = 0,\ \forall\ (T, Q) \subseteq (S, P), (T, Q) \neq (S, P)$. Para comprender esto debemos tener bien presente la definición de inclusión entre coaliciones incrustadas introducida en el apartado 1.1 de este trabajo, y que reproducimos a continuación:

*Decimos que $(S, P)$ está incluido en $(T, Q)$ si:*

$$(S, P) \subseteq (T, Q) \iff S \subseteq T \text{ y } \forall\ T' \in Q_{-T},\ \exists S' \in P \text{ tal que } T' \subseteq S' \tag{57}$$

Denotaremos por $\mathcal{M}(v)$ al conjunto de todas las coaliciones incrustadas ganadoras minimales del juego $v$, y por $\mathcal{M}_i(v)$ al subconjunto de $\mathcal{M}(v)$ tal que $i \in S$ para todo $(S, P) \in \mathcal{M}_i(v)$.
Los índices obtenidos por los autores se basan en la extensión, de modo muy intuitivo, de las propiedades de Eficiencia, Jugador Nulo y Simetría al contexto de juegos

simples en forma de función de partición, así como de dos propiedades de Fusión y otras dos propiedades de Monotonía, una para cada uno de los índices. A continuación estudiaremos estas propiedades.

### 4.2.1. Propiedades

#### Eficiencia en JSFFP

En primer lugar, la propiedad de Eficiencia se formula de manera absolutamente análoga al caso de los juegos simples en forma de función de característica, e indica que la suma de todos los valores del índice debe de ser igual a $v(N)$, es decir, a 1:

*Un índice de poder $f$ en $\mathcal{SG}^N$ satisface Eficiencia si:*

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = 1 \tag{58}$$

#### Jugador Nulo en JSFFP

La propiedad de Jugador Nulo para JSFFP propuesta por los autores es similar a la que ya hemos estudiado anteriormente, y aunque la definición de lo que es un jugador nulo en un JSFFP varíe frente a la definición para JFFP, ambas son equivalentes. Según Alonso, Álvarez y Fiestras un jugador $i$ en un JSFFP es nulo si no participa de ninguna coalición ganadora minimal. Es inmediato darse cuenta de que esto es equivalente a no aportar nada a ninguna de las coaliciones de las que participa, que es la definición de jugador nulo que habíamos estudiado anteriormente. Dicho esto, la propiedad es similar a la presentada en (21) y se formula como sigue:

*Un índice de poder $f$ en $\mathcal{SG}^N$ satisface Jugador Nulo si:*

$$f_i(v) = 0, \quad \forall \text{ jugador nulo } i \in N, \forall\, v \in \mathcal{SG}^N \tag{59}$$

#### Simetría en JSFFP

La extensión de la propiedad de Simetría requiere de la redefinición del mismo concepto de simetría para el contexto de JSFFP. Decimos que dos jugadores $i$ y $j$ tal que $i \neq j$ son simétricos si al intercambiar sus posiciones no cambia el valor de ninguna coalición incrustada. Teniendo esto presente, la propiedad de Simetría en JSFFP es equivalente a la propiedad de Simetría para juegos en forma de función característica presentada en (13), y se formula del siguiente modo:

*Un índice de poder $f$ en $\mathcal{SG}^N$ satisface Simetría si:*

$$f_i(v) = f_j(v), \quad \forall\ i, j \in N \text{ simétricos, } v \in \mathcal{SG}^N \tag{60}$$

Como vemos, estas tres extensiones son muy intuitivas y sencillas de comprender. A continuación definiremos las propiedades de Fusión y Monotonía, una de cada para cada uno de los dos índices cuya extensión estamos estudiando.

### Fusión en JSFFP

Las propiedades de Fusión en JSFFP son análogas a las introducidas para juegos en forma de función característica (54),(55). Para todo $v, w \in \mathcal{SG}^N$ definimos el juego máximo $v \vee w \in \mathcal{SG}^N$ como:

$$v \vee w(S, P) = max\{v(S, P), w(S, P)\}, \quad \forall\ (S, P) \in EC^N$$

De modo que dos JSFFP $v, w \in \mathcal{SG}^N$ se dicen fusionables si:

$$(S, P) \nsubseteq (T, Q) \text{ y viceversa }, \quad \forall\ (S, P) \in \mathcal{M}(v), (T, Q) \in \mathcal{M}(w)$$

Es inmediato ver que las coaliciones incrustadas ganadoras minimales en el juego máximo de dos JSFFP fusionables son precisamente la unión de los conjuntos de coaliciones incrustadas ganadoras minimales de los juegos originales. Podemos entonces establecer las siguientes propiedades de fusión:

*Un índice $f$ en $\mathcal{SG}^N$ satisface DP-MER si:*

$$f_i(v \vee w) = \frac{|\mathcal{M}(v)| f_i(v) + |\mathcal{M}(w)| f_i(w)}{|\mathcal{M}(v \vee w)}, \quad \forall\ v, w \in \mathcal{SG}^N \text{ fusionables }, \forall\ i \in N \tag{61}$$

*Un índice $f$ en $\mathcal{SG}^N$ satisface PG-MER si:*

$$f_i(v \vee w) = \frac{\sum_{j \in N} |\mathcal{M}_j(v)| f_i(v) + \sum_{j \in N} |\mathcal{M}_j(w)| f_i(w)}{\sum_{j \in N} |\mathcal{M}_j(v \vee w)}, \quad \forall v, w \in \mathcal{SG}^N \text{ fusionables }, \forall\ i \in N \tag{62}$$

Ambas propiedades indican que el poder en el juego máximo de dos JSFFP es una ponderación del poder en cada uno de los juegos originales. La propiedad de DP-MER será requerida para la extensión del índice de Deegan-Packel y la de PG-MER para la extensión del índice de Bien Público.

#### Monotonía en JSFFP

Por último, las extensiones de la propiedad de Monotonía realizadas por Alonso-Meijide et al. indican que el poder de un jugador será mayor cuanto mayor sea el tamaño del conjunto de coaliciones ganadoras minimales a las que pertenece. Veamos las formulaciones:

*Un índice $f$ en $\mathcal{SG}^N$ satisface DP-MON si:*

$$f_i(w)|\mathcal{M}(w)| \geq f_i(v)|\mathcal{M}(v)|, \quad \forall\, v, w \in \mathcal{SG}^N,\ \forall\, i \in N \text{ tal que } \mathcal{M}_i(v) \subseteq \mathcal{M}_i(w) \quad (63)$$

*Un índice $f$ en $\mathcal{SG}^N$ satisface PG-MON si:*

$$f_i(w) \sum_{j \in N} |\mathcal{M}_j(w)| \geq f_i(v) \sum_{j \in N} |\mathcal{M}_j(v)|, \quad \forall\, i \in N \text{ tal que } \mathcal{M}_i(v) \subseteq \mathcal{M}_i(w) \qquad (64)$$

Como vemos, ambas propiedades indican que cuando un jugador incrementa el tamaño del conjunto de coaliciones incrustadas ganadoras minimales en el que participa su poder (por un escalar) también se ve incrementado.
En el siguiente apartado obtendremos los índices y los caracterizaremos en base a estas propiedades.

### 4.2.2. Obtención de los valores y caracterización

La motivación de ambos índices proviene de tres asumpciones acerca del comportamiento de los jugadores en un JSFFP, que son análogas a las estudiadas en el apartado 4.1 para los índices originales. A saber: 1) Sólo las coaliciones incrustadas ganadoras minimales deben ser consideradas. Por lo tanto las coaliciones activas deben ser de tamaño mínimo y las mínimas de tamaño máximo. 2) Todas las coaliciones incrustadas ganadoras minimales tienen la misma probabilidad de formarse. 3) Los miembros de una coalición incrustada ganadora minimal reparten los beneficios de su cooperación de modo equitativo. Los índices son los siguientes:

### Índice de Deegan-Packel en JSFFP

$$DP_i^{AAF}(v) = \frac{1}{|\mathcal{M}(v)|} \sum_{(S,P)\in\mathcal{M}_i(v)} \frac{1}{|S|}, \quad \forall\ v \in \mathcal{SG}^N,\ \forall\ i \in N \tag{65}$$

### Índice de Bien Público en JSFFP

$$PG_i^{AAF}(v) = \frac{|\mathcal{M}_i(v)|}{\sum_{j\in N} |\mathcal{M}_j(v)|}, \quad \forall\ v \in \mathcal{SG}^N,\ \forall\ i \in N \tag{66}$$

### Caracterización

La extensión de ambos índices resulta extremadamente natural, dado que los autores se limitan a sustituir el conjunto de coaliciones ganadoras minimales en el índice original para juegos en forma de función característica por el conjunto de coaliciones incrustadas ganadoras minimales en el JFFP, y mantienen intactas las fórmulas originales. Los autores caracterizan los índices demostrando que:

*Teorema 20 (Alonso-Meijide et al. 2017): Existe un único valor en* $\mathcal{SG}^N$ *que verifica eficiencia, jugador nulo, simetría y DP-MER, y ese es DP.*

*Teorema 21 (Alonso-Meijide et al. 2017): Existe un único valor en* $\mathcal{SG}^N$ *que verifica eficiencia, jugador nulo, simetría y PG-MER, y ese es PG.*

*Teorema 22 (Alonso-Meijide et al. 2017): Existe un único valor en* $\mathcal{SG}^N$ *que verifica eficiencia, jugador nulo, simetría y DP-MON, y ese es DP.*

*Teorema 23 (Alonso-Meijide et al. 2017): Existe un único valor en* $\mathcal{SG}^N$ *que verifica eficiencia, jugador nulo, simetría y PG-MON, y ese es PG.*

### Regla de desempate

En ocasiones puede no existir ninguna coalición ganadora en una partición $P$ del conjunto de jugadores $N$ del JFFP $v$. Esto ocurre cuando dos o más coaliciones reúnen

el mayor número de votos. Por ejemplo, en el juego con $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y los siguientes pesos de votación: $\{1, 1, 1, 1, 1\}$, en cualquier partición que agrupe a los jugadores en dos coaliciones de dos miembros y una tercera coalición de un miembro, las dos primeras serán las coaliciones más votadas pero se producirá un empate. En estos casos, cuando nos encontramos en ámbitos parlamentarios, los autores proponen una regla de desempate que consiste en asignar $v(S, P) = 1$ a aquella coalición que reúna un mayor número de votos en las elecciones que han determinado la composición de la cámara (y lógicamente $v(T, P) = 0$ al resto).
Véase que el resultado del índice cuando se producen empates es diferente si se emplea la norma de desempate a si se considera que no hay ninguna coalición ganadora en esa partición particular, dado que la coalición que emerge ganadora en el desempate es, además, ganadora minimal. En consecuencia, el conjunto $\mathcal{M}(v)$, que como hemos dicho antes determina por completo el resultado del juego y, por lo tanto, el índice, no es el mismo en función de si se emplea o no la regla de desempate. Esta norma resulta aconsejable cuando se aplican los índices en contextos en los que tenemos criterios objetivos y medibles de desempate, como es el caso del número de votos recibidos en las elecciones.

# 5. Aplicación a datos reales: El parlamento vasco

En esta sección aplicaremos algunos de los índices anteriormente estudiados a un caso real de una cámara parlamentaria en la que dos o más candidaturas pueden ser propuestas simultáneamente a la hora de investir a una presidenta o presidente del ejecutivo: El parlamento vasco.
En el Estado español contamos con tres casos paradigmáticos de procesos investidura con más de una candidatura: La elección del Lehendakari por parte del Parlamento Vasco o Legelbitzarra, la elección de la Presidencia de la Junta General del Principado de Asturias por parte del Parlamento de Asturias y la elección de las Alcaldesas o Alcaldes en las administraciones locales por parte del Pleno Municipal. En el sistema vasco cualquier grupo parlamentario puede proponer una candidatura, y no hay posibilidad de veto. Esto significa que los miembros de Parlamento pueden escoger entre votar a alguna de las candidaturas propuestas o abstenerse, pero no pueden votar en contra de ninguna candidatura. Para ser elegida Lehendakari es necesario obtener mayoría en la primera vuelta de votación o, si ninguna candidatura cumple este requisito, obtener mayoría simple en la segunda vuelta, que se celebra 24 horas después. El mecanismo empleado para elegir a la Presidenta o Presidente de la Junta General del Principado de

Asturias es similar, con la diferencia de que puede convertirse en candidata cualquier miembro de la cámara que cuente con el respaldo de otras 5 diputadas, es decir, es necesario sumar 6 escaños para proponer una candidatura. Por último, para la elección de las alcaldesas y alcaldes en el ámbito municipal pueden presentarse como candidatas las cabeza de lista de las agrupaciones con representación en el Pleno. En este caso el sistema es a una única vuelta y, si ninguna de las candidaturas logra mayoría absoluta, la candidata de la lista más votada, es decir, con mayor representación en la cámara, es investida alcaldesa de manera automática.

El principal objetivo de este tipo de sistemas es facilitar la gobernabilidad y evitar bloqueos que fuercen la disolución de las cámaras y la repetición de los comicios electorales, por lo que resultan particularmente útiles en sistemas políticos multipartidistas en los que la gobernabilidad no está asegurada y resulta complicado que una sola lista alcance la mayoría absoluta. El caso del sistema de partidos vasco, marcadamente dividido por dos *cleavages* como son el tradicional *izquierda-derecha* y el y el *cleavage territorial* o *centro-periferia* (Leonisio y Strijbis, 2014), supone un fantástico ejemplo de este tipo de sistemas. Así, este modelo de investidura ha permitido que en 8 de 10 legislaturas[14] se hayan producido acuerdos de investidura entre dos o más fuerzas, y ha garantizado la gobernabilidad pese a que nunca en la historia de la cámara un único grupo parlamentario haya obtenido el mínimo de 38 diputadas sobre 75 que otorga la mayoría absoluta y a que, como señalan Leonisio y Strijbis (2014), en el sistema de partidos vasco compiten de manera efectiva un promedio de 7 fuerzas políticas que obtienen representación parlamentaria y resultan relevantes para la gobernabilidad, debido precisamente al sistema de investidura. La composición del Parlamento Vasco en las 10 legislaturas analizadas se muestra en la Tabla 1.

Un vistazo rápido a la Tabla 1 nos permite comprobar que, como afirmábamos anteriormente, el sistema de partidos vasco está determinado por los cleavages *izquierda-derecha* y *centro-periferia*, encontrando así partidos con capacidad de influencia en las cuatro esquinas del tablero: *izquierda-periferia* (HB, EE, EH, EA, PCTV, EHB), *derecha-periferia* (EAJ-PNV), *izquierda-centro* (PSE-EE, IU-EB, Podemos) y *derecha-centro* (AP, PP, UA). En el siguiente apartado (5.1) estudiaremos, legislatura por legislatura, la composición del Parlamento y la distribución de poder visible en él empleando para ello algunos de los índices de poder para JFFP estudiados en las secciones anteriores. A saber: El valor de Myerson, el Valor Libre de Externalidades, el Valor de Macho-Stadler,

[14]El sistema con múltiples candidatos comenzó a emplearse a partir de la segunda Legislatura del Legelbitzarra, en el año 1984. En los primeros comicios, en el año 1980, sólo se podía presentar un candidato y el veto estaba permitido, por lo que no los analizaremos en este trabajo.

Tabla 1: Composición del Parlamento Vasco 1984-2016

| Legislatura | Partidos y escaños | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I Legislatura | EAJ-PNV | PSE-EE | HB | AP | EE | | |
| 1984 | 32 | 19 | 11 | 7 | 6 | | |
| II Legislatura | EAJ-PNV | PSE-EE | HB | AP | EE | EA | CDS |
| 1986 | 17 | 19 | 13 | 2 | 9 | 13 | 2 |
| III Legislatura | EAJ-PNV | PSE-EE | HB | PP | EE | EA | UA |
| 1990 | 22 | 16 | 13 | 6 | 6 | 9 | 3 |
| IV Legislatura | EAJ-PNV | PSE-EE | HB | PP | IU-EB | EA | UA |
| 1994 | 22 | 12 | 11 | 11 | 6 | 8 | 5 |
| V Legislatura | EAJ-PNV | PSE-EE | EH | PP | IU-EB | EA | UA |
| 1998 | 21 | 14 | 14 | 16 | 2 | 6 | 2 |
| VI Legislatura | EAJ-PNV | PSE-EE | EH | PP | IU-EB | EA | |
| 2001 | 25 | 13 | 7 | 19 | 3 | 8 | |
| VII Legislatura | EAJ-PNV | PSE-EE | Aralar | PP | IU-EB | EA | PCTV |
| 2005 | 21 | 18 | 1 | 15 | 3 | 8 | 9 |
| VIII Legislatura | EAJ-PNV | PSE-EE | Aralar | PP | EBB | EA | UPyD |
| 2009 | 30 | 25 | 4 | 13 | 1 | 1 | 1 |
| IX Legislatura | EAJ-PNV | PSE-EE | EH-Bildu | PP | | | UPyD |
| 2012 | 27 | 16 | 21 | 10 | | | 1 |
| X Legislatura | EAJ-PNV | PSE-EE | EH-Bildu | PP | Podemos | | |
| 2016 | 28 | 9 | 18 | 9 | 11 | | |

el Valor Lambda de Banzhaf y el Índice de Deegan-Packel y el Índice de Bien Público[15]. Posteriormente (5.2) estudiaremos la evolución a lo largo de las legislaturas del poder de las principales fuerzas del sistema de partidos vasco y, por último (5.3), compararemos los valores de los índices específicos para JFFP con los de los índices originales para JFFC en algunas de las legislaturas. Antes, sin embargo, resulta necesario abordar el tema de la selección de una familia de distribuciones de probabilidad para calcular el valor $\Lambda$ de Banzhaf:

[15]El Valor Lambda Ordinal de Banzhaf no ha sido calculado debido a la dificultad de proponer una familia de distribuciones de probabilidad que cumpliese las condiciones estudiadas en el apartado 3.1.2.

**Distribuciones de probabilidad en el valor $\Lambda$ de Banzhaf**

En la sección 3.1.1 denotamos por $\mathcal{L}$ al conjunto de miembros de $\Lambda$ que satisface las propiedades definidas en (43) y (44), y definimos el juego $v^\Lambda$ empleando cualquiera de las familias de distribuciones de probabilidad $\lambda^N \in \Lambda \in \mathcal{L}$. Es a partir de este juego $v^\Lambda$ que podemos definir el valor $\Lambda$ de Banzhaf. Por lo tanto, para el cálculo de este valor será necesario seleccionar una familia de distribuciones de probabilidad que cumpla estas condiciones.
Álvarez-Mozos y Tejada (2015) proponen varias, de las cuales hemos seleccionado la siguiente:

$$\lambda^N(S,P) = \begin{cases} p & \text{si } (S,P) = (S, N_{-S}) \\ 1-p & \text{si } (S,P) = (S, \{i\}_{i \in N_{-S}}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{67}$$

Sabiendo que esta familia de distribuciones de probabilidad cumple las propiedades (42) y (43), el problema central será la selección de $p$. Para afrontar este problema proponemos un método basado en estimar las probabilidades de que se forme una coalición $S \in P$ mediante las distancias entre las posiciones ideológicas de sus miembros. El método es el siguiente:
Definimos $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(i) \mid i = 1, ..., n\}$ como el vector que contiene el posicionamiento en el eje *izquierda-derecha* de cada jugador $i \in N$, en una escala del 1 al 5, donde el 1 es la posición más a la izquierda y el 5 la posición más a la derecha. Equivalentemente, definimos $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}(i) \mid i = 1, ...n\}$ como el vector que contiene el posicionamiento ideológico en el eje *centro-periferia* de cada jugador $i \in N$, en una escala del 1 al 5, donde el 1 es la posición más próxima al nacionalismo periférico (el nacionalismo vasco, en este caso) y el 5 la posición más próxima al nacionalismo centralista (es decir, español). A continuación, la probabilidad de que dos jugadores $i, j \in N$ pacten se obtiene como sigue:

$$p(\{i,j\}) = 1 - \frac{\mid \mathcal{E}(i) - \mathcal{E}(j) \mid + \mid \mathcal{N}(i) - \mathcal{N}(j) \mid}{8} \tag{68}$$

Es decir, se divide la suma de las diferencias en los dos ejes ideológicos por 8, que es la mayor diferencia acumulada posible, y se sustrae esa cantidad a la unidad. Como resultado, cuando no existen diferencias obtendremos que la coalición es un suceso seguro y cuando las diferencias sean absolutas obtendremos que la coalición es un suceso imposible.
Ahora, para obtener la probabilidad de una coalición de más de dos jugadores, simplemente calculamos el producto de las probabilidades de las coaliciones a pares de sus

miembros. De este modo, a medida que el tamaño de la coalición aumenta la probabilidad se va reduciendo, salvo en el caso en el que todos los partidos de la coalición tienen plena coincidencia ideológica. De este modo obtendremos, por ejemplo, que $p(\{1,2,3\})$ es igual a:

$$p(\{1,2,3\}) = p(\{1,2\}) \times p(\{1,3\}) \times (\{2,3\})$$

Una vez así definida la probabilidad de una coalición $S$ cualquiera, lo más natural es tomar $p$ para cada $\lambda^N(S,P)$ como el valor de la gran coalición que se forma en $N_{-S}$. Entonces, si por ejemplo queremos obtener $p$ para calcular $\lambda^N(S,P)$ con $N = \{1,2,3,4\}$ y $S = \{1,2\}$, debemos tomar $p = p\ (N_{-S}) = p(\{3,4\})$. No obstante este método conduce, en ocasiones, a la obtención de valores negativos para el índice, como veremos más adelante. Una alternativa que garantiza valores acotados entre 0 y 1 es emplear el mismo $p$ para obtener todos los $\lambda^N(S,P)$ de cada juego, con independencia del conjunto $N_{-S}$. Para ello sugerimos emplear $p = p(\{N\})$, si bien esto nos llevará a subestimar las probabilidades cuando el conjunto $N_{-S}$ no sea grande. La Tabla 2 muestra las puntuaciones asignadas en los dos ejes a cada uno de los 15 partidos que hemos estudiado. Recordemos que el 1 indica la puntuación más próxima a la Izquierda y al nacionalismo vasco, respectivamente, y el 5 la más próxima a la Derecha y al centralismo español.

Como ya hemos dicho, en el siguiente apartado se obtienen varios de los índices estudiados anteriormente para 10 procesos de investidura en el Parlamento Vasco, y emplearemos ambos métodos de cálculo de probabilidades para el valor $\Lambda$ de Banzhaf, a fin de comparar los resultados.

## 5.1. Valores por legislaturas

### Comentario sobre la interpretación de los valores

De los 7 índices considerados,[16] 5 de ellos cumplen la propiedad de Eficiencia: El valor de Myerson, el Valor Libre de Externalidades, el valor de Macho-Stadler, el índice de Deegan-Packel y el índice de Bien Público. Por otro lado, 5 de los 7 devuelven siempre valores acotados entre 0 y 1: El Valor Libre de Externalidades, el valor de Macho-Stadler, el índice de Deegan-Packel, el índice de Bien Público y el valor $\Lambda$ de Banzhaf cuando tomamos $p = p(\{N\})$. Esto significa que 4 de los 7 índices, a saber, el Valor Libre de Externalidades, el valor de Macho-Stadler, el índice de Deegan-Packel y

[16] Entendiendo que los dos valores $\Lambda$ de Banzhaf obtenidos mediante diferentes selecciones de $p$ son índices diferentes.

Tabla 2: Composición del Parlamento Vasco 1984-2016

| Legislatura | Partidos y puntuaciones en los ejes | |
|---|---|---|
| Partido | Izquierda-Derecha | Periferia-Centro |
| PNV | 4 | 1 |
| PSE-EE | 3 | 3 |
| HB | 1 | 1 |
| AP-PP | 4 | 5 |
| EE | 2 | 2 |
| EA | 3 | 1 |
| CDS | 4 | 4 |
| EH | 1 | 1 |
| UA | 4 | 5 |
| IU-EB | 1 | 2 |
| Aralar | 1 | 1 |
| PCTV | 1 | 1 |
| UPyD | 4 | 5 |
| EHB | 1 | 1 |
| Podemos | 2 | 3 |

el índice de Bien Público, son eficientes y están acotados entre 0 y 1. La interpretación de estos 4 índices es sencilla en el sentido de que el resultado obtenido puede entenderse como el porcentaje de poder que cada partido tiene en la cámara en esa Legislatura. Para los otros 3, el marco de interpretación se vuelve difuso, dado que no podremos interpretar los resultados obtenidos como cuotas o porcentajes. En el caso del valor de Myerson la interpretación debe realizarse con especial cautela, debido a que que devuelve tanto valores negativos como valores por encima del 1. Conviene recordar que este índice no está pensado para el contexto concreto de JSFFP, si no para un contexto más general de JFFP. En lo relativo al valor $\Lambda$ de Banzhaf, pueden aparecer valores negativos para partidos con muy pocos escaños cuando tomamos $p = p(\{N_{-S}\})$. Esto se debe a que cuando tomamos $\lambda^N(S, P)$ de acuerdo a (67) y (68) seleccionando $p$ de este modo, el juego $v^\Lambda$ resultante no es necesariamente monótono. Como consecuencia, las contribuciones marginales de un jugador $i$ a una o varias coaliciones $S$ pueden ser negativas, lo que desemboca en pagos negativos para este tipo de jugadores. Cuando seleccionamos $p = p(\{N\})$, en cambio, el juego $v^\Lambda$ sí es monótono, por lo que no pueden aparecer valores negativos. La aparición de valores negativos, junto con la falta de Eficiencia del índice, dificulta la interpretación del valor $\Lambda$ de Banzhaf cuando seleccionamos diferentes valores de $p$ para cada subconjunto $S \in N$. En cambio, cuando utilizamos el mismo valor $p$ para todos los subconjuntos, pese a que el valor no es Eficiente sí está acotado entre 0 y 1, y su interpretación es más sencilla. Ambos, en todo caso, deben analizarse con cautela, y en este apartado intentaremos trazar una comparativa entre ellos.

### 5.1.1. I Legislatura: 1984

Como hemos explicado con anterioridad, las primeras elecciones al Parlamento Vasco tras la Transición tuvieron lugar en el año 1980, pero el sistema de elección del Lehendakari empleado no contemplaba la proposición de múltiples candidaturas y sí permitía el veto al candidato, por lo que no analizaremos esta Legislatura y comenzaremos por la inmediatamente siguiente, que se inició en el año 1984.
En estos comicios, sólo el PNV propuso a un candidato, Carlos Garaikoetxea, que ya había sido elegido Lehendakari en las elecciones del año 1980, y que fue reelegido por mayoría simple en la segunda vuelta con los votos favorables del PNV(32) y los votos en blanco de PSE-EE(19), AP(7) y EE(6). Durante la votación los diputados de Herri Batasuna(11) se ausentaron de la cámara y no ejercieron su derecho al voto. Los valores obtenidos para los índices de poder se muestran en la Tabla 3.[17]

Tabla 3: Índices de Poder en el Parlamento Vasco, I Legislatura (1984)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | HB | AP | EE |
|---|---|---|---|---|---|
| Myerson | 1.5000 | -0.5000 | 0 | 0 | 0 |
| EFV | 0.7000 | 0.1167 | 0.1167 | 0.0333 | 0.0333 |
| Macho-Stadler | 0.6250 | 0.1250 | 0.0833 | 0.0833 | 0.0833 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.8750 | 0.1250 | 0.1250 | 0 | 0 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.7500 | 0.2500 | 0.1250 | 0.1250 | 0.1250 |
| DP-Index | 0.6500 | 0.0667 | 0.1167 | 0.0833 | 0.0833 |
| PG-Index | 0.4706 | 0.1176 | 0.1765 | 0.1176 | 0.1176 |
| Escaños | 32 | 19 | 11 | 7 | 6 |

Los 7 valores muestran una enorme acumulación del poder en manos del PNV en

[17]Denotaremos por $\Lambda_1$ Banzhaf al valor obtenido empleando $p = p(\{N_{-S}\})$ y por $\Lambda_2$ Banzhaf al valor obtenido empleando $p = p(\{N\})$. Utilizaremos $\Lambda$ de Banzhaf para referirnos, de modo general, a ambos.

estos comicios, siendo el Valor Libre de Externalidades el que otorga un mayor peso al partido de Garaikoetxea (0.7) de entre los valores eficientes y acotados entre 0 y 1, y el índice de Bien Público el único que le otorga menos de la mitad del poder (0.47). Véase que el Valor Libre de Externalidades es el índice eficiente y acotado entre 0 y 1 que más premia al jugador con mayor número de votos con respecto al resto, y el índice de Bien Público el que menos. Este comportamiento se repetirá a lo largo de todas las legislaturas estudiadas.

Cabe destacar que los 7 índices planteados identifican a AP y EE como jugadores simétricos, pese a que no tienen el mismo número de escaños. Además, los valores de Myerson, Macho-Stadler y $\Lambda_2$ de Banzhaf consideran también a Herri-Batasuna como jugador simétrico con respecto a AP y EE, mientras que el valor $\Lambda_1$ de Banzhaf considera que HB es simétrico al PSE-EE. En la comparación entre los dos valores $\Lambda$ de Banzhaf, vemos como el primero beneficia más al partido ganador y penaliza más a los partidos más pequeños en comparación con el segundo.[18]

### 5.1.2. II Legislatura: 1986

Tras las elecciones del año 1986 se presentaron por primera vez dos candidatos a la investidura: Jose Antonio Ardanza, del PNV, y Juan Carlos Yoldi, de Herri Batasuna, que se encontraba en prisión en el momento de las elecciones. Sin embargo, los diputados de Herri Batasuna(13) volvieron a ausentarse del hemiciclo durante la votación, por lo que Yoldi no obtuvo ningún voto. Ardanza fue elegido Lehendakari por mayoría absoluta en la primera vuelta con los votos de PNV(17), PSE-EE(19) y CDS(2). Los diputados de EA(13), EE(9) y AP(2) votaron en blanco. Resulta llamativo que el partido con mayor número de escaños, el PSE-EE, optara por no proponer un candidato propio y apoyar al candidato del PNV. Los valores obtenidos para los índices de poder se muestran en la Tabla 4.

El poder se fragmenta mucho más en esta legislatura, en la que entran nuevos partidos al Parlamento, pasando de un JSFFP de 5 jugadores a uno de 7. Esta vez el PSE-EE es el partido con más escaños, y por lo tanto el que más poder obtiene conforme a todos los índices, con excepción del índice de Bien Público, que asigna una cota de poder ligeramente superior al PNV (0.1944 de los nacionalistas frente a 0.1912 de los socialistas). Esto resulta aún más significativo cuando recordamos que fue el candidato

[18] Esta afirmación, no obstante, debe entrecomillarse, en el sentido de que, dado que uno de los valores está acotado entre 0 y 1 y el otro no está acotado por abajo, los marcos de referencia para interpretarlos son distintos.

Tabla 4: Índices de Poder en el Parlamento Vasco, II Legislatura (1986)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | HB | AP | EE | EA | CDS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Myerson | 1.2333 | -1.8333 | 0.1000 | 0.4333 | 0.5333 | 0.1000 | 0.4333 |
| EFV | 0.1595 | 0.3929 | 0.1429 | 0.0095 | 0.1429 | 0.1429 | 0.0095 |
| Macho-Stadler | 0.2366 | 0.2710 | 0.1637 | 0.0245 | 0.1159 | 0.1637 | 0.0245 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.2031 | 0.2344 | 0.1094 | -0.0156 | 0.1094 | 0.1094 | 0.0156 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.2344 | 0.2656 | 0.1406 | 0.0156 | 0.1406 | 0.1406 | 0.0156 |
| DP-Index | 0.1962 | 0.2305 | 0.1572 | 0.0626 | 0.1383 | 0.1572 | 0.0579 |
| PG-Index | 0.1944 | 0.1912 | 0.1599 | 0.0815 | 0.1379 | 0.1599 | 0.0752 |
| Escaños | 17 | 19 | 13 | 2 | 9 | 13 | 2 |

del PNV quien ganó la investidura, eso sí, con el apoyo del PSE-EE.

Los valores de Myerson, Macho-Stadler, $\Lambda_2$ de Banzhaf y el Valor Libre de Externalidades prueban que cumplen la propiedad de Simetría, asignando valores idénticos a los partidos con mismo número de escaños (HB y EA, y AP y CDS). En el caso del valor $\Lambda_1$ de Banzhaf nos encontramos con que sí asigna los mismo valores a AP y CDS en términos absolutos, pero sorprendentemente AP obtiene este valor (0.0156) con signo negativo. Curiosamente, el valor $\Lambda_2$ de Banzhaf también asigna el valor 0.0156 a ambos jugadores, pero sin signo negativo.

En el caso de los índices que dependen del conjunto de coaliciones incrustadas ganadoras minimales de cada jugador, es decir, el índice de Deegan-Packel y el índice de Bien Público, nos encontramos con que sí asignan los mismos valores a HB y EA, pero no así a AP y CDS, ambos con 2 diputados. Esto se debe al uso de la regla de desempate descrita en el apartado 4.2.2, que beneficia a AP frente al CDS. Véase, por ejemplo, que cuando se forman las coaliciones {PNV,EE,PP} y {EA,HB,CDS}, es la coalición a la que pertenece el PP la que gana el desempate por sumar un mayor número de votos (451237 frente a 421520), pero cuando intercambiamos las posiciones de CDS y PP, formándose las coaliciones {PNV,EE,CDS} y {EA,HB,PP}, también es la coalición a la que pertenece el PP la que, por poco, acumula más votos (436681 frente a 436076). En ambos casos la coalición incrustada ganadora que se forma es, además, ganadora minimal, por lo que el conjunto de coaliciones incrustadas ganadoras minimales del PP tiene, como mínimo, dos elementos más que el del CDS, y como consecuencia observamos esas diferencias en los pagos. Cuando no empleamos la regla de desempate, los pagos son similares para ambos jugadores: Ambos obtienen 0.0464 en el índice de Deegan-Packel y 0.0659. Es importante señalar que la diferencia de resultados observada al emplear la regla de desempate no supone una violación de la propiedad de Simetría definida

en (60), puesto que, al emplear esta regla, los valores de las coaliciones incrustadas anteriormente descritas cambian si el PP y el CDS intercambian sus posiciones, y por lo tanto no pueden ser considerados jugadores simétricos.
Continuando con el análisis de la simetría de los jugadores, el Valor Libre de Externalidades identifica también a Euskadiko Ezquerra como jugador simétrico a AP y el CDS, pese a que tiene 4 escaños menos que estos, mientras que el valor $\Lambda$ de Banzhaf[19] asigna valores similares a HB, EE y EA. El Valor Libre de Externalidades es el índice eficiente y acotado entre 0 y 1 que más premia al partido con más escaños, y de nuevo el índice de Bien Público el que lo premia menos (de hecho ni siquiera lo da como ganador) y fragmenta más el poder, otorgando cuotas muy similares a los 5 partidos con más escaños (PSE-EE,PNV,HB,EA y EE).

#### 5.1.3. III Legislatura: 1990

En el año 1990 Jose Antonio Ardanza vuelve a presentarse a la investidura, en esta ocasión como único candidato, y es de nuevo elegido, aunque esta vez en la segunda vuelta por mayoría simple (se queda a un escaño de los 38 que conceden la mayoría absoluta), con los votos de PNV(22), EA(9) y EE(6). El PSE-EE(16), PP(6) y UA(3) votan en blanco y los diputados de HB(13) se ausentan una vez más de la votación. Los valores obtenidos para los índices de poder se muestran en la tabla 5.
En esta tercera legislatura aumenta la concentración del poder en manos del PNV,

Tabla 5: Índices de Poder en el Parlamento Vasco, III Legislatura (1990)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | HB | PP | EE | EA | UA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Myerson | 0.0333 | 0.8333 | -0.8000 | 0.2000 | 0.2000 | 0.3500 | 0.1833 |
| EFV | 0.4524 | 0.1857 | 0.1190 | 0.0524 | 0.0524 | 0.1024 | 0.0357 |
| Macho-Stadler | 0.3514 | 0.2163 | 0.1721 | 0.0623 | 0.0623 | 0.0982 | 0.0374 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.3594 | 0.2656 | 0.1719 | 0.0469 | 0.0156 | 0.0469 | 0.0156 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.3281 | 0.2656 | 0.2031 | 0.0781 | 0.0781 | 0.1094 | 0.0469 |
| DP-Index | 0.3702 | 0.1253 | 0.1202 | 0.0846 | 0.0846 | 0.1323 | 0.0827 |
| PG-Index | 0.2601 | 0.1419 | 0.1351 | 0.1081 | 0.1081 | 0.1453 | 0.1014 |
| Escaños | 22 | 16 | 13 | 6 | 6 | 9 | 3 |

aunque no alcanza los niveles vistos en la primera, en la cual los nacionalistas acumulaban más de la mitad del poder en tres de los cuatro índices eficientes y acotados entre 0

[19] Ambos casos.

y 1. El PP y EE se convierten en jugadores simétricos de acuerdo con todos los índices (y con su número de escaños), y el poder del PSE-EE se ve muy reducido con respecto a la anterior legislatura, en favor del PNV.
Vemos de nuevo como el valor $\Lambda_1$ de Banzhaf concentra más el poder en el mayor partido y otorga cuotas más pequeñas a los partidos pequeños que el valor $\Lambda_2$. En cuanto al segundo partido, el PSE-EE, ambos índices le otorgan la misma cuota de poder (0.2656). Sin embargo, dado que la suma de los valores para $\Lambda_1$ es menor que la suma de los valores para $\Lambda_2$ (0.92 frente a 1.16), podemos entender que el PSE-EE tiene más poder en el primer índice que en el segundo.

### 5.1.4. IV Legislatura: 1994

Antonio Ardanza se presenta por tercera vez a la investidura y vuelve a ser elegido en el año 1994, recuperando la mayoría absoluta en la primera vuelta gracias a los votos de PNV(22), PSE-EE(12) y EA(8). Ninguna formación propuso a un candidato alternativo, por lo que PP(11), IU-EB(6) y UA(5) votaron en blanco y los diputados de HB(11) volvieron a ausentarse durante la votación. Los valores obtenidos para los indices de poder se muestran en la Tabla 6.
Los resultados obtenidos para la cuarta Legislatura son muy similares a los de la tercera, por lo que podemos concluir que el sistema de partidos vasco pasó por una época de inmovilismo durante los 4 años que separan el comienzo de una y otra. Incluso los partidos continúan siendo fundamentalmente los mismos, con la sustitución de Euskadiko Ezquerra por IU-EB.

Tabla 6: Índices de Poder en el Parlamento Vasco, IV Legislatura (1994)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | HB | PP | IU-EB | EA | UA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Myerson | 3.5167 | -0.1000 | -0.7167 | -0.7167 | -0.9000 | 1.2667 | -1.3500 |
| EFV | 0.4310 | 0.1643 | 0.1143 | 0.1143 | 0.0476 | 0.0810 | 0.0476 |
| Macho-Stadler | 0.3722 | 0.1431 | 0.1360 | 0.1360 | 0.0667 | 0.0819 | 0.0642 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.3438 | 0.1562 | 0.1562 | 0.1562 | 0.0625 | 0.0312 | 0.0625 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.3125 | 0.1875 | 0.1875 | 0.1875 | 0.0938 | 0.0938 | 0.0938 |
| DP-Index | 0.3323 | 0.1432 | 0.1330 | 0.1330 | 0.0871 | 0.1004 | 0.0710 |
| PG-Index | 0.2366 | 0.1559 | 0.1452 | 0.1452 | 0.1075 | 0.1183 | 0.0914 |
| Escaños | 22 | 12 | 11 | 11 | 6 | 8 | 5 |

Los índices muestran una ligera disminución del poder del PNV (salvo para el valor de

Macho-Stadler, que crece levemente), que mantuvo el mismo número de escaños (22) y del PSE-EE (salvo para el índice de Bien Público), que perdió 4 escaños. El gran beneficiado de la legislatura es el PP, que aumenta perceptiblemente su cuota de poder en todos los índices salvo en el índice de Bien Público, y se convierte en un jugador simétrico a HB. De nuevo el valor $\Lambda_1$ de Banzhaf concentra más el poder en manos del primer partido que el valor $\Lambda_2$.

### 5.1.5. V Legislatura: 1998

Dos candidatos se presentan a la investidura en el año 1998: J.J. Ibarretxe, del PNV, y C. Iturgaiz, del PP. El candidato nacionalista obtiene la victoria por mayoría absoluta con el apoyo del PNV(21), EA(6) y 13 de los 14 diputados de EH. Por su parte Iturgaiz obtiene los votos del PP(18) y de UA(2). 13 de los 14 diputados del PSE-EE y los 2 diputados de IU-EB se abstienen, mientras que los diputados A.Astibia, de EH, y F.Maturana, del PSE-EE se ausentaron del hemiciclo durante la votación. Los valores obtenidos para los índices de poder se muestran en la Tabla 7.

Continuando con la tendencia anterior, el sistema de partidos vasco no sufre grandes

Tabla 7: Índices de Poder en el Parlamento Vasco, V Legislatura (1998)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | EH | PP | IU-EB | EA | UA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Myerson | -1.1000 | -0.5167 | -0.5167 | 1.8333 | 0.0833 | 1.1333 | 0.0833 |
| EFV | 0.4190 | 0.1357 | 0.1357 | 0.1690 | 0.0190 | 0.1024 | 0.0190 |
| Macho-Stadler | 0.3122 | 0.1742 | 0.1742 | 0.2119 | 0.0292 | 0.0692 | 0.0292 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.3750 | 0.1562 | 0.1562 | 0.1875 | 0 | 0.0938 | 0 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.3438 | 0.1875 | 0.1875 | 0.2188 | 0.0312 | 0.1562 | 0.0312 |
| DP-Index | 0.3694 | 0.1399 | 0.1399 | 0.1637 | 0.0559 | 0.0754 | 0.0559 |
| PG-Index | 0.2822 | 0.1494 | 0.1494 | 0.1660 | 0.0747 | 0.1037 | 0.0747 |
| Escaños | 21 | 14 | 14 | 16 | 2 | 6 | 2 |

cambios en esta Legislatura. El PP continúa creciendo y deja atrás a PSE-EE y EH, que ahora son jugadores simétricos. También lo son IU-EB y UA.

### 5.1.6. VI Legislatura: 2001

En el año 2001 J.J Ibarretxe vuelve a presentarse a la investidura, esta vez como único candidato, y es elegido por mayoría simple en la segunda vuelta con los apoyos de

PNV(33) y EB(3). Los diputados de PP(19) y PSE-EE(13) votaron en blanco y los de EH no votaron, aunque estuvieron presentes en la cámara. Los valores obtenidos para los índices de poder se muestran en la Tabla 8.

En esta sexta legislatura sólo 6 partidos logran representación en la cámara (Unión

Tabla 8: Índices de Poder en el Parlamento Vasco, VI Legislatura (2001)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | EH | PP | IU-EB | EA |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Myerson | 1.1667 | 0 | -0.1667 | 0.1667 | 0 | -0.1667 |
| EFV | 0.5000 | 0.0833 | 0.0833 | 0.2500 | 0 | 0.0833 |
| Macho-Stadler | 0.4139 | 0.1750 | 0.0861 | 0.2222 | 0.0167 | 0.0861 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.5625 | 0.1250 | 0.0625 | 0.3125 | -0.0625 | 0 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.5000 | 0.1250 | 0.1250 | 0.3750 | 0 | 0.1250 |
| DP-Index | 0.4583 | 0.1094 | 0.1250 | 0.1302 | 0.0625 | 0.1146 |
| PG-Index | 0.3281 | 0.1406 | 0.1562 | 0.1562 | 0.0781 | 0.1406 |
| Escaños | 25 | 13 | 7 | 19 | 3 | 8 |

Alavesa se queda fuera), por lo que entramos en un JSFFP de 6 jugadores, lo que favorece la concentración de poder en manos del partido con más representantes, el PNV, que alcanza un peso de 0.5 en el Valor Libre de Externalidades y el valor $\Lambda_1$ de Banzhaf, valores superiores al 0.4 para los valores de Macho-Stadler y Deegan-Packel, y del 0.33 para el Índice de Bien Público. En el caso del valor $\Lambda_1$ de Banzhaf, la cuota de poder del PNV se dispara hasta un 0.56.

En cambio, el partido con menos escaños de la cámara, IU-EB, ve afectado su poder hasta el punto de volverse un jugador nulo, en el sentido de que tiene poder 0, según el Valor Libre de Externalidades y el valor $\Lambda_2$ de Banzhaf.[20] Resultan curiosas las simetrías que plantean los índices en esta legislatura: El valor de Myerson identifica como simétricos a los pares PNV,PP; PSE-EE,IU-EB y EH,EA. Llama particularmente la atención la simetría entre los socialistas e Izquierda Unida, dada la diferencia de escaños entre ambas fuerzas (13 del PSE-EE frente a sólo 3 de IU-EB). El Valor Libre de Externalidades identifica como jugadores simétricos a PSE-EE, EH y EA, el valor $\Lambda_2$ de Banzhaf a PSE-EE, EH y EA, el valor de Macho-Stadler a EH y EA y el Índice de Bien Público a PSE-EE y EA y a EH y PP. Pese a que las simetrías planteadas por el Índice de Bien Público resultan curiosas, pues otorgan similar poder a un partido que tiene 19 escaños y a otro que tiene 7, debemos recordar que los valores de este índice dependen del conjunto de coaliciones ganadoras minimales de cada jugador, y el

[20]El valor de Myerson también asigna un 0 a IU-EB, pero dado que adopta valores negativos, no podemos interpretar adecuadamente este 0, que también se lleva el PSE-EE.

tamaño de este no se encuentra directamente relacionado con el número de escaños.

### 5.1.7. VII Legislatura: 2005

J.J. Ibarretxe se presenta por tercera vez a la investidura en el año 2005, esta vez frente al candidato socialista Patxi López, siendo investido lehendakari el primero en la segunda vuelta por tan sólo un voto de diferencia. Ibarretxe obtuvo los apoyos de PNV(29), EB(3) y 2 de los 9 diputados del PCTV (los 7 restantes se ausentaron durante la investidura), para un total de 34 escaños, mientras que López contó con el voto del PSE-EE(18) y del PP(15) para sumar 33 escaños. Votó en blanco Aralar, que contaba con un único escaño. Los valores obtenidos para los índices de poder se muestran en la Tabla 9:

De nuevo nos encontramos con un juego de 7 jugadores, y esto se ve reflejado en un

Tabla 9: Índices de Poder en el Parlamento Vasco, VII Legislatura (2005)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | Aralar | PP | IU-EB | EA | PCTV |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Myerson | -0.8667 | 0.5667 | -0.9667 | 0.5167 | -0.1333 | 0.6167 | 1.2667 |
| EFV | 0.4262 | 0.1929 | 0.0095 | 0.1762 | 0.0095 | 0.0929 | 0.0929 |
| Macho-Stadler | 0.3247 | 0.2475 | 0.0125 | 0.1786 | 0.0331 | 0.0972 | 0.1064 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.3438 | 0.2812 | -0.0312 | 0.1562 | 0.0000 | 0.0312 | 0.0625 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.3281 | 0.2656 | 0.0156 | 0.2031 | 0.0469 | 0.1094 | 0.1094 |
| DP-Index | 0.2690 | 0.1609 | 0.0396 | 0.1922 | 0.0693 | 0.1337 | 0.1353 |
| PG-Index | 0.2162 | 0.1622 | 0.0586 | 0.1892 | 0.0856 | 0.1441 | 0.1441 |
| Escaños | 21 | 18 | 1 | 15 | 3 | 8 | 9 |

nuevo aumento de la fragmentación del poder político, que tiene como principal afectado al PNV, que sufre una importante reducción en su cuota de poder. Esta situación la aprovecha el PSE-EE, que crece hasta a situarse como segunda fuerza política en número de escaños y en las puntuaciones del Valor Libre de Externalidades, el valor de Macho-Stadler y el valor $\Lambda$ de Banzhaf. En los índices que dependen del conjunto de coaliciones incrustadas ganadoras minimales (DP-Index y PG-Index), sin embargo, el PP se mantiene como segunda fuerza.

Aralar(1) y IU-EB(3) son considerados jugadores simétricos por el Valor Libre de Externalidades, que también asigna la misma puntuación a EA(8) y PCTV(9). Estos dos partidos también son considerados simétricos por el Índice de Bien Público y el valor $\Lambda_2$ de Banzhaf.

### 5.1.8. VIII Legislatura: 2009

En la sesión de investidura celebrada el 5 de Mayo de 2009 volvieron a concurrir como candidatos J.J. Ibarretxe, del PNV, y Patxi López, del PSE-EE, resultando esta en la primera (y única, hasta la fecha) derrota de un candidato del PNV en una sesión de investidura. López fue investido Lehendakari por mayoría absoluta en la primera vuelta con los apoyos del PSE-EE(25), PP(13) y UPyD(1). Por su parte, Ibarretxe contó con los votos del PNV(30), Aralar(4) y EA(1). EBB, que contaba con un único diputado, se abstuvo. Los valores obtenidos para los índices de poder se muestran en la Tabla 10.

En esta octava Legislatura, pese a que continuamos hablando de un JSSFP de 7 jugado-

Tabla 10: Índices de Poder en el Parlamento Vasco, VIII Legislatura (2009)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | Aralar | PP | EBB | EA | UPyD |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Myerson | 1.2500 | -0.2667 | -0.7667 | 0.9833 | -0.0667 | -0.0667 | -0.0667 |
| EFV | 0.6143 | 0.1976 | 0.0310 | 0.1143 | 0.0143 | 0.0143 | 0.0143 |
| Macho-Stadler | 0.4458 | 0.2772 | 0.0272 | 0.2231 | 0.0089 | 0.0089 | 0.0089 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.6562 | 0.3438 | 0.0625 | 0.1250 | -0.0312 | -0.0625 | -0.0312 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.6406 | 0.3594 | 0.1094 | 0.1406 | 0.0156 | 0.0156 | 0.0156 |
| DP-Index | 0.4808 | 0.1154 | 0.0962 | 0.0385 | 0.0897 | 0.0897 | 0.0897 |
| PG-Index | 0.2759 | 0.1724 | 0.1552 | 0.0345 | 0.1207 | 0.1207 | 0.1207 |
| Escaños | 30 | 25 | 4 | 13 | 1 | 1 | 1 |

res, cuatro de estos jugadores cuentan un número muy reducido de escaños (Aralar(4), EBB(1), EA(1), UPyD(1)), lo que facilita que el poder vuelva a concentrarse en manos de los grandes partidos, principalmente el PNV, que llega a acumular una cuota de 0.61 en el Valor Libre de Externalidades, y del PSE-EE, que acumula hasta un 0.28 con el valor de Macho-Stadler. Véase, volviendo sobre las legislaturas anteriormente analizadas, que cuando el segundo partido se encuentra a una distancia razonable con respecto a sus inmediatos perseguidores (diferencias de más de 2 escaños), el valor de Macho-Stadler es el valor eficiente y acotado entre 0 y 1 que mayor cuota de poder otorga a este jugador. Una excepción a esta regla la encontramos en la VI Legislatura, en la cual el PP, segunda fuerza, obtiene una puntuación mayor con el Valor Libre de Externalidades que con el valor de Macho-Stadler. Lo mismo ocurre en la IX y X Legislatura. En el resto de casos, sin embargo, sí se cumple esta norma. El tercer partido con mayor representación en la cámara también acostumbra a verse beneficiado por este índice con respecto al resto, siempre y cuando no haya empates.

Nótese también que, a la vista de este juego, el valor $\Lambda_1$ de Banzhaf no satisface ninguna propiedad de Simetría,[21] pues asigna valores distintos a EBB, EA y UPyD, fuerzas con el mismo número de escaños. Esto ocurre porque, con el sistema de asignación de distribuciones de probabilidad $\lambda^N$ que hemos empleado, los valores de estas distribuciones cambian según a qué jugador consideremos pese a que tengan igual número de escaños, dado que están determinados también por su posicionamiento ideológico. En cualquier caso, las caracterizaciones del valor $\Lambda$ de Banzhaf (Teorema 13 y Teorema 14) debidas a Álvarez y Tejada que hemos estudiado (Álvarez & Tejada; 2015), no incluyen propiedades de Simetría, a pesar de lo cual el valor $\Lambda_2$ sí asigna pagos iguales a jugadores con mismo número de escaños.

### 5.1.9. IX Legislatura: 2012

En los comicios del año 2012 el PNV recupera el Gobierno de la mano de Iñigo Urkullu, que es elegido por mayoría simple en la segunda vuelta sólo con el apoyo de su partido(27). La formación nacionalista de izquierdas EH-Bildu(21) propuso como candidata alternativa a Laura Mintegi, que sólo obtuvo los votos de su propia formación. El resto de partidos de la cámara, a saber, PSE-EE(16), PP(10) y UPyD(1) votaron el blanco. Los valores obtenidos para los índices de poder se muestran en la Tabla 11.

La novena legislatura se encuentra marcada por la reducción del número de fuerzas

Tabla 11: Índices de Poder en el Parlamento Vasco, IX Legislatura (2012)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | EH-Bildu | PP | UPyD |
|---|---|---|---|---|---|
| Myerson | 1 | 0.2500 | 0.2500 | -0.5833 | 0.0833 |
| EFV | 0.5833 | 0.0833 | 0.2500 | 0.0833 | 0 |
| Macho-Stadler | 0.4167 | 0.1875 | 0.2292 | 0.1181 | 0.0486 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.7500 | 0.1250 | 0.2500 | 0 | -0.1250 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.5625 | 0.1875 | 0.3125 | 0.1875 | 0.0625 |
| DP-Index | 0.4487 | 0.1410 | 0.2179 | 0.1410 | 0.0513 |
| PG-Index | 0.3333 | 0.1667 | 0.2500 | 0.1667 | 0.0833 |
| Escaños | 27 | 16 | 21 | 10 | 1 |

políticas en la cámara (de 7 a 5) y por la irrupción de un nuevo partido que ocupa el espectro del nacionalismo de izquierdas y se convierte en la segunda fuerza de la cámara: EH-Bildu. De este modo, el PNV se mantiene como fuerza hegemónica, con una cuota de poder de entre 0.33 y 0.58, según el índice eficiente y acotado entre 0 y 1

[21]Si lo hace el valor $\Lambda_2$.

que se considere. EHB acumula en torno al 0.25 del poder, y el PSE-EE y el PP pierden peso, siendo considerados simétricos por el Valor Libre de Externalidades, el Índice de Deegan-Packel y el Índice de Bien Público. UPyD, con 1 diputado, se convierte en una fuerza marginal con muy poca capacidad de influencia política, hasta el punto de que el Valor Libre de Externalidades, que como sabemos es el que más castiga a las fuerzas minoritarias, no le otorga poder en absoluto, por lo que podemos decir que lo considera un jugador nulo. El resto de índices si le otorgan una pequeña cuota de poder que se explica en la medida en que, si se forman las coaliciones {PNV,PP} y {PSE-EE,EH-BILDU}, se produce un empate a 37 escaños y UPyD se convierte en un agente decisivo para romperlo. Llama la atención la simetría observada entre PSE-EE y PP en el Valor Libre de Externalidades, el valor $\Lambda_2$ de Banzhaf y los índices de Deegan-Packel y Bien Público, cuando los socialistas tienen la capacidad de otorgar al PNV la mayoría absoluta y el PP carece de ese poder. El valor de Macho-Stadler, en cambio, sí otorga al PSE-EE una cuota de poder ligeramente superior a la del PP.

### 5.1.10. X Legislatura: 2016

Iñigo Urkullu fue reelegido como Lehendakari en el año 2016 con el apoyo del PNV(28) y del PSE-EE(9), frente a la candidata de EH-Bildu, Madalen Uriarte, que obtuvo el apoyo de los 18 diputados de su partido. Los parlamentarios de PP(9) y Podemos(11) votaron en blanco. Los valores obtenidos para los índices de poder se muestran en la Tabla 12.

Esta última legislatura se encuentra marcada por la sustitución de UPyD, que como

Tabla 12: Índices de Poder en el Parlamento Vasco, X Legislatura (2016)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | EH-Bildu | PP | Podemos |
|---|---|---|---|---|---|
| Myerson | 0.6667 | -0.5000 | 0.6667 | -0.5000 | 0.6667 |
| EFV | 0.5667 | 0.0667 | 0.1500 | 0.0667 | 0.1500 |
| Macho-Stadler | 0.4722 | 0.0833 | 0.1806 | 0.0833 | 0.1806 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.6875 | -0.0625 | 0.1875 | 0.0625 | 0.1875 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.6250 | 0.1250 | 0.2500 | 0.1250 | 0.2500 |
| DP-Index | 0.4167 | 0.1250 | 0.1667 | 0.1250 | 0.1667 |
| PG-Index | 0.2800 | 0.1600 | 0.2000 | 0.1600 | 0.2000 |
| Escaños | 28 | 9 | 18 | 9 | 11 |

dijimos se había convertido en partido sin capacidad de influencia política (un jugador nulo, en términos de Teoría de Juegos), por Podemos, que se convierte en la tercera fuerza de la cámara sobrepasando a PSE-EE y PP, que ven como pasan de disputarse tracicionalmente el segundo y tercer puesto a convertirse en las fuerzas más pequeñas de la cámara.

La cuota de poder del PNV se mantiene más o menos estable, a pesar del aumento de la fragmentación causado por la irrupción de Podemos. EH-Bildu, sin embargo, sufre una reducción importante de su capacidad de influencia, y todos los índices lo consideran un jugador simétrico a Podemos, pese a que tienen 7 diputados más que la formación morada.

## 5.2. Índices de poder para los principales partidos e ideologías

En este apartado analizaremos la trayectoria política, en términos de valores para JSFFP, de las cuatro tendencias ideológicas definidas por los clevages *izquierda-derecha* y *centro-periferia*, a través de los resultados obtenidos por los principales partidos que representan a esta tendencia.

Las ideologías y partidos son los siguientes: *Derecha-Periferia*: PNV. *Izquierda-Centro*: PSE-EE. *Derecha-Centro*: AP, PP. *Izquierda-Periferia*: HB, EH, PCTV, EH-Bildu. En el caso de esta última tendencia, la ilegalización de los principales partidos de la izquierda abertzale ha imposibilitado el seguimiento de esta línea ideológica a lo largo de las legislaturas a través de un único partido. En cualquier caso consideramos que hay una coincidencia ideológica y una relación política suficientes entre las cuatro fuerzas como para considerarlas representativas de una misma corriente a lo largo del tiempo. Por motivos de facilidad en la interpretación, para llevar a cabo este análisis sólo emplearemos los índices acotados entre 0 y 1.

### 5.2.1. Izquierda-Periferia

La Figura 1 muestra la cuota de poder de la izquierda abertzale se mantiene más o menos constante entre el 0.1 y el 0.2, primero con Herri Batasuna (legislaturas I-IV) y posteriormente con Euskal Herritarok (legislaturas V-VI) y el Partido Comunista de las Tierras Vascas (VII Legislatura). En la VIII Legislatura no hay ningún partido nacionalista vasco y de izquierdas con un peso importante en la cámara (Aralar tiene 4 escaños, por lo que no lo hemos incluido). Sin embargo, tras esa legislatura la izquierda abertzale obtiene sus mejores resultados con la irrupción de EH Bildu en el Parlamento,

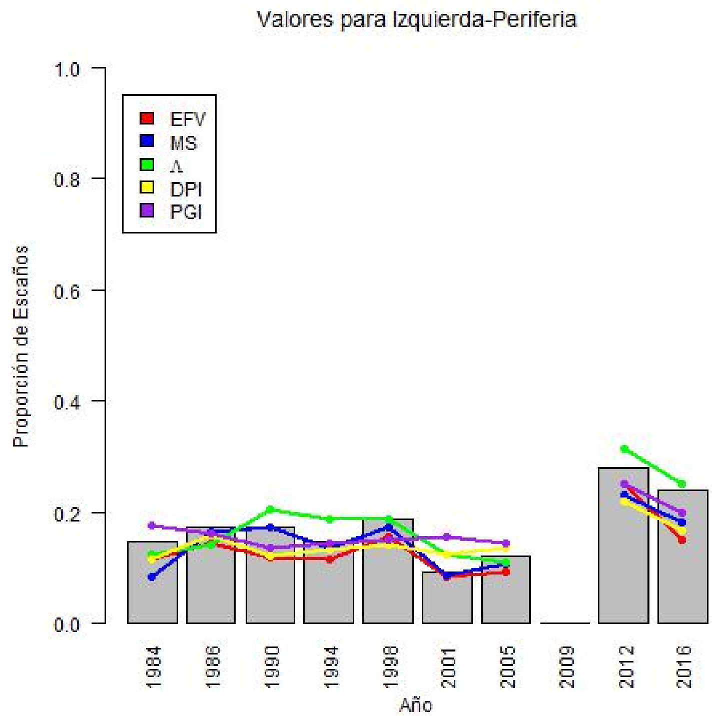


Figura 1: Evolución de los valores en la corriente Izquierda-Periferia

consiguiendo cuotas de poder de hasta 0.25 en índices Eficientes y de 0.3 en el valor $\Lambda_2$ de Banzhaf. En los siguientes comicios (2016) sus resultados empeoran, pero continúan siendo mejores que todos los obtenidos antes del 2012, y los consolidan como segunda fuerza política en el sistema de partidos vasco.

Podemos comentar varias cosas acerca de los índices de poder: El Valor Libre de Externalidades se encuentra siempre entre los índices con valores más bajos, dado que, como hemos visto, es un valor que premia al jugador con más escaños, y perjudica a fuerzas con menos representación. El valor de Macho-Stadler también otorga puntuaciones bajas en los peores momentos del partido en cuanto a representación, pero está entre los valores más altos en los años 1986, 1990 y 1998. Los índices de Deegan-Packel y de Bien Público son los que mantienen sus valores más constantes a lo largo de las legislaturas, con oscilaciones muy pequeñas, pero el nivel del segundo es mayor, dado que, como dijimos anteriormente, es el índice que más fragmenta el poder, premiando más a los partidos pequeños que el resto de valores. De hecho, el índice de Bien Público es el índice eficiente con mayor nivel en las legislaturas en las que la izquierda abertzale obtiene sus peores resultados electorales (1984, 2001 y 2005), pero también en las que obtiene los mejores (2012, 2016). Por último, el valor $\Lambda_2$ de Banzhaf alcanza niveles muy altos (por encima de la proporción de escaños del partido en la cámara) la mayoría del tiempo, y es el que mayor nivel general muestra. Esto resulta natural cuando se observa que, en 9 de las 10 legislaturas analizadas, la suma de los pagos del valor $\Lambda_1$ de Banzhaf, que como sabemos no es Eficiente, es superior a 1.[22]

### 5.2.2. Derecha-Periferia

Analizamos ahora la evolución de los índices de poder aplicados a la tendencia ideológica del nacionalismo vasco de derechas, que ha tenido un único representante con peso desde las primeras elecciones al Parlamento Vasco en el año 1980: El PNV. Además de la fuerza hegemónica en esta corriente política, el PNV ha sido durante todos estos años la fuerza hegemónica del sistema de partidos vasco, gobernando en 10 de 11 legislaturas y siendo la fuerza más votada en otras 10 (curiosamente, la legislatura en la que no gobernó y la legislatura en la que no fue la fuerza más votada no coinciden). La Figura 2 muestra la evolución de los valores para el PNV en las 10 legislaturas consideradas.

El gráfico muestra claramente la hegemonía del PNV, que obtiene una proporción de escaños prácticamente igual o superior a 0.3 en todas las elecciones menos en las del año 1986, única Legislatura en la que no fue la primera fuerza política en número de escaños de la cámara. Los índices de poder le otorgan, con excepción del índice de Bien Público, un peso aún mayor a su proporción de escaños. Esto es especialmente visible en el caso del Valor Libre de Externalidades, que le asigna puntuaciones muy por encima de su proporción de escaños en todas las legislaturas en las que el PNV es la primera fuerza política, y sin embargo es el presenta la puntuación más baja cuando no lo es. Esto nos permite confirmar algo que ya intuíamos: El Valor Libre de Externalidades es el índice que más beneficia en los pagos al partido con más escaños, y el que menos reparte entre el resto. Estamos por lo tanto ante un índice de carácter marcadamente mayoritario.

El índice de Bien Público, por el contrario, le otorga en todas las legislaturas excepto en la primera pagos iguales o inferiores a su proporción de escaños, dado que, como ya hemos comentado anteriormente, es el índice más proporcional, y reduce el pago del jugador más grande para repartir entre el resto de jugadores. Los valores de Macho-Stadler y Deegan-Packel se sitúan en una zona intermedia entre estos dos índices, y tienen niveles muy similares entre sí.

Por último, el valor $\Lambda_2$ de Banzhaf adopta valores altos, por los motivos anteriormente

[22] Sólo es inferior a 1 en la II Legislatura.

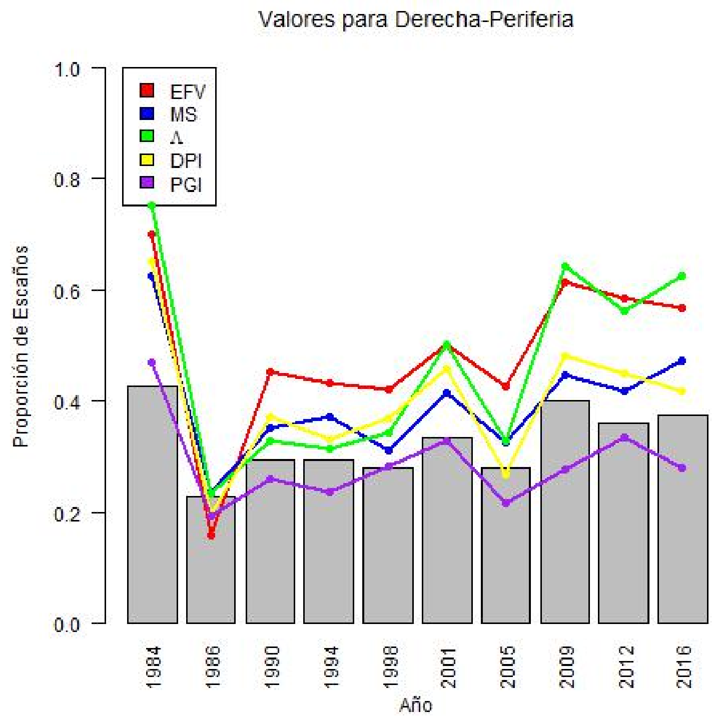


Figura 2: Evolución de los valores en la corriente Derecha-Periferia

explicados, pero en esta ocasión su nivel se queda por debajo del del Valor Libre de Externalidades, lo que de nuevo da cuenta de hasta qué punto el índice ideado por De Clippel y Serrano beneficia al partido con más escaños.

### 5.2.3. Izquierda-Centro

La Figura 3 muestra la evolución de los índices para el PSE-EE, la facción vasca del PSOE, que ha sido tradicionalmente la segunda fuerza política en el Parlamento Vasco, hasta desplomarse al cuarto lugar en las elecciones del año 2016. El gráfico muestra unos resultados bastante uniformes hasta el año 2009, cuando consiguen su mejor resultado electoral con 25 escaños y, pese a no ser la primera fuerza política (el PNV obtuvo 30), logran la investidura de su candidato a Lehendakari, Patxi López, con el apoyo del PP. Sin embargo, tras este triunfo sufren una caída electoral que les lleva a obtener su peor resultado en las últimas elecciones.
Lo primero que llama la atención en el gráfico es el pico realizado por el Valor Libre de Externalidades en la segunda legislatura, otorgándole un pago de casi 0.4 con 19

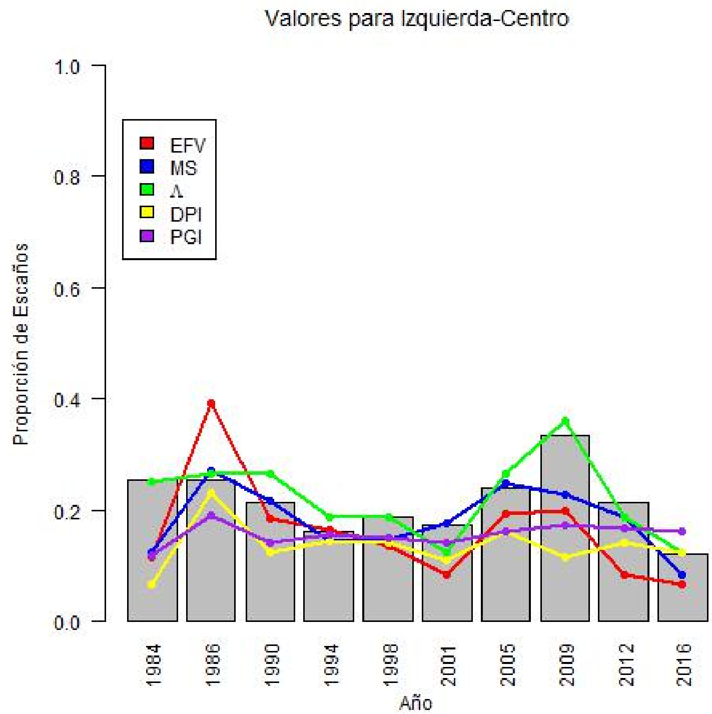


Figura 3: Evolución de los valores en la corriente Izquierda-Centro

escaños, muy superior al aproximadamente 0.2 que obtiene en el año 2009, con 25 escaños. Este pico está motivado por el hecho de que el año 1986 es el único en el que el PSE-EE consigue ser la primera fuerza política en número de escaños de la cámara y, en consecuencia, el Valor Libre de Externalidades lo premia con una cuota de poder muy alta debido a su carácter mayoritario.

El valor de Macho-Stadler es la curva con más nivel de aquellas correspondientes a índices eficientes, lo que apoya la idea sugerida en el apartado 5.1 de que este valor es el que más premia generalmente al segundo partido con más escaños. Véase que en las últimas elecciones, siendo el PSOE la fuerza más pequeña del hemiciclo junto con el PP, tanto el valor de Macho-Stadler como el Valor Libre de Externalidades se desploman, siendo los que menos pago ofrecen al PSE-EE.

El índice de Bien Público es el que menos cambios sufre en los pagos de legislatura a legislatura, mientras que el índice de Deegan-Packel llama la atención por ser el que menos poder otorga al PSE-EE cuando obtiene sus mejores resultados, probablemente debido a que su conjunto de coaliciones ganadoras minimales no crece en proporción a su subida electoral.

Por último, es importante señalar que el valor $\Lambda_2$ de Banzhaf ajusta admirablemente bien la proporción de escaños obtenida por el PSE-EE en cada Legislatura.

### 5.2.4. Derecha-Centro

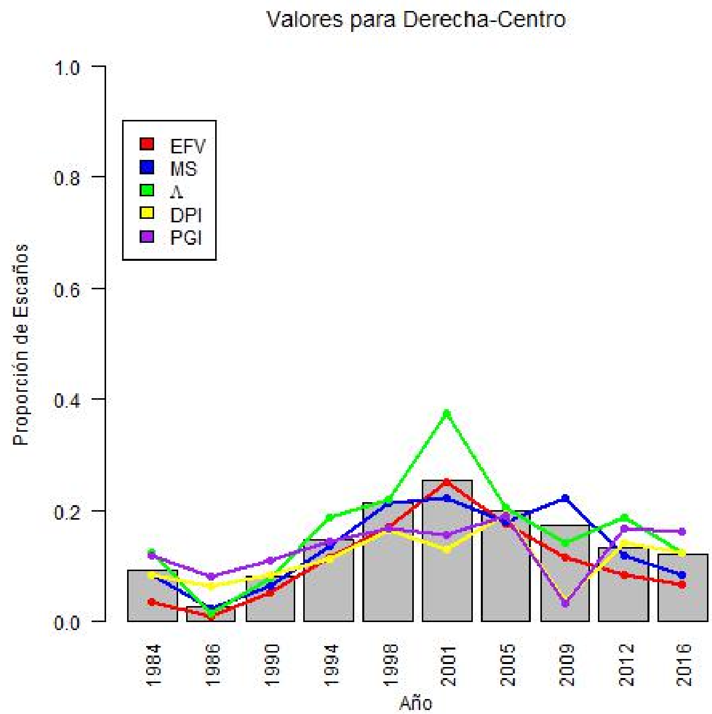


Figura 4: Evolución de los valores en la corriente Derecha-Centro

Analizaremos por último la evolución de los valores en la corriente ideológica *derecha-centro*, representada por AP/PP, según de que legislatura hablemos. La gráfica muestra una forma de campana, tanto en la proporción de escaños como en los valores de los índices, que indica un crecimiento continuado de esta tendencia política a partir del año 1986, con una cumbre en el año 2001, donde obtiene sus mejores resultados , y un descenso continuo en adelante.

Vemos de nuevo como el Valor Libre de Externalidades se sitúa por encima del resto de valores eficientes cuando el PP obtiene buenos resultados (en el año 2001), y se desploma por debajo de los demás cuando se encuentra entre las fuerzas más pequeñas de la cámara (entre 1984 y 1990 y en los años 2012 y 2016). Sin embargo, las puntuaciones no se disparan en su mejor legislatura como ocurría para el PSE-EE, dado que no logra situarse como primera fuerza. En cualquier caso, este índice vuelve a mostrar que es el más mayoritario de los estudiados. Es además la curva con menor nivel.

Como contraste, el Índice de Bien Público es el que le otorga las mayores puntuaciones en los peores momentos del partido y el segundo que peor pago le asigna en sus mejores legislaturas, sólo superado por el Índice de Deegan-Packel. Los dos valores basados en los conjuntos de coaliciones ganadoras minimales ofrecen resultados muy similares en este caso, pero el nivel del DPI es ligeramente inferior al del PGI.
El valor de Macho-Stadler, por su parte, premia las segundas posiciones del PP en los años 1999 y 2001, y se sitúa entre el Valor Libre de Externalidades y el resto de índices cuando el partido está en horas bajas. Llama la intención el pico observado en el valor de Macho-Stadler en el año 2009, cuando el PP se situaba como tercera fuerza política con 13 escaños.
Por último, el valor $\Lambda_2$ de Banzhaf es con mucho la curva con mayor nivel. Como ya vimos anteriormente, esto se debe a que no se encuentra sujeto a la propiedad de Eficiencia, y por lo tanto puede repartir más riqueza entre los jugadores que el resto de índices.

## 5.3. Comparativa de valores para JSFFP y JSFFC

Para terminar la quinta sección, y antes de extraer conclusiones en la sexta, compararemos los pagos ya observados de los índices para JSFFP con los valores que obtenemos para los valores de Shapley-Shubik, Banzhaf, Deegan-Packel y Bien Público si consideramos que no existen externalidades en el juego del Parlamento Vasco. Llevaremos a cabo la comparación analizando tres legislaturas, escogidas en función del número de partidos con representación en la cámara y de la fragmentación del poder político. Estudiaremos en primer lugar la II Legislatura, en la que el hemiciclo está ocupado por 7 partidos y la fragmentación del poder es muy alta. A continuación analizaremos la VI Legislatura, con 6 partidos, y una menor fragmentación del poder, y por último la IX Legislatura, en la que sólo hay 5 partidos en la cámara, de los cuales sólo 4 tienen poder real (UPyD sólo tiene un escaño y es considerado jugador nulo por Valor Libre de Externalidades), y la concentración del poder en manos del PNV es alta.

### 5.3.1. 7 partidos y alta fragmentación

Lo primero que llama la atención de los índices para JSFFC es que plantean más simetrías entre jugadores (en el sentido de que asignan pagos similares) que los índices para JSFFP. De este modo, el PNV y el PSE-EE reciben pagos iguales en todos los índi-

Tabla 13: Comparativa de valores c/s externalidades, II Legislatura (1986)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | HB | AP | EE | EA | CDS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Shapley-Shubik | 0.2524 | 0.2524 | 0.1524 | 0.0190 | 0.1524 | 0.1524 | 0.0190 |
| Myerson | 1.2333 | -1.8333 | 0.1000 | 0.4333 | 0.5333 | 0.1000 | 0.4333 |
| EFV | 0.1595 | 0.3929 | 0.1429 | 0.0095 | 0.1429 | 0.1429 | 0.0095 |
| Macho-Stadler | 0.2366 | 0.2710 | 0.1637 | 0.0245 | 0.1159 | 0.1637 | 0.0245 |
| Banzhaf | 0.1661 | 0.1661 | 0.1449 | 0.1166 | 0.1449 | 0.1449 | 0.1166 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.2031 | 0.2344 | 0.1094 | -0.0156 | 0.1094 | 0.1094 | 0.0156 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.2344 | 0.2656 | 0.1406 | 0.0156 | 0.1406 | 0.1406 | 0.0156 |
| Deegan-Packel | 0.2222 | 0.2222 | 0.1556 | 0.0444 | 0.1556 | 0.1556 | 0.0444 |
| DP-Index | 0.1962 | 0.2305 | 0.1572 | 0.0626 | 0.1383 | 0.1572 | 0.0579 |
| Public Good | 0.2105 | 0.2105 | 0.1579 | 0.0526 | 0.1579 | 0.1579 | 0.0526 |
| PG-Index | 0.1944 | 0.1912 | 0.1599 | 0.0815 | 0.1379 | 0.1599 | 0.0752 |
| Escaños | 17 | 19 | 13 | 2 | 9 | 13 | 2 |

ces que no consideran las externalidades y pagos diferentes en todos los índices que si las consideran. Por otro lado, EE recibe también el mismo pago que HB y EA en todos los índices sin externalidades, mientras que sólo el Valor Libre de Externalidades, el índice de Deegan-Packel y los dos valores $\Lambda$ de Banzhaf les asignan pagos iguales de entre los valores para juegos con externalidades. Los jugadores con mismo número de escaños, lógicamente, reciben pagos iguales en todos los índices.[23] Esta mayor repetición de los pagos tiene su explicación en el hecho de que los índices para juegos con externalidades utilizan una cantidad de información mucho menor que los índices específicamente diseñados para JSFFP, dado que sólo se preocupan de la coalición considerada, y no de lo que hagan el resto de partidos. En las otras dos legislaturas analizadas (VI y IX) veremos cómo estas situaciones de "falsa simetría" pueden dar lugar a pagos muy poco lógicos en juegos con externalidades.

Otro rasgo a tener en cuenta es que los valores para JSFFC reducen el pago al jugador con más escaños con respecto a los índices para JSFFP, con excepción del índice de Bien Público. Sin embargo, esto no implica necesariamente un pago mayor para los jugadores con menos escaños (AP y CDS), que en general reciben pagos mejores con los valores para juegos con externalidades.

[23]Con la excepción de AP y el CDS en el valor $\Lambda_1$ de Banzhaf, que ya fue comentada en el apartado 5.1.2.

### 5.3.2. 6 partidos y un término medio

Tabla 14: Comparativa de valores c/s externalidades, VI Legislatura (2001)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | EH | PP | IU-EB | EA |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Shapley-Shubik | 0.4000 | 0.2333 | 0.0667 | 0.2333 | 0 | 0.0667 |
| Myerson | 1.1667 | 0 | -0.1667 | 0.1667 | 0 | -0.1667 |
| EFV | 0.5000 | 0.0833 | 0.0833 | 0.2500 | 0 | 0.0833 |
| Macho-Stadler | 0.4139 | 0.1750 | 0.0861 | 0.2222 | 0.0167 | 0.0861 |
| Banzhaf | 0.2131 | 0.1803 | 0.1475 | 0.1803 | 0.1311 | 0.1475 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.5625 | 0.1250 | 0.0625 | 0.3125 | -0.0625 | 0 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.5000 | 0.1250 | 0.1250 | 0.3750 | 0 | 0.1250 |
| Deegan-Packel | 0.2667 | 0.2333 | 0.1333 | 0.2333 | 0 | 0.1333 |
| DP-Index | 0.4583 | 0.1094 | 0.1250 | 0.1302 | 0.0625 | 0.1146 |
| Public Good | 0.2308 | 0.2308 | 0.1538 | 0.2308 | 0 | 0.1538 |
| PG-Index | 0.3281 | 0.1406 | 0.1562 | 0.1562 | 0.0781 | 0.1406 |
| Escaños | 25 | 13 | 7 | 19 | 3 | 8 |

De nuevo resulta llamativa la asignación de pagos similares a jugadores con una cantidad muy diferente de escaños, como son el PSE-EE(13) y el PP(19) por parte de todos los índices para JSFFC. En esta ocasión ninguno de los índices para JSFFP devuelven resultados iguales para estos dos partidos.
Por otro lado, volvemos a observar como los pagos para el jugador con más escaños, el PNV(25), son inferiores con los valores que no tienen en cuenta las externalidades, y, del mismo modo, el partido con menos escaños, IU-EB(3), se ve claramente perjudicado por estos índices, dado que todos lo consideran un jugador nulo salvo el valor de Banzhaf. Este último es el único valor para JSFFC que asigna a IU-EB un pago distinto de 0 dado que considera todo el conjunto de coaliciones ganadoras a las que pertenece el jugador, sin importar cuánto aporta él a la coalición. Los otros valores, al tener en cuenta las contribuciones marginales o las coaliciones ganadoras minimales, consideran a IU-EB jugador nulo, dado que este partido nunca puede hacer ganadora a una coalición que no lo sea ya.

### 5.3.3. 5 partidos y alta concentración

El caso extremo de pagos iguales a jugadores con condiciones muy distintas lo encontramos en esta Legislatura, donde el PP(10) y UPyD(1) reciben el mismo pago en

Tabla 15: Compartiva de valores c/s externalidades, IX Legislatura (2012)

| Índice\Partido | PNV | PSE-EE | EH-Bildu | PP | UPyD |
|---|---|---|---|---|---|
| Shapley-Shubik | 0.4000 | 0.2333 | 0.2333 | 0.0667 | 0.0667 |
| Myerson | 1 | 0.2500 | 0.2500 | -0.5833 | 0.0833 |
| EFV | 0.5833 | 0.0833 | 0.2500 | 0.0833 | 0 |
| Macho-Stadler | 0.4167 | 0.1875 | 0.2292 | 0.1181 | 0.0486 |
| Banzhaf | 0.2453 | 0.2075 | 0.2075 | 0.1698 | 0.1698 |
| $\Lambda_1$ Banzhaf | 0.7500 | 0.1250 | 0.2500 | 0 | -0.1250 |
| $\Lambda_2$ Banzhaf | 0.5625 | 0.1875 | 0.3125 | 0.1875 | 0.0625 |
| Deegan-Packel | 0.2667 | 0.2333 | 0.2333 | 0.1333 | 0.1333 |
| DP-Index | 0.4487 | 0.1410 | 0.2179 | 0.1410 | 0.0513 |
| Public Good | 0.2308 | 0.2308 | 0.2308 | 0.1538 | 0.1538 |
| PG-Index | 0.3333 | 0.1667 | 0.2500 | 0.1667 | 0.0833 |
| Escaños | 27 | 16 | 21 | 10 | 1 |

todos los índices para juegos sin externalidades pese a encontrarse en una situación a priori muy diferente en el marco parlamentario, dado que el PP puede ser decisivo para la formación de gobierno en muchas situaciones diferentes, mientras que UPyD sólo lo es cuando se producen las coaliciones {PNV,PP} y {PSE-EE,EH-BILDU}. Sin embargo, cuando no tenemos en cuenta las estructuras coalicionales, es decir, las externalidades, los conjuntos de coaliciones ganadoras, coaliciones ganadoras minimales y pagos marginales de PP y UPyD son similares, por lo que los índices para JSFFP les asignan los mismos pagos. Claramente esta situación resulta indeseable cuando trabajamos con juegos en los que las estructuras coalicionales son relevantes, dado que estamos ignorando información fundamental al calcular los pagos.
De nuevo, además, vemos como los índices para juegos sin externalidades perjudican al jugador con más escaños, el PNV(27), pero en este caso benefician a la fuerza más pequeña, UPyD(1), por los motivos anteriormente expuestos.

# 6. Conclusiones

Tras el análisis realizado, las conclusiones de este trabajo tienen dos dimensiones: Políticas y matemáticas. Nos ocuparemos primero de las conclusiones políticas, referidas al análisis del sistema de partidos vasco y como éste se encuentra determinado por su modelo de investidura, y abordaremos después las conclusiones matemáticas, referidas al carácter de los índices estudiados y a su uso.

## 6.1. Conclusiones políticas: Un sistema de investidura marcadamente mayoritario

La principal conclusión que podemos extraer de este análisis acerca del sistema de partidos vasco es que la derecha nacionalista, representada por el PNV, es la fuerza absolutamente dominante del sistema. Este dominio se ve muy favorecido por un sistema de investidura que facilita que gobierne, casi sin excepción, la lista más votada. De este modo podemos observar cómo todos los índices de poder considerados que cumplen la propiedad de Eficiencia y están acotados entre 0 y 1, a excepción del Índice de Bien Público, otorgan a la lista más votada una cuota de poder mayor a su proporción de escaños en la cámara. En cambio, esos mismos índices otorgan puntuaciones inferiores a su proporción de escaños al resto de listas. La cuota de poder en este sistema del partido con más escaños, es decir, del PNV en la práctica totalidad de los casos, se sitúa entonces muy por encima de su cuota real de representación de la ciudadanía.
El sistema ha cumplido, eso sí, con su objetivo de garantizar la gobernabilidad en un sistema político muy fragmentado, en el que tradicionalmente ha habido un buen número de partidos con capacidad de influencia en la cámara. Sin embargo, la tendencia observada en las últimas dos legislaturas de reducción del número de fuerzas políticas con representación en la cámara implica también una reducción de la fragmentación del poder y de las dificultades para formar gobierno, por lo que podría discutirse si este sistema de investidura continúa siendo necesario en caso de mantenerse esta tendencia.

## 6.2. Conclusiones matemáticas

En primer lugar, consideramos que ha quedado demostrado, en un sentido práctico, que los índices tradicionales para JSFFC no resultan válidos cuando trabajamos con juegos con externalidades, dado que omiten información fundamental a la hora de asignar los pagos.
Centrándonos ya en los valores para juegos con externalidades, de los 6 índices de poder calculados en este trabajo, cuatro de ellos son eficientes y están acotados entre 0 y 1, por lo que su interpretación, como hemos indicado anteriormente, resulta sencilla. Los otros dos (el valor de Myerson y el valor $\Lambda$ de Banzhaf), en cambio, no cumplen estas dos condiciones y deben analizarse con más cautela.

Las puntuaciones obtenidas para el valor de Myerson a lo largo de las legislaturas han sido francamente desconcertantes, y es complicado encontrar un patrón lógico para interpretar las cantidades observadas, ya sea en términos de valores absolutos o asumiendo que los pagos se distribuyen en toda la recta real. A la luz de estos resultados, desaconsejamos el empleo del valor de Myerson en el ámbito de los Juegos Simples en Forma de Función de Partición.

Los resultados obtenidos para el valor $\Lambda$ de Banzhaf, en las dos variantes estudiadas, sí muestran un orden lógico en relación con los pesos de los partidos en la cámara y son susceptibles de interpretación. El valor $\Lambda_1$, que hemos obtenido definiendo distintas familias de distribuciones de probabilidad, determinadas por los cambios del valor $p$, para cada $S \subseteq N$, arroja en ocasiones pagos negativos, debido a que, como ya dijimos, las distribuciones de probabilidad empleadas no garantizan la obtención de juegos monótonos. Teniendo esto en cuenta, los valores negativos no deberían de ser un obstáculo para la interpretación del índice, si bien dificultan la comparación de las puntuaciones obtenidas con las de los otros índices de poder considerados. Por otro lado, este valor no garantiza que partidos con el mismo número de escaños obtengan los mismos pagos, dado que los resultados dependen de las distintas distribuciones de probabilidad, determinadas por las diferencias ideológicas entre cada partido y el resto, y por lo tanto estas diferencias ideológicas determinan indirectamente el pago. Esta circunstancia puede ser incluso deseable, en el sentido de que resulta lógico que cuando dos partidos tienen el mismo número de escaños, pero uno de ellos tiene diferencias ideológicas importantes con el resto de fuerzas de la cámara y el otro se encuentra muy cercano ideológicamente a esas fuerzas, los pagos sean diferentes.

El valor $\Lambda_2$ de Banzhaf, en cambio, no arroja valores negativos y asigna pagos similares a partidos con los mismos escaños, por lo que su interpretación es muy similar a la de los índices eficientes y acotados entre 0 y 1. Es recomendable, en cualquier caso, ser cuidadoso en las comparaciones, dado que al no ser Eficiente el valor $\Lambda_2$ de Banzhaf tiende a devolver puntuaciones más elevadas a las del resto de valores acotados entre 0 y 1. En definitiva, sí aconsejamos el empleo del valor $\Lambda$ de Banzhaf, con cualquier de las dos familias de distribuciones de probabilidad consideradas, pero recomendamos cautela en la interpretación y la comparación de los valores.

En lo que se refiere a los 4 valores eficientes y acotados entre 0 y 1, el Valor Libre de Externalidades es claramente el índice con un carácter más marcadamente mayoritario. El valor propuesto por De Clippel y Serrano otorga al partido con más escaños una cuota de poder muy superior a su cuota de representación, y a cambio asigna pagos muy pequeños a los partidos con menos escaños. Sin ser tan mayoritario, el valor de Macho-Stadler beneficia también a las fuerzas más grandes, y en particular es el índice

que mejores pagos suele dar a las segundas y, en menor medida, a las terceras fuerzas del Parlamento.
En contraste, el Índice de Bien Público es el valor más proporcional, y en consecuencia, el que mantiene sus pagos más estables a lo largo de las legislaturas, dado que tiende a repartir el poder entre todas las fuerzas. el Índice de Deegan-Packel no es tan proporcional, pero continúa siendo menos mayoritario que el Valor Libre de Externalidades y el valor de Macho-Stadler. El uso de todos estos índices es muy recomendable, dado que verifican propiedades muy razonables y su interpretación es muy sencilla. Es importante, eso sí, tener en cuenta las tendencias aquí descritas.

# A. Códigos R

En este apéndice se incluyen los códigos empleados para calcular los distintos índices obtenidos en la Sección 5, así como las dos distribuciones de probabilidad utilizadas para obtener los valores $\Lambda$ de Banzhaf.

## A.1. Código para el valor de Myerson

```r
library(partitions)

MyersonVal<-function(players){

n<-length(players)
names(players)=1:n

parts<-listParts(n)
N<-length(parts)

out<- rapply(parts, function(ii) players[ii], how="replace")

parts2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
parts2[[i]]<-lapply(parts[[i]],as.numeric)}

out2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
out2[[i]]<-lapply(out[[i]],as.numeric)}

sums<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
sums[[i]]<-lapply(out[[i]],sum)
}

max<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
max[[i]]<-which.max(sums[[i]])}
```

```
winnersindex<-numeric(N)
for (i in 1:N){
winnersindex[i]<-max[[i]]}

notwins<-vector("list",length(parts2))
for (i in 1:length(parts2)){
notwins[[i]]<-as.matrix(parts2[[i]])[-winnersindex[i],]
notwins[[i]]<-as.matrix(notwins[[i]])
}

NwSi<-matrix(nrow=n,ncol=length(notwins))
NwSi[,1]=rep(0,n)

for (i in 1:n){
for (j in 2:length(notwins)){
if (length(which(unlist(lapply(notwins[[j]],
function(x) i %in% x))==T))==0){
NwSi[i,j]=0}
else{
NwSi[i,j]=which(unlist(lapply(notwins[[j]],
function(x) i %in% x))==T)
}}}

sums<-vector("list",length(notwins))

for (i in 1:length(notwins)){
sums[[i]]<-matrix(nrow=length(notwins[[i]]),ncol=1)
}

sums[[1]]<-0
for (i in 2:length(sums)){
for (j in 1:length(sums[[i]])){
sums[[i]][j,]=1/((length(parts2[[i]])-1)*
(n-(length(unlist(notwins[[i]][j,])))))
}}

sums2<-vector("list",n)

for (i in 1:n){
sums2[[i]]<-matrix(nrow=length(sums),ncol=1)
```

```
for (j in 1:length(sums)){
if(NwSi[i,j]==0){
sums2[[i]][j,]=sum(sums[[j]])}
else{
sums2[[i]][j,]=sum(sums[[j]][-NwSi[i,j]])}
}
}

Ind<-matrix(nrow=n,ncol=length(sums))

for (i in 1:n){
for (j in 1:length(sums)){
Ind[i,j]=
((-1)^(length(parts2[[j]])-1))*factorial(length(parts2[[j]])-1)*
((1/n)-sums2[[i]][j,])
}}

Myerson<-apply(Ind,1,sum)
names(Myerson)=1:n

return(Myerson)
}
```

## A.2. Código para el Valor Libre de Externalidades

```
library(partitions)
library(GameTheory)

ExtFreeVal<-function(players){

n<-length(players)
names(players)=1:n

parts<-listParts(n)
N<-length(parts)

out<- rapply(parts, function(ii) players[ii], how="replace")

parts2<-vector("list",N)
```

```
for (i in 1:N){
parts2[[i]]<-lapply(parts[[i]],as.numeric)}

out2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
out2[[i]]<-lapply(out[[i]],as.numeric)}

Votes2<-vector("list",n)
for (i in 1:n){
Votes2[[i]]=t(combn(players,i))
}

for (i in 1:n){
for (j in 1:nrow(Votes2[[i]])){
Votes2[[i]][j,]=sum(Votes2[[i]][j,])
}}
for (i in 1:n){
Votes2[[i]]=Votes2[[i]][,1]}
Votes2<-unlist(Votes2)

CF<-numeric(length(Votes2))
for (i in 1:n){
if (Votes2[i]==max(Votes2[1:n])){
CF[i]=1}
else{
CF[i]=0}}

for (i in 1:(length(Votes2)-n)){
if (Votes2[i+n]>max(Votes2[1:n])){
CF[i+n]=1}
else{
CF[i+n]=0}}

Game<-DefineGame(n,CF)
EFV<-ShapleyValue(Game,1:n)$SV
return(EFV)
}
```

## A.3. Código para el valor de Macho-Stadler

```
library(partitions)

MSVal<-function(players){

n<-length(players)
names(players)<-1:n

parts<-listParts(n)
N<-length(parts)

out<- rapply(parts, function(ii) players[ii], how="replace")

parts2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
parts2[[i]]<-lapply(parts[[i]],as.numeric)}

out2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
out2[[i]]<-lapply(out[[i]],as.numeric)}

sums<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
sums[[i]]<-lapply(out[[i]],sum)
}

max<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
max[[i]]<-which.max(sums[[i]])}

winnersindex<-numeric(N)
for (i in 1:N){
winnersindex[i]<-max[[i]]}

winners<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
winners[[i]]<-as.matrix(parts2[[i]])[winnersindex[i],]}
for (i in 1:length(winners)){
winners[[i]]<-unlist(winners[[i]])}
winners<-as.matrix(winners)
```

```
sizesS<-numeric(length(winners))
for (i in 1:length(winners)){
sizesS[i]<-length(winners[[i]])
}

nowinners<-vector("list",length(winners))
for (i in 1:length(winners)){
nowinners[[i]]<-as.matrix(parts2[[i]])[-winnersindex[i],]
}
for (i in 1:length(nowinners)){
nowinners[[i]]<-as.matrix(nowinners[[i]])
}

SizesNW<-vector("list",length(nowinners))
SizesNW[[1]]<-0

for (i in 2:length(nowinners)){
SizesNW[[i]]<-lapply(nowinners[[i]],length)
}
for (i in 1:length(SizesNW)){
SizesNW[[i]]<-as.matrix(SizesNW[[i]])}

Tsums<-vector("list",length(winners))
Tsums[[1]]<-1
for (i in 2:length(winners)){
Tsums[[i]]<-matrix(nrow=nrow(SizesNW[[i]]),ncol=1)
for (j in 1:nrow(SizesNW[[i]])){
Tsums[[i]][j,]<-factorial(unlist(SizesNW[[i]][j,])-1)
}}

Term<-numeric(length(winners))
for (i in 1:length(winners)){
Term[i]<-prod(unlist(Tsums[[i]]))
}

Coal<-matrix(nrow=n,ncol=length(winners))
for (i in 1:n){
for (j in 1:length(winners)){
if (i %in% unlist(winners[j,])){
```

```
Coal[i,j]=1}
else{
Coal[i,j]=0}
}}

Beta<-matrix(nrow=n,ncol=ncol(Coal))
for (i in 1:n){
for (j in 1:ncol(Coal)){
if(Coal[i,j]==1){
Beta[i,j]=(factorial(sizesS[j]-1)*
factorial(n-sizesS[j]))/factorial(n)}
else{
Beta[i,j]=(-((factorial(sizesS[j])*
factorial(n-sizesS[j]-1))/factorial(n)))}
}}

Terms<-matrix(nrow=n,ncol=length(winners))

for (i in 1:n){
for (j in 1:length(winners)){
Terms[i,j]=(Term[j]/(factorial(n-sizesS[j])))*Beta[i,j]
}}

MS<-apply(Terms,1,sum)
names(MS)<-1:n

return(MS)
}
```

## A.4. Código para el valor $\Lambda$ de Banzhaf

Este código es válido para cualquier familia de distribuciones de probabilidad $\lambda^N$ contenida en $\Lambda$ que se considere.[24]

```
library(partitions)
library(GameTheoryAllocation)

LBanzhaf<-function(players,lambdaN){
```

[24]Argumento *lambdaN*.

```
n<-length(players)
names(players)=1:n

parts<-listParts(n)
N<-length(parts)

out<- rapply(parts, function(ii) players[ii], how="replace")

parts2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
parts2[[i]]<-lapply(parts[[i]],as.numeric)}

for (i in 1:length(parts2)){
parts2[[i]]<-as.matrix(parts2[[i]])
}

out2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
out2[[i]]<-lapply(out[[i]],as.numeric)}

sums<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
sums[[i]]<-lapply(out[[i]],sum)
}

max<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
max[[i]]<-which.max(sums[[i]])}

winnersindex<-numeric(N)
for (i in 1:N){
winnersindex[i]<-max[[i]]}

winners<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
winners[[i]]<-as.matrix(parts2[[i]])[winnersindex[i],]}

Coal<-coalitions(n)$Binary[-1,]
```

```
S<-vector("list",2^n-1)
for (i in 1:length(S)){
S[[i]]<-which(Coal[i,]==1)
}

symdiff <- function(a,b) setdiff(union(a,b), intersect(a,b))

difs<-vector("list",length(S))
for (i in 1:length(S)){
difs[[i]]<-vector("list",length(parts2))
for (j in 1:length(parts2)){
difs[[i]][[j]]<-matrix(nrow=nrow(parts2[[j]]),ncol=1)
for (k in 1:nrow(parts2[[j]])){
if(length(symdiff(unlist(parts2[[j]][k,]),S[[i]]))==0){
difs[[i]][[j]][k,]=1}
else{
difs[[i]][[j]][k,]=0}
}}}

for (i in 1:length(difs)){
for (j in 1:length(difs[[i]])){
difs[[i]][[j]]<-apply(difs[[i]][[j]],2,sum)
}}

CP<-matrix(nrow=length(S),ncol=length(parts2))
for (i in 1:nrow(CP)){
for (j in 1:ncol(CP)){
CP[i,j]=difs[[i]][[j]]
}}

PartCoal<-vector("list",2^n-1)
for (i in 1:(2^n-1)){
PartCoal[[i]]<-vector("list",length(which(CP[i,]==1)))
for (j in 1:length(which(CP[i,]==1))){
PartCoal[[i]][[j]]<-parts2[[which(CP[i,]==1)[j]]]
}}

PNS<-vector("list",length(S))
for (i in 1:length(S)){
PNS[[i]]<-PartCoal[[i]][[which(lambdaN[[i]]==
```

```
max(unlist(lambdaN[[i]])))]]
}

PartWins<-vector("list",2^n-1)
for (i in 1:(2^n-1)){
PartWins[[i]]<-vector("list",length(which(CP[i,]==1)))
for (j in 1:length(which(CP[i,]==1))){
PartWins[[i]][[j]]<-winners[[which(CP[i,]==1)[j]]]
PartWins[[i]][[j]]<-unlist(PartWins[[i]][[j]])
}}

PNSwinners<-vector("list",length(S))
for (i in 1:length(S)){
PNSwinners[[i]]<-PartWins[[i]][[which(lambdaN[[i]]==
max(unlist(lambdaN[[i]])))]]
}

vLambda<-numeric(length(S))
for (i in 1:length(S)){
if (length(symdiff(S[[i]],PNSwinners[[i]]))==0){
vLambda[i]=1}
else{
vLambda[i]=0}
}

Si<-matrix(nrow=n,ncol=length(S))
for (i in 1:n){
for (j in 1:length(S)){
if (i %in% S[[j]]){
Si[i,j]=1}
else{
Si[i,j]=0}
}}

Sni<-vector("list",n)
for (i in 1:n){
Sni[[i]]<-vector("list",length(which(Si[i,]==1)))
for (j in 1:length(which(Si[i,]==1))){
Sni[[i]][[j]]<-symdiff(S[[which(Si[i,]==1)[j]]],i)}}
for (i in 1:n){
```

```r
Sni[[i]]<-as.matrix(as.matrix(Sni[[i]])[-1,])}

SSni<-vector("list",n)
for (i in 1:n){
SSni[[i]]<-vector("list",length(Sni[[i]]))
for (j in 1:length(Sni[[i]])){
SSni[[i]][[j]]<-vector("list",length(S))}}

for (i in 1:n){
for (j in 1:length(Sni[[i]])){
for (k in 1:length(S)){
SSni[[i]][[j]][[k]]<-identical(Sni[[i]][j,],S[k])
}}}

SniVal<-vector("list",n)
for (i in 1:n){
SniVal[[i]]<-vector("list",length(Sni[[i]])+1)
SniVal[[i]][[1]]<-0
for (j in 1:length(Sni[[i]])){
SniVal[[i]][[j+1]]<-vLambda[which(SSni[[i]][[j]]==T)]
}}
for (i in 1:n){
SniVal[[i]]<-as.matrix(SniVal[[i]])
}

LambdaBanzhaf<-numeric(n)

t1<-1/(2^(n-1))

for (i in 1:n){
t2<-numeric(length(which(Si[i,]==1)))
for (j in 1:length(which(Si[i,]==1))){
t2[j]=vLambda[which(Si[i,]==1)][j]-unlist(SniVal[[i]][,1])[j]
}
t2<-sum(t2)
LambdaBanzhaf[i]<-t1*t2
}

return(LambdaBanzhaf)
}
```

**Código para obtener las distribuciones de probabilidad en $\Lambda_1$**

```
library(partitions)
library(GameTheoryAllocation)

LambdaN<-function(players,eco,nac){

n<-length(players)

EcoDif<-matrix(nrow=n,ncol=n)
for (i in 1:n){
for (j in 1:n){
EcoDif[i,j]<-abs(eco[i]-eco[j])
}}

NacDif<-matrix(nrow=n,ncol=n)
for (i in 1:n){
for (j in 1:n){
NacDif[i,j]<-abs(nac[i]-nac[j])
}}

PactP<-matrix(nrow=n,ncol=n)
for (i in 1:n){
for (j in 1:n){
if (EcoDif[i,j]+NacDif[i,j]==0){
PactP[i,j]=1}
else{
PactP[i,j]<-1-((EcoDif[i,j]+NacDif[i,j])/8)
}}}

parts<-listParts(n)
N<-length(parts)

out<- rapply(parts, function(ii) players[ii], how="replace")

parts2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
parts2[[i]]<-lapply(parts[[i]],as.numeric)}
```

```
for (i in 1:length(parts2)){
parts2[[i]]<-as.matrix(parts2[[i]])
}

Coal<-coalitions(n)$Binary[-1,]

S<-vector("list",2^n-1)
for (i in 1:length(S)){
S[[i]]<-which(Coal[i,]==1)
}

symdiff <- function(a,b) setdiff(union(a,b), intersect(a,b))

difs<-vector("list",length(S))
for (i in 1:length(S)){
difs[[i]]<-vector("list",length(parts2))
for (j in 1:length(parts2)){
difs[[i]][[j]]<-matrix(nrow=nrow(parts2[[j]]),ncol=1)
for (k in 1:nrow(parts2[[j]])){
if(length(symdiff(unlist(parts2[[j]][k,]),S[[i]]))==0){
difs[[i]][[j]][k,]=1}
else{
difs[[i]][[j]][k,]=0}
}}}

for (i in 1:length(difs)){
for (j in 1:length(difs[[i]])){
difs[[i]][[j]]<-apply(difs[[i]][[j]],2,sum)
}}

CP<-matrix(nrow=length(S),ncol=length(parts2))
for (i in 1:nrow(CP)){
for (j in 1:ncol(CP)){
CP[i,j]=difs[[i]][[j]]
}}

PartCoal<-vector("list",2^n-1)
for (i in 1:(2^n-1)){
PartCoal[[i]]<-vector("list",length(which(CP[i,]==1)))
for (j in 1:length(which(CP[i,]==1))){
```

```
PartCoal[[i]][[j]]<-parts2[[which(CP[i,]==1)[j]]]
}}

p<-vector("list",length(S))

for (i in 1:length(S)){
p[[i]]<-prod(PactP[-unlist(S[[i]]),
-unlist(S[[i]])][lower.tri(PactP[-unlist(S[[i]]),-unlist(S[[i]])])])
}

probs<-vector("list",length(S))
for (i in 1:length(S)){
probs[[i]]<-vector("list",length(PartCoal[[i]]))
for (j in 1:length(PartCoal[[i]])){
if (length(PartCoal[[i]][[j]])-1==n-length(S[[i]])){
probs[[i]][[j]]=(1-p[[i]])}
else{
probs[[i]][[j]]=0}
if (length(PartCoal[[i]][[j]])-1==1){
probs[[i]][[j]]=p[[i]]}
else{
probs[[i]][[j]]=probs[[i]][[j]]}
}}

for (i in 1:length(S)){
if (length(PartCoal[[i]])==1){
probs[[i]][[1]]=1}
else{
probs[[i]][[j]]=probs[[i]][[j]]}
}

return(probs)
}

lambdaN_1<-LambdaN(players,eco,nac)
```

**Código para obtener las distribuciones de probabilidad en $\Lambda_2$**

```
library(partitions)
```

```
library(GameTheoryAllocation)

LambdaN2<-function(players,eco,nac){

n<-length(players)

EcoDif<-matrix(nrow=n,ncol=n)
for (i in 1:n){
for (j in 1:n){
EcoDif[i,j]<-abs(eco[i]-eco[j])
}}

NacDif<-matrix(nrow=n,ncol=n)
for (i in 1:n){
for (j in 1:n){
NacDif[i,j]<-abs(nac[i]-nac[j])
}}

PactP<-matrix(nrow=n,ncol=n)
for (i in 1:n){
for (j in 1:n){
if (EcoDif[i,j]+NacDif[i,j]==0){
PactP[i,j]=1}
else{
PactP[i,j]<-1-((EcoDif[i,j]+NacDif[i,j])/8)
}}}

parts<-listParts(n)
N<-length(parts)

out<- rapply(parts, function(ii) players[ii], how="replace")

parts2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
parts2[[i]]<-lapply(parts[[i]],as.numeric)}

for (i in 1:length(parts2)){
parts2[[i]]<-as.matrix(parts2[[i]])
}
```

```r
Coal<-coalitions(n)$Binary[-1,]

S<-vector("list",2^n-1)
for (i in 1:length(S)){
S[[i]]<-which(Coal[i,]==1)
}

symdiff <- function(a,b) setdiff(union(a,b), intersect(a,b))

difs<-vector("list",length(S))
for (i in 1:length(S)){
difs[[i]]<-vector("list",length(parts2))
for (j in 1:length(parts2)){
difs[[i]][[j]]<-matrix(nrow=nrow(parts2[[j]]),ncol=1)
for (k in 1:nrow(parts2[[j]])){
if(length(symdiff(unlist(parts2[[j]][k,]),S[[i]]))==0){
difs[[i]][[j]][k,]=1}
else{
difs[[i]][[j]][k,]=0}
}}}

for (i in 1:length(difs)){
for (j in 1:length(difs[[i]])){
difs[[i]][[j]]<-apply(difs[[i]][[j]],2,sum)
}}

CP<-matrix(nrow=length(S),ncol=length(parts2))
for (i in 1:nrow(CP)){
for (j in 1:ncol(CP)){
CP[i,j]=difs[[i]][[j]]
}}

PartCoal<-vector("list",2^n-1)
for (i in 1:(2^n-1)){
PartCoal[[i]]<-vector("list",length(which(CP[i,]==1)))
for (j in 1:length(which(CP[i,]==1))){
PartCoal[[i]][[j]]<-parts2[[which(CP[i,]==1)[j]]]
}}

p<-prod(PactP[lower.tri(PactP)])
```

```
probs<-vector("list",length(S))
for (i in 1:length(S)){
probs[[i]]<-vector("list",length(PartCoal[[i]]))
for (j in 1:length(PartCoal[[i]])){
if (length(PartCoal[[i]][[j]])-1==n-length(S[[i]])){
probs[[i]][[j]]=(1-p)}
else{
probs[[i]][[j]]=0}
if (length(PartCoal[[i]][[j]])-1==1){
probs[[i]][[j]]=p}
else{
probs[[i]][[j]]=probs[[i]][[j]]}
}}

for (i in 1:length(S)){
if (length(PartCoal[[i]])==1){
probs[[i]][[1]]=1}
else{
probs[[i]][[j]]=probs[[i]][[j]]}
}

return(probs)
}

lambdaN_2<-LambdaN(players,eco,nac)
```

## A.5. Código para el DP-Index y el PG-Index

```
library(partitions)

PowerIndices<-function(players,votes){

if (missing(votes)){

library(partitions)

n<-length(players)
names(players)=1:n
```

```r
parts<-listParts(n)
N<-length(parts)

out<- rapply(parts, function(ii) players[ii], how="replace")

parts2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
parts2[[i]]<-lapply(parts[[i]],as.numeric)}

out2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
out2[[i]]<-lapply(out[[i]],as.numeric)}

sums<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
sums[[i]]<-lapply(out[[i]],sum)
}

max<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
max[[i]]<-which.max(sums[[i]])}

winnersindex<-numeric(N)
for (i in 1:N){
winnersindex[i]<-max[[i]]}

winners<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
winners[[i]]<-as.matrix(parts2[[i]])[winnersindex[i],]}

upperbound<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
upperbound[[i]]<-as.numeric(as.matrix(sums[[i]])[winnersindex[i],])}

lowerbound<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
lowerbound[[i]]<-as.numeric(lapply(as.matrix(out2[[i]])[winnersindex[i],],
sum))-as.numeric(lapply(as.matrix(out2[[i]])[winnersindex[i],],min))}
```

```
lbr<-numeric(N)
ubr<-numeric(N)

for (i in 1:N){
lbr[i]<-length(which(sums[[i]]>=lowerbound[[i]]))}
for (i in 1:N){
ubr[i]<-length(which(sums[[i]]>=upperbound[[i]]))}

MWC<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
if (lbr[i]>1&ubr[i]==1){
MWC[[i]]<-winners[[i]]}
else{
MWC[[i]]=0}
}

ActiveCoalition<-MWC[-which(MWC==0)]
WinningParts<-parts[-which(MWC==0)]
MWEC<-cbind(ActiveCoalition,WinningParts)

SumsPart<-sums[-which(MWC==0)]
for (i in 1:length(ActiveCoalition)){
SumsPart[[i]]<-unlist(SumsPart[[i]])}

MaxPart<-numeric(length(ActiveCoalition))
for (i in 1:length(ActiveCoalition)){
MaxPart[i]<-max(SumsPart[[i]])}

MWC2<-numeric(length(ActiveCoalition))

for (i in 1:length(ActiveCoalition)){
if(length(SumsPart[[i]])==2){
MWC2[i]=1}
else{
if(length(which(apply(as.matrix(combn(SumsPart[[i]][-which.max(
SumsPart[[i]])],2)),2,sum)>=MaxPart[[i]]))==ncol(as.matrix(
combn(SumsPart[[i]][-which.max(SumsPart[[i]])],2))))
{
MWC2[i]=1}
else{
```

```
MWC2[i]=0}}}

ActiveCoalition<-ActiveCoalition[-which(MWC2==0)]
WinningParts<-WinningParts[-which(MWC2==0)]
MWEC<-cbind(ActiveCoalition,WinningParts)

Mv<-length(MWEC[,1])
M<-matrix(ncol=Mv,nrow=n)

for (i in 1:n){
for (j in 1:Mv){
A<-unlist(ActiveCoalition,recursive=F)
if (lapply(A, function(x) i %in% x)[j]==TRUE){
M[i,j]=1}
else{
M[i,j]=0}
}
}

sizes<-numeric(Mv)
for (i in 1:Mv){
A<-unlist(ActiveCoalition,recursive=F)
sizes[i]=lapply(A,length)[i]
sizes=unlist(sizes)}

Msizes<-matrix(ncol=Mv,nrow=n)
for (i in 1:n){
Msizes[i,]=M[i,]*sizes}

DP<-numeric(n)
t1<-1/Mv
dnm<-matrix(ncol=Mv,nrow=n)
t2<-numeric(n)
for (i in 1:n){
for (j in 1:Mv){
if (Msizes[i,j]==0){
dnm[i,j]=0}
else{
dnm[i,j]=1/Msizes[i,j]}
}
```

```
t2[i]=sum(dnm[i,])
}
for (i in 1:n){
DP[i]<-t1*t2[i]
}

PG<-numeric(n)
for (i in 1:n){
PG[i]<-sum(M[i,])/sum(M)}

output<-rbind(DP,PG)
rownames(output)=c("DP","PG")
colnames(output)=1:n

return(output)
}

else{

n<-length(players)
names(players)=1:n

parts<-listParts(n)
N<-length(parts)

out<- rapply(parts, function(ii) players[ii], how="replace")
votesout<-rapply(parts,function(ii) votes[ii],how="replace")

parts2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
parts2[[i]]<-lapply(parts[[i]],as.numeric)}

out2<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
out2[[i]]<-lapply(out[[i]],as.numeric)}

sums<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
sums[[i]]<-lapply(out[[i]],sum)
}
```

```
for (i in 1:N){
sums[[i]]<-unlist(sums[[i]])
}

votesums<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
votesums[[i]]<-lapply(votesout[[i]],sum)
}
for (i in 1:N){
votesums[[i]]<-unlist(votesums[[i]])
}

max<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
if(length(which(sums[[i]]==max(sums[[i]])))==1){
max[[i]]<-which.max(sums[[i]])}
else{
max[[i]]<-which.max(votesums[[i]])}
}

winnersindex<-numeric(N)
for (i in 1:N){
winnersindex[i]<-max[[i]]}

winners<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
winners[[i]]<-as.matrix(parts2[[i]])[winnersindex[i],]}

upperbound<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
upperbound[[i]]<-as.numeric(as.matrix(sums[[i]])[winnersindex[i],])}

lowerbound<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
lowerbound[[i]]<-as.numeric(lapply(
as.matrix(out2[[i]])[winnersindex[i],],
sum))-as.numeric(lapply(as.matrix(out2[[i]])[winnersindex[i],],min))}

lbr<-numeric(N)
ubr<-numeric(N)
```

```
for (i in 1:N){
lbr[i]<-length(which(sums[[i]]>=lowerbound[[i]]))}
for (i in 1:N){
ubr[i]<-length(which(sums[[i]]>upperbound[[i]]))}

MWC<-vector("list",N)
for (i in 1:N){
if (lbr[i]>1&ubr[i]==0){
MWC[[i]]<-winners[[i]]}
else{
MWC[[i]]=0}
}

ActiveCoalition<-MWC[-which(MWC==0)]
WinningParts<-parts[-which(MWC==0)]
MWEC<-cbind(ActiveCoalition,WinningParts)

SumsPart<-sums[-which(MWC==0)]
for (i in 1:length(ActiveCoalition)){
SumsPart[[i]]<-unlist(SumsPart[[i]])}

MaxPart<-numeric(length(ActiveCoalition))
for (i in 1:length(ActiveCoalition)){
MaxPart[i]<-max(SumsPart[[i]])}

MWC2<-numeric(length(ActiveCoalition))

for (i in 1:length(ActiveCoalition)){
if(length(SumsPart[[i]])==2){
MWC2[i]=1}
else{
if(length(which(apply(as.matrix(combn(SumsPart[[i]][-which.max(
SumsPart[[i]])],2)),2,sum)>=MaxPart[[i]]))==
ncol(as.matrix(combn(SumsPart[[i]][-which.max(SumsPart[[i]])],2))))
{
MWC2[i]=1}
else{
MWC2[i]=0}}}
```

```
ActiveCoalition<-ActiveCoalition[-which(MWC2==0)]
WinningParts<-WinningParts[-which(MWC2==0)]
MWEC<-cbind(ActiveCoalition,WinningParts)

Mv<-length(MWEC[,1])
M<-matrix(ncol=Mv,nrow=n)

for (i in 1:n){
for (j in 1:Mv){
A<-unlist(ActiveCoalition,recursive=F)
if (lapply(A, function(x) i %in% x)[j]==TRUE){
M[i,j]=1}
else{
M[i,j]=0}
}
}

sizes<-numeric(Mv)
for (i in 1:Mv){
A<-unlist(ActiveCoalition,recursive=F)
sizes[i]=lapply(A,length)[i]
sizes=unlist(sizes)}

Msizes<-matrix(ncol=Mv,nrow=n)
for (i in 1:n){
Msizes[i,]=M[i,]*sizes}

DP<-numeric(n)
t1<-1/Mv
dnm<-matrix(ncol=Mv,nrow=n)
t2<-numeric(n)
for (i in 1:n){
for (j in 1:Mv){
if (Msizes[i,j]==0){
dnm[i,j]=0}
else{
dnm[i,j]=1/Msizes[i,j]}
}
t2[i]=sum(dnm[i,])
}
```

```
for (i in 1:n){
DP[i]<-t1*t2[i]
}

PG<-numeric(n)
for (i in 1:n){
PG[i]<-sum(M[i,])/sum(M)}

output<-rbind(DP,PG)
rownames(output)=c("DP","PG")
colnames(output)=1:n

return(output)
}
}
```

# Referencias


[1] Alonso-Meijide JM, Álvarez-Mozos M, Fiestras-Janeiro MG (2017) Power indices and minimal winning coalitions for simple games in partition function form. Group Decision and Negotiation, 2017, 26(6):1231-1245.

[2] Alonso-Meijide JM, Casas-Méndez B, Fiestras-Janeiro B, Holler M (2010) Two variations of the Public Good Index for games with a priori unions. Control and Cybernetics, 39(3):839-855.

[3] Alonso-Meijide JM, Casas-Méndez B, Holler MJ, Lorenzo-Freire S (2008) Computing power indices: multilinear extensions and new characterizations. European Journal of Operational Research, 188(2):540-554.

[4] Álvarez-Mozos M, Alonso-Meijide, Fiestras-Janeiro MG (2009) The Banzhaf value in TU games with restricted cooperation.

[5] Álvarez-Mozos M, Tejada O (2015) The Banzhaf value in the presence of externalities. Social Choice and Welfare, 44(4):781-805.

[6] Banzhaf JF (1964) Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. Rutgers Law Review, 19:317-343.

[7] Bolger E (1986) Power indices for multicandidate voting games. International Journal of Game Theory 15(3):175–186.

[8] Cano-Berlanga S (2017) Game Theory: Cooperative Game Theory. R package version 2.7. https://cran.r-project.org/package=GameTheory. Accedido el 19 de Junio de 2018.

[9] Carreras F, Magaña A (2008) The Shapley–Shubik index for simple games with multiple alternatives. Annals of Operations Research, 158(1):81–97.

[10] Casajus A (2011) Marginality, differential marginality, and the Banzhaf value. Theory and Decision, 71(3):365-372.

[11] de Clippel G, Serrano R (2008) Marginal contributions and externalities in the value. Econometrica 76(6):1413–1436.

[12] Deegan J, Packel E (1978) A new index of power for simple n-person games. International Journal of Game Theory 7(2):113–123.

[13] Dubey P, Shapley L (1979) Mathematical properties of the Banzhaf power index. Mathematics of Operations Research, 4(2):99-131.

[14] Felsenthal D, Machover M (1995) Postulates and paradoxes of relative power indices—a critical re-appraisal. Theory and Decision, 38(2):195–229.

[15] Feltkamp V (1995) Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values. International Journal of Game Theory, 24(2):179-186.

[16] Holler MJ (1982) Forming coalitions and measuring voting power. Political Studies 30(2):262–271.

[17] Holler MJ, Packel EW (1983) Power, luck and the right index. Zeitschrift für Nationalökonomie, 43(1):21–29.

[18] Lehrer E (1988) An axiomatization of the Banzhaf value. International Journal of Game Theory, 17(2):89-99.

[19] Leonisio R, Strijbis O (2014) Beyond self-placement: Why nationalism is a better predictor of electoral behaviour in the Basque Country. Revista Española de Investigaciones Sociológicas, 146:47-68.

[20] Lorenzo-Freire S, Alonso-Meijide J, Casas-Méndez B, Fiestras-Janeiro M (2007) Characterizations of the Deegan–Packel and Johnston power indices. European Journal of Operational Research. 177(1):431–444.

[21] Macho-Stadler I, Pérez-Castrillo D, Wettstein D (2007) Sharing the surplus: An extension of the Shapley value for environments with externalities. Journal of Economic Theory, 135(1):339-356.

[22] Myerson R (1977) Values of games in partition function form. International Journal of Game Theory, 6(1):23–31.

[23] Myerson R (1980) Conference structures and fair allocation rules. International Journal of Game Theory, 9(3):169-182.

[24] Nowak AS (1997) On an axiomatization of the Banzhaf value without the additivity aiom. International Journal of Game Theory, 26(1):137-141.

[25] Penrose LS (1946) The elementary statistics of majority voting. Journal of the Royal Statistical Society, 109(1):53.57.

[26] Hankin RKS (2006) partitions: Additive Partitions of Integers. R package version 1.9-19. https://cran.r-project.org/package=partitions. Accedido 19 de Junio de 2018.

[27] Saavedra-Nievas A (2016) GameTheoryAllocation: Tools for Calculating Allocations in Game Theory. R package version 1.0. https://cran.r-project.org/package=GameTheoryAllocation. Accedido 19 de Junio de 2018.

[28] Shapley LS (1953) A value for n-person games. Contributions to the Theory of Games, 2(28): 307-317.

[29] Shapley LS, Shubik (1954) A method for evaluating the distribution of power in a committee system. American political science review, 48(3):787-792.

[30] Skibski O, Michalak TP, Sakurai Y, Wooldridge M, Yokoo M (2015) A Graphical Representation for Games in Partition Function Form. AAII, 1036-1042.

[31] Thrall R, Lucas W (1963) N-person games in partition function form. Naval Research Logistics, 10(1):281–298.

[32] Young HP (1985) Monotonic solutions of cooperative games. International Journal of Game Theory, 14(2):65-72.