



Universidade de Vigo

Trabajo Fin de Máster

Optimización bajo incertidumbre en plantas de proceso industrial

Daniel López García

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2016-2017

Propuesta de Trabajo Fin de Máster

Título en galego: Optimización baixo incertidumbre en plantas de proceso industrial
Título en español: Optimización bajo incertidumbre en plantas de proceso industrial
English title: Stochastic Optimization in industrial process
Modalidad: Modalidad B
Autor/a: Daniel López García, Universidade de Santiago de Compostela
Director/a: Julio González Díaz, Universidade de Santiago de Compostela;
Tutor/a: Patricio Reyes Valenzuela, Itmati;
<p>Breve resumen del trabajo:</p> <p>El trabajo a realizar por el alumno puede dividirse en varias fases:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Problema sin incertidumbre (determinista): <ul style="list-style-type: none"> ■ Familiarización con un problema de optimización no lineal en el contexto de la gestión y operación de plantas de proceso industrial. ■ Familiarización con las técnicas de resolución usadas desde ITMATI para abordar este problema. 2. Problema con incertidumbre (estocástico): <ul style="list-style-type: none"> ■ Familiarización con la extensión del problema anterior a situaciones multietapa bajo incertidumbre. ■ Familiarización con los conceptos fundamentales de programación estocástica. 3. Resolución del problema con incertidumbre: <ul style="list-style-type: none"> ■ Familiarización con el algoritmo de programación estocástica implementado desde ITMATI. ■ Validación del algoritmo implementado desde ITMATI sobre una batería de problemas asociados a refinerías de la empresa Repsol

Agradecimientos

El autor de este trabajo quiere agradecer a Itmati y en especial a la línea 1 el apoyo prestado para la realización de este trabajo durante el período de prácticas del mismo. En especial, agradecer el apoyo de Julio González Díaz y Patricio Reyes Valenzuela como tutores de este trabajo.

Índice general

Resumen	IX
Introducción	XI
1. Optimización Matemática	1
1.1. Condiciones de optimalidad y dualidad	1
1.2. Algoritmos para problemas con restricciones	10
1.2.1. Métodos de penalización exterior	10
1.2.2. Lagrangiano aumentado	14
2. Programación estocástica	23
2.1. Planteamiento de los problemas de programación estocástica	23
2.2. Cotas del óptimo para el caso con incertidumbre	30
2.3. Algoritmos para problemas de programación estocástica	32
2.3.1. Progressive hedging	35
3. Efecto de los parámetros	39
3.1. Resultado de las ejecuciones	40
3.1.1. Casos de mal comportamiento del algoritmo	42
3.1.2. Caso de buen comportamiento	44
3.2. Resumen de las conclusiones y trabajo de validación pendiente	44

Resumen

Resumen en español

El objetivo de este trabajo es presentar los conceptos básicos de optimización con incertidumbre y la construcción del algoritmo progressive hedging que está pensado de forma específica para esta clase de problemas. En el capítulo 2 empezamos mostrando como se plantean problemas con incertidumbre, para en la sección 2.3 mostrar como construimos el progressive hedging. Este algoritmo se basa en movimientos en la dirección del gradiente del dual, por este motivo en el capítulo 1 presentamos conceptos básicos de programación matemática como las condiciones de KKT y el dual lagrangiano. En el progressive hedging hay dos parámetros que tiene que fijar el usuario. Son π y r , en el capítulo 3 hacemos un breve estudio de calibrado de estos parámetros. Este calibrado fue el objetivo de las prácticas asociadas a este Trabajo Fin de Máster que se realizaron en la Unidad Mixta de Investigación Repsol-Itmati.

English abstract

The objective of this work is to present the basic concepts of stochastic programming and the algorithm progressive hedging. This algorithm is thought for this class of problems. In chapter 2 we start by showing since these problems set out. In section 2.3 we show the progressive hedging. This algorithm is based on movements on the gradient of the dual problem, for this motive in chapter 1 we show basic concepts of mathematical programming like KKT conditions and lagragian dual. In progressive hedging there are two parameters which are fixed by the user. They are π and r , in chapter 3 we show the calibrated of these parameters. These calibrated was the objective of the work experience in the UMI Repsol-Itmati.

las funciones f^t y g_i^t significa que para cada realización del vector aleatorio del que dependen pueden ser funciones distintas, lo único que se les pide a estas funciones es que sean continuas para cualquier realización del vector aleatorio del que dependen. En la sección 2.1 podemos ver dos ejemplos básicos de estos problemas.

En la sección 2.3 de este trabajo, se explica el algoritmo progressive hedging. Este algoritmo se basa en dualizar las restricciones que obligan a las variables a ser iguales a la media respecto los diferentes escenarios, estas restricciones son las que impiden que una variable de primera etapa pueda tomar valores distintos en cada escenario. Esto nos permite descomponer el problema por escenarios. Para entender a que nos referimos con dualizar una restricción, se hace necesario introducir conceptos básicos de programación matemática. Estos conceptos los introducimos en el capítulo 1. En este capítulo empezamos hablando de las condiciones de KKT que son condiciones necesarias para que un punto sea mínimo. Diremos que un punto es KKT si verifica el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1, \dots, m} u_i \cdot \nabla g_i(x) + \sum_{i=1, \dots, l} v_i \cdot \nabla h_i(x) &= 0 \\ u_i \cdot g_i(x) &= 0. \end{aligned}$$

Una vez presentada estas condiciones presentamos el concepto de dualidad, explicando que entendemos por el dual de un problema y que relación guarda con el primal. Dado un problema primal de la forma:

$$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ &h_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Definimos su dual lagrangiano como:

$$\begin{aligned} \text{máx}_{u,v} \theta(u, v) = \text{ínf} \{ f(x) + \sum_{i=1, \dots, m} u_i \cdot g_i(x) + \sum_{j=1, \dots, l} v_j \cdot h_j(x), \text{ con } x \in X \} \\ u_i \geq 0. \end{aligned}$$

Se puede comprobar que bajo ciertas hipótesis el gradiente de la función objetivo del dual, son las restricciones que se subieron a la función objetivo del dual. Conocer el gradiente de esta función nos sirve para construir algoritmos como el lagrangiano aumentado.

Al principio de la sección 2.3 se explica como es el dual de un problema de programación estocástica. La expresión del dual en problemas de programación estocástica es:

$$\begin{aligned} \text{máx}_{\rho(\omega)} \theta(\rho) = \text{mín}_{x, y(\omega)} f^1(x^1) + \sum_{t=2, \dots, T-1} E_{\omega^{t-1}} (\text{mín } f^t(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \omega^{t-1})) + \\ E_{\omega^{T-1}} (\text{mín } f^T(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \dots, x^{T-1}(\omega^{T-2}), y(\omega^{T-1}), \omega^{T-1})) \\ + \sum_{t=1, \dots, T-1} E_{\omega^t} (\sum_{i=1, \dots, m_t} \rho_i^t(\omega^{t-1}) \cdot g_i^t(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \omega^{t-1}) \\ + E_{\omega^{T-1}} (\sum_{i=1, \dots, m_T} \rho_i^T(\omega^{T-1}) \cdot g_i^T(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \dots, x^{T-1}(\omega^{T-2}), y(\omega^{T-1}), \omega^{T-1})) \\ g_i^1(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_1. \\ \rho_i^t(\omega^t) \geq 0 \quad t = 1, \dots, T-1, i = 1, \dots, m_t. \end{aligned}$$

En esta expresión las variables del dual son $\rho_i^t(\omega^{t-1})$, la dependencia respecto al vector aleatorio ω^{t-1} se debe a que las restricciones de esa etapa pueden ser diferentes para cada realización de ese vector aleatorio, por lo tanto el valor de las variables del dual asociadas a estas restricciones también cambia respecto a las distintas realizaciones de ω^{t-1} . Otra de las diferencias respecto del caso sin incertidumbre es que como las restricciones de la etapa t dependen del vector aleatorio ω^{t-1} , al subirlas a la función objetivo las ponderamos por las probabilidades de las distintas realizaciones de ese vector. En la sección 2.3 también presentamos los pasos que seguiría un algoritmo que se moviera en la dirección del gradiente del dual. Este algoritmo serviría para la resolución de problemas de programación estocástica donde todas las funciones fueran convexas ya que en esos casos el óptimo del primal y el dual coinciden, pero tiene el inconveniente de que los subproblemas que se resuelven en cada iteración son bastante complejos, este es el motivo por el cual en el progressive hedging se dualizan las restricciones que ligan las variables de los distintos escenarios con el fin de poder descomponer el problema en tantos subproblemas como escenarios.

En la sección 1.2.2 se explica el lagrangiano aumentado ya que guarda bastante similitudes con el progressive hedging. Los pasos en la implementación del lagrangiano aumentado son:

1. Inicializar el valor de $\epsilon > 0$, un ρ inicial mayor que cero, un valor de $\delta \in (0, 1)$ y un valor de $\gamma > 1$. Elegir valores iniciales para x , u y v . Cabe destacar que en el óptimo u y v coincidirán con los multiplicadores de lagrange. También se debe fijar las cotas de los valores de los multiplicadores.

2. Fijar x^{t+1} a la solución de $\min_x f(x) + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^l \left(h_j(x) + \frac{v_j^t}{\rho} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(\max\{0, g_j(x) + \frac{u_j^t}{\rho}\} \right)^2$.

3. actualizar los parámetros:

- Si $\max\{\|V(x^{t+1})\|, \|h(x^{t+1})\|\} > \delta \cdot \max\{\|V(x^t)\|, \|h(x^t)\|\}$, $\rho^{t+1} = \gamma \cdot \rho^t$. En caso contrario $\rho^{t+1} = \rho^t$. Siendo V una función que mide la mejora en las restricciones de desigualdad. Aquí lo que estamos haciendo es aumentar el valor de ρ solo en aquellos casos donde la factibilidad haya mejorado menos que la cantidad fijada por δ respecto a la iteración anterior.
- $u_j^{t+1} = \min\{u^{\max}, \max\{0, \rho^t \cdot g_j(x^{t+1}) + u_j^t\}\}$ con $j = 1, \dots, m$.
- Si $\rho \cdot h_j(x^{t+1}) + v_j^t \geq 0$, $v_j^{t+1} = \min\{v^{\max}, \rho^t \cdot h_j(x^{t+1}) + v_j^t\}$. En otro caso $v_j^{t+1} = \max\{v^{\min}, \rho^t \cdot h_j(x^{t+1}) + v_j^t\}$.

4. Comprobamos las siguientes condiciones:

- Condición de factibilidad dual:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^{t+1}) + \sum_{j=1}^l (\rho \cdot h_j(x^{t+1}) + v_j^{t+1}) \cdot \nabla h_j(x^{t+1}) + \\ \sum_{j=1}^m (\max\{0, \rho \cdot g_j(x^{t+1}) + u_j^{t+1}\}) \cdot \nabla g_j(x^{t+1}) < \epsilon. \end{aligned}$$

- Condición de holguras complementarias: $\max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{|\min\{-g_i(x^{t+1}), u_i^{t+1}\}|\} < \epsilon$ Esta condición solo se cumple si para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ se tiene que $g_i(x^{t+1}) = 0$ y $u_i^{t+1} \geq 0$ o $g_i(x^{t+1}) < 0$ y $u_i^{t+1} = 0$.
- Factibilidad del problema, se comprueba si la mayor violación de las restricciones es menor que ϵ .

5. En el caso de que no se cumplieran las condiciones del paso 4, volveríamos al paso 2.

Los pasos del progressive hedging son:

1. Fijamos $\pi > 0$, $r \geq 0$, un ρ inicial y una solución inicial.
2. Siendo K el número de escenarios y k un escenario en concreto, resolvemos K subproblemas de la forma:

$$\begin{aligned} \min_{x_k^t, y_k} P_k(f(x_k^t, y_k) + \sum_{t=1, \dots, T-1} \rho_k^t \cdot (\hat{x}_k^t - x_k^t) + r_k \cdot \sum_{t=1, \dots, T-1} \|\hat{x}_k^t - x_k^t\|^2) \\ g(x_k^t, y_k) \leq 0 \\ h(x_k^t, y_k) = 0. \end{aligned}$$

En la expresión anterior t hace referencia a la etapa y T es el número de etapas. \hat{x}_k^t es el valor esperado de la variable x_k^t en los escenarios que tienen la misma historia que el escenario k hasta la etapa t .

3. Actualizamos las variables a la solución de los subproblemas descritos anteriormente. Calculamos $\hat{x}_k^{t, it+1}$, siendo it la iteración actual. Actualizamos ρ mediante la expresión, $\rho_k^{t, it+1} = \rho_k^{t, it} + \pi \cdot (x_k^t - \hat{x}_k^t)$.
4. Si $\rho^{it+1} - \rho^{it} < \epsilon$ y $\hat{x}^{it+1} - \hat{x}^{it} < \epsilon$ el algoritmo termina, en caso contrario volvemos al paso 2.

La similitud entre estos dos métodos, se encuentra en que tanto la actualización de ρ en el progressive hedging, como la de u y v en el lagrangiano aumentado se basan en movimientos en la dirección del gradiente de la función objetivo del dual.

En la implementación del progressive hedging π y r , deben ser fijados por el usuario. π indica como de agresivos somos en la actualización de ρ . r es el término que multiplica a la penalización cuadrática. Su función es favorecer la convergencia, pero un valor demasiado alto puede dificultarla ya que penalizaría demasiado que se alejaran de la media, provocando que las variables se movieran menos. En la sección 3 hacemos un breve estudio sobre que valores se les debe dar a estos parámetros. Este estudio se realizó mediante la observación de las salidas de distintas ejecuciones de una implementación del progressive hedging desarrollada en la UMI Repsol-Itmati, lugar donde se realizaron las prácticas asociadas a este Trabajo Fin de Máster

Capítulo 1

Optimización Matemática

En este capítulo introduciremos algunos conceptos de optimización matemática para facilitar la lectura de los siguientes capítulos.

Empezaremos hablando de las condiciones de optimalidad en el caso en el que tengamos restricciones. A continuación, introduciremos el concepto de dual de un problema. Por último, presentaremos algunos algoritmos de optimización con restricciones.

En esta sección y en todo el trabajo entenderemos que $f(x)$ hace referencia a la función objetivo y será una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . Las restricciones las denotaremos por g las de desigualdad y por h las de igualdad, también serán funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} .

Las principales referencias que hemos usado en este capítulo son [1] y para la explicación del lagrangiano aumentado [3].

1.1. Condiciones de optimalidad y dualidad

Para saber si un punto puede ser un óptimo es importante saber qué condiciones necesarias debe verificar. En el caso sin restricciones podemos usar la condición necesaria de que el gradiente de la función sea cero, pero en el caso con restricciones esta condición no es válida. Para trabajar con restricciones necesitaremos incluir los conceptos de direcciones de descenso y direcciones factibles.

Definición 1. Diremos que un vector d es una dirección de descenso en \bar{x} , si existe un δ tal que para todo λ perteneciente a $(0, \delta)$ se tiene que $f(\bar{x} + \lambda \cdot d) \leq f(\bar{x})$.

Definición 2. Diremos que un vector d es una dirección factible en \bar{x} , si existe un δ tal que para todo λ perteneciente a $(0, \delta)$ se tiene que $\bar{x} + \lambda \cdot d$ es factible.

Es trivial que si en un punto se verifica que la intersección entre las direcciones de descenso y factibles es vacía, entonces ese punto es un óptimo local, ya que para mejorar en la función objetivo nos tendríamos que salir de la región factible. Esta condición es necesaria y suficiente, pero tiene el problema de que es muy difícil dado un punto calcular sus direcciones de descenso y sus direcciones factibles, por lo tanto tenemos que buscar otros conjuntos que nos permitan llegar a condiciones necesarias pero que sean manejables en la práctica.

Empezaremos construyendo un subconjunto de las direcciones de descenso. La idea es buscar una condición que implique que el vector d es una dirección de descenso, para ello usaremos la definición de gradiente. Recordemos que el gradiente de una función se podía definir de la siguiente manera:

Definición 3. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y α una función que tiende a cero cuando x tiende a \bar{x} , se define su vector gradiente en \bar{x} , que denotaremos por $\nabla f(\bar{x})$, como aquel vector que verifica la siguiente ecuación:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\| \cdot \alpha(\bar{x}, x - \bar{x}), \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Si en la expresión (1.1), sustituimos x por $\bar{x} + \lambda \cdot d$ y dividimos por λ obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda \cdot d) - f(\bar{x})}{\lambda} = \nabla f(\bar{x}) \cdot d + \|d\| \cdot \alpha(\bar{x}, \lambda \cdot d).$$

De tenerse que $\nabla f(\bar{x}) \cdot d < 0$, en vista a la expresión anterior podemos concluir que el límite cuando λ se acerca a cero por la derecha de $\frac{f(\bar{x} + \lambda \cdot d) - f(\bar{x})}{\lambda}$ es menor que cero, por lo tanto, podemos concluir que existe un δ para el que $\forall \lambda \in (0, \delta)$ se tiene que $f(\bar{x} + \lambda \cdot d) < f(\bar{x})$. Así, llegamos a que si d verifica que $\nabla f(\bar{x}) \cdot d < 0$, entonces d es una dirección de descenso. Al conjunto de vectores que verifican que $\nabla f(\bar{x}) \cdot d < 0$, lo denotaremos por $F_{o, \bar{x}}$ y será el subconjunto de direcciones de descenso con el que trabajaremos.

Ahora tenemos que ver como construimos conjuntos relacionados con las restricciones verificando que si un punto es mínimo, entonces la intersección de este conjunto con $F_{o, x}$ es vacía. Consideraremos por separado las restricciones de desigualdad y las de igualdad. A los lados izquierdos de las restricciones menor o igual los denotaremos por $g_i(x)$, donde $i = 1, \dots, m$ siendo m el número de restricciones de desigualdad. Dentro de las restricciones de menor o igual distinguiremos las restricciones saturadas, que verifiquen $g_i(x) = 0$, las cuales diremos que están activas y denotaremos que la restricción $g_i(x) \leq 0$ está activa diciendo que $i \in I$. El conjunto con el que trabajaremos será $G_{o, x} = \{d \text{ tales que } \nabla g_i(x) \cdot d < 0 \ \forall i \in I\}$.

Si tenemos restricciones de igualdad tendremos que trabajar con $G_{o, x}$ y $H_{o, x} = \{d \text{ tales que } \nabla h_j(x) \cdot d = 0\}$, donde $h_j(x)$ son los lados izquierdos de las restricciones de igualdad y $j = 1, \dots, l$ siendo l el número de restricciones de igualdad. Ahora para que se verifique que: si x es un mínimo entonces la intersección de los conjuntos $F_{o, x}$, $G_{o, x}$ y $H_{o, x}$ es vacía, se necesita pedir condiciones de regularidad a las funciones que definen los lados izquierdos de las restricciones. Concretamente exigiremos que $g_i(x)$ sea continua en x para todo $i \notin I$ y que $h_j(x)$ continuamente diferenciables en x para todo $j = 1, \dots, m$. En resumen, el resultado teórico nos dice que:

Teorema 1.1. Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Supongamos que \bar{x} es un óptimo local y que $g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \bar{x} para todo $i \notin I$, además $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i(x)$ con $i \in I$ son diferenciables en \bar{x} y $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciables en \bar{x} . Si $\nabla h_j(\bar{x})$ son linealmente independientes entonces $F_{o, \bar{x}} \cap G_{o, \bar{x}} \cap H_{o, \bar{x}} = \phi$.

La demostración del teorema anterior puede consultarse en [1]. Trabajar con estos conjuntos puede no ser demasiado fácil por eso se buscan condiciones como las de Fritz y John que se fijan en los gradientes y si existe una combinación de ellos igualada a cero, pero antes de presentarlas mostraremos el resultado que nos indica como podemos separar conjuntos convexos disjuntos, ya que es necesario para la prueba de estas condiciones.

Teorema 1.2. Sean S_1 y S_2 conjuntos convexos tales que su intersección sea vacía, entonces existe un vector p tal que $\inf\{p \cdot x \text{ con } x \in S_1\} \geq \sup\{p \cdot x \text{ con } x \in S_2\}$.

Finalmente las condiciones de Fritz y John son:

Teorema 1.3. *Consideramos el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Supongamos que \bar{x} es un óptimo local y que $g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \bar{x} para todo $i \notin I$. Además $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i(x)$ con $i \in I$ son diferenciables en \bar{x} y $h_j(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciables en \bar{x} , entonces se tiene que existen $u_0 \geq 0$, $u_i \geq 0$ con $i = 1, \dots, m$ y v_j con $j = 1, \dots, l$ y al menos uno sera distinto de 0, tales que:

$$u_0 \cdot \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} u_i \cdot \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1, \dots, l} v_j \cdot \nabla h_j(\bar{x}) = 0. \quad (1.2)$$

Demostración. Distinguimos dos casos:

- Si los $\nabla h_j(\bar{x})$ son linealmente dependientes, basta con coger los v_j tales que $\sum_{j=1, \dots, l} v_j \cdot \nabla h_j(\bar{x}) = 0$ y $u_0 = 0$ y $u_i = 0$.
- Si los $\nabla h_j(\bar{x})$ son linealmente independientes estamos en las hipótesis del Teorema 1.1. Por lo tanto, si consideramos una matriz A_1 que en la fila j tenga la componente j de los vectores $\nabla f(\bar{x})$ y $\nabla g_i(\bar{x})$ con $i \in I$ y otra matriz A_2 que en la fila k tenga la componente k de los vectores $\nabla h_j(\bar{x})$, podemos afirmar que el sistema:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot d &< 0 \\ A_2 \cdot d &= 0, \end{aligned}$$

no tiene solución. Llegamos a que los conjuntos $S_1 = \{(x, y) \text{ tales que } x = A_1 \cdot d \text{ y } y = A_2 \cdot d\}$ y $S_2 = \{z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n \text{ tales que } z_1 < 0 \text{ y } z_2 = 0\}$ son conjuntos convexos cuya intersección es vacía, por lo que estamos en las hipótesis del Teorema 1.2. Así estamos en condiciones de afirmar que existen vectores p_1 y p_2 tales que $p_1 \cdot A_1 \cdot d + p_2 \cdot A_2 \cdot d \geq p_1 \cdot z_1 + p_2 \cdot z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in S_2$. Observemos que z_1 puede ser un número negativo cuyo valor absoluto sea tan grande como se quiera, por lo tanto $p_1 \geq 0$.

Por otra parte, como $(0, 0) \in S_2$ llegamos a que $(p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2) \cdot d \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$; en particular, para $d = -(p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2)$ y llegamos a que $-||p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2||^2 \geq 0$. Esto implica que $p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 = 0$. Entonces concluimos que las componentes del vector p_1 son los u_0 y u_i que buscamos, y las componentes de p_2 son los v_j deseados.

□

Los u_0 , u_i y v_j de la expresión (1.2), se denominan multiplicadores de lagrange.

El problema de estas condiciones es que los puntos donde haya un conjunto de restricciones activas cuyos gradientes sean linealmente dependientes serán puntos que verifican las condiciones de Fritz y John; sin embargo no se estaría teniendo en cuenta para nada a la función objetivo. Por ejemplo:

Ejemplo 1.4. *Consideremos el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} & \text{mín}_{x_1, x_2} -x_1 \\ & x_2 - (x_1 - 1)^2 \leq 0 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

En este ejemplo, las soluciones del problema son $\{(2, x_2) \mid 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Estos puntos cumplirían las condiciones de Fritz y John, ya que $\nabla -x_1 = (-1, 0)$ y está activa la restricción $x_1 \leq 2$ cuyo gradiente es $(1, 0)$. La suma de estos dos gradientes da cero, y, por lo tanto, cumplen las condiciones de Fritz y John.

Por otra parte, el punto $(1, 0)$ también es de Fritz y John. En este punto están activas las restricciones $x_2 - (x_1 - 1)^2 \leq 0$ y $-x_2 \leq 0$, cuyos gradientes en el punto son $(0, 1)$ y $(0, -1)$, la suma de estos gradientes da cero entonces ya se tiene que es un punto de Fritz y John.

Para evitar este problema, se puede añadir a las hipótesis del Teorema 1.3 que los gradientes de las restricciones $g_i(x)$ con $i \in I$ y $h_j(x)$ sean linealmente independientes. En esta situación podremos encontrar $u_i \geq 0$ y v_j tales que verifiquen la siguiente ecuación:

$$\nabla f(x) + \sum_{i \in I} u_i \cdot \nabla g_i(x) + \sum_{j=1, \dots, l} v_j \cdot \nabla h_j(x) = 0. \quad (1.4)$$

Los puntos para los que existan multiplicadores verificando (1.4) se denominarán de Karush-Kuhn-Tucker. Dado un punto x , es posible que no sepamos cuáles son todas las restricciones activas, por lo que se suele trabajar con el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1, \dots, m} u_i \cdot \nabla g_i(x) + \sum_{i=1, \dots, l} v_i \cdot \nabla h_i(x) &= 0 \\ u_i \cdot g_i(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

En el Ejemplo 1.4 los únicos puntos de Karush-Kuhn-Tucker serían las soluciones al problema, pero hay casos en los que estas condiciones pueden ser demasiado restrictivas. En el siguiente ejemplo veremos un caso donde el óptimo es un punto de Fritz y John, pero no es un punto Karush-Kuhn-Tucker.

Ejemplo 1.5. Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & -x_1 \\ & x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

La solución del problema será el mayor valor que puede tomar x_1 . Como $x_2 \geq 0$, para que un punto sea factible se tiene que cumplir que $(1 - x_1)^3 \geq 0$ y el mayor valor para el que pasa esto es $x_1 = 1$. Si $x_1 = 1$ y se verifica 1.6, se tiene que $x_2 \leq 0$, pero $x_2 \geq 0$ y por lo tanto $x_2 = 0$. En resumen, la solución es $(1, 0)$.

En este punto están activas todas las restricciones. El gradiente de $x_2 - (1 - x_1)^3$ en el punto $(1, 0)$ es $(0, 1)$, el gradiente de $-x_2$ es $(0, -1)$. Por lo tanto, es evidente que basta con sumar estos dos gradientes para que se verifiquen las condiciones de Fritz y John.

El problema para que verifique las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker viene de que el gradiente de la función objetivo es $(-1, 0)$ y por lo tanto la única forma de que se cumplan las condiciones de Fritz y John en ese punto es con $u_0 = 0$.

Hasta ahora expusimos qué condiciones necesarias verificaban los óptimos locales, pero podemos preguntarnos si hay alguna condición suficiente. La respuesta es que efectivamente existen, pero para obtenerlas es necesario fijarse en las matrices hessianas de la función objetivo y de las restricciones. Para presentar estas condiciones es preciso usar la función lagrangiana, que denotaremos por:

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1, \dots, m} u_i \cdot g_i(x) + \sum_{j=1, \dots, l} v_j \cdot h_j(x), \quad (1.7)$$

donde $f(x)$ es la función objetivo, $g_i(x)$ las restricciones de menor o igual y $h_j(x)$ las restricciones de igualdad. La función lagrangiana no es única, depende de las restricciones que decidas colocar en ella.

Ahora presentaremos las condiciones suficientes, o de segundo orden, que son las dadas en el siguiente teorema.

Teorema 1.6. *Sea \bar{x} un punto KKT con \bar{u} y \bar{v} multiplicadores asociados. Consideramos la siguiente función lagrangiana:*

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{i \in I} u_i \cdot g_i(x) + \sum_{i=1, \dots, l} v_i \cdot h_j(x). \quad (1.8)$$

Siendo I las restricciones activas en \bar{x} . Definimos:

$$I^+ = \{i \in I \text{ tales que } \bar{u}_i > 0\},$$

$$I^0 = \{i \in I \text{ tales que } \bar{u}_i = 0\},$$

$$C = \{d \neq 0 \text{ tales que } \nabla g_i(x) \cdot d = 0 \ \forall i \in I^+, \nabla g(x) \cdot d \leq 0 \ \forall k \in I^0 \text{ y } \nabla h_j(x) \cdot d = 0, j = 1, \dots, l\}.$$

Consideramos la función de x tal que $L(x) = L(x, \bar{u}, \bar{v})$, si para todo $d \in C$ se verifica que $d \cdot \nabla^2 L(\bar{x}) \cdot d > 0$ entonces \bar{x} es un mínimo estricto.

La demostración de este teorema puede encontrarse en [1]. Los multiplicadores de lagrange también son interesantes porque proporcionan información sobre como afectan las restricciones al valor de la función objetivo Si relajamos levemente la restricción, la función objetivo mejorará su valor en $u_i \cdot \delta$, siendo δ lo que relajamos la restricción.

Ahora presentaremos lo que entendemos por el dual de un problema en este contexto y veremos que información nos aporta este nuevo problema. Dado un problema, que a partir de ahora llamaremos primal, de la forma:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0 \ \forall i = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (1.9)$$

definimos su dual lagrangiano como :

$$\begin{aligned} \text{máx}_{u,v} \theta(u, v) = \text{ínf} \{ f(x) + \sum_{i=1, \dots, m} u_i \cdot g_i(x) + \sum_{j=1, \dots, l} v_j \cdot h_j(x), \text{ con } x \in X \} \\ u_i \geq 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

El dual lagrangiano no es único, ya que se puede subir a la función objetivo solo un subconjunto de restricciones. La condición de $x \in X$ indica que el punto x debe verificar las restricciones que no se subieran a la función objetivo del dual. El primer resultado que nos relaciona ambos problemas es:

Teorema 1.7. *Sea x un punto factible del problema primal, y (u, v) un punto factible del dual, entonces $f(x) \geq \theta(u, v)$.*

Demostración. $\theta(u, v) = \text{ínf} \{ f(x) + \sum_{i=1, \dots, m} u_i \cdot g_i(x) + \sum_{i=1, \dots, l} v_i \cdot h_i(x) \} \leq f(x) + \sum_{i=1, \dots, m} u_i \cdot g_i(x) + \sum_{i=1, \dots, l} v_i \cdot h_i(x)$, como $g(x) \leq 0$, $u_i \geq 0$ y $h_i(x) = 0$ llegamos a que $\theta(u, v) \leq f(x)$. \square

Este teorema tiene algunas consecuencias importantes como:

1. $\text{ínf} \{ f(x) \} \geq \text{sup} \{ \theta(u, v), \text{ con } u \geq 0 \}$.
2. Si existe un punto x factible del primal y (u, v) puntos factibles del dual tales que $f(x) = \theta(u, v)$ entonces estos puntos son solución del primal y del dual respectivamente.

3. Si el ínfimo de la función objetivo en los puntos factibles es $-\infty$, entonces el supremos de $\theta(u, v)$ en los puntos factibles del dual también es $-\infty$.
4. Si la función a maximizar en el problema dual no está acotada, entonces $f(x)$ no tiene soluciones factibles.

Por ahora sabemos que la solución del dual da una cota inferior para la solución del primal, y que si existen x y (u, v) factibles tales que $f(x) = \theta(u, v)$, entonces x es un óptimo global. El problema es que hay veces en las que el óptimo de los dos problemas no coincide. A continuación discutiremos en que situaciones van a ser iguales estos óptimos. Para poder probar el resultado por el cual podemos afirmar que bajo ciertas hipótesis las soluciones del primal y el dual coinciden, es necesario introducir el siguiente resultado:

Teorema 1.8. *Sea X un conjunto convexo no vacío de \mathbb{R}^n . Sean $\alpha(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones convexas y $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ una función afín ($h(x) = A \cdot x - b$, siendo A una matriz y b un vector). Definimos los siguientes sistemas:*

$$\alpha(x) < 0, \quad g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0 \quad \text{para algún } x \in X \quad (1.11)$$

$$u_0 \cdot \alpha(x) + u \cdot g(x) + v \cdot h(x) \geq 0 \quad \forall x \in X \quad (1.12)$$

$$(u_0, u) \geq 0.$$

En estas condiciones podemos afirmar que si el sistema (1.11) no tiene solución, entonces el sistema (1.12) tiene una distinta de cero. Si $u_0 > 0$ también podemos afirmar que si el sistema (1.12) no tiene solución, entonces la tiene (1.11).

La demostración de este teorema puede consultarse en [1], y para realizarla es necesario un resultado previo de conjuntos convexos que no incluimos en este trabajo. Ahora podemos presentar el resultado que nos dice en que condiciones el óptimo del dual coincidirá con el primal.

Teorema 1.9. *Consideremos un problema dual como el de la expresión (1.10), denotamos por $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la función tal que su imagen es el vector formado por los $g_i(x)$ que aparecen en la función objetivo del dual, definimos $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ como la función que para todo x devuelve el vector formado por los $h_i(x)$ que aparecen en la función objetivo del dual. Suponemos que el conjunto X es convexo, $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g(x)$ son funciones convexas, mientras que $h(x)$ es afín. En esta situación tenemos que si $0 \in \text{int}(h(X))$ y además existe $z \in X$ verificando que $g(z) < 0$ y $h(z) = 0$, entonces el óptimo del dual y el primal coinciden.*

Demostración. Sea γ el ínfimo de los valores de $f(x)$ restringida a los puntos factibles. Si $\gamma = -\infty$ el óptimo del dual también y por lo tanto se verifica el teorema. Consideremos γ finito. Definimos el siguiente sistema:

$$(f(x) - \gamma) < 0, \quad g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \quad \text{para algún } x \in X.$$

Es evidente que el sistema anterior no tiene solución. Haciendo uso del Teorema 1.8 llegamos a que existen (u_0, u, v) verificando que alguna componente es distinta de 0, que $(u_0, u) \geq 0$ y además son solución del siguiente sistema:

$$u_0 \cdot (f(x) - \gamma) + u \cdot g(x) + v \cdot h(x) \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

Ahora nos falta por demostrar que $u_0 > 0$. Supongamos que $u_0 = 0$. Sabemos que existe un $z \in X$ tal que $g(z) < 0$ y $h(z) = 0$, entonces se tiene que $u \cdot g(z) \leq 0$ y $u \cdot g(z) \geq 0$ y por lo tanto $u = 0$. Llegamos a que $u_0 = u = 0$, entonces $v \cdot h(x) \geq 0$, pero $0 \in \text{int}(h(X))$, y, por lo tanto, podemos coger un $z \in X$ tal que $h(z) = -\lambda \cdot v$, así, tenemos que $-\lambda \|v\| \geq 0$ y por lo tanto $v = 0$. Es decir, que si $u_0 = 0$ la única solución es el $(0, 0, 0)$, lo cual es una contradicción, concluimos que $u_0 > 0$.

Definimos $\bar{u} = \frac{u}{u_0}$ y $\bar{v} = \frac{v}{u_0}$. Hasta ahora hemos probado que la función objetivo del dual evaluada en \bar{u} y \bar{v} es mayor o igual que γ , y usando el Teorema 1.7 llegamos que es igual a γ y que este es su óptimo. \square

Para entender este teorema también es importante saber qué implicaciones tiene pedir que la función objetivo sea convexa, las restricciones de menor o igual convexas y la de igualdad afines. Es fácil probar que en estas condiciones la región factible sería convexa y por lo tanto estaríamos ante un problema convexo, donde cualquier óptimo local es global, a la vista de este teorema no tiene mucho sentido usar la condición de que el óptimo del primal y del dual coincidan como un criterio de optimalidad global. Hasta ahora vimos como se relacionaban el primal y el dual, pero también podíamos pensar si la solución del dual tiene alguna relación con otros conceptos como los multiplicadores de lagrange y en qué situaciones están relacionados estos dos conceptos. Para discutir sobre esta relación tenemos que introducir el concepto de punto de silla de la función lagrangiana que presentamos en la expresión (1.7). Esta función venía dada por:

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1, \dots, m} u_i \cdot g_i(x) + \sum_{j=1, \dots, l} v_j \cdot h_j(x).$$

Definición 4. Decimos que un punto $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ es un punto de silla de la función lagrangiana si \bar{x} verifica todas las restricciones que no aparecen en la función lagrangiana, $\bar{u} \geq 0$ y además verifica que $L(\bar{x}, u, v) \leq L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \leq L(x, \bar{u}, \bar{v})$, siendo (u, v) puntos factibles del dual y x verificando las restricciones que no aparezcan en la función lagrangiana.

Ahora presentaremos un teorema que relaciona los puntos de silla con las soluciones de los problemas primal y dual:

Teorema 1.10. Un punto $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ es un punto de silla si y solo si verifica que:

1. \bar{x} es el mínimo de $L(x, \bar{u}, \bar{v})$.
2. $g(\bar{x}) \leq 0$ y $h(\bar{x}) = 0$.
3. $\bar{u} \cdot g(\bar{x}) = 0$.

Además $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ es un punto de silla si y solo si \bar{x} es la solución del primal y (\bar{u}, \bar{v}) son soluciones del primal y del dual, y los óptimos coinciden.

Demostración. Si $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ es un punto de silla, la primera condición se verifica trivialmente. Por ser punto de silla se tiene que $f(\bar{x}) + \sum_{i=1, \dots, m} \bar{u}_i \cdot g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1, \dots, l} \bar{v}_j \cdot h_j(\bar{x}) \geq f(\bar{x}) + \sum_{i=1, \dots, m} u_i \cdot g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1, \dots, l} v_j \cdot h_j(\bar{x})$ para todo $u \geq 0$, por lo tanto $g(\bar{x}) \leq 0$ y $h(\bar{x}) = 0$, ya que en caso contrario se puede buscar u y v tales que no verifiquen esta desigualdad. Si tomamos $u = 0$ tenemos que $\sum_{i=1, \dots, m} \bar{u}_i \cdot g_i(\bar{x}) \geq 0$, pero por la condición anterior tenemos que $\sum_{i=1, \dots, m} \bar{u}_i \cdot g_i(\bar{x}) \leq 0$ y por lo tanto llegamos a que $\sum_{i=1, \dots, m} \bar{u}_i \cdot g_i(\bar{x}) = 0$. Como $g_i(\bar{x}) \leq 0$ para todo i , la única forma de que $\sum_{i=1, \dots, m} \bar{u}_i \cdot g_i(\bar{x}) = 0$ es que $\bar{u}_i \cdot g_i(\bar{x}) = 0$. El recíproco se tiene trivialmente.

Ahora probaremos que ser punto de silla equivale a a que \bar{x} y (\bar{u}, \bar{v}) son soluciones del primal y del dual y además los óptimos coinciden. Si se tiene que \bar{x} y (\bar{u}, \bar{v}) son soluciones del primal y del dual respectivamente y que los óptimos coinciden se tiene que $\theta(\bar{u}, \bar{v}) \leq f(\bar{x}) + \sum_{i=1, \dots, m} \bar{u}_i \cdot g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1, \dots, l} \bar{v}_j \cdot h_j(\bar{x}) = f(\bar{x})$ y por lo tanto se tiene que $\sum_{i=1, \dots, m} \bar{u}_i \cdot g_i(\bar{x}) = 0$. La condición 1 y 2 se tienen trivialmente por ser \bar{x} solución del primal. El recíproco se tiene trivialmente. \square

El teorema anterior nos da una condición necesaria y suficiente de optimalidad global para problemas donde no hay diferencia entre el óptimo del primal y del dual. Por el Teorema 1.9 tenemos que esto solo está asegurado en casos donde el problema es convexo. Ahora relacionaremos esta nueva condición con los puntos KKT.

Teorema 1.11. Sea \bar{x} un punto de KKT con multiplicadores \bar{u} y \bar{v} . Si la función objetivo $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, las restricciones $g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $i \in I$ son convexas y las restricciones de igualdad $h_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que tengan un multiplicador asociado distinto de 0 son afines, se tiene que el punto $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ es un punto de silla.

Por otra parte supongamos que $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ es un punto de silla, que \bar{x} esta en el interior de la región factible dada por las restricciones que no se subieron al dual, entonces $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ es un punto KKT.

Hasta ahora hemos visto como se puede usar la dualidad para construir criterios de optimalidad global y su relación con las condiciones de KKT, pero la dualidad también es útil para la construcción de algoritmos. Por este motivo vamos a estudiar algunas propiedades de la función objetivo del dual.

La primera propiedad que estudiaremos de la función objetivo del dual es la concavidad. Esta propiedad es interesante porque nos da una idea de lo difícil que es resolver el problema dual, recordemos que en los casos de maximizar una función cóncava todo máximo local es global. Para simplificar la notación, a partir de ahora el término $\sum_{i=1,\dots,m} u_i \cdot g_i + \sum_{j=1,\dots,l} v_j \cdot h_j$ lo agruparemos en $w \cdot \beta(x)$. De esta forma la función objetivo del dual se puede escribir como:

$$\theta(w) = \inf\{f(x) + w \cdot \beta(x) \text{ con } x \in X\}. \quad (1.13)$$

El siguiente resultado nos dice en que condiciones la función objetivo del dual es cóncava:

Teorema 1.12. *Sea X un compacto no vacío, $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\beta(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+l}$ continuas, entonces tenemos que la función definida en (1.13) es cóncava.*

La demostración de este teorema puede consultarse en [1]. A pesar de que este teorema es un resultado bastante positivo, ya que nos dice que todo óptimo del dual es global, el dual no va ser un problema demasiado sencillo ya que para evaluar la función objetivo del dual es necesario resolver un subproblema que puede no ser fácil de resolver. Este subproblema es que para un w dado, tenemos que buscar la $x \in X$ que minimiza la función $f(x) + w \cdot \beta(x)$.

Otra propiedad que nos interesara de la función objetivo del dual es la diferenciabilidad. Esta propiedad nos será de ayuda cuando construyamos algoritmos como el lagrangiano aumentado. Las propiedades de diferenciabilidad de la función objetivo del dual, están relacionadas con la cantidad de elementos del conjunto $X_w = \{y \text{ tales que minimizan } f(x) + w \cdot \beta(x) \text{ sobre } x \in X\}$. Antes de presentar las condiciones bajo las cuales se tiene que la función objetivo del dual es diferenciable, presentaremos el siguiente resultado:

Teorema 1.13. *Sea X un compacto no vacío, $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+l}$ funciones continuas. Si $X_{\bar{w}} = \{\bar{x}\}$ y tenemos una sucesión $w_k \rightarrow \bar{w}$ entonces si construimos una sucesión donde $x_k \in X_{w_k}$ se tiene que $x_k \rightarrow \bar{x}$.*

Demostración. Supongamos que existe un $\epsilon > 0$ y una colección de índices K tales que $\|x_k - \bar{x}\| > \epsilon \forall k \in K$. Por ser X compacto, existe una subsucesión de $\{x\}_K$ convergente a $y \in X$. Por como construimos la sucesión tenemos que $\|y_k - \bar{x}\| \geq \epsilon$, y por lo tanto $y \neq \bar{x}$. Denotaremos la subsucesión convergente a y como $\{x\}_{K'}$. Para todo $k \in K'$ tenemos que $f(x_k) + w_k \cdot \beta(x_k) \leq f(\bar{x}) + w_k \cdot \beta(\bar{x})$. Por la continuidad de f y β llegamos a que $f(y) + \bar{w} \cdot \beta(y) \leq f(\bar{x}) + \bar{w} \cdot \beta(\bar{x})$, por lo que $y \in X_{\bar{w}}$, pero esto contradice las hipótesis del teorema y por lo tanto podemos concluir que $x_k \rightarrow \bar{x}$. \square

Finalmente el teorema que nos dice cuando la función objetivo del dual es diferenciable es:

Teorema 1.14. *Sea X un compacto no vacío, $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\beta(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+l}$ funciones continuas. Si $X_{\bar{w}} = \{\bar{x}\}$ entonces la función objetivo del dual es diferenciable en \bar{w} y su gradiente es $\beta(\bar{x})$.*

Demostración. Como $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R}^{m+l} \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y X es compacto, para todo w existe $x_w \in X_w$ y por lo tanto se verifican las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \theta(w) - \theta(\bar{w}) &\leq f(\bar{x}) + w \cdot \beta(\bar{x}) - f(\bar{x}) - \bar{w} \cdot \beta(\bar{x}) = (w - \bar{w}) \cdot \beta(\bar{x}) \\ \theta(\bar{w}) - \theta(w) &\leq f(x_w) + \bar{w} \cdot \beta(x_w) - f(x_w) - w \cdot \beta(x_w) = (\bar{w} - w) \cdot \beta(x_w). \end{aligned}$$

A partir de estas desigualdades sacamos que $0 \geq \theta(w) - \theta(\bar{w}) - (w - \bar{w}) \cdot \beta(\bar{x})$ y que $\theta(w) - \theta(\bar{w}) - (w - \bar{w}) \cdot \beta(\bar{x}) \geq (w - \bar{w}) \cdot (\beta(x_w) - \beta(\bar{x}))$. Usando la desigualdad de Schwartz llegamos a que $\theta(w) - \theta(\bar{w}) -$

$(w - \bar{w}) \cdot \beta(\bar{x}) \geq -\|w - \bar{w}\| \cdot \|\beta(x_w) - \beta(\bar{x})\|$. Despejando llegamos a que $0 \geq \frac{\theta(w) - \theta(\bar{w}) - (w - \bar{w}) \cdot \beta(\bar{x})}{\|w - \bar{w}\|} \geq \|\beta(x_w) - \beta(\bar{x})\|$. Como estamos en las condiciones del Teorema 1.13, tenemos que si $w \rightarrow \bar{w}$ entonces $x_w \rightarrow \bar{x}$ y por la continuidad de $\beta(x)$ llegamos a que $\lim_{w \rightarrow \bar{w}} \frac{\theta(w) - \theta(\bar{w}) - (w - \bar{w}) \cdot \beta(\bar{x})}{\|w - \bar{w}\|} = 0$, por lo tanto la función dual es diferenciable en \bar{w} y su gradiente es $\beta(\bar{x})$. \square

Este teorema nos dice que si la solución del problema de fijado w minimizar la función $f(x) + w \cdot \beta(x)$ con $x \in X$ es única, entonces las derivadas de la función objetivo del dual son las restricciones evaluadas en la solución del problema de fijado w minimizar la función $f(x) + w \cdot \beta(x)$ con $x \in X$. Conocer el gradiente de la función objetivo del dual también nos sirve para tener la dirección de máximo ascenso de la función objetivo del dual. El problema es que muchas veces la solución de fijado w minimizar la función $f(x) + w \cdot \beta(x)$ con $x \in X$ no va ser única y por lo tanto no podremos aplicar este teorema. Para poder tener un resultado más general es necesario introducir el concepto de subgradiente de una función. La definición de subgradiente es:

Definición 5. Dado un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, y una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, se dice que un vector $s \in \mathbb{R}^n$ es un subgradiente de f en $\bar{x} \in S$ si para todo $x \in S$ se verifica que:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + s \cdot (x - \bar{x}) \quad (1.14)$$

De la definición anterior puede parecer chocante que se exija que la función sea convexa, ya que cabe preguntarse si no tendría sentido definir el mismo concepto para una función general, la respuesta a esta pregunta es que para que existiera un subgradiente en todos los puntos del interior del conjunto S sobre el que se define la función, tendríamos que exigir que fuera convexa al menos en el interior del conjunto S y solo tendríamos asegurada la existencia si fuera convexa [3]. Evidentemente el concepto de subgradiente también se puede definir para funciones cóncavas, ya que si $f(x)$ es cóncava, entonces $-f(x)$ es convexa y tendría subgradiente. Para una función f cóncava lo que se puede afirmar es que existe un subgradiente s tal que $-f(x) \geq -f(\bar{x}) + s \cdot (x - \bar{x})$ o equivalentemente $f(x) \leq f(\bar{x}) + s \cdot (x - \bar{x})$.

Una vez introducida la definición de subgradiente, veremos que las restricciones evaluadas en una solución del problema de fijado w encontrar el mínimo en $x \in X$ de la función $f(x) + w \cdot \beta(x)$ es un subgradiente para la función objetivo del dual. Lo primero sería saber si tiene sentido buscar subgradien-tes de la función objetivo del dual, pero por el resultado 1.12, sabemos que es cóncava y por lo tanto va tener al menos un subgradiente. El teorema que nos dice cuales son los subgradien-tes de la función objetivo del dual es:

Teorema 1.15. Sea X un compacto no vacío, $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\beta(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+l}$ funciones continuas. Si $\bar{x} \in X(\bar{w})$, entonces un subgradiente en \bar{w} de la función objetivo del dual es $\beta(\bar{x})$.

Demostración. Como $f(x)$, $\beta(x)$ son continuas y X es compacto, para todo w existe $x_w \in X_w$ y por lo tanto se verifica la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \theta(w) &= \inf\{f(x) + w \cdot \beta(x), x \in X\} \leq f(\bar{x}) + w \cdot \beta(\bar{x}) = \\ &f(\bar{x}) + (w - \bar{w}) \cdot \beta(\bar{x}) + \bar{w} \cdot \beta(\bar{x}) = \theta(\bar{w}) + (w - \bar{w}) \cdot \beta(\bar{x}). \end{aligned}$$

\square

La diferencia de este teorema con 1.14 es que en las hipótesis de este teorema no se pide que el conjunto X_w este formado por un único elemento. Esto tiene sentido ya que se puede probar que para toda función convexa se cumple que si es diferenciable, entonces el subgradiente es único y es el gradiente [3].

Vimos que las funciones que definen las restricciones son subgradien-tes de la función objetivo del dual y que si el conjunto X_w está formado por un único elemento, entonces la función objetivo del dual es diferenciable y su gradiente son las funciones que definen las restricciones.

En esta sección empezamos hablando de las condiciones necesarias que debe verificar un punto de la región factible para ser un óptimo. Después introdujimos la dualidad lagrangiana y vimos que en el caso convexo se podía usar el dual para introducir condiciones necesarias y suficientes de optimalidad y que además bajo ciertas condiciones equivalían a que el punto fuera KKT. Por último vimos algunas propiedades de la función dual que en la siguiente sección usaremos en la construcción del lagrangiano aumentado.

1.2. Algoritmos para problemas con restricciones

En esta sección explicaremos alguno de los métodos para resolver estos problemas. Los métodos que presentaremos se basaran en subir las restricciones penalizadas y luego utilizar un algoritmo de resolución de problemas sin restricciones.

1.2.1. Métodos de penalización exterior

El primer método que explicaremos serán los de penalización exterior. En estos métodos, penalizaremos estar en un punto infactible y en cada iteración aumentaremos la penalización hasta llegar a un punto factible. En resumen el esquema del algoritmo es:

1. Elegimos una tolerancia, una función de penalización que denotaremos por P , una solución inicial, un escalar $\gamma > 1$ que nos indicara a que velocidad aumentamos el peso de la penalización y un parámetro $\rho > 0$ que sera el peso inicial de las penalizaciones.
2. Cogemos como x^{t+1} la solución de $\min_x f(x) + \rho^t \cdot P(x)$.
3. Si $\rho \cdot P(x)$ es menor que la tolerancia acaba el algoritmo, en caso contrario $\rho^{t+1} = \gamma \cdot \rho^t$.

El esquema anterior se usaría si el problema es de minimización, en el caso de que estemos maximizando, lo único que cambiaríamos sería los subproblemas que estamos resolviendo en cada iteración. En caso de maximizar, resolveríamos $\max_x f(x) - \rho^t \cdot P(x)$.

La primera pregunta que debemos hacernos si vamos a utilizar este algoritmo es como debemos escoger las funciones de penalización. Una función de penalización debe ser continua y verificar que en los puntos factibles toma el valor 0 y en el resto un valor positivo. Dos posibles elecciones para la función de penalización son:

- Penalización absoluta:

$$\sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} + \sum_{i=1}^l |h_i(x)|. \quad (1.15)$$

- Penalización cuadrática:

$$\sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\}^2 + \sum_{i=1}^l h_i(x)^2. \quad (1.16)$$

Ahora cabe preguntarse por las diferencias que hay entre las dos formas de penalización. El punto negativo de la penalización absoluta es que puede no ser derivable. Si la derivada de alguna función $h_i(x)$ es distinta de cero en algún punto en el que vale cero la función $|h_i(x)|$ no es diferenciable, análogamente para la función $\max\{0, g_i(x)\}$. Por este motivo, cuando trabajamos con penalización absoluta no podemos usar métodos que usen derivadas. La ventaja de usar esta clase de funciones de penalización es que nos aseguran que el peso de las penalizaciones en el óptimo es finito, en concreto para tener la convergencia, basta con que sea mayor que el máximo de los multiplicadores de lagrange en valor absoluto, véase ([2]). Por otra parte la penalización cuadrática es diferenciable y nos permitiría usar métodos que usen derivadas, pero tiene el inconveniente de que el óptimo puede no alcanzarse

para pesos de la penalización finitos. Ahora mostraremos un ejemplo donde el óptimo nunca se alcanza para un peso finito.

Ejemplo 1.16. Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_1, x_2\}} \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

El óptimo de este problema es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Si escribimos la función con el término de penalización cuadrático, tenemos la siguiente expresión $x_1^2 + x_2^2 + \rho \cdot (x_1 + x_2 - 1)^2$. Si derivamos la función con la penalización y igualamos a cero obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + \rho \cdot (x_1 + x_2 - 1) &= 0 \\ x_2 + \rho \cdot (x_1 + x_2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Si resolvemos el anterior sistema obtenemos que el óptimo de cada iteración del algoritmo es $x_1 = \frac{\rho}{2 \cdot \rho + 1} = x_2$. Este valor convergerá a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ cuando ρ tienda a infinito pero nunca tomará ese valor.

Ahora cabe preguntarse, el porque de este comportamiento. Consideremos el punto $x_\epsilon = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot \epsilon = (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} - \epsilon)$, siendo $\epsilon > 0$. Ahora consideramos la formula del polinomio de Taylor de grado uno evaluado en x_ϵ y centrado en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ que viene dada por $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x_\epsilon - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) + \phi(\epsilon)$, donde $\phi(\epsilon)$ tiende a cero cuando ϵ tiende a cero. Ahora si evaluamos la función con la penalización, en el punto x_ϵ y usamos la expresión de $f(x_\epsilon)$ dada por el polinomio de Taylor, obtenemos la expresión $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - 2 \cdot \epsilon + \rho \cdot 4 \cdot \epsilon^2 + \phi(\epsilon)$. En la expresión anterior se puede comprobar que para cualquier ρ finito, si ϵ es suficientemente pequeño tenemos que el valor de la función con la penalización es más pequeño en x_ϵ que en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ya que el término $-\epsilon$ domina al de la penalización. Este razonamiento, nos muestra que el comportamiento de que no se alcance el óptimo para valores de ρ finitos, no es debido a la función objetivo que estamos optimizando, sino al comportamiento de la función de penalización.

En conclusión sacamos que ninguna de las dos funciones de penalización es perfecta, con la absoluta perdemos la diferenciabilidad de la función objetivo, mientras que con la cuadrática no alcanzaremos el valor del óptimo para un peso de las penalizaciones finito.

Los otros parámetros que influyen en este algoritmo son γ y ρ . γ es la velocidad a la que se aumenta el peso de las penalizaciones que viene dado por ρ . El parámetro ρ es el que obliga a irse acercando cada vez más a la región factible, pero si es demasiado alto corremos el riesgo de que el termino de penalización tenga demasiado peso en la función objetivo haciendo que acabe convergiendo a algo que no es el óptimo. Por lo tanto, es evidente que con γ pequeños nos acercaremos lentamente a la región factible, pero γ altos pueden provocar que el ρ acabe siendo demasiado alto y desestabilizando el algoritmo.

Ahora mostraremos mediante un ejemplo el funcionamiento del algoritmo.

Ejemplo 1.17. Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_1, x_2\}} \quad & (x_1 \cdot x_2) + x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & -(x_1 + x_2) \leq -2. \end{aligned}$$

Escribiendo este problema en AMPL y pasándoselo a un solver de neos, obtenemos que la solución es (1, 1). Si añadimos la penalización absoluta, la función a optimizar en cada iteración del algoritmo es:

$$\min_{\{x_1, x_2\}} (x_1 \cdot x_2) + x_1^2 + x_2^2 + \rho^t \cdot \max\{0, -x_1\} + \rho^t \cdot \max\{0, -x_2\} + \rho^t \cdot \max\{0, -x_1 - x_2 + 2\}. \quad (1.17)$$

Iteración	Punto	Valor $f(x)$	Penalización	Restricciones
1	(0,05, 0,05)	0,0075	0,15	$(x = 0,05, y = 0,05, -(x + y) + 2 = 1,9)$
2	(0,075, 0,075)	0,016875	0,225	$(x = 0,075, y = 0,075, -(x + y) + 2 = 1,85)$
3	(0,1125, 0,1125)	0,0379687	0,3375	$(x = 0,1125, y = 0,1125, -(x + y) + 2 = 1,775)$
4	(0,16875, 0,16875)	0,0854297	0,50625	$(x = 0,16875, y = 0,16875, -(x + y) + 2 = 1,6625)$
5	(0,253125, 0,253125)	0,192217	0,759375	$(x = 0,253125, y = 0,253125, -(x + y) + 2 = 1,49375)$
6	(0,379688, 0,379688)	0,432488	1,139063	$(x = 0,379688, y = 0,379688, -(x + y) + 2 = 1,24062)$
7	(0,569531, 0,569531)	0,973098	1,708594	$(x = 0,569531, y = 0,569531, -(x + y) + 2 = 0,973098)$
8	(0,854297, 0,854297)	2,18947	2,562891	$(x = 0,854297, y = 0,854297, -(x + y) + 2 = 0,291406)$
9	(0,965422, 1,03454)	3,00109	3,844336	$(x = 0,965422, y = 1,03454, -(x + y) + 2 = 3,47028e - 05)$

Tabla 1.1: Tabla con las nueve primeras iteraciones del método de penalización exterior

Lo que haremos será escribir el problema (1.17) en AMPL para pasárselo a un solver de neos, de esta forma realizaremos las nueve primeras iteraciones del algoritmo. Iniciaremos ρ a 0,15 y fijaremos γ a 1,5. Los resultados de las iteraciones pueden verse en el Cuadro 1.1, o de forma gráfica en la Figura 1.1. En esta Figura, vemos las curvas de nivel de la función objetivo, la línea roja representa la frontera de la región factible. Los puntos situados a la derecha de la línea roja son factibles y los situados a la izquierda infactibles. Los puntos naranjas son los resultados de las distintas iteraciones del algoritmo. En este ejemplo podemos ver como al aumentar ρ el algoritmo se va acercando a la región factible.

En el ejemplo anterior, subimos todas las restricciones a la función objetivo, pero en la práctica es común que solo se suban algunas restricciones. Denotaremos por X la región factible definida por las restricciones que no subieron a la función objetivo.

Una vez presentado el método, presentaremos los resultados teóricos que nos garantizan la convergencia. Estos resultados los presentaremos para el caso en el que estemos minimizando, pero todos los razonamientos que haremos serán análogos para el caso de maximizar.

Teorema 1.18. Sea $\theta(\rho) = \inf\{f(x) + \rho \cdot P(x) : x \in X\}$, sean $g(x)$ las restricciones de menor o igual que se subieron a la función objetivo y $h(x)$ las de igualdad. Supongamos que $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, y $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ son funciones continuas, entonces se verifica que:

- $\inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \geq \sup_{\rho \geq 0} \theta(\rho)$.
- Sea x_ρ la solución de $\min_x f(x) + \rho \cdot P(x)$, se verifica que: $f(x_\rho)$ es una sucesión que no decrece al aumentar ρ , $\theta(\rho)$ es una función no decreciente y la función de penalización decrece al aumentar ρ .

Demostración. Si se verifica que $x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0$, se tiene que $P(x) = 0$ y por lo tanto se tiene que $f(x) = f(x) + \rho \cdot P(x)$ para todo ρ y por lo tanto se tiene que es mayor que $\theta(\rho)$. Por lo tanto, si x es factible se tiene que $\sup_{\rho \geq 0} \theta(\rho) \leq f(x)$. Esto nos permite concluir que $\inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \geq \sup_{\rho \geq 0} \theta(\rho)$.

Fijamos $\lambda < \mu$, por la definición de x_λ y x_μ se tiene que:

$$f(x_\mu) + \lambda \cdot P(x_\mu) \geq f(x_\lambda) + \lambda \cdot P(x_\lambda) \quad (1.18)$$

$$f(x_\lambda) + \mu \cdot P(x_\lambda) \geq f(x_\mu) + \mu \cdot P(x_\mu). \quad (1.19)$$

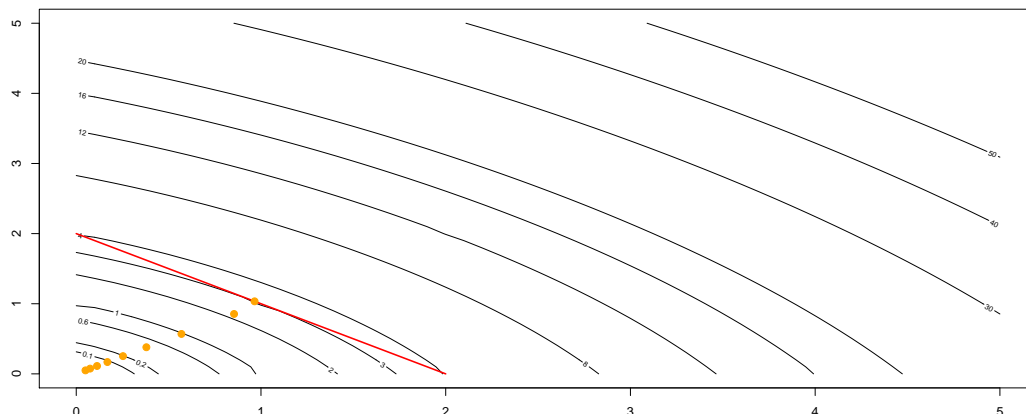


Figura 1.1: Representación gráfica de las nueve primeras iteraciones del método de penalización exterior

Sumando y simplificando estas restricciones, obtenemos que $(\mu - \lambda) \cdot (P(x_\lambda) - P(x_\mu)) \geq 0$. Como $(\mu - \lambda) > 0$, concluimos que $P(x_\lambda) \geq P(x_\mu)$. Operando en (1.18), llegamos a que $f(x_\mu) - f(x_\lambda) \geq \lambda \cdot (P(x_\lambda) - P(x_\mu)) \geq 0$ y por lo tanto $f(x_\mu) \geq f(x_\lambda)$. Por último, si en el lado izquierdo de la expresión (1.18) sumamos y restamos $\mu \cdot P(x_\mu)$, obtenemos $\theta(x_\mu) - \theta(x_\lambda) \geq (\mu - \lambda) \cdot P(x_\mu) \geq 0$ y por lo tanto $\theta(x_\mu) \geq \theta(x_\lambda)$. \square

Este teorema, nos da bastante información del comportamiento del algoritmo, aunque aun no nos permite asegurar la convergencia. Lo que nos está diciendo es que al aumentar el peso de la penalización nos acercaremos a puntos factibles, por eso disminuye la función de penalización. Por otra parte nos dice que al aumentar el peso de la penalización aumenta el valor de la función objetivo, esto se debe a que nos alejamos del óptimo del problema sin restricciones para acercarnos a puntos factibles. Este comportamiento es el que se puede observar en el Ejemplo 1.17, en este caso empezamos en puntos muy cercanos al $(0,0)$ que sería el óptimo del problema sin restricciones y a medida que aumentamos el peso de la penalización nos acercamos al óptimo del problema con restricciones que es $(1,1)$.

El resultado que nos da la convergencia es:

Teorema 1.19. *Supongamos que la función objetivo es continua, que las funciones $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que indican el lado izquierdo de las restricciones de desigualdad son continuas y que las funciones $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ que indican los lados izquierdos de las de igualdad también son continuas. Sea x_ρ la solución de $f(x) = f(x) + \rho \cdot P(x)$, si esta sucesión está contenida en un compacto y resolvemos los subproblemas globalmente, entonces todo punto límite de la solución x_ρ es un óptimo global del problema de optimización.*

Demostración. La prueba de este resultado se basará en ver que si definimos $\theta(\rho) = \inf\{f(x) + \rho \cdot P(x) : x \in X\}$, se tiene que $\sup_{\rho \geq 0} \theta(\rho) = f(\bar{x})$, siendo \bar{x} un punto límite de la sucesión x_μ .

Para probar esto, empezaremos viendo que $P(x_\rho)$ converge a cero. Cogemos x_1 como la solución de $f(x) = f(x) + P(x)$, $\mu \geq \frac{1}{\epsilon} \cdot |f(y) - f(x_1)| + 2$ con $\epsilon \geq 0$ y y un punto factible. Por el resultado 1.18 tenemos que $f(x_\mu) \geq f(x_1)$, por lo tanto se tiene que:

$$\inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \geq \theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu \cdot P(x_\mu) \geq f(x_1) + \mu \cdot P(x_\mu) \quad (1.20)$$

Supongamos que $P(x_\mu) > \epsilon$, entonces en la expresión (1.20) se tiene que:

$$\begin{aligned} \inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} &\geq \theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu \cdot P(x_\mu) \geq f(x_1) + \mu \cdot P(x_\mu) \\ &> f(x_1) + |f(y) - f(x_1)| + 2 \cdot \epsilon > f(y). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Por lo tanto llegamos a una contradicción porque y es un punto factible. Tenemos que para todo ϵ , podemos encontrar un $\delta = \frac{1}{\epsilon} \cdot |f(y) - f(x_1)| + 2$ tal que para todo $\mu \geq \delta$ se tenga que $P(x_\mu) < \epsilon$ es decir $P(x_\rho)$ converge a cero.

Una vez hemos comprobado que la función de penalización tiende a cero comprobaremos que si tenemos una subsucesión x_{μ_k} convergente a \bar{x} , entonces $\sup \theta(\rho) = f(\bar{x})$. Es trivial que $\sup \theta(\rho) \geq \theta(\mu_k) = f(x_{\mu_k}) + \mu_k \cdot P(x_{\mu_k}) \geq f(x_{\mu_k})$, además como $f(x)$ es continua podemos concluir que $\sup \theta(\rho) \geq f(\bar{x})$. Como hemos probado que $P(x_\mu)$ tiende a cero, sabemos que $P(\bar{x}) = 0$ y por lo tanto \bar{x} es un punto factible. Usando el resultado 1.18, llegamos a que $\sup \theta(\rho) \leq f(\bar{x})$. Hemos comprobado que $\sup \theta(\rho) = f(\bar{x})$, por lo tanto $\inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \geq f(\bar{x})$, pero como \bar{x} es factible se tiene que $\inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} = f(\bar{x})$ y por lo tanto \bar{x} es la solución del problema de minimización.

Por último cabría preguntarse si realmente tenemos asegurada la existencia de una subsucesión convergente. Esto lo podemos asegurar porque por hipótesis tenemos que la sucesión x_μ está contenida en un compacto. \square

Estos resultados nos permiten asegurar que en casos donde resolvamos cada subproblema de forma global, el algoritmo convergerá al óptimo. El problema es que si el problema no es convexo, puede que los subproblemas no lo sean con lo que hallar óptimos globales se puede complicar bastante.

En resumen podemos decir que estas son las características principales del método:

- Si resolvemos globalmente cada subproblema tenemos la convergencia asegurada.
- Con penalización cuadrática puede que los ρ tomen valores demasiado altos, haciendo que la función objetivo tenga poco peso y acabe en algo que no es el óptimo.
- Con la función de penalización absoluta, el valor que deben tomar el peso de las penalizaciones está acotado inferiormente por el valor absoluto más grande entre el de todos los multiplicadores de lagrange. El problema es que es imposible conocer el valor de esos multiplicadores, sin saber a que punto debe converger.
- La función de penalización absoluta tiene el problema de que puede provocar que perdamos la diferenciabilidad.

El siguiente algoritmo que presentaremos, será el lagrangiano aumentado. Este algoritmo tratará de obtener un método en el cual tengamos que el peso que deben tomar las penalizaciones este acotado inferiormente y en el que no se pierda la diferenciabilidad.

1.2.2. Lagrangiano aumentado

Como explicamos en la sección anterior, la idea de este algoritmo es no perder la diferenciabilidad y que no sea necesario hacer que el peso de las penalizaciones tienda a infinito para tener la convergencia.

Empezaremos presentando las ideas básicas de este método para casos en los que solo se tienen restricciones de igualdad. La idea de partida es resolver una versión penalizada del problema original que

vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \min f(x) + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^l h_j(x)^2 \\ h_j = 0 \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Recordemos la expresión de la función lagrangiana, de la que hablamos en la primera sección de este capítulo y que presentamos en la expresión (1.7), que venía dada por:

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1, \dots, m} u_i \cdot g_i(x) + \sum_{i=1, \dots, l} v_i \cdot h_i(x).$$

Si calculamos esta función para el problema penalizado (1.22), obtenemos la siguiente expresión:

$$L_\rho^A(x, v) = f(x) + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{i=1}^l h_i(x)^2 + \sum_{i=1}^l v_i \cdot h_i(x). \quad (1.23)$$

Esta última expresión es lo que se conoce como lagrangiano aumentado. El método que vamos a presentar se basará en tratar de minimizar esta función respecto a x para un v dado, en lugar de minimizar $f(x)$.

Antes de continuar con la explicación del algoritmo, explicaremos por qué tiene sentido construir el algoritmo de esta forma. Mostraremos un teorema que bajo ciertas hipótesis nos relaciona los puntos KKT de $f(x)$ con los mínimos del lagrangiano aumentado. Recordemos que si a las hipótesis del Teorema 1.3, se le añade que los gradientes de los lados izquierdos de las restricciones son linealmente independientes, se tiene que una condición necesaria de optimalidad es que el punto sea de KKT. Empezaremos mostrando el siguiente resultado auxiliar:

Teorema 1.20. *Sean A y B matrices simétricas con B definida positiva. Además supongamos que si $x \neq 0$ y $x^t \cdot B \cdot x = 0$ entonces $x^t \cdot A \cdot x > 0$. Bajo estas hipótesis podemos afirmar que existe $\bar{\rho}$ tal que para todo $\rho \geq \bar{\rho}$ se tiene que $A + \rho \cdot B$ es definida positiva.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto. Cogemos una sucesión $\{\rho_n\}$ no negativa que tienda a infinito. Si el resultado no es cierto, se tiene que para todo ρ_n existe $x_n \neq 0$ tal que $x_n^t \cdot (A + \rho_n \cdot B) \cdot x_n \leq 0$. Podemos coger los x_n de norma 1, así la sucesión estará contenida en un compacto y tendrá una subsucesión convergente a un elemento de ese compacto. Sin pérdida de generalidad consideramos la sucesión convergente a \bar{x} . En este caso tenemos que $\bar{x}^t \cdot B \cdot \bar{x} = 0$, en caso contrario $x_n^t \cdot (\rho_n \cdot B) \cdot x_n$ tendería a infinito mientras que $x_n^t \cdot A \cdot x_n$ converge a $\bar{x}^t \cdot A \cdot \bar{x}$, por lo tanto tendríamos que $x_n^t \cdot (A + \rho_n \cdot B) \cdot x_n$ tiende a infinito, lo cual contradice que sea menor que cero. Por lo tanto podemos afirmar que $\bar{x}^t \cdot B \cdot \bar{x} = 0$, además como la norma de \bar{x} es uno tenemos que $\bar{x} \neq 0$ y por hipótesis tenemos que $\bar{x}^t \cdot A \cdot \bar{x} > 0$. Por hipótesis también sabemos que $x_n^t \cdot B \cdot x_n > 0$, por lo tanto si $x_n^t \cdot (A + \rho_n \cdot B) \cdot x_n \leq 0$ se tiene que $x_n^t \cdot A \cdot x_n \leq 0$, esto contradice que el límite sea mayor que 0. Llegamos a que si suponemos que el resultado no es cierto tenemos que $x_n^t \cdot A \cdot x_n \leq 0$ y por lo tanto su límite tendría que ser menor o igual que cero, pero comprobamos que es mayor. Esto nos lleva a concluir que el resultado es cierto. \square

El resultado que nos interesará probar es:

Teorema 1.21. *Supongamos que \bar{x} es un punto de KKT con multiplicadores \bar{v} que cumple la condición suficiente de KKT de segundo orden. Entonces existe $\bar{\rho} > 0$ tal que para todo $\rho \geq \bar{\rho}$ la función $L_\rho^A(x, \bar{v})$ tiene un mínimo en \bar{x} .*

Demostración. Por ser \bar{x} un punto KKT, con multiplicador de lagrange \bar{v} , sabemos que:

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^l \bar{v}_i \cdot \nabla h_i(\bar{x}) = 0. \quad (1.24)$$

Además como \bar{x} es factible se tiene que $h(\bar{x}) = 0$. Ahora si en la expresión (1.23), fijamos $v = \bar{v}$ y derivamos respecto a x tenemos la siguiente expresión:

$$\nabla f(x) + \rho \cdot \sum_{i=1}^l h_i(x) \cdot \nabla h_i(x) + \sum_{i=1}^l \bar{v}_i \cdot \nabla h_i(x). \quad (1.25)$$

Ahora usando la igualdad (1.24) y que $h(\bar{x}) = 0$, llegamos a que la expresión (1.25) evaluada en \bar{x} es igual a 0.

Para ver que realmente es un mínimo faltaría comprobar que la matriz hessiana es semidefinida positiva. La derivada segunda respecto a x de (1.23) es:

$$\nabla^2 f(x) + \rho \cdot \sum_{i=1}^l h_i(x) \cdot \nabla^2 h_i(x) + \rho \cdot \sum_{i=1}^l \nabla h_i(x) \cdot \nabla h_i(x) + v \cdot \sum_{i=1}^l \nabla^2 h_i(x). \quad (1.26)$$

Si evaluamos la expresión anterior en (\bar{x}, \bar{v}) , obtenemos la siguiente expresión:

$$\nabla^2 f(\bar{x}) + \rho \cdot \sum_{i=1}^l \nabla h_i(\bar{x}) \cdot \nabla h_i(\bar{x}) + \bar{v} \cdot \sum_{i=1}^l \nabla^2 h_i(\bar{x}). \quad (1.27)$$

Por verificar las condiciones de orden dos de KKT, sabemos que si $d \cdot \nabla h(x) = 0$ se tiene que $d \cdot (\nabla^2 f(\bar{x}) + \bar{v} \cdot \sum_{i=1}^l \nabla^2 h_i(\bar{x})) \cdot d > 0$, por lo tanto si cogemos como $A = \nabla^2 f(\bar{x}) + \bar{v} \cdot \sum_{i=1}^l \nabla^2 h_i(\bar{x})$ y como $B = \sum_{i=1}^l \nabla h_i(\bar{x}) \cdot \nabla h_i(\bar{x})$ podemos aplicar el Teorema 1.20 y concluir que el resultado es verdadero. \square

Este resultado además de relacionarnos los puntos KKT de $f(x)$ con los mínimos del lagrangiano aumentado, también nos da un resultado de convergencia. Nos dice que si se verifican las condiciones de orden dos de KKT en un punto \bar{x} y escogemos como v el multiplicador de lagrange asociado a \bar{x} , tendremos que el método que estamos construyendo converge a \bar{x} y además lo hará con un peso de la penalización finito. Recordemos que el Teorema 1.11 nos garantizaba que en el caso convexo ser KKT equivalía a ser punto de silla. Recordemos también que (x, u, v) era un punto de silla si x era solución del primal y (u, v) era solución del dual. Por lo tanto tenemos que en el caso convexo este algoritmo va a converger al óptimo y lo hará con un peso de la penalización finito, mientras que en el caso no convexo solo podemos garantizar que convergerá a un punto de KKT. El problema de este resultado es que dada una función $f(x)$, nosotros no conocemos que puntos van ser KKT y mucho menos los multiplicadores asociados, por lo tanto para usar este método será necesario construir una sucesión para el valor de v . Otra limitación del teorema es que no nos dice nada del comportamiento del algoritmo en el caso de que no se verifiquen las condiciones de orden dos de KKT. En el siguiente ejemplo veremos el comportamiento del algoritmo en un caso donde no se verifiquen las condiciones de segundo orden de KKT:

Ejemplo 1.22. *Consideramos el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} \text{mín } x_1^4 + x_2 \cdot x_1 \\ x_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Es trivial que el óptimo de este problema es el $(0, 0)$. La función lagrangiana asociada al problema es:

$$L(x, v) = (4 \cdot x_1^3 + x_2, x_1 + v \cdot 1). \quad (1.29)$$

Su matriz hessiana es:

$$\begin{pmatrix} 12 \cdot x_1^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto de vectores tal que $d \cdot \nabla h(x) = 0$, viene dado en este caso por los vectores de la forma $(x, 0)$ siendo $x \in \mathbb{R}$, en particular $(1, 0)$ está en este conjunto. Evaluando la matriz hessiana en el punto $(0, 0)$ obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar fácilmente que $(1, 0) \cdot \nabla^2 L(0, 0) \cdot (1, 0) = 0$, por lo tanto vemos que no verifica las condiciones de segundo orden de KKT.

Se puede comprobar fácilmente que el multiplicador de lagrange asociado al óptimo es el 0. Si construimos el lagrangiano aumentado para el problema (1.28) y ponemos $v = 0$, obtenemos la siguiente función:

$$x_1^4 + x_2 \cdot x_1 + \frac{\rho}{2} \cdot x_2^2. \quad (1.30)$$

Si en la expresión anterior derivamos y igualamos a cero, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 4 \cdot x_1^3 + x_2 &= 0 \\ x_1 + \rho \cdot x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Las soluciones de esta sistema son el $(0, 0)$, $(\frac{1}{2\sqrt{\rho}}, \frac{1}{2\rho\sqrt{\rho}})$, $-(\frac{1}{2\sqrt{\rho}}, \frac{1}{2\rho\sqrt{\rho}})$. Para saber cual de estos tres puntos es el mínimo habría que ver para cual de estos puntos la matriz hessiana es definida positiva. La matriz hessiana de (1.30) es :

$$\begin{pmatrix} 12 \cdot x_1^2 & 1 \\ 1 & \rho \end{pmatrix}$$

En el $(0, 0)$ esta matriz no es definida positiva por tener determinante menor que cero. En el punto $(\frac{1}{2\sqrt{\rho}}, \frac{1}{2\rho\sqrt{\rho}})$ si que es definida positiva porque todos los menores principales son mayores que cero. Por lo tanto en cada iteración del algoritmo x valdrá $(\frac{1}{2\sqrt{\rho}}, \frac{1}{2\rho\sqrt{\rho}})$, esta sucesión tenderá a cero cuando ρ tienda a infinito.

En el anterior ejemplo vimos, como cuando no estamos en las hipótesis del Teorema 1.21, el algoritmo puede comportarse de manera semejante al algoritmo de penalización con función cuadrática.

Hasta ahora hemos visto que si minimizamos el lagrangiano aumentado, con \bar{v} el multiplicador de lagrange del óptimo, el algoritmo convergerá y bajo ciertas hipótesis lo hará con penalización finita. Nos falta saber como hacer que v tienda a los multiplicadores de lagrange y como introducir las restricciones de desigualdad.

Lo que haremos a continuación será explicar como trabajar con este algoritmo cuando tenemos restricciones de desigualdad. Para introducir las restricciones de desigualdad, describiremos la expresión (1.23) como:

$$f(x) + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^l \left(h_j(x) + \frac{v_j}{\rho} \right)^2 + c, \text{ siendo } c \text{ una constante.} \quad (1.32)$$

Esta expresión es totalmente equivalente a (1.23). La constante sería $-\sum_{i=1}^l \frac{v_i^2}{2 \cdot \rho}$, ya que el único término que no aparece en la función (1.23) y si en la expresión (1.32) es $\sum_{i=1}^l \frac{v_i^2}{2 \cdot \rho}$. De todas formas, aunque no tuviéramos en cuenta la constante, podríamos seguir trabajando con la expresión (1.32) ya que el valor de las variables en el óptimo coincidiría con el de (1.23), la única diferencia sería en el valor de la función objetivo.

La expresión (1.32) nos permite ver el algoritmo como un método de penalización donde las desigualdades están desplazadas por el valor $\frac{v_j}{\rho}$. Como este valor tiende a cero cuando ρ tiende a infinito, tendremos que en el límite el lagrangiano aumentado sería equivalente a resolver el problema original penalizado.

La utilidad de esta expresión es que nos permite introducir de una forma cómoda las restricciones de desigualdad. Lo que haremos será introducir unas variables de holgura $z_i \geq 0$ que nos permitirán convertir las restricciones de menor igual en restricciones de igualdad. Después usando la expresión (1.32) calcularemos el valor de las holguras. Si transformamos todas las restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad tenemos que la expresión del lagrangiano aumentado es:

$$f(x) + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^l \left(h_j(x) + \frac{v_j}{\rho} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(g_j(x) + \frac{u_j}{\rho} + z_j^2 \right)^2 + c, \text{ siendo } c \text{ una constante.} \quad (1.33)$$

Recordemos que como estamos minimizando, podemos calcular los valores de las variables de holgura z_j como las que minimizan los sumandos $(g_j(x) + \frac{u_j}{\rho} + z_j^2)^2$. Por lo tanto las variables de holgura tomarán los siguientes valores:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } g_j(x) + \frac{u_j}{\rho} \geq 0 \\ \sqrt{-\left(g_j(x) + \frac{u_j}{\rho}\right)} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.34)$$

Una vez calculadas las variables de holgura podemos describir la expresión (1.33) como:

$$f(x) + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^l \left(h_j(x) + \frac{v_j}{\rho} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(\max\{0, g_j(x) + \frac{u_j}{\rho}\} \right)^2 + c, \text{ siendo } c \text{ una constante.} \quad (1.35)$$

El algoritmo que estamos construyendo en cada iteración fija x^{t+1} a la solución del siguiente subproblema:

$$\min_x f(x) + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^l \left(h_j(x) + \frac{v_j^t}{\rho} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(\max\{0, g_j(x) + \frac{u_j^t}{\rho}\} \right)^2. \quad (1.36)$$

Si derivamos esta expresión y evaluamos en x^{t+1} , obtenemos la siguiente ecuación:

$$\nabla f(x^{t+1}) + \sum_{j=1}^l (\rho \cdot h_j(x^{t+1}) + v_j^t) \cdot \nabla h_j(x^{t+1}) + \sum_{j=1}^m (\max\{0, \rho \cdot g_j(x^{t+1}) + u_j^t\}) \cdot \nabla g_j(x^{t+1}) = 0. \quad (1.37)$$

Esta ecuación nos indica que si x^{t+1} es factible y $\max\{0, \rho \cdot g_j(x^{t+1}) + u_j\} \cdot g_j(x^{t+1}) = 0$ con $j = 1, \dots, m$, tenemos que x^{t+1} es un punto KKT y sus multiplicadores son $\rho \cdot h_j(x^{t+1}) + v_j^t$ con $j = 1, \dots, l$ y $\max\{0, \rho \cdot g_j(x^{t+1}) + u_j\}$ con $j = 1, \dots, m$. Por lo tanto parece lógico que en cada iteración si la solución encontrada no es factible o los u^t no cumplen la condición de $u^t \cdot g(x^t) = 0$, hagamos que x^{t+1} sea la solución de 1.36, $u_j^{t+1} = \max\{0, \rho \cdot g_j(x^{t+1}) + u_j^t\}$ con $j = 1, \dots, m$ y $v_j^{t+1} = \rho \cdot h_j(x^{t+1}) + v_j^t$ con $j = 1, \dots, l$. Esta actualización también se puede ver como un movimiento de paso ρ en la dirección del gradiente de la función objetivo del dual del problema original, ya que como vimos en anteriormente si se verifican las hipótesis del Teorema 1.14 el gradiente de la función objetivo del dual eran las funciones g y h . Por lo tanto cuando se verifican las hipótesis de 1.14 lo que estamos haciendo es movernos en la dirección de máximo ascenso de la función dual, esto tiene sentido ya que en el caso convexo vimos que los multiplicadores de lagrange eran la solución del dual que era un problema de maximizar.

Por ahora vimos como construir el algoritmo, pero no explicamos si ρ debe ser fijo o si por el contrario debe ser dinámico y en caso de que sea dinámico como se actualizaría. El ρ será dinámico, pero al contrario que en el método de penalización no será necesario actualizarlo en cada iteración. En este algoritmo solo actualizaremos ρ después de iteraciones en las que no se mejore en la factibilidad del problema, para ello introduciremos unas funciones auxiliares que midan el grado de infactibilidad. En el caso de restricciones de igualdad basta con usar la función $\|h(x)\|$, pero en el caso de las restricciones de desigualdad también se tiene que cumplir la condición de que $u_i \cdot g_i(x) = 0$ para $i = 1, \dots, m$. Entonces la función que buscamos debe ser cero únicamente cuando $g_i = 0$ o cuando $g_i(x) < 0$ y $u_i = 0$. Una función que verifique las propiedades buscadas para los casos en los que trabajemos con restricciones de desigualdad, es $V_i(x) = \max\{g_i(x), -\frac{u_i}{\rho}\}$. Lo que haremos para actualizar ρ será comprobar si $\max\{\|V(x^{t+1})\|, \|h(x^{t+1})\|\} > \delta \cdot \max\{\|V(x^t)\|, \|h(x^t)\|\}$, siendo δ una constante entre 0 y 1, y en ese caso multiplicar el ρ actual por $\gamma > 1$.

Hemos explicado los pasos que sigue el algoritmo pero para el buen funcionamiento del mismo es necesario que u y v estén acotados. Vimos que en las hipótesis del Teorema 1.21 la convergencia se tenía para un ρ finito, pero cuando no se cumplen puede ser necesario que ρ tienda a infinito y domine a u y v , por lo tanto se hace necesario acotar las sucesiones de u y v . El problema es que valor se le debe dar a estas cotas, en principio bastaría con que fuera mayor que el multiplicador de lagrange más grande en valor absoluto, el problema es que no se conoce el valor de los multiplicadores.

En resumen, estos son los pasos del algoritmo:

1. Inicializar el valor de $\epsilon > 0$, un ρ inicial mayor que cero, un valor de $\delta \in (0, 1)$ y un valor de $\gamma > 1$. Elegir valores iniciales para x , u y v . También se debe fijar las cotas de los valores de los multiplicadores.
2. Fijar x^{t+1} a la solución de $\min_x f(x) + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^l \left(h_j(x) + \frac{v_j^t}{\rho} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \left(\max\{0, g_j(x) + \frac{u_j^t}{\rho}\} \right)^2$.
3. actualizar los parámetros:
 - Si $\max\{\|V(x^{t+1})\|, \|h(x^{t+1})\|\} > \delta \cdot \max\{\|V(x^t)\|, \|h(x^t)\|\}$, $\rho^{t+1} = \gamma \cdot \rho^t$. En caso contrario $\rho^{t+1} = \rho^t$.
 - $u_j^{t+1} = \min\{u^{\max}, \max\{0, \rho^t \cdot g_j(x^{t+1}) + u_j^t\}\}$ con $j = 1, \dots, m$.
 - Si $\rho \cdot h_j(x^{t+1}) + v_j^t \geq 0$, $v_j^{t+1} = \min\{v^{\max}, \rho^t \cdot h_j(x^{t+1}) + v_j^t\}$. En otro caso $v_j^{t+1} = \max\{v^{\min}, \rho^t \cdot h_j(x^{t+1}) + v_j^t\}$.
4. Comprobamos las siguientes condiciones:

- Condición de factibilidad dual:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^{t+1}) + \sum_{j=1}^l (\rho \cdot h_j(x^{t+1}) + v_j^{t+1}) \cdot \nabla h_j(x^{t+1}) + \\ \sum_{j=1}^m (\max\{0, \rho \cdot g_j(x^{t+1}) + u_j^{t+1}\}) \cdot \nabla g_j(x^{t+1}) < \epsilon. \end{aligned} \quad (1.38)$$

- Condición de holguras complementarias: $\max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{|\min\{-g_i(x^{t+1}), u_i^{t+1}\}|\} < \epsilon$ Esta condición solo se cumple si para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ se tiene que $g_i(x^{t+1}) = 0$ y $u_i^{t+1} \geq 0$ o $g_i(x^{t+1}) < 0$ y $u_i^{t+1} = 0$.
- Factibilidad del problema, se comprueba si la mayor violación de las restricciones es menor que ϵ .

5. En el caso de que no se cumplieran las condiciones del paso 4, volveríamos al paso 2.

Ahora mostraremos las ocho primeras iteraciones de este método para el mismo problema que el Ejemplo 1.17.

Ejemplo 1.23. Recordemos que el problema que queríamos resolver era:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_1, x_2\}} (x_1 \cdot x_2) + x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ -(x_1 + x_2) \leq -2. \end{aligned}$$

En este caso la restricción de que las variables sean mayores que cero, no afecta al problema ya que el óptimo del problema sin restricciones es el $(0, 0)$, por lo tanto por comodidad haremos el lagrangiano aumentado únicamente con la restricción $-(x_1 + x_2) \leq -2$. En cada iteración resolveremos el siguiente subproblema:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_1, x_2\}} (x_1 \cdot x_2) + x_1^2 + x_2^2 + \rho^t \cdot (\max\{0, -x_1 - x_2 + 2 + \frac{u^t}{\rho}\})^2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Para hacer las iteraciones, fijaremos γ a 1,5 y δ a 0,5. Fijar delta a 0,5 quiere decir que únicamente no actualizaremos el valor de ρ cuando en la iteración actual el valor de $\max\{V, h\}$ se reduzca a más de la mitad. En nuestro ejemplo al no tener restricciones de igualdad y al solo usar una restricción en la construcción del lagrangiano aumentado, lo que miraremos es si $\max\{-(x_1 + x_2) + 2, -\frac{u}{\rho}\}$ se reduce a la mitad. En la Tabla 1.2 vemos las nueve primeras iteraciones del método del lagrangiano aumentado, observamos que en la iteración 9 no aumentamos el valor de ρ , ya que la función V redujo su valor un poco más de la mitad en la iteración 8. Cuando explicamos el método, dijimos que la sucesión de u que construimos convergía a los multiplicadores de lagrange, veamos que pasa en este ejemplo. En nuestro caso si (x_1, x_2) son puntos KKT sus multiplicadores de lagrange verificaran que:

$$\begin{aligned} x_2 + 2 \cdot x_1 - u &= 0 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 - u &= 0. \end{aligned}$$

Para el caso $(1, 1)$ estas ecuaciones se verifican para $u = 3$. Si nos fijamos en la Tabla 1.2 vemos como u va aumentando su valor desde cero a valer 2,6 en la iteración 9, por lo tanto parece lógico pensar que acabe convergiendo al valor del multiplicador de lagrange. Es cierto que en las últimas iteraciones el aumento en el valor de u es pequeño, esto se debe a que el valor de g es próximo a 0 y nosotros nos estamos moviendo un paso ρ^t en la dirección de $g(x)$. Por último en la Figura 1.2 se puede ver el comportamiento del método en las primeras nueve iteraciones de forma gráfica.

Iteración	Punto	Valor $f(x)$	ρ	Restricciones	V	u
1	(0,09091, 0,09091)	0,02479	0,15	$(x = 0,09091, y = 0,09091, -(x + y) + 2 = 1,8182)$	1,8182	0
2	(0,1736, 0,1736)	0,09036	0,15	$(x = 0,1736, y = 0,1736, -(x + y) + 2 = 1,6529)$	1,6529	0,2727
3	(0,2814, 0,2814)	0,2375	0,225	$(x = 0,2814, y = 0,2814, -(x + y) + 2 = 1,4373)$	1,4373	0,52066
4	(0,4133, 0,4133)	0,5126	0,3375	$(x = 0,4133, y = 0,4133, -(x + y) + 2 = 1,1733)$	1,1733	0,84405
5	(0,5614, 0,5614)	0,9454	0,50625	$(x = 0,5614, y = 0,5614, -(x + y) + 2 = 0,8772)$	0,8772	1,24
6	(0,7088, 0,7088)	1,5072	0,7594	$(x = 0,7088, y = 0,7088, -(x + y) + 2 = 0,5824)$	0,5824	1,6841
7	(0,8345, 0,8345)	2,08911	1,1391	$(x = 0,8345, y = 0,8345, -(x + y) + 2 = 0,3310)$	0,3310	2,1264
8	(0,9226, 0,9226)	2,5537	1,7086	$(x = 0,9226, y = 0,9226, -(x + y) + 2 = 0,1548)$	0,1548	2,5035
9	(0,9501, 0,9501)	2,70803	1,7086	$(x = 0,9501, y = 0,9501, -(x + y) + 2 = 0,0998)$	0,0998	2,6797

Tabla 1.2: Tabla con las nueve primeras iteraciones del método del lagrangiano aumentado

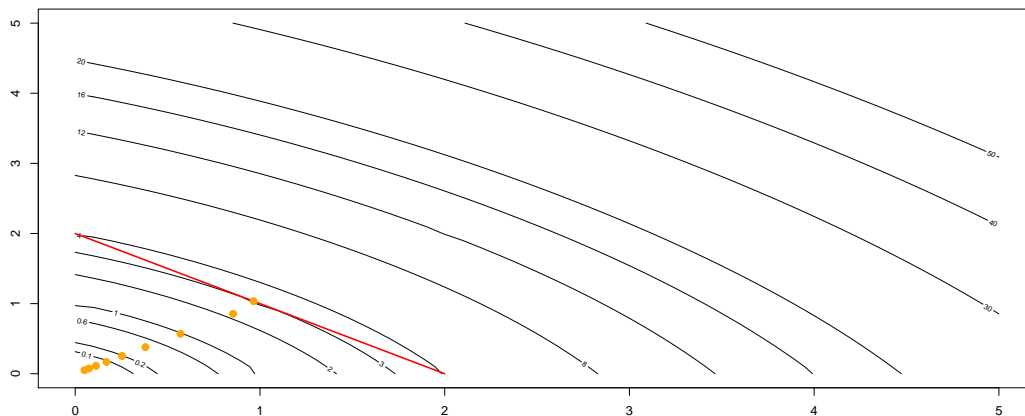


Figura 1.2: Representación gráfica de las nueve primeras iteraciones del método del lagrangiano aumentado

Capítulo 2

Programación estocástica

En el primer capítulo hablamos de como resolver problemas de optimización en el que todos los parámetros eran deterministas, pero en la vida real puede que haya parámetros que no conozcamos con exactitud. En este capítulo hablaremos de como plantear y resolver estos casos. Como guía para la realización de este capítulo usamos [4].

2.1. Planteamiento de los problemas de programación estocástica

En esta sección hablaremos de como plantear un problema de optimización cuando algunos parámetros que afecten a la función objetivo o a las restricciones son una variable aleatoria discreta, de la que conocemos su distribución de probabilidad. Tendremos unos parámetros que denotaremos por el vector ξ que dependerán del valor que tome una variable aleatoria perteneciente a un espacio de probabilidad (Ω, σ, P) , siendo Ω un conjunto finito, σ la sigma álgebra generada por Ω y P la medida de probabilidad. A cada elemento de Ω lo denotaremos por ω y al valor que tome ξ en ω , lo denotaremos por $\xi(\omega)$, a partir de ahora nos referiremos a los elementos de Ω distintos del vacío como escenarios.

Nuestro objetivo en estos problemas es hallar una configuración que minimice el promedio de la función objetivo respecto a los distintos escenarios. Esta configuración normalmente no va ser óptima para todos los escenarios. Para el planteamiento de estos problemas tendremos que distinguir entre las decisiones que tomamos cuando no conocemos el valor de las variables aleatorias y las decisiones que tomamos una vez que conocemos el valor de las variables aleatorias. Las variables asociadas a las decisiones que tomemos antes de saber que valor toman las variables aleatorias se denominan variables de primera etapa y deben valer lo mismo en todos los escenarios, las variables asociadas a las decisiones que se toman una vez conocido el valor de las variables aleatorias se denominan variables de segunda etapa y su valor puede depender del escenario. Las variables de primera etapa las denotaremos por x y a las de segunda etapa por $y(\omega)$.

Ahora para hacernos una idea de con que clase de problemas vamos a trabajar durante este capítulo, presentaremos un ejemplo sencillo de un problema de programación estocástica, sacado de [4].

Ejemplo 2.1. *Consideramos un granjero que tiene que decidir que planta en 500 hectáreas de terreno. Puede plantar maíz, trigo o remolacha. Al menos necesita 200 toneladas de maíz y 240 de trigo. Si no obtiene esa cantidad plantando, puede comprarlo una vez recoja la cosecha. El precio de compra del maíz es 238 dolares por tonelada y el del trigo 210 por tonelada. El precio de venta del maíz 150 dolares por tonelada y el del trigo es 170 dolares por tonelada. Las primeras 6000 toneladas que produzca de remolacha se venderán a 36 dolares la tonelada, el resto se venderá a 10. Sobre el rendimiento que le*

va producir el terreno sabe el rendimiento medio de cada cultivo, pero puede suceder que el rendimiento de un año este un 20% por encima de la media, en la media o un 20% por debajo con la misma probabilidad cada suceso. El rendimiento medio del trigo es 2,5 toneladas por hectárea, el del maíz es 3 toneladas por hectárea y el de la remolacha es 20 toneladas por hectárea. Además también sabe que el coste de plantar trigo es de 150 dolares por hectárea, el del maíz 230 dolares por hectárea y el de la remolacha 260.

En este ejemplo la decisión que toma antes de saber cual va ser el rendimiento, es cuantas hectáreas planta de cada cultivo por lo tanto las variables de primera etapa son:

- x_1 cantidad de maíz plantado.
- x_2 cantidad de trigo plantado.
- x_3 cantidad de remolacha plantada.

Las variables de segunda etapa son la cantidad que compra de maíz y trigo, y la cantidad que vende de cada cultivo. Por lo tanto tenemos el siguiente conjunto de variables de segunda etapa:

- $y_1(\omega)$ cantidad de maíz comprado.
- $y_2(\omega)$ cantidad de trigo comprado.
- $y_3(\omega)$ cantidad de maíz vendido.
- $y_4(\omega)$ cantidad de trigo vendido.
- $y_5(\omega)$ cantidad de remolacha vendida a 36.
- $y_6(\omega)$ cantidad de remolacha vendida a 10.

La incertidumbre en este modelo, está presente ya que no sabemos que rendimiento tendrán los cultivos, solo sabemos que puede tomar tres posibles valores con la misma probabilidad cada uno de ellos. Por lo tanto tendríamos tres escenarios equiprobables que serían: rendimiento por debajo de la media, rendimiento medio y rendimiento por encima de la media. Nos referiremos a estos escenarios como l , m y h respectivamente. La incertidumbre afecta a las restricciones relacionadas con la cantidad mínima de trigo y maíz, y la cantidad de remolacha que se puede vender. Denotamos al rendimiento del maíz por $r_1(\omega)$, al del trigo por $r_2(\omega)$ y al de la remolacha por $r_3(\omega)$, el vector formado por $(r_1(\omega), r_2(\omega), r_3(\omega))$ es lo que en el caso general denotaríamos por $\xi(\omega)$. La forma matemática del conjunto de restricciones afectadas por la incertidumbre en un escenario ω es:

$$\begin{aligned}
 r_1(\omega) \cdot x_1 + y_1(\omega) - y_3(\omega) &\geq 200 \\
 r_2(\omega) \cdot x_2 + y_2(\omega) - y_4(\omega) &\geq 240 \\
 y_5(\omega) + y_6(\omega) &\leq r_3(\omega) \cdot x_3 \\
 y_5(\omega) &\leq 6000
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Este conjunto de restricciones se deben cumplir en cada escenario de probabilidad mayor que cero. Además del conjunto de restricciones 2.1, tenemos otras que no están afectadas por la incertidumbre y que serán iguales en todos los escenarios. Son las que hacen referencia a la cantidad de terreno disponible y al signo de las variables. Este conjunto de restricciones es de la forma:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 &\leq 500 \\
 x, y(\omega) &\geq 0.
 \end{aligned}$$

En la función objetivo entrará el coste de plantar los cultivos y el coste de comprar o vender los distintos productos. El coste de plantar los cultivos solo dependerá de las variables de primera etapa y por lo tanto será el mismo en todos los escenarios. Por otra parte el coste de compra o venta de los distintos productos, involucra a las variables de segunda etapa y por lo tanto dependerá del escenario. La expresión matemática de la función objetivo es:

$$\min_{\{x,y(\omega)\}} -150 \cdot x_1 - 230 \cdot x_2 - 260 \cdot x_3 + \sum_{\omega \in \{l,m,h\}} P(\omega) \cdot (-238 \cdot y_1(\omega) + 170 \cdot y_3(\omega) - 210 \cdot y_2(\omega) + 150 \cdot y_4(\omega) + 36 \cdot y_5(\omega) + 10 \cdot y_6(\omega)). \quad (2.2)$$

En resumen la estructura del problema es:

$$\begin{aligned} & \max_{\{x,y(\omega)\}} -150 \cdot x_1 - 230 \cdot x_2 - 260 \cdot x_3 + \\ & \sum_{\omega \in \{l,m,h\}} P(\omega) \cdot (-238 \cdot y_1(\omega) + 170 \cdot y_3(\omega) - 210 \cdot y_2(\omega) + 150 \cdot y_4(\omega) + 36 \cdot y_5(\omega) + 10 \cdot y_6(\omega)) \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ & y_5(\omega) \leq 6000 \\ & x, y \geq 0 \\ & r_1(\omega) \cdot x_1 + y_1(\omega) - y_3(\omega) \geq 200 \\ & r_2(\omega) \cdot x_2 + y_2(\omega) - y_4(\omega) \geq 240 \\ & y_5(\omega) + y_6(\omega) \leq r_3(\omega) \cdot x_3. \quad (2.3) \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior vimos un caso concreto de como sería un problema lineal con incertidumbre, en general un problema similar al del ejemplo se puede plantear de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min_{x,y(\omega)} z(x, y(\omega)) &= c \cdot x + E(\min q(\omega) \cdot y(\omega)) \\ & A \cdot x \leq b \\ T(\omega) \cdot x + G \cdot y(\omega) &\leq h(\omega) \\ x \geq 0, y(\omega) &\geq 0. \quad (2.4) \end{aligned}$$

En la expresión anterior c es un vector de dimensión el número de variables de primera etapa, b es un vector de dimensión el número de restricciones en las que no aparecen las variables de segunda etapa ni hay incertidumbre, A es una matriz cuyo número de filas coincide con la dimensión de b y su número de columnas con la dimensión de c . Por otra parte para cada escenario ω : $q(\omega)$ es un vector de dimensión el número de variables de segunda etapa, $h(\omega)$ es un vector de dimensión el número de restricciones donde aparecen variables de segunda etapa o hay incertidumbre, $T(\omega)$ es una matriz cuyo número de filas coincide con la dimensión de $h(\omega)$ y su número de columnas con la dimensión de $q(\omega)$. Finalmente G es una matriz que no depende del escenario y que tiene tantas filas como la dimensión de $h(\omega)$ y tantas columnas como la dimensión de $q(\omega)$. En el Ejemplo 2.1 el vector q sería los precios de compra y venta de cada producto y no dependería del escenario, tampoco dependen del escenario el lado derecho de las restricciones (2.1) que sería el vector h . En este mismo ejemplo la matriz $T(\omega)$ tiene cuatro filas y tres columnas, la primera hace referencia a la restricción de cantidad de remolacha que se vende a 36 y es una fila de ceros ya que las variables de primera etapa no intervienen en esta restricción, las tres filas siguientes son los vectores $(r_1(\omega), 0, 0)$, $(r_2(\omega), 0, 0)$, $(-r_3(\omega), 0, 0)$. La matriz g hace referencia a los coeficientes de las variables de segunda etapa en las restricciones en las que aparecen, en el ejemplo que venimos usando esta matriz sería una matriz formada por las siguientes filas: $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $(1, 0, -1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, -1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, 1)$. El vector c son los costes de plantar cada cultivo y A es la matriz 1×3 cuyas componentes son 1.

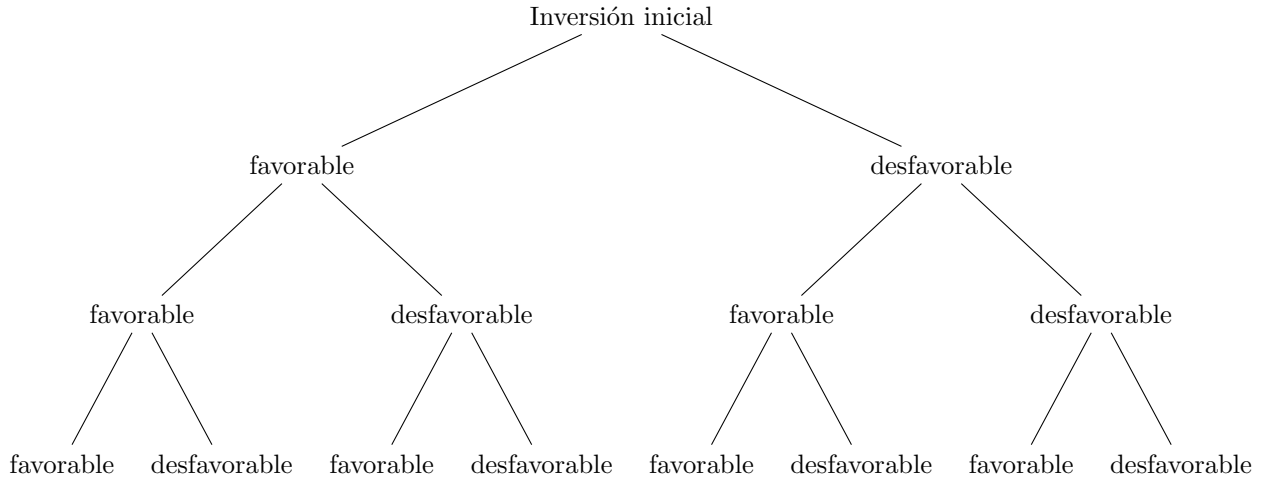


Figura 2.1: Árbol de escenarios del problema del ejemplo 2.2, al tener cada rama probabilidad $\frac{1}{2}$ se omitió esta información en la figura.

Hasta ahora vimos como se modela un problema de programación lineal con incertidumbre en dos etapas, pero pueden aparecer casos donde haya más de dos etapas. Por ejemplo cuando hacemos inversiones a largo plazo, es lógico que después de un cierto tiempo podamos reinvertir lo que tengamos hasta ese momento. En estos problemas además de los parámetros comentados en el caso de dos etapas, tendremos un parámetro T que indica el número de etapas. Ahora los escenarios vendrán definidos por las realizaciones de un vector aleatorio $(\omega_1, \dots, \omega_{T-1})$ cuyas componentes pertenecerán a un espacio de probabilidad (Ω, σ, P) , siendo Ω finito y σ la sigma álgebra generada por Ω . La principal diferencia es que ahora tendremos que diferenciar las variables según la etapa y las variables de la etapa i podrán tener un valor distinto para cada realización del vector aleatorio $(\omega_1, \dots, \omega_{i-1})$. Ahora mostraremos un ejemplo de un problema multietapa sacado de [4]:

Ejemplo 2.2. Consideremos que queremos realizar una inversión a 15 años y que cada 5 podemos reinvertir lo que llevemos ganado. Podemos invertir en bonos o reservas. Sabemos las ganancias medias de cada activo en un escenario favorable y otro desfavorable, ambos tienen la misma probabilidad. Sabemos que lo que va suceder en los 5 próximos años va ser independiente de lo sucedido en el presente. Nuestro objetivo es haciendo una inversión inicial de 55000, llegar a 80000. Consideramos que no llegar al objetivo, tiene una penalización de 4 por cada unidad que nos quedemos por debajo, frente a un beneficio de 1 por cada unidad que superemos nuestro objetivo. El beneficio generado por los bonos en el escenario favorable es de 1,14 mientras que en el desfavorable es de 1,12. El beneficio generado por las reservas es 1,25 en el favorable y de 1,06 en el desfavorable.

En este caso el problema es de 4 etapas y por lo tanto los escenarios vendrían definidos por las realizaciones de un vector aleatorio $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ donde cada variable aleatoria puede tomar dos valores, que denotaremos por f de favorable y d de desfavorable, entonces tendremos 8 escenarios. Por otra parte sabemos que la probabilidad de un escenario será $P(\omega_1) \cdot P(\omega_2) \cdot P(\omega_3)$, por lo tanto sabemos que son equiprobables. Gráficamente el conjunto de escenarios de este problema se puede representar mediante el árbol de la Figura 2.1.

Respecto a las variables tendremos las variables de invertir en los dos activos en las etapas 1, 2, 3 y el dinero ganado o perdido una vez finalizada la etapa 3. Estas variables las denotaremos por $x(i, j, \omega_1, \dots, \omega_{j-1})$, donde i puede tomar los valores 1 y 2, 1 para bonos y 2 para reservas, j indica la etapa de la variable y ω_k a que variables aleatorias está condicionado su valor. Las variables de primera etapa tendrían que valer lo mismo en cada escenario, pero las de segunda etapa podrían tomar un valor

distinto según lo que hubiera ocurrido en la primera etapa y las de tercera etapa según lo ocurrido en la etapa uno y dos. Por último las variables de cuarta etapa son el dinero ganado por encima de 80000 y el dinero obtenido por debajo de 80000, las denotaremos por $y_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ y $y_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

La incertidumbre afecta a los beneficios de las inversiones en cada etapa y dependen unicamente de lo ocurrido en el pasado. Al beneficio de cada inversión en la etapa j lo denotaremos por $\xi(i, \omega_1, \dots, \omega_{j-1})$. Las variables de las etapas $j = 2, 3$ para cada realización de $(\omega_1, \dots, \omega_{j-1})$ deben cumplir la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1,2} \xi(i, j-1, \omega_1, \dots, \omega_{j-1}) \cdot x(i, j-1, \omega_1, \dots, \omega_{j-1}) + \sum_{i=1,2} -x(i, j, \omega_1, \dots, \omega_{j-1}) = 0. \quad (2.5)$$

En esta restricción i indicaría el activo, j la etapa y ω_k las variables aleatorias de las que depende. Lo que estamos pidiendo con esta restricción es que en las etapas intermedias se reinvierta todo lo que se lleva ganado. Las variables de última etapa deben verificar la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1,2} \xi(i, 4, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \cdot x(i, 3, \omega_1, \omega_2) - y_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + y_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 80000. \quad (2.6)$$

En esta restricción la notación es la misma que en la (2.5). Esta restricción sumada a la de no negatividad de las variables nos hace que las variables de última etapa solo puedan tomar dos valores. Cuando estemos por encima del objetivo $y_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ tomara las unidades que estemos por encima del objetivo mientras que $y_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ valdrá 0. En el caso contrario $y_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ valdrá 0 y $y_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ el valor de unidades que estamos por debajo del objetivo. Por último a las variables de primera etapa se les pide que verifiquen la siguiente ecuación:

$$x(1, 1) + x(2, 1) = 55000. \quad (2.7)$$

En esta restricción, estamos pidiendo que invirtamos todo lo que tenemos inicialmente.

La función objetivo de este problema es:

$$\sum_{\omega_1 \in \{d, f\}} \sum_{\omega_2 \in \{d, f\}} \sum_{\omega_3 \in \{d, f\}} P(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \cdot (y_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - 4 \cdot y_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)). \quad (2.8)$$

Esta función objetivo depende de las variables de todas las etapas ya que las variables de última etapa dependen implícitamente de las variables de tercera etapa por la expresión (2.6), y las variables de las etapas intermedias dependen implícitamente de las variables de la etapa anterior por la expresión (2.5).

En resumen la estructura del problema es:

$$\begin{aligned} \max_{x, y} \quad & \sum_{\omega_1 \in \{d, f\}} \sum_{\omega_2 \in \{d, f\}} \sum_{\omega_3 \in \{d, f\}} P(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \cdot (y_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - 4 \cdot y_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)) \\ & \sum_{i=1,2} \xi(i, 2, \omega_1) \cdot x(i, 1) + \sum_{i=1,2} -x(i, 2, \omega_1) = 0 \\ & \sum_{i=1,2} \xi(i, 3, \omega_1, \omega_2) \cdot x(i, 2, \omega_1) + \sum_{i=1,2} -x(i, 3, \omega_1, \omega_2) = 0 \\ & \sum_{i=1,2} \xi(i, 4, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \cdot x(i, 3, \omega_1, \omega_2) - y_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + y_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 80000 \end{aligned}$$

$$x(1, 1) + x(2, 1) = 55000$$

$$x(i, 1), x(i, 2, \omega_1), x(i, 3, \omega_1, \omega_2), y_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3), y_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \geq 0 \quad i = 1, 2, \quad \omega_k \in \{f, d\} \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

- En la etapa 2 tendríamos que considerar las variables de invertir en cada activo condicionado a lo que pudo ocurrir en la etapa uno, es decir tendríamos que considerar las siguientes cuatro variables $x(1, 2, f)$, $x(1, 2, d)$, $x(2, 2, f)$, $x(2, 2, d)$.
- En la etapa 3 tendríamos que considerar las variables de invertir en cada activo condicionado a lo que pudo ocurrir en la etapa uno y dos, es decir tendríamos que considerar las siguientes ocho variables $x(1, 2, f, d)$, $x(1, 2, d, f)$, $x(1, 2, f, f)$, $x(1, 2, d, d)$, $x(2, 2, f, d)$, $x(2, 2, d, f)$, $x(2, 2, f, f)$, $x(2, 2, d, d)$.
- Respecto a las variables de la etapa 4 tendríamos que considerar 16 variables, 8 serían dinero conseguido por encima de 80000 en los distintos escenarios y las otras 8 serían dinero conseguido por debajo de 80000 en los distintos escenarios.

En resumen, si a las variables definidas anteriormente, le añadimos las de primera etapa, tenemos que el determinista equivalente del Ejemplo 2.2 tendría 30 variables. Respecto a las restricciones tendríamos que considerar el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 2, d) \cdot x(i, 1) + \sum_{i=1,2} -x(i, 2, d) &= 0 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 2, f) \cdot x(i, 1) + \sum_{i=1,2} -x(i, 2, f) &= 0 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 3, d, d) \cdot x(i, 2, d) + \sum_{i=1,2} -x(i, 3, d, d) &= 0 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 3, d, f) \cdot x(i, 2, d) + \sum_{i=1,2} -x(i, 3, d, f) &= 0 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 3, f, f) \cdot x(i, 2, f) + \sum_{i=1,2} -x(i, 3, f, f) &= 0 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 3, f, d) \cdot x(i, 2, f) + \sum_{i=1,2} -x(i, 3, f, d) &= 0 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 4, f, f, f) \cdot x(i, 3, f, f) - y_1(f, f, f) + y_2(f, f, f) &= 80000 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 4, f, f, d) \cdot x(i, 3, f, f) - y_1(f, f, d) + y_2(f, f, d) &= 80000 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 4, f, d, d) \cdot x(i, 3, f, d) - y_1(f, d, d) + y_2(f, d, d) &= 80000 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 4, d, d, d) \cdot x(i, 3, d, d) - y_1(d, d, d) + y_2(d, d, d) &= 80000 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 4, d, d, f) \cdot x(i, 3, d, d) - y_1(d, d, f) + y_2(d, d, f) &= 80000 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 4, d, f, f) \cdot x(i, 3, d, f) - y_1(d, f, f) + y_2(d, f, f) &= 80000 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 4, d, f, d) \cdot x(i, 3, d, f) - y_1(d, f, d) + y_2(d, f, d) &= 80000 \\
 \sum_{i=1,2} \xi(i, 4, f, d, f) \cdot x(i, 3, d, f) - y_1(f, d, f) + y_2(f, d, f) &= 80000 \\
 x(1, 1) + x(2, 1) &= 55000.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

En definitiva el determinista equivalente del Ejemplo 2.2 es un problema de 30 variables y 15 restricciones, la función objetivo sería la misma que en el problema original. En este caso, para resolverlo,

podríamos hacer uso del determinista equivalente, pero para problemas más complejos el número de variables o restricciones del determinista equivalente puede ser demasiado elevado como para que sea factible resolverlo. En la tercera sección de este capítulo veremos algoritmos basados en el lagrangiano aumentado, creados específicamente para estos problemas y que nos permitirán resolverlos incluso en los casos en los que no sea factible usar el determinista equivalente.

Un concepto importante a la hora de modelizar estos problemas es el de recurso completo y el de relativamente completo. Diremos que un problema tiene recurso relativamente completo, si verifica que para una configuración factible de las variables que no sean de última etapa, existe una configuración factible de las variables de última etapa. Diremos que un problema tiene recurso completo cuando para cualquier configuración de las variables que no sean de última etapa existe, una configuración de las variables de última etapa factibles. Los problemas con los que vamos a trabajar en este trabajo son de recurso completo, lo cual va ser de gran utilidad a la hora de calcular cotas para la solución.

Una vez que hemos explicado a que clases de problemas nos enfrentamos, pasaremos a explicar procedimientos para encontrar cotas de la solución.

2.2. Cotas del óptimo en problemas de programación con incertidumbre

Cuando hablemos de los algoritmos específicos para estos problemas veremos que igual que en el caso con incertidumbre solo bajo ciertas hipótesis vamos tener asegurada la convergencia al óptimo, por lo tanto se hace necesario saber entre que valores se puede mover.

La primera cota que vamos a definir es el wait-and-see, este valor sería el que obtendríamos si supiéramos que escenario va suceder. Lo que haremos para calcularlo será resolver el problema de optimización asociado a cada escenario de forma independiente y luego calcular la media de la función objetivo evaluada en las soluciones obtenidas. Para obtener este valor en el Ejemplo 2.1 tendremos que resolver los siguientes problemas:

Ejemplo 2.3. *Al ser un problema de tres escenarios, tendremos que resolver tres problemas, uno por escenario. En el escenario donde el rendimiento es el esperado el problema que tenemos que resolver es:*

$$\begin{aligned}
 & \max_{\{x,y(m)\}} -150 \cdot x_{1,m} - 230 \cdot x_{2,m} - 260 \cdot x_{3,m} + \\
 & -238 \cdot y_1(m) + 170 \cdot y_3(m) - 210 \cdot y_2(m) + 150 \cdot y_4(m) + 36 \cdot y_5(m) + 10 \cdot y_6(m) \\
 & \qquad \qquad \qquad x_{1,m} + x_{2,m} + x_{3,m} \leq 500 \\
 & \qquad \qquad \qquad y_5(m) \leq 6000 \\
 & \qquad \qquad \qquad x, y \geq 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad r_1(m) \cdot x_{1,m} + y_1(m) - y_3(m) \geq 200 \\
 & \qquad \qquad \qquad r_2(m) \cdot x_{2,m} + y_2(m) - y_4(m) \geq 240 \\
 & \qquad \qquad \qquad y_5(m) + y_6(m) \leq r_3(m) \cdot x_3. \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Para el escenario donde el rendimiento es inferior a la media:

$$\begin{aligned}
& \underset{\{x,y(l)\}}{\text{máx}} -150 \cdot x_{1,l} - 230 \cdot x_{2,l} - 260 \cdot x_{3,l} + \\
& -238 \cdot y_1(l) + 170 \cdot y_3(l) - 210 \cdot y_2(l) + 150 \cdot y_4(l) + 36 \cdot y_5(l) + 10 \cdot y_6(l) \\
& \qquad \qquad \qquad x_{1,l} + x_{2,l} + x_{3,l} \leq 500 \\
& \qquad \qquad \qquad y_5(l) \leq 6000 \\
& \qquad \qquad \qquad x, y \geq 0 \\
& r_1(l) \cdot x_{1,l} + y_1(l) - y_3(l) \geq 200 \\
& r_2(l) \cdot x_{2,l} + y_2(l) - y_4(l) \geq 240 \\
& y_5(l) + y_6(l) \leq r_3(l) \cdot x_{3,l}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Para el escenario donde el rendimiento es superior a la media, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned}
& \underset{\{x,y(h)\}}{\text{máx}} -150 \cdot x_{1,h} - 230 \cdot x_{2,h} - 260 \cdot x_{3,h} + \\
& -238 \cdot y_1(h) + 170 \cdot y_3(h) - 210 \cdot y_2(h) + 150 \cdot y_4(h) + 36 \cdot y_5(h) + 10 \cdot y_6(h) \\
& \qquad \qquad \qquad x_{1,h} + x_{2,h} + x_{3,h} \leq 500 \\
& \qquad \qquad \qquad y_5(h) \leq 6000 \\
& \qquad \qquad \qquad x, y \geq 0 \\
& r_1(h) \cdot x_{1,h} + y_1(h) - y_3(h) \geq 200 \\
& r_2(h) \cdot x_{2,h} + y_2(h) - y_4(h) \geq 240 \\
& y_5(h) + y_6(h) \leq r_3(h) \cdot x_{3,h}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Una vez resueltos estos tres problemas, para obtener el valor del wait-and-see bastaría con calcular la media ponderada de los tres óptimos.

El procedimiento de cálculo del wait-and-see se puede ver como una relajación del problema con incertidumbre original. En el problema original exigimos que las variables de primera etapa tengan el mismo valor en todos los escenarios, mientras que cuando calculamos el wait-and-see permitimos que tomen valores distintos dependiendo del escenario. Este valor es evidente que va ser una solución mejor o igual escenario a escenario que la que obtenemos resolviendo el problema con incertidumbre. La diferencia entre el valor del wait-and-see y la solución que obtenemos resolviendo el problema con incertidumbre es lo que se llama el valor esperado de información perfecta que denotaremos por EVPI. Podemos interpretar esta diferencia como lo que ganaríamos si tuviéramos una información segura de que escenario va ocurrir.

La otra cota que estudiaremos es el EEV. Esta cota la explicaremos para el caso de dos etapas. En el caso de dos etapas, primero se fijan los parámetros que dependen de la incertidumbre a la media de esos parámetros, una vez hecho esto se resuelve el problema de optimización sin incertidumbre resultante. La solución del problema anterior la usamos para fijar el valor de las variables de primera etapa, con ese valor fijo optimizamos la función objetivo, con el valor de los parámetros dependiendo de la incertidumbre y tomando como variables las de segunda etapa. Para calcular esta cota en el problema del Ejemplo 2.1 tendríamos que hacer los siguientes cálculos:

Ejemplo 2.4. *Fijaremos el rendimiento de cada cultivo a la media de los tres valores posibles y lo*

denotaremos por \bar{r} . El problema que resolveremos será:

$$\begin{aligned}
& \underset{\{x,y\}}{\text{máx}} -150 \cdot x_1 - 230 \cdot x_2 - 260 \cdot x_3 + \\
& -238 \cdot y_1 + 170 \cdot y_3 - 210 \cdot y_2 + 150 \cdot y_4 + 36 \cdot y_5 + 10 \cdot y_6 \\
& \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
& \quad y_5 \leq 6000 \\
& \quad x, y \geq 0 \\
& \quad \bar{r}_1 \cdot x_1 + y_1 - y_3 \geq 200 \\
& \quad \bar{r}_2 \cdot x_2 + y_2 - y_4 \geq 240 \\
& \quad y_5 + y_6 \leq \bar{r}_3 \cdot x_3.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Una vez resuelto este problema, fijamos las variables de primera etapa a los valores que tienen en la solución, a partir de ahora las denotaremos por \bar{x} . Para acabar de calcular el EEV tenemos que resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
& \underset{\{y\}}{\text{máx}} -150 \cdot \bar{x}_1 - 230 \cdot \bar{x}_2 - 260 \cdot \bar{x}_3 + \\
& \sum_{\omega \in \{l,m,h\}} P(\omega) \cdot (-238 \cdot y_1(\omega) + 170 \cdot y_3(\omega) - 210 \cdot y_2(\omega) + 150 \cdot y_4(\omega) + 36 \cdot y_5(\omega) + 10 \cdot y_6(\omega)) \\
& \quad y_5(h) \leq 6000 \\
& \quad y_5(m) \leq 6000 \\
& \quad y_5(l) \leq 6000 \\
& \quad y \geq 0 \\
& \quad r_1(h) \cdot \bar{x}_1 + y_1(h) - y_3(h) \geq 200 \\
& \quad r_2(h) \cdot \bar{x}_2 + y_2(h) - y_4(h) \geq 240 \\
& \quad y_5(h) + y_6(h) \leq r_3(h) \cdot \bar{x}_3 \\
& \quad r_1(m) \cdot \bar{x}_1 + y_1(m) - y_3(m) \geq 200 \\
& \quad r_2(m) \cdot \bar{x}_2 + y_2(m) - y_4(m) \geq 240 \\
& \quad y_5(m) + y_6(m) \leq r_3(m) \cdot \bar{x}_3 \\
& \quad r_1(l) \cdot \bar{x}_1 + y_1(l) - y_3(l) \geq 200 \\
& \quad r_2(l) \cdot \bar{x}_2 + y_2(l) - y_4(l) \geq 240 \\
& \quad y_5(l) + y_6(l) \leq r_3(l) \cdot \bar{x}_3.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

En los casos donde tengamos recurso completo, podremos calcular este valor y va ser una solución factible del problema de partida y por lo tanto su valor va ser peor o igual que el que obtendremos cuando resolvamos el problema original. La diferencia entre esta cota y la solución es lo que denominamos valor de la solución estocástica, esta diferencia la denotamos por VSS. Este valor lo que mide es cuanto nos costaría igualar los parámetros a su media y resolver un problema sin incertidumbre. En la referencia [4] se puede encontrar más información sobre estas cotas.

2.3. Algoritmos basados en el lagrangiano aumentado, para problemas de programación estocástica

Como ya vimos en el capítulo anterior, para explicar el lagrangiano aumentado era necesario introducir conceptos de dualidad. Por este motivo para explicar, los algoritmos basados en el lagrangiano aumentado, empezaremos explicando como va ser el dual de un problema de programación estocástica.

Empezaremos recordando como era la expresión de un problema estocástico no lineal. Esta expresión la explicamos con detalle en la primera sección de este capítulo en (2.10) y venía dada por:

$$\begin{aligned} \min_{x, y(\omega)} f^1(x) + E_\omega(\min f^2(x, y(\omega), \omega)) \\ g_i^1(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_1 \\ g_i^2(x, y(\omega), \omega) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

El dual del problema anterior es:

$$\begin{aligned} \max_{\rho(\omega)} \theta(\rho) = \inf f^1(x) + E_\omega(f^2(x, y(\omega), \omega)) + E_\omega\left(\sum_{i=1, \dots, m_2} \rho_i(\omega) \cdot g_i^2(x, y(\omega), \omega)\right) \\ g_i^1(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_1 \\ \rho_i(\omega) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En la expresión anterior $\rho_i(\omega)$ representa las variables del dual. La dependencia de ω de las variables del dual se debe a que las restricciones g_i^2 dependen de ω y pueden ser distintas en cada escenario y por lo tanto la variable dual asociada a estas restricciones también cambiaría por escenario. En este caso, como las restricciones de las variables de segunda dependen del escenario, al subirlas a la función objetivo, se suben ponderadas por la probabilidad del escenario. Así plantearíamos el dual de un problema de programación estocástica de dos etapas, en el caso multietapa se suben todas las restricciones salvo las que unicamente afectan a las variables de primera etapa. Recordemos que la expresión de un problema estocástico multietapa, que presentamos en (2.11), venía dada por:

$$\begin{aligned} \min_{x, y(\omega)} f^1(x^1) + \sum_{t=2, \dots, T-1} E_{\omega^{t-1}}(\min f^t(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \omega^{t-1})) + \\ E_{\omega^{T-1}}(\min f^T(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \dots, x^{T-1}(\omega^{T-2}), y(\omega^{T-1}), \omega^{T-1})) \\ g_i^1(x^1) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_1 \\ g_i^2(x^1, x^2(\omega^1), \omega^1) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_2 \\ g_i^3(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \omega^2) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_3 \\ \dots \\ g_i^t(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \omega^{t-1}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_t \\ \dots \\ g_i^T(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \dots, x^{T-1}(\omega^{T-2}), y(\omega^{T-1}), \omega^{T-1}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_T. \end{aligned} \quad (2.20)$$

En esta expresión las restricciones $g_i(x)^t$ dependen de lo ocurrido en las etapas anteriores, por lo tanto se subirán ponderadas por la probabilidad de las distintas realizaciones del vector ω^{t-1} . Además al depender las restricciones de la etapa t del vector ω^{t-1} , será necesario considerar tantas variables del dual como posibles realizaciones tenga ese vector aleatorio. En resumen el dual de un problema multietapa puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \max_{\rho(\omega)} \theta(\rho) = \min_{x, y(\omega)} f^1(x^1) + \sum_{t=2, \dots, T-1} E_{\omega^{t-1}}(\min f^t(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \omega^{t-1})) + \\ E_{\omega^{T-1}}(\min f^T(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \dots, x^{T-1}(\omega^{T-2}), y(\omega^{T-1}), \omega^{T-1})) \\ + \sum_{t=1, \dots, T-1} E_{\omega^t} \left(\sum_{i=1, \dots, m_t} \rho_i^t(\omega^{t-1}) \cdot g_i^t(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \omega^{t-1}) \right) \\ + E_{\omega^{T-1}} \left(\sum_{i=1, \dots, m_T} \rho_i^T(\omega^{T-1}) \cdot g_i^T(x^1, x^2(\omega^1), x^3(\omega^2), \dots, x^t(\omega^{t-1}), \dots, x^{T-1}(\omega^{T-2}), y(\omega^{T-1}), \omega^{T-1}) \right) \\ g_i^1(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_1. \\ \rho_i^t(\omega^t) \geq 0 \quad t = 1, \dots, T-1, i = 1, \dots, m_t. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Al igual qué en el caso sin incertidumbre, no siempre se va a tener que el óptimo del dual y el primal coincidan. El resultado que nos dice en que casos coinciden en problemas con incertidumbre es:

Teorema 2.5. *Supongamos que un problema primal como el de la expresión (2.18), o el de (2.20), tiene óptimo finito y que todas las funciones son convexas, entonces se tiene que para cualquier configuración factible del primal y cualquier configuración factible del dual, el valor de la función del primal será mayor que el valor de la función objetivo del problema dual. Además el valor en el óptimo del primal coincide con el valor en el óptimo del dual.*

La demostración del teorema anterior puede consultarse en [4] (Teorema 21).

Ahora estamos en condiciones de presentar como sería un método de ascenso del dual, para la resolución de problemas de programación estocástica. Estos métodos están basados en movernos en la dirección del gradiente de la función objetivo del dual. Recordemos que en el primer capítulo, ya vimos que el gradiente de la función objetivo del dual eran las restricciones que se habían subido. En cada iteración de estos métodos para un valor fijo de las variables del dual, actualizamos las variables del primal a la solución de:

$$\begin{aligned} \min_{x, y(\omega)} f^1(x) + E_\omega(f^2(x, y(\omega), \omega)) + E_\omega\left(\sum_{i=1, \dots, m_2} \rho_i(\omega) \cdot g_i^2(x, y(\omega), \omega)\right). \\ g_i^1(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_1. \end{aligned}$$

Una vez actualizadas las variables del primal, actualizamos las variables del dual, moviéndonos un paso óptimo en la dirección del valor $g_i^2(x, y(\omega), \omega)$.

En concreto los pasos de este algoritmo son:

1. Fijamos los vectores $\rho_i^1(\omega)$, con $i = 1, \dots, m_2$ a valores mayores o iguales que cero en cada componente. Estos $\rho_i^1(\omega)$, van ser las variables del dual y para cada restricción que se sube a la función objetivo, van ser un vector de tantas componentes como escenarios. En el caso multietapa, para cada etapa t necesitaremos inicializar m_t vectores, siendo m_t el número de restricciones que hay en esa etapa. El número de componentes de estos vectores, que denotamos por $\rho_i^{1,t}(\omega^{t-1})$, es el número de posibles realizaciones del vector aleatorio ω^{t-1} .
2. Para unos $\rho_i(\omega)^{it}$ fijos, calculamos la solución de:

$$\begin{aligned} \min_{x, y(\omega)} f^1(x) + E_\omega(f^2(x, y(\omega), \omega)) + E_\omega\left(\sum_{i=1, \dots, m_2} \rho_i^{it}(\omega) \cdot g_i^2(x, y(\omega), \omega)\right). \\ g_i^1(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

3. Actualizamos el valor de las variables a la solución obtenida en el paso anterior. Para cada escenario k , calculamos $\hat{\rho}_i^{it,k}$. Este parámetro será 0 si $g_i^2(x, y(k), k) \leq 0$ y $\rho_i(k)^{it} = 0$, en otro caso $\hat{\rho}_i^{it,k} = g_i(x, y(k), k)$. En este paso estamos calculando en que dirección vamos actualizar las componentes de los vectores $\rho_i(\omega)$. Estas direcciones son el gradiente de la función objetivo del dual. El algoritmo se detiene cuando $\hat{\rho}_i^{it,k} = 0$ para todos los escenarios y para todo $i = 1, \dots, m_2$, esto solo ocurre cuando las únicas componentes de los vectores $\rho_i(k)^{it}$ que son mayores que 0 se corresponden con escenarios donde se saturo la restricción i .
4. Fijamos λ a la solución de:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \theta(\rho^{it}(\omega) + \lambda \cdot \hat{\rho}^{it}(\omega)) \\ \lambda \geq 0 \\ \rho^{it}(\omega) + \lambda \cdot \hat{\rho}^{it}(\omega) \geq 0. \quad \forall \omega \in \Omega \end{aligned} \quad (2.23)$$

Resolviendo este problema estamos calculando un paso óptimo en la dirección de $\rho^{it}(\omega)$ que ya vimos que era el gradiente de la función objetivo del dual. La restricción $\rho^{it}(\omega) + \lambda \cdot \hat{\rho}_i(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$ impide que en los casos donde el gradiente es negativo, cojamos pasos que hagan que en la siguiente iteración tengamos unas variables del dual infactibles, es decir menores que cero. En el problema (2.23), λ es un escalar. A pesar de que sería un problema unidimensional, para cada evaluación de la función objetivo necesitaríamos encontrar $(x, y(\omega))$ que minimizasen a 2.22 para $\rho_i(\omega) = \rho_i^{it}(\omega) + \lambda \cdot \hat{\rho}_i^{it}(\omega)$, con lo cual la complejidad de hallar el paso óptimo aumenta.

5. Una vez calculado el paso óptimo, calculamos $\rho_i^{it+1}(\omega) = \rho_i^{it}(\omega) + \lambda_k \cdot \hat{\rho}_i^{it}(\omega)$ y volvemos al paso 2.

El problema de este procedimiento es que los subproblemas que se resuelven en cada iteración son bastante costosos de resolver, por ese motivo aparece el progressive hedging. En este método se buscará un planteamiento alternativo del problema de programación estocástica que permita una descomposición del problema, en subproblemas más sencillos que serán enlazados convenientemente.

2.3.1. Progressive hedging

El primer paso para explicar este método es definir un modelo equivalente a los modelos presentados en la primera sección de este capítulo, pero que al dualizar alguna restricción permita una descomposición que favorezca la resolución de los subproblemas. Para conseguir este objetivo vamos a plantear un problema de programación con incertidumbre, donde las variables que no son de última etapa las definimos para cada escenario y añadimos la restricción en la cual pedimos que estas variables tengan que ser igual a su valor esperado en el conjunto de escenarios. Es decir si tengo una variable de primera etapa y cuatro escenarios equiprobables, crearé las variables x_1, x_2, x_3, x_4 y les pediré que $\sum_{i=1, \dots, 4, i \neq j} \frac{1}{4} x_i = \frac{3}{4} \cdot x_j$ para $j = 1, \dots, 4$. Estas restricciones están exigiendo que las variables de primera etapa tengan que valer lo mismo en todos los escenarios. Con las variables de etapas intermedias la restricción es similar pero tenemos que tener en cuenta que toman distintos valores según lo que paso en las etapas anteriores. Para modelizar la restricción que impide que tomen valores distintos en escenarios con la misma historia hasta la etapa t usamos la siguiente expresión:

$$\frac{\sum_{j=1, \dots, m} \Pi_{k,j}^t \cdot P_j \cdot x_j^t}{\sum_{j=1, \dots, m} \Pi_{k,j}^t \cdot P_j} = x_k^t. \quad (2.24)$$

En la expresión anterior m es el número total de escenarios, k es un escenario concreto, $\Pi_{k,j}^t$ es la componente k, j de una matriz que tiene un uno en esa posición si el escenario j y el k tienen la misma historia hasta la etapa t y 0 en otro caso. Para simplificar notación denotaremos a $\frac{\sum_{j=1, \dots, m} \Pi_{k,j}^t \cdot P_j \cdot x_j^t}{\sum_{j=1, \dots, m} \Pi_{k,j}^t \cdot P_j}$ por \hat{x}_k^t .

En resumen siguiendo este procedimiento tendremos problemas de K escenarios y T etapas de esta forma:

$$\begin{aligned} \min_{x_k^t, y_k} \sum_{k=1, \dots, K} P_k \cdot f^1(x_k^1, k) + \sum_{t=2, \dots, T-1} \sum_{k=1, \dots, K} P_k \cdot f^t(x_k^{t-1}, x_k^t, k) + \sum_{k=1, \dots, K} P_k \cdot f^T(x_k^{T-1}, y_k, k) \\ g_i^1(x_{k,1}) \leq 0 \\ g_i^t(x_k^{t-1}, x_k^t, k) \leq 0 \quad k = 1, \dots, K, i = 1, \dots, m_t, t = 1, \dots, T-1 \\ h_i^1(x_{k,1}) = 0 \\ h_i^t(x_k^{t-1}, x_k^t, k) = 0 \quad k = 1, \dots, K, i = 1, \dots, m_t, t = 1, \dots, T-1 \\ \hat{x}_k^t = x_k^t \quad k = 1, \dots, K \quad t = 1, \dots, T-1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

En el problema anterior la única expresión que liga los distintos escenarios es la última restricción. Partiendo de una solución dada, podemos calcular las distintas medias y subir esa restricción a la

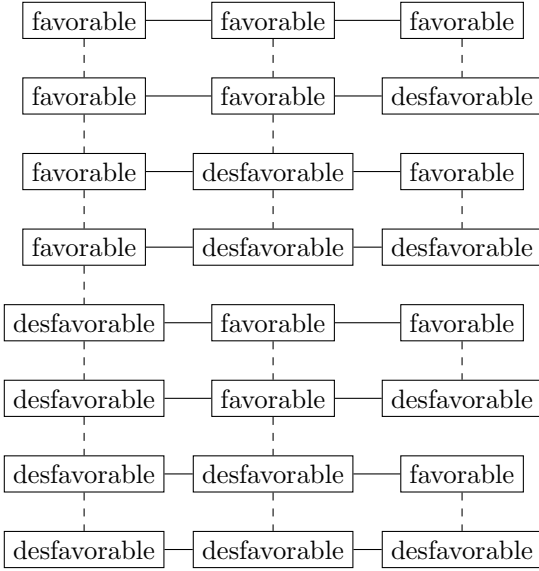


Figura 2.2: Representación esquemática de los escenarios del Ejemplo 2.2. Cada línea representa un escenario y cada caja es una etapa. Las líneas de puntos indican que en esos escenarios a las variables de esa etapa les imponemos una restricción de que valgan lo mismo

función objetivo. Si hacemos esto podremos resolver el problema anterior dividiéndolo en distintos subproblemas para cada escenario. Para un escenario k concreto tendremos que resolver el siguiente subproblema.

$$\begin{aligned}
 \min_{x_k^t, y_k^t} P_k(f(x_k^t, y_k) + \sum_{t=1, \dots, T-1} \rho_k^t \cdot (\hat{x}_k^t - x_k^t)) \\
 g(x_k^t, y_k) \leq 0 \\
 h(x_k^t, y_k) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Lo que haremos en cada iteración del progressive hedging será resolver K subproblemas como el presentado en la expresión anterior y actualizar el valor de las variables x_k^t y y_k al valor de la solución obtenida en esa iteración. El valor de ρ_k^t depende del escenario y la variable, lo que indica es una penalización a alejarnos de valores iguales a la media. Cuanto más alto sea $\rho_k^t \cdot (\hat{x}_k^t - x_k^t)$, más costará alejarse de la media y cuanto más bajo sea, más fácil será que las variables que no sean de última etapa se alejen de la media. Gráficamente se puede pensar que lo que estamos haciendo es transformar un árbol como el de la Figura 2.1 en uno como el de la Figura 2.2, donde cada escenario es independiente y lo único que los liga son los ρ_k^t .

Ahora explicaremos como actualizar ρ en cada iteración. Una vez resueltos los subproblemas de una iteración, cuyas expresiones son (2.26), lo que haremos será actualizar el valor de las variables a la solución y recalculemos la media de las variables que no sean de última etapa. Con estos datos calculamos el ρ de la siguiente iteración como $\rho_k^{t, it+1} = \rho_k^{t, it} + \pi \cdot (x_k^t - \hat{x}_k^t)$, siendo π un parámetro mayor que cero. Esta forma de actualizar la penalización es la misma que usábamos en el lagrangiano aumentado para actualizar v . Cuando explicamos el lagrangiano aumentado ya vimos que esta forma de actualizar la penalización se podía ver como un movimiento de paso π en la dirección del gradiente o subgradiente de la función objetivo del dual resultante de construir el dual con esa restricción. El problema de movernos en esta dirección es que puede tener problemas de convergencia cerca del valor de ρ en el óptimo, para solucionar este problema añadimos el siguiente término a los subproblemas

que resolvemos en cada iteración:

$$r_k \cdot \sum_{t=1, \dots, T-1} \|\hat{x}_k^t - x_k^t\|^2. \quad (2.27)$$

En resumen los subproblemas que vamos a resolver en cada iteración serán de la forma:

$$\begin{aligned} \min_{x_k^t, y_k} P_k(f(x_k^t, y_k)) + \sum_{t=1, \dots, T-1} \rho_k^t \cdot (\hat{x}_k^t - x_k^t) + r_k \|\hat{x}_k^t - x_k^t\|^2 \\ g(x_k^t, y_k) \leq 0 \\ h(x_k^t, y_k) = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Igual que en el caso del lagrangiano aumentado necesitaremos varias condiciones de parada que deben verificarse simultáneamente para acabar el algoritmo. Por un lado necesitamos mirar si en la solución obtenida en esa iteración se verifica que el valor de las variables es igual a la media, esto se puede hacer mirando el cambio en los ρ . Un cambio pequeño en ρ sería debido a que la diferencia entre la variable y la media es pequeña, por lo tanto una condición para mirar si la solución es factible es que la diferencia entre los ρ de dos iteraciones consecutivas sea menor que una tolerancia. Esta condición por si sola no me asegura que haya convergencia al óptimo, ya que las variables pueden cuadrar su valor a la media en una iteración y en la siguiente cambiar el valor de forma coordinada de tal forma que el valor de los ρ no cambie, pero si el de las variables. Por este motivo tenemos que añadir la condición de que la media de las variables que no sean de última etapa cambien menos que una tolerancia entre dos iteraciones consecutivas. Si se verifican a la vez estas dos condiciones, el algoritmo ha convergido.

En resumen los pasos del algoritmo son:

1. Fijamos $\pi > 0$, $r \geq 0$, un ρ inicial y una solución inicial.
2. Siendo K el número de escenarios y k un escenario en concreto, resolvemos K subproblemas de la forma:

$$\begin{aligned} \min_{x_k^t, y_k} P_k(f(x_k^t, y_k)) + \sum_{t=1, \dots, T-1} \rho_k^t \cdot (\hat{x}_k^t - x_k^t) + r_k \cdot \sum_{t=1, \dots, T-1} \|\hat{x}_k^t - x_k^t\|^2 \\ g(x_k^t, y_k) \leq 0 \\ h(x_k^t, y_k) = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

En la expresión anterior t hace referencia a la etapa y T es el número de etapas. \hat{x}_k^t es el valor esperado de la variable x_k^t en los escenarios que tienen la misma historia que el escenario k hasta la etapa t .

3. Actualizamos las variables a la solución de los subproblemas descritos anteriormente. Calculamos $\hat{x}_k^{t, it+1}$, siendo it la iteración actual. Actualizamos ρ mediante la expresión, $\rho_k^{t, it+1} = \rho_k^{t, it} + \pi \cdot (x_k^t - \hat{x}_k^t)$.
4. Si $\rho^{it+1} - \rho^{it} < \epsilon$ y $\hat{x}^{it+1} - \hat{x}^{it} < \epsilon$ el algoritmo termina, en caso contrario volvemos al paso 2.

Una vez descrito el algoritmo, veremos en que casos se tiene asegurada la convergencia del mismo. El teorema que nos dice en que casos podemos asegurar la convergencia es:

Teorema 2.6. *Supongamos que un problema primal como el de la expresión (2.18) tiene óptimo finito y que todas las funciones son convexas, entonces si se escoge $\pi = r$ el progressive hedging llega al óptimo en un número de iteraciones finito.*

La demostración de este teorema puede consultarse en [4].

Ahora veremos como sería la primera iteración del progressive hedging, para el problema 2.2:

Ejemplo 2.7. Para explicar como sería una iteración de este método fijaremos el valor de π y r a 1. Tomaremos como ρ inicial 0. Para facilitar la notación de los subproblemas, denotaremos por $x(i, j, k)$ a la cantidad de dinero invertido en un activo, con $i = 1, 2$ dependiendo del activo en el que inviertas, $j = 1, 2, 3$ dependiendo de la etapa en la que se haga la inversión y $k = 1, \dots, 8$ dependiendo del escenario en el que se hace la inversión. A la cantidad de dinero por la que superamos y la que nos falta para llegar al objetivo, la denotaremos por $y_{1,k}$ y $y_{2,k}$ respectivamente, siendo $k = 1, \dots, 8$ e indicando el escenario. Por último denotaremos al beneficio de cada activo por $\xi(i, j, k)$ con $i = 1, 2$ denotando el activo, $j = 1, 2, 3$ indicaría la etapa y $k = 1, \dots, 8$ indicaría el escenario.

Para presentar los 8 subproblemas que tenemos que resolver en la primera iteración mostraremos el relacionado con el escenario donde el beneficio que obtuvimos de las inversiones siempre fue el más favorable. Este problema es:

$$\begin{aligned}
\max_{x,y} y_{1,1} - 4 \cdot y_{2,1} + \sum_{i=1,2} (x(i, 1, 1) - \hat{x}_{1,1}^0)^2 + \sum_{i=1,2} (x(i, 2, 1) - \hat{x}_{1,2}^0)^2 + \sum_{i=1,2} (x(i, 3, 1) - \hat{x}_{1,3}^0)^2 \\
\sum_{i=1,2} \xi(i, 2, 1) \cdot x(i, 1, 1) + \sum_{i=1,2} -x(i, 2, 1) = 0 \\
\sum_{i=1,2} \xi(i, 3, 1) \cdot x(i, 2, 1) + \sum_{i=1,2} -x(i, 3, 1) = 0 \\
\sum_{i=1,2} \xi(i, 4, 1) \cdot x(i, 3, 1) - y_{1,1} + y_{2,1} = 80000 \\
x(1, 1, 1) + x(2, 1, 1) = 55000 \\
x(i, 1, 1), x(i, 2, 1), x(i, 3, 1), y_{1,1}, y_{2,1} \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

El subproblema del resto de escenarios es muy similar, solo cambian los valores de ξ . Como ρ es cero, lo único que impide que las variables se alejen de la media de la solución inicial la penalización cuadrática, esto muestra que este término además de acelerar la convergencia del método al final del algoritmo, tiene efecto en todas las iteraciones del algoritmo.

Una vez resueltos todos los subproblemas actualizamos el valor de las variables a la solución obtenida y volvemos a calcular el valor de \hat{x} . Si ordenamos los escenarios como aparecen en la Figura 2.2, en la primera etapa tendremos que calcular la media con todos los escenarios. En la etapa dos, sin embargo, tendremos que calcular la media en los escenarios 1, 2, 3, 4 y en los 5, 6, 7, 8. En la tercera etapa tendremos que calcular 4 medias, la de los escenarios 1, 2, la del 3, 4, la del 5, 6 y la del 7, 8. Una vez calculadas las medias. Una vez actualizadas estas medias, actualizaremos el valor de ρ , el valor de ρ en la iteración 2 será $\rho_{k,j} = x(j, k) - \hat{x}_{k,j}^1$.

Capítulo 3

Efecto de los parámetros del algoritmo del progressive hedging

En este capítulo explicaremos los resultados obtenidos en las prácticas asociadas a este Trabajo Fin de Máster que se realizaron en la UMI Repsol-Itmati. Esta Unidad Mixta de Investigación nace de la colaboración entre Repsol y el Instituto Tecnológico de Matemática industrial y tiene como objetivo la resolución matemática de distintos problemas encontrados de forma recurrente en las actividades de Repsol. En concreto el proyecto en el cual se desarrollaron las prácticas asociadas a este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo la aplicación del progressive hedging en problemas con incertidumbre no lineales, relacionados con la toma de decisiones en refinerías. En el marco de este proyecto hay desarrollado un código que implementa el progressive hedging en Python, este código se encuentra en fase de validación. Mi tarea era buscar una forma de calibrar el valor de los parámetros π y r . Para ello lanzamos varias ejecuciones del problema 2.2 contra el código del progressive hedging que se desarrolló en la UMI Repsol-Itmati. Las conclusiones que saquemos para un problema lineal como el 2.2 tal vez no son válidas para problemas no lineales, pero sí que pueden ser un punto de partida para abordar los problemas no lineales. Además la ventaja que nos da usar este problema es que conocemos la solución óptima y es un problema de un tamaño reducido que nos permite observar los resultados de forma más cómoda.

Antes de presentar los resultados, hablaremos más detalladamente de la función de los parámetros π y r en el algoritmo. Está claro que un valor elevado de r permitirá muy poco movimiento a las variables, penalizando que se alejen de la media, mientras que un valor bajo de r hará que cueste cuadrar las variables a la media. Por lo tanto vemos que habrá que mirar como calibrar este valor, ya que un valor muy alto o muy bajo pueden dificultar la convergencia del algoritmo. Respecto a π , este valor indica como de agresivos somos en la actualización de ρ . Cabe destacar que una de las particularidades del código desarrollado en la UMI Repsol-ITMATI es que diferencia entre π y r , cuando la mayor parte de la literatura no lo hace, en concreto en [4] considera que estos valores son iguales. El motivo de diferenciarlos es que realmente su función es totalmente distinta. π representa el paso de la actualización de las variables duales, mientras que r es el término que multiplica a la penalización cuadrática. También hay que destacar que el Teorema 2.6 se tiene para casos donde $\pi = r$, eso no sirve para concluir que tomar π distinto de r vaya a dar lugar a un mal comportamiento, solo nos indica que si consideramos π distinto de r no tendríamos asegurada la convergencia. Recordemos que en casos no convexos, como son muchos problemas reales, ya no tenemos asegurada la convergencia.

Un artículo donde también se habla de que valor darle a estos parámetros es [5], donde Watson y Woodruff proponen una norma para la selección de π y r que consideran que tomarían el mismo valor. En este artículo no se prueba en ningún momento que la regla que se define de lugar a un π óptimo

en el sentido de que acelere la convergencia. La regla la definen para problemas cuya función objetivo sea lineal y donde todas las variables aparecen en la función objetivo. La regla parte de la premisa de que si el coeficiente que multiplica en la función objetivo a la variable es muy elevado, entonces a la variable le va costar más cambiar de valor y por lo tanto necesita una penalización más elevada para conseguir que se iguale su valor al de la media. Con esta premisa, la regla que se propone en el artículo va ser proporcional al coste, además se busca que no dependa del escenario y que ρ se acerque por la izquierda a su valor óptimo. Finalmente la regla que se propone es:

$$\frac{c}{\max(\sum_{s \in S} Pr(s) \cdot |x_s^0 - \bar{x}^0|, 1)} \quad (3.1)$$

En la expresión anterior c es el valor que multiplica a las variables en la función objetivo. Otra característica de la propuesta que hacen Watson y Woodruff en [5] es que depende de la solución inicial escogida, se será más agresivo en la actualización de ρ cuanto más cuadradas estén las variables en la solución inicial.

3.1. Resultado de las ejecuciones

En esta sección hablaremos detalladamente de los resultados. Primero mostraremos que configuraciones fueron mejor, posteriormente nos centraremos en estudiar los casos donde no hubo convergencia y por último mostraremos el comportamiento adecuado del algoritmo.

Antes de mostrar las gráficas donde podemos ver un resumen del comportamiento del algoritmo para distintas configuraciones de los parámetros recordaremos brevemente cual era la estructura del problema 2.2 que vamos a resolver. Este era un problema lineal de cuatro etapas. Las variables de este problema son el dinero invertido en cada etapa en los activos reservas o bonos. Las restricciones son de igualdad y imponen que el total invertido en cada etapa sea igual al dinero obtenido en las inversiones de la etapa anterior. La incertidumbre en este problema se manifestaba en los beneficios de los distintos activos, habiendo dos posibilidades equiprobables por etapa. Una que denominamos favorable donde el beneficio de invertir una unidad en reservas es 1,25 y el de los bonos 1,14. La otra posibilidad es que ocurra un escenario desfavorable donde el beneficio de las reservas es 1,06 y el de los bonos 1,12. El número total de escenarios del problema es 8 y en la Figura 2.2 se puede ver una representación esquemática de los mismos. Nuestro objetivo en este problema es partiendo de 55000, obtener al terminar la cuarta etapa un beneficio de 80000, valoramos en 1 cada unidad por la que superamos ese valor y penalizamos por 4 cada unidad que nos quedamos por debajo de este valor. Por último la solución de este problema puede verse en la Tabla 3.1. Esta configuración produce un valor promedio de la función objetivo de -1514 . Esto no quiere decir que con esta configuración nunca lleguemos al 80000, de hecho solo en el escenario más desfavorable no llegamos a ese objetivo, lo que quiere decir es que el valor promedio de la función objetivo respecto a los escenarios es -1514 .

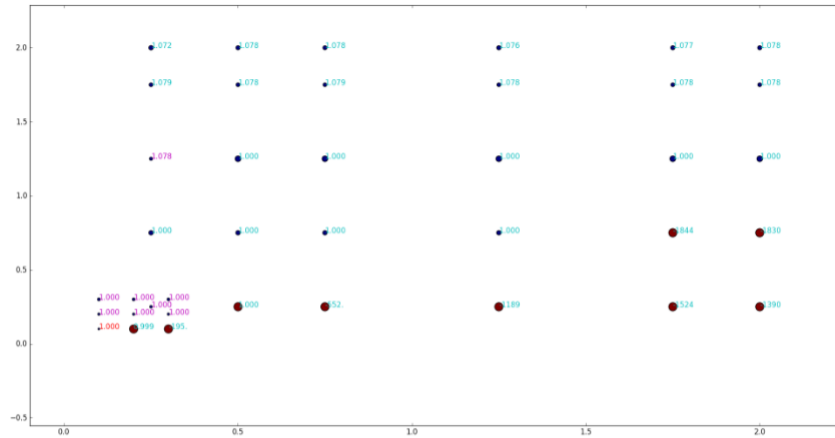


Figura 3.1: Gráfica que muestra en el eje x valores de π y en el y valores de r . Los puntos rojos indican ejecuciones que acabaron sin llegar a la convergencia del algoritmo. Los números encima de cada punto indican la distancia de el valor de la función objetivo en esa ejecución contra la solución del problema. El color indica el número de iteraciones siendo violeta los de menos iteraciones.

Escenario, etapa	Dinero invertido en reservas	Dinero invertido en bonos
1 – 8, 1	41500	13500
1 – 4, 2	65100	2170
5 – 8, 2	36700	22400
1 – 2, 3	83800	0
3 – 4, 3	0	71400
5 – 6, 3	0	71400
7 – 8, 3	64000	0

Tabla 3.1: Tabla con la solución del problema 2.2

En la Figura 3.1 puede verse un resumen de los resultados obtenidos para distintas configuraciones. En esta figura puede verse que para valores de r altos, el algoritmo acaba convergiendo a un valor alejado del óptimo. Por último el mejor comportamiento se obtuvo para $\pi = 0,1 = r$ con un número de 1600 iteraciones frente a otras configuraciones que necesitaron 9000 iteraciones para converger. La mejor configuración se alcanzó justo en el valor más pequeño de π que consideramos, por lo tanto cabría preguntarse si reduciendo más el valor de π el algoritmo termina con menos iteraciones todavía. Si observamos la Figura 3.2 vemos que para $\pi = 0,0005$ y $r = 0,001$ se obtuvo una mejor configuración, más concretamente de 325 iteraciones. La configuración $r = 0,001 = \pi$ también acabó en un número similar de iteraciones, concretamente en 327. En esta gráfica también se observa que para π menores que 0,0005 la convergencia empeora. El cambio en el número de iteraciones de una configuración a otra, muestra que escoger bien los parámetros es de vital importancia para el comportamiento del algoritmo. Una conclusión importante que podemos sacar de la Figura 3.1 y 3.2 es que existe una relación entre los valores de π y r adecuados. Para configuraciones con un valor de r más pequeños

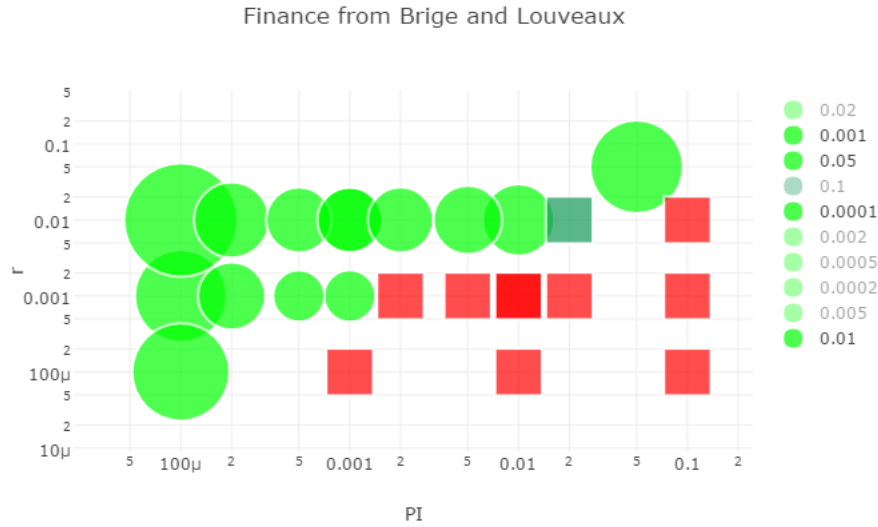


Figura 3.2: Gráfica que muestra en el eje x valores de π y en el y valores de r . Los cuadrados indican ejecuciones que acabaron sin llegar a la convergencia del algoritmo. El tamaño de los puntos indica el número de iteraciones que fueron necesarias para obtener la convergencia.

que el de π el algoritmo acaba alcanzando el número máximo de iteraciones sin que se alcanzara la convergencia. Además viendo estas gráficas observamos que los mejores configuraciones suelen estar en la diagonal, por lo tanto aunque π y r representan cosas distintas, no es descabellado considerar que tomen el mismo valor.

3.1.1. Casos de mal comportamiento del algoritmo

Una vez visto como es el comportamiento general del algoritmo para distintos valores de π y r , trataremos de ver que es lo que sucede en los casos donde acabo sin llegar al óptimo. Recordemos que el problema 2.2 con el que estamos tratando, es un problema lineal y por lo tanto está en las hipótesis del Teorema 2.6 y debería llegar al óptimo. En los casos de mal comportamiento del algoritmo distinguimos dos casos, aquellos donde π toma un valor mayor que r y aquellos en los que r toma un valor demasiado alto.

Empezaremos viendo que es lo que sucede en los casos donde π toma un valor mayor que r . En estos casos lo que ocurre es que el algoritmo llega al número máximo de iteraciones si que halla convergido. En la Figura 3.3 vemos el comportamiento de las variables dinero invertido en reservas en la primera etapa en los escenarios 1 y 2, en la ejecución cuyos parámetros son $\pi = 0,001$ y $r = 0,0001$. En esta gráfica vemos como el hecho de que r tenga poco peso, provoca que las variables oscilen, entre el máximo valor que pueden tomar y valores cercanos a 0. En la Figura 3.4 aparece la gráfica de la evolución de los ρ para esa misma configuración. Vemos que el comportamiento de los ρ también oscila. Recordemos que un cambio en ρ se producía cuando, las variables estaban lejos del valor de la media, por lo tanto tiene sentido que cuando se produzca un comportamiento oscilatorio de las variables, se traslade también a cambios en el valor de ρ .

Ahora veremos que sucede en los casos donde r toma un valor demasiado alto. En estos casos se

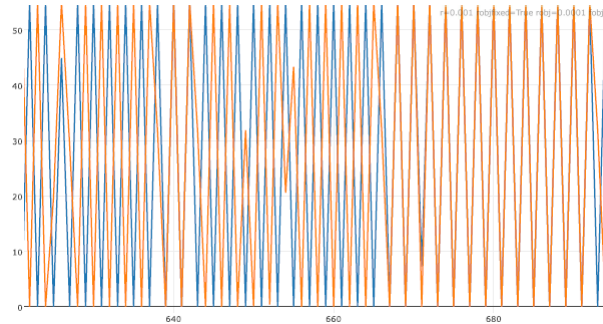


Figura 3.3: Gráfica que muestra en el eje x las iteraciones, y en el y el valor de las variables. En azul aparece el dinero invertido en reservas en la primera etapa y en el escenario 1, mientras que en naranja aparece el del escenario 2. Esta Gráfica corresponde a la configuración $\pi = 0,001$ y $r = 0,0001$

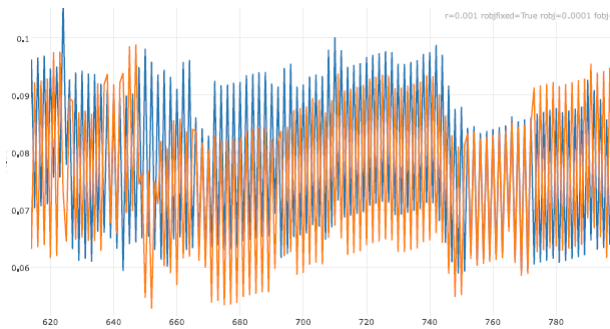


Figura 3.4: Gráfica que muestra en el eje x las iteraciones, y en el y el valor de ρ . En azul aparece el valor del ρ asociado a variable dinero invertido en reservas en la primera etapa y en el escenario 1, mientras que en naranja aparece el de la misma variable pero en el escenario 2. Esta Gráfica corresponde a la configuración $\pi = 0,001$ y $r = 0,0001$

detiene sin alcanzar el óptimo. En la Figura 3.5 vemos el valor de la variable dinero invertido en reservas en las cien últimas iteraciones de una ejecución cuyos parámetros fueron $\pi = 0,75$ y $r = 2$, con estos parámetros el algoritmo se detuvo en un valor de la función objetivo de $-1633,2$, en lugar de -1514 que es el óptimo. Por otra parte el valor de dinero invertido en reservas en la primera etapa acabó en 30 mil, cuando su valor en el óptimo es de 41 mil. En la Figura 3.5 podemos observar como a pesar de que el algoritmo acaba, en una configuración que no es el óptimo, las variables tenían una cierta tendencia a aumentar su valor, solo que lo hacen muy lentamente. En esta gráfica también se observa que los cambios de las variables en estas cien iteraciones, se hacen de forma casi coordinada. La conclusión que podemos sacar es que un valor de r elevado, hace que se penalice en exceso alejarse de la media, provocando que las variables cambien de valor de forma casi coordinada y que el valor de estas variables cambie muy poco. Esto puede provocar que si la tolerancia no es lo suficientemente pequeña, el algoritmo detecte que ha convergido a pesar de no haber llegado al óptimo.

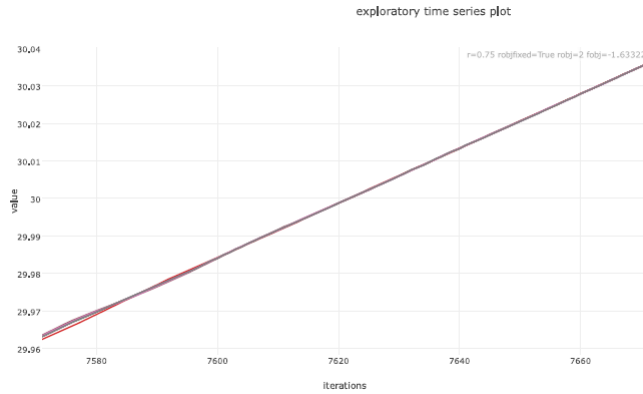


Figura 3.5: Gráfica que muestra en el eje x las iteraciones, y en el y el valor de la variable dinero invertido en reservas en la primera etapa en todos los escenarios. Esta Gráfica corresponde a la configuración $\pi = 0,75$ y $r = 2$. Las iteraciones que aparecen en la imagen se corresponden con las cien últimas iteraciones del algoritmo.

3.1.2. Caso de buen comportamiento

En esta sección mostraremos el comportamiento de las variables y de los ρ para la configuración $\pi = r = 0,001$, donde el algoritmo convergió en 327 iteraciones. En la Figura 3.6 podemos ver la evolución de la variable inversión en reservas en la etapa uno para los escenarios 1 y 4 y en la Figura 3.7 podemos ver la evolución de los ρ asociados a esas variables. Los valores del escenario 1 aparecen en azul y los del 4 en rojo. En estas gráficas podemos observar como las variables empiezan descuadradas, al principio mientras ρ toma valores bajos el valor de ellas cambia bastante, a medida que ρ aumenta a las variables les cuesta más alejarse de la media y se van acercando a la media. Al principio como las variables están alejadas de la media ρ cambia más de valor que al final del algoritmo, donde las variables se cuadraron y por lo tanto ρ cambia menos su valor.

3.2. Resumen de las conclusiones y trabajo de validación pendiente

En esta sección haremos un resumen de todas las conclusiones que pudimos sacar a raíz de los gráficos presentados en este capítulo y hablaremos de que limitaciones tienen estas conclusiones y como se

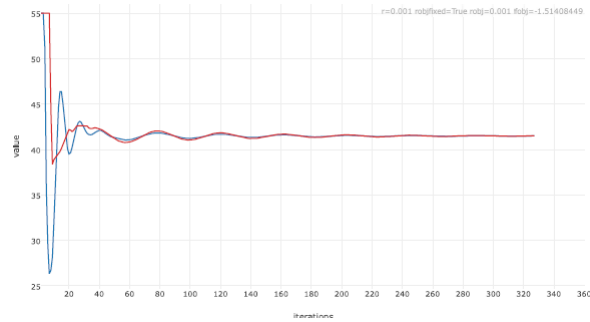


Figura 3.6: Gráfica que muestra en el eje x las iteraciones, y en el y el valor de la variable dinero invertido en reservas en los escenarios 1 y 4. El valor de esta variable en el escenario 1 aparece en azul, y el valor en el 4 aparece en rojo. Esta gráfica corresponde a la configuración $\pi = 0,001 = r$.

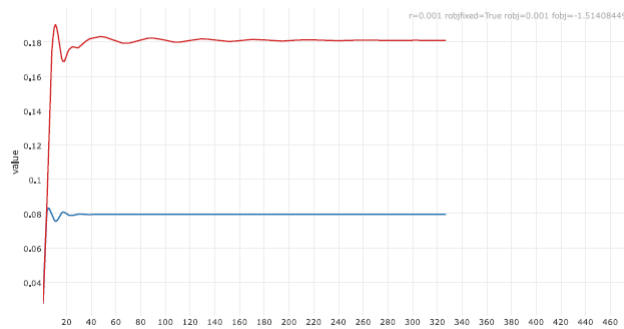


Figura 3.7: Gráfica que muestra en el eje x las iteraciones, y en el y el valor del ρ asociado a la variable dinero invertido en reservas en los escenarios 1 y 4. El valor del ρ asociado a la variable dinero invertido en reservas en el escenario 1 aparece en azul, y el valor en el 4 aparece en rojo. Esta gráfica corresponde a la configuración $\pi = 0,001 = r$.

podría continuar este trabajo.

En resumen podemos sacar las siguientes conclusiones:

- Una selección correcta de los parámetros π y r es esencial para la convergencia del algoritmo. Una mala selección de estos parámetros puede provocar que el algoritmo acabe con el número de iteraciones máximo sin alcanzar la convergencia, o que se detenga en un punto que no es el óptimo. Además incluso para configuraciones en las que alcanza el óptimo el número de iteraciones puede variar de forma considerable entre una configuración y otra.
- Los parámetros π y r parece que guardan una relación. En las ejecuciones donde π era mayor que r , se observaban comportamientos oscilatorios en las variables que hacían que llegara al máximo de iteraciones sin converger. Además se pudo observar que los mejores comportamientos se obtuvieron en la diagonal, por lo que no es descabellado considerar que tomen el mismo valor.
- Si seleccionamos r demasiado altos, el algoritmo puede acabar en un punto que no es el óptimo, debido a la poca flexibilidad que se le deja a las variables, ya que r penalizaría demasiado que se alejarán de la media.
- Tampoco debemos ser muy agresivos con la actualización de ρ , los menores números de iteraciones se obtuvieron con valores de π bajos.

A pesar de que este breve estudio permite sacar algunas conclusiones útiles para seleccionar el valor de los parámetros, las conclusiones que se sacaron tienen ciertas limitaciones. Las conclusiones se sacaron en base a los resultados obtenidos en un problema lineal, cabe preguntarse si en casos no lineales y no convexos se obtienen resultados similares. Además también es importante estudiar la estabilidad de estos valores, es decir habría que estudiar si con las configuraciones para las que se obtuvo la convergencia en 327 iteraciones se sigue obteniendo la convergencia en un número similar de iteraciones, cuando aumenta el número de escenarios o se modifican los coeficientes de las restricciones o los de la función objetivo. En definitiva se trata de determinar, si para una misma configuración podemos esperar resultados similares si solo modificamos levemente el problema y hasta que punto podemos modificar el problema, sin que para una misma configuración de los parámetros cambie en exceso el número de iteraciones. Por último una vez que hubiéramos visto que sucede en casos no lineales y en los no convexos y visto cuanto se puede modificar un problema sin que cambie el número de iteraciones para una misma configuración, podríamos ver si las configuraciones óptimas que obtuvimos guardan alguna relación con los parámetros del problema para evitar tener que realizar una malla como las de las Figura 3.1 y 3.2 para encontrar la configuración de parámetros óptima.

En resumen para continuar con el estudio realizado en este trabajo es necesario:

- Ver si las conclusiones obtenidas son similares para los casos no lineales y para los no convexos.
- Ver si para una misma configuración de los parámetros se obtiene un número de iteraciones semejante después de modificar levemente el problema.
- Buscar una relación entre los valores óptimos de π y r y algún parámetro del problema de partida, para ver si podemos acercarnos a seleccionar el π y r óptimos sin necesidad de realizar una malla como las de las Figuras 3.1 y 3.2

Bibliografía

- [1] S. Bazarra, M., D. Sherali, H., Shetty, C. M (2006). *Nonlinear Programming Theory and Algorithms* tercera edición. John Wiley & Sons, New Jersey.
- [2] Wenyu Sun, Ya-Xiang Yuan (2006). *Optimization Theory and Methods. Nonlinear Programming*. Springer, New York.
- [3] Julio González Díaz. *Apuntes de la asignatura Optimización Matemática del máster en Técnicas Estadísticas. Curso 2016-2017*
- [4] John R. Birgie, François Louveaux (2011). *Introduction to Stochastic Programming*. Springer, New York.
- [5] Watson, JP, Woodruff, D.L (8 Noviembre de 2011). Computational Management Science (8) p. 355.