Trabajo Fin de Máster

Sobre el valor posicional en juegos cooperativos

Sara Rosales Sanmartín

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2018-2019

Propuesta de Trabajo Fin de Máster

Título en galego: Sobre o valor posicional en xogos cooperativos

Título en español: Sobre el valor posicional en juegos cooperativos

English title: On the position value for cooperative games

Modalidad: Modalidad A

Autor/a: Sara Rosales Sanmartín, Universidade de Vigo

Director/a: Ignacio García Jurado, Universidade da Coruña

Breve resumen del trabajo:

El valor posicional es una variante del valor de Shapley para juegos TU (juegos cooperativos con utilidad transferible) en los que las posibilidades de cooperación de los jugadores están limitadas por un grafo de comunicación. El valor posicional fue analizado en profundidad por primera vez en Borm et al. (1992) y, desde entonces, ha generado una considerable literatura. Entre los artículos más importantes dedicados al valor posicional destacamos los siguientes: en Slikker (2005) y van den Nouweland y Slikker (2012) se proponen caracterizaciones axiomáticas del valor posicional, en Casajus (2007) y Kongo (2010) se comparan el valor posicional y el valor de Myerson, en Ghintran (2013) se estudia el valor posicional ponderado, en van den Nouweland y Slikker (2016) se introduce y analiza el valor posicional para juegos en forma particional.

El objetivo principal de este TFM es realizar una revisión de la literatura sobre el valor posicional, con especial énfasis en los artículos mencionados. En función de los intereses del eventual autor del TFM, ese objetivo principal puede ser ampliado hacia el estudio de alguna cuestión abierta en relación al valor posicional o hacia la aplicación del valor posicional para analizar el poder de los distintos agentes en un parlamento u otra estructura de votación.

Recomendaciones:

Es recomendable haber cursado las materias de INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS y de JUEGOS COOPERATIVOS

Otras observaciones:

Don Ignacio García Jurado, Catedrático de Universidad de la Universidade da Coruña informa que el Trabajo Fin de Máster titulado

Sobre el valor posicional en juegos cooperativos

fue realizado bajo su dirección por doña Sara Rosales Sanmartín para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, dan su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Pontevedra, a 4 de julio de 2019.

El director:

Don Ignacio García Jurado

La autora:

Sara Rosales

Doña Sara Rosales Sanmartín

Índice general

Resumen

Resumen en español

Sobre el valor posicional en juegos cooperativos

La teoría de juegos trata dos grandes grupos de modelos, los juegos no cooperativos y los juegos cooperativos; en estos últimos se estudia cómo se pueden repartir los beneficios un grupo de jugadores que ha decidido cooperar. A lo largo de este documento abordaremos situaciones de comunicación restringida, es decir, situaciones con juegos cooperativos en los que existe un grafo que limita las posibilidades de comunicación entre los jugadores. El reparto de beneficios se estudia mediante el valor de Myerson y el valor posicional. Además se incluyen dos ejemplos en los que el valor de Myerson y el valor posicional proporcionan posibles soluciones a un ejemplo tomado del Parlamento de Aragón en 1991, y otro ejemplo propio tomado de las elecciones municipales al Ayuntamiento de Pontevedra de este año 2019. A continuación se realiza una revisión de la literatura existente sobre el valor posicional y se estudian distintas caracterizaciones axiomáticas para dicho valor: una de ellas para juegos con grafos libres de ciclos, y otras dos, para juegos con grafos arbitrarios, estando una de ellas basada en la propiedad de contribuciones equilibradas. Finalmente se incluye una comparación entre el valor de Myerson y el valor posicional.

Resumo en galego

Sobre o valor posicional en xogos cooperativos

A teoría de xogos trata dous grandes grupos de modelos, os xogos non cooperativos e os xogos cooperativos; nestes últimos se estuda como se poden repartir os beneficios un grupo de xogadores que decidiu cooperar. Ao longo deste documento abordaremos situacións de comunicación restrinxida, é dicir, situacións con xogos cooperativos nos que existe un grafo que limita as posibilidades de comunicación entre os xogadores. O reparto de beneficios se estuda mediante o valor de Myerson e o valor posicional. Ademáis se engaden dous exemplos nos que o valor de Myerson e o valor posicional proporcionan posibles solucións a un exemplo tomado do Parlamento de Aragón en 1991, e outro exemplo propio tomado das eleccións municipais ao Concello de Pontevedra deste ano 2019. A continuación se realiza unha revisión da literatura existente sobre o valor posicional e se estudan distintas caracterizacións axiomáticas para este valor: unha delas para xogos con grafos libres de ciclos, e otras dúas, para xogos con grafos arbitrarios, estando unha delas basada na propiedade de contribucións equilibradas. Finalmente inclúese unha comparación entre o valor de Myerson e o valor posicional.

English abstract

On the position value for cooperative games

Game theory deals with two large groups of models, non-cooperative games and cooperative games; the latter studies how a group of players who have decided to cooperate can share the profits. Throughout this document we will deal with situations of restricted communication, that is, situations with cooperative games in which there is a graph that limits the possibilities of communication between players. Profit sharing is studied through Myerson's value and position value. Also included are two examples in which Myerson's value and position value provide possible solutions to an example taken from the Parliament of Aragon in 1991, and another own example taken from the municipal elections to Pontevedra City Council in this year 2019. Next, a review of the existing literature on position value is carried out and different axiomatic characterizations are studied for this value: one of them for games with free graphs of cycles, and other two, for games with arbitrary graphs, being one of them based on the property of balanced contributions. Finally, a comparison between the Myerson value and the position value is included.

Capítulo 1

Introducción

Se puede definir la teoría de juegos como el estudio matemático de las situaciones en que varios individuos tiene que tomar decisiones teniendo en cuenta las decisiones de los otros. Es decir, la teoría de juegos es una rama de las matemáticas que estudia las situaciones en las que para que un individuo tenga éxito a la hora de tomar sus propias decisiones tiene que tener en cuenta las posibles decisiones que tomarán el resto de los jugadores que intervienen en la situación.

En la teoría de juegos se tratan problemas de decisión interactivos que cumplen las siguientes características:
- Hay varios agentes o jugadores que toman decisiones.
- En función de las decisiones de todos los jugadores se produce un resultado.
- Cada jugador tiene sus propias preferencias sobre el conjunto de posibles resultados.

La terminología habitual utiliza el lenguaje de los juegos de estrategia para referirse a los distintos elementos de un problema de decisión interactivo; así se denomina juego a un problema de decisión interactivo, jugador a cada agente que participa en dicho juego, estrategias a las posibles decisiones que los jugadores pueden tomar, etc.

A lo largo de este documento vamos a suponer que los jugadores conocen perfectamente las reglas del juego y que se cumple el **Principio de racionalidad**, que implica que todos los jugadores son racionales en el sentido de que saben lo que quieren, saben cómo deben actuar para conseguir lo que quieren y actúan tratando de conseguirlo. Por tanto, suponemos que a los jugadores solo les interesa ganar y maximizar su propia utilidad, esto es, mejorar sus ganancias o beneficios.

La teoría de juegos tiene un gran alcance, siendo utilizada en diversos campos como la política, la psicología, la lógica, la biología y por supuesto, ha tenido un gran impacto en la economía y en la toma de decisiones empresariales.

La teoría de juegos trata dos grandes grupos de modelos:

- Los juegos no cooperativos.

  En los juegos no cooperativos, todos los elementos del juego y todas las posibles estrategias de los jugadores pueden describirse con precisión a través de un modelo matemático. Se buscará analizar el modelo que describe el problema, buscando para cada jugador sus mejores estrategias teniendo en cuenta que los demás también usarán sus mejores estrategias.

- Los juegos cooperativos.

  La teoría de juegos cooperativa supone en cambio que los posibles modos de cooperar de los jugadores (de tomar acuerdos vinculantes) son muy variados y complejos, de modo que resulta inviable describirlos a través de un modelo matemático sencillo. El enfoque cooperativo es, por tanto, asumir de entrada que los jugadores van a cooperar y actuar de un modo socialmente óptimo, centrándonos en cómo deben repartirse los jugadores los beneficios de su cooperación.

A lo largo de este Trabajo Fin de Máster nos centraremos en este segundo tipo de modelos: los juegos cooperativos. En ellos se estudia cómo se pueden repartir los beneficios un grupo de jugadores que ha decidido cooperar. Más concretamente abordaremos un tipo especial de reglas de asignación para juegos en los que existe un grafo que limita las posibilidades de comunicación entre jugadores.

Tras esta introducción a la teoría de juegos y los juegos cooperativos, indicamos alguna notación que utilizaremos a lo largo de este documento, para continuar con una revisión bibliográfica del valor posicional, unas definiciones previas y el estudio del valor de Shapley.

En el capítulo 2 se introducen los juegos cooperativos con utilidad transferible, juegos TU, con comunicación restringida por un grafo. A continuación expondremos el valor de Myerson y el valor posicional, como posibles soluciones a un juego con comunicación restringida. Para finalizar este capítulo incluimos un ejemplo tomado del Parlamento de Aragón y otro tomado de las elecciones municipales de 2019 al Ayuntamiento de Pontevedra en los que calcularemos el valor de Myerson y el valor posicional .

A continuación, propondremos caracterizaciones axiomáticas del valor posicional. Una caracterización para grafos sin ciclos, y dos caracterizaciones para grafos arbitrarios (una de ellas basada en la propiedad de contribuciones equilibradas).

Finalmente, en el capítulo 4 comenzaremos exponiendo las principales propiedades del valor de Myerson, para finalizar realizando una comparación entre el valor de Myerson y el valor posicional.

Notación

En adelante, usaremos la siguiente notación:

- El símbolo $\setminus$ indica la eliminación de uno o varios elementos de un conjunto. Así, $N \setminus \{a\} = \{i \in N, i \neq a\}$.
- Sean A y B dos conjuntos, indicaré que A está contenido en B, pero $A \neq B$ como $A \subset B$.
- Sean A y B dos conjuntos, denotaré A contenido o igual a B por $A \subseteq B$.
- Dado un conjunto A, utilizaremos $|A|$ para denotar el cardinal del conjunto A.

1.1. Revisión bibliográfica

El valor posicional fue introducido por primera vez por Meessen en 1988 en su Trabajo Fin de Máster. Posteriormente fue estudiado con mayor profundidad por Borm et al. (1992) quienes le proporcionaron un mayor reconocimiento. Más adelante el valor posicional fue tratado en otros documentos entre los que destacamos los siguientes:

Borm et al. (1992) proporcionaron una caracterización del valor posicional para juegos con grafos libres de ciclos. En ese mismo año, Van den Nouweland et al. (1992) proporcionaron una caracterización axiomática para el valor de Myerson y el valor posicional en juegos cooperativos con comunicación restringida por hipergrafos. Más adelante, el valor posicional fue tratado por Algaba et al. (1998) en el contexto de juegos con cooperación parcial que se basa en un sistema de coalición estable; por Slikker (2005) donde se proporciona una caracterización axiomática del valor posicional basada en la propiedad de contribuciones equilibradas; por Casajus (2007) donde se comparan el valor posicional y el valor de Myerson para juegos TU con grafos de comunicación restringida y para juegos con estructura de conferencia; por Kongo (2010) donde se propone dividir cada arco en dos y definir un nuevo juego en el conjunto de arcos divididos, así, el valor posicional se podrá ver como el valor de Shapley de ese nuevo juego y lo mismo ocurrirá con el valor de Myerson; por Van den Nouweland et al. (2012) que proporcionan una caracterización axiomática del valor posicional en un contexto donde consideramos fijo el conjunto de jugadores; por Ghintran (2013) donde se estudia el valor posicional ponderado y por Van den Nouweland et al. (2016) en juegos cooperativos en forma de función de partición.

A lo largo de este Trabajo Fin de Máster nos centraremos principalmente en los textos de Borm et al. (1992), Slikker (2005), Van den Nouweland y Slikker (2012) y Casajus (2007).

1.2. Definiciones previas

Los juegos con **utilidad transferible** describen situaciones en las que un grupo de jugadores negocian cómo repartirse los beneficios de su cooperación. Se denominan con utilidad transferible pues los agentes negocian con un bien perfectamente divisible, por ejemplo dinero, y los beneficios que una coalición genera se pueden redistribuir de cualquier manera entre sus componentes. Un juego con utilidad transferible, puede tener distintas soluciones que proponen posibles repartos de los beneficios obtenidos tras la cooperación.

Definición 1.1. *Un juego cooperativo con utilidad transferible,* ***juego TU****, es un par (N, v) donde N es un conjunto finito de jugadores y $v : 2^N \to \mathbb{R}$ es una función que verifica que $v(\emptyset) = 0$, siendo 2^N la clase de todos los subconjuntos de N. La función v se denomina* ***función característica*** *del juego.*

G^N denota el conjunto de todos los juegos TU con conjunto de jugadores N.

En los juegos cooperativos los jugadores se unen para cooperar formando así coaliciones, que son subconjuntos S no vacíos de N. La función $v(S)$ se interpreta como los beneficios que los miembros de dicha coalición son capaces de generar. Y los jugadores buscarán repartirse los beneficios de su cooperación. En definitiva, la meta principal en los juegos TU es seleccionar repartos que sean razonables y por tanto puedan ser aceptados por todos los jugadores involucrados en el problema.

Definición 1.2. *Un juego $(N, v) \in G^N$ es* ***0-normalizado*** *si:*

$$v(\{i\}) = 0 \quad \forall i \in N.$$

El conjunto de todos los juegos TU 0-normalizados con conjunto de jugadores N se denota por G_0^N.

Definición 1.3. *Un juego $(N, v) \in G^N$ es* ***superaditivo*** *si, $\forall S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Por lo tanto, en un juego superaditivo la unión de dos grupos cualesquiera disjuntos nunca hace disminuír los beneficios conjuntos.

Definición 1.4. *Sea $(N, v) \in G^N$. Se dice que el juego (N, v) es* ***convexo*** *si, para cualesquiera $i \in N$, $S, T \subset N \setminus \{i\}$ con $S \subseteq T$,*

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Todo juego convexo es superaditivo.

Definición 1.5. *Un jugador $i \in N$ se denomina* ***jugador nulo*** *de (N, v) si, para toda coalición $S \subseteq N$,*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S).$$

Definición 1.6. *Dos jugadores $i, j \in N$ se dice que son* ***simétricos*** *en (N, v) si para toda coalición $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, se tiene que,*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}).$$

Un **grafo** es un par formado por arcos y nodos. Un **arco** es un par no ordenado $\{i, j\}$ con $i \neq j$. Es decir, un arco une a los distintos nodos de un grafo.

Denotaremos por $\{i, j\}$ al arco que une a dos nodos distintos i, j. Dos arcos son consecutivos si tienen un nodo en común. Un camino que une i y j es una colección de arcos consecutivos de modo que el primero tiene a i como nodo y el último tiene a j como nodo. Se dice que dos nodos están conectados entre si, si existe un camino entre ellos. Un grafo es **conexo** si dos nodos cualesquiera pertenecientes al grafo, están conectados. Así, una coalición es factible si y sólo si es conexa.

Ejemplo 1.1. *Consideremos el siguiente grafo:*

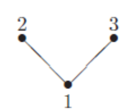

Figura 1.1: Grafo

El grafo tiene como nodos $\{1, 2, 3\}$, y sea A el conjunto de arcos del grafo, $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

Veamos que el nodo 1 está conectado directamente tanto con el nodo 2 como con el nodo 3, y los nodos 2 y 3 no están conectados de forma directa, pero si indirectamenta a través del nodo 1.

Por lo tanto, los nodos 2 y 3 están conectados en $\{1, 2, 3\}$ a través de A. Sin embargo, si consideramos el grafo con arcos $B = \{\{2, 3\}\}$, los nodos 2 y 3 no estarán conectados en este grafo.

Un **ciclo** en un grafo, es un camino que une un nodo del grafo consigo mismo. Un grafo se dice libre de ciclos si para cualesquiera dos nodos i, j con $i \neq j$, y tales que i y j están conectados, existe un único camino en el grafo que los conecta. Un grafo libre de ciclos y conexo es un **árbol**.

1.3. El valor de Shapley

El valor de Shapley fue introducido en Shapley (1953) y estudiado por numerosos autores desde entonces. Es una de las reglas de asignación más importantes de la teoría de juegos cooperativos.

Una regla de asignación para juegos TU es una aplicación $\gamma : G^N \to \mathbb{R}^N$ que asigna a cada juego TU un reparto. Veamos algunas propiedades.

Definición 1.7. *Una regla de asignación γ satisface la* ***propiedad de eficiencia*** *si,*

$$\sum_{i \in N} \gamma_i(N, \upsilon) = \upsilon(N), \quad \forall (N, \upsilon) \in G^N.$$

La eficiencia indica que la regla de asignación γ debe repartir $\upsilon(N)$ entre los jugadores.

Definición 1.8. *Una regla de asignación γ satisface la* ***propiedad del jugador nulo*** *si,*

$$\gamma_i(N, \upsilon) = 0, \quad \forall (N, \upsilon) \in G^N, \forall i \in N \text{ jugador nulo de } (N, \upsilon).$$

Esta propiedad indica que los jugadores que no generan beneficios, no deben recibir nada.

Definición 1.9. *Una regla de asignación γ satisface la* ***propiedad de anonimato*** *si,*

$$\gamma_i(N, \upsilon) = \gamma_j(N, \upsilon), \quad \forall (N, \upsilon) \in G^N, \ \forall\ i, j \in N \text{ jugadores simétricos en } (N, \upsilon).$$

El anonimato requiere tratar idénticamente a los jugadores simétricos.

Definición 1.10. *Una regla de asignación γ satisface la* ***aditividad*** *si,*

$$\gamma(N, \upsilon + \omega) = \gamma(N, \upsilon) + \gamma(N, \omega), \quad \forall (N, \upsilon), (N, \omega) \in G^N.$$

La aditividad es un requerimiento técnico, no está directamente relacionada con una idea de ecuanimidad aunque tampoco va en contra de ella.

A continuación podemos ver que estas propiedades caracterizan de forma única una regla de asignación a la que se conoce como valor de Shapley.

Teorema 1.1. *Existe un único valor $\Phi : G^N \to \mathcal{R}^N$ que satisface la propiedad de eficiencia, jugador nulo, anonimato y aditividad. Este valor, denominado valor de Shapley, viene dado por:*

$$\Phi_i(N, \upsilon) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \tfrac{s!(n-s-1)!}{n!} \quad (\upsilon(S \cup \{i\}) - \upsilon(S))$$

$\forall (N, \upsilon) \in G^N$ *y* $\forall i \in N$, *donde s y n denotan la cardinalidad de S y N, respectivamente.*

Prueba.

Es evidente que el valor de Shapley Φ satisface las propiedades de jugador nulo y aditividad.

Para probar la eficiencia, consideremos un juego $(N, \upsilon) \in G^N$ y notemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in N}\Phi_i(N,v) &= \sum_{i\in N}\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S)) = \\
&= \sum_{i\in N}\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}v(S\cup\{i\}) - \sum_{i\in N}\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}v(S) = \\
&= \sum_{S\subseteq N} s\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}v(S) - \sum_{S\subset N}(n-s)\frac{s!(n-s-1)!}{n!}v(S) \quad = \quad v(N).
\end{aligned}
$$

Para probar que el valor de Shapley Φ satisface la propiedad de anonimato, consideramos nuevamente un juego $(N,v)\in G^N$ y dos jugadores simétricos $i,j\in N$ en dicho juego (N,v).

$$
\begin{aligned}
&\Phi_i(N,v)-\Phi_j(N,v) = \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S)) - \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{j\})-v(S)) = \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\},j\in S}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S)) - \sum_{S\subseteq N\setminus\{j\},i\in S}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{j\})-v(S)) = \\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}}\frac{(s+1)!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S\cup\{j\})) = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el valor de Shapley verifica las propiedades de eficiencia, jugador nulo, anonimato y aditividad. Veamos ahora que es el único valor que las satisface.

Para cada coalición no vacía $S\subseteq N$, definimos el juego $(N,u^S)\in G^N$, denominado usualmente juego de unanimidad de la coalición S, por

$$
u^S(T)=\begin{cases} 1 & \text{si } S\subseteq T \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}
$$

Tengamos en cuenta que cada juego $(N,v)\in G^N$ se puede ver como un vector $(v(S))_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}}\in\mathbb{R}^{2^n-1}$, con lo que G^N se puede ver como un espacio vectorial de dimensión 2^n-1.

Probemos que:

$$
U(N)=\left\{u^S : S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}\right\}
$$

es una base de dicho espacio vectorial.

Para demostrarlo es suficiente probar que $U(N)$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

En efecto, sea $\sum_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}}\alpha_s u^S = 0 \quad \alpha_s\in\mathbb{R}$ para todo $S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}$ y supongamos que existe $T\in 2^N\setminus\{\emptyset\}$ con $\alpha_T\neq 0$.

Asumamos sin pérdida de generalidad que no existe $\bar{T}\subset T$, con $\alpha_{\bar{T}}\neq 0$.

Pero entonces, $\sum_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}}\alpha_s u^S(T)=\alpha_T$, lo cual no es posible, porque hemos supuesto que $\alpha_T\neq 0$.

Con esto probamos que $U(N)$ es una base.

Tomemos ahora un valor f que cumpla eficiencia, propiedad del jugador nulo y anonimato. Claramente, para cada $i \in N$, cada coalición no vacía $S \subseteq N$ y cada $\alpha_S \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f_i(\alpha_S u^S) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_S}{|S|} & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para acabar, basta tener en cuenta que, como f también cumple aditividad, f está unívocamente determinado ya que $U(N)$ es una base de G^N. □

El valor de Shapley Φ para el juego $(N, v) \in G^N$ también se puede escribir como,

$$\Phi_i(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P(N)} (v(PR_\sigma(i) \cup \{i\}) - (v(PR_v(i))) \quad \forall i \in N$$

donde $P(N)$ es el conjunto de todas las permutaciones de N y $PR_\sigma(i)$ es el conjunto $\{j \in N : \sigma(j) < \sigma(i)\}$, es decir, el conjunto de jugadores que llegan antes que i cuando el orden de llegada viene especificado por la permutación σ.

Por lo tanto, el valor de Shapley se puede ver como el vector de ganancias esperadas por los jugadores que acuden a un cierto lugar cuando se cumple que todos los posibles órdenes de llegadas son igualmente probables y que, a su llegada, cada jugador recibe su contribución a la coalición formada por los jugadores que llegaron antes que él.

Capítulo 2

Juegos cooperativos con comunicación restringida

En determinadas ocasiones, los jugadores no pueden comunicarse libremente entre sí. En este caso, se dice que la comunicación es restringida. Este tipo de situaciones se modelizan mediante un juego TU y un grafo de comunicación.

Entonces, un juego $(N, v) \in G^N$ junto con un grafo de comunicación (N, A) forman una terna (N, v, A) a la que llamaremos, **situación o juego de comunicación restringida**.

Denotaremos por G_C^N al conjunto de todos los juegos de comunicación restringida con N como conjunto de jugadores.

En este contexto, podemos estudiar el valor de Myerson y el valor posicional que proponen soluciones para las situaciones de comunicación restringida.

Sea $(N, v, A) \in G_C^N$ una situación de comunicación restringida. Las posibilidades de comunicación dentro de N, dadas por el grafo (N, A), determinan una partición N/A de N en componentes. Una componente de N es un subconjunto maximal de nodos conectados de N.

De manera similar, se pueden definir componentes dentro de cada coalición S dada, permitiendo únicamente las posibilidades de comunicación dadas por el subgrafo $(S, A(S))$, donde

$$A(S) = \{\{i, j\} \in A | i, j \in S\}$$

Luego la partición de S resultante se denotará por S/A.

2.1. El valor de Myerson

En Myerson (1977) se introduce por primera vez el valor de Myerson, que propone una solución para las situaciones de comunicación restringida a partir de un grafo. Los jugadores son los nodos y los arcos del grafo representan las posibilidades de comunicación. Comencemos definiendo el siguiente juego:

Definición 2.1. *Sea $(N, v, A) \in G_C^N$. El **juego de nodos** (N, r_A^v) correspondiente con (N, v, A) viene dado por:*

$$r_A^{\upsilon}(S) = \sum_{T \in S/A} \upsilon(T) \qquad \forall S \in 2^N.$$

A continuación definimos formalmente el valor de Myerson.

Definición 2.2. *Sea un juego con comunicación restringida, $(N, \upsilon, A) \in G_C^N$. Se define el **valor de Myerson** $\mu(N, \upsilon, A) \in \mathbb{R}^N$ como,*

$$\mu(N, \upsilon, A) = \Phi(N, r_A^{\upsilon})$$

donde Φ denota el valor de Shapley.

Dada una coalición S conexa en el grafo (N, A), es decir, si cada jugador de la coalición S puede comunicarse (directa o indirectamente) con cada uno de los restantes jugadores de la coalición sin necesitar la ayuda (como intermediario) de alguno o algunos de los jugadores que no pertenecen a la coalición S, entonces los jugadores de S pueden coordinarse para obtener la cantidad $\upsilon(S)$.

Además, es importante destacar que el valor de Myerson μ es una generalización del valor de Shapley Φ ya que es evidente que si la comunicación entre los jugadores fuese completa, el valor de Shapley y el valor de Myerson coincidirían, es decir, el valor de Myerson es el valor de Shapley del juego restringido por el grafo.

$$\mu(N, \upsilon, A) = \Phi(N, \upsilon), \quad \text{si } A = \{\{i, j\} / i, j \in N, i \neq j\}$$

2.2. El valor posicional

En este caso, los jugadores son las arcos del grafo. Definiremos previamente el siguiente tipo de juego.

Definición 2.3. *Sea $(N, \upsilon, A) \in G_C^N$. El **juego de arcos** (A, r_N^{υ}) correspondiente con (N, υ, A) viene dado por,*

$$r_N^{\upsilon}(L) = \sum_{T \in N/L} \upsilon(T) \quad \forall L \in 2^A.$$

A continuación daremos una definición formal del valor posicional.

Definición 2.4. *Sea una situación de comunicación restringida, $(N, \upsilon, A) \in G_C^N$ se define el **valor posicional** $\Pi(N, \upsilon, A) \in \mathbb{R}^N$ como,*

$$\Pi_i(N, \upsilon, A) = \frac{1}{2} \sum_{a \in A_i} \Phi_a(A, r_N^{\upsilon}) \quad \forall i \in N$$

donde $A_i = \{\{i, j\} \in A / j \in N\}$ denota el conjunto de arcos de A incidentes en el nodo i.

De esta definición se sigue que el valor posicional de un jugador es la mitad de la suma de las contribuciones de los arcos incidentes en él. La contribución de cada uno de estos arcos se obtiene calculando su valor de Shapley en el juego de arcos.

2.3. Ejemplos

A continuación, se introducen dos ejemplos de juegos con utilidad transferible para los que calcularemos el valor de Myerson y el valor posicional.

2.3.1. El Parlamento de Aragón, 1991.

Este ejemplo tomado de la política fue introducido por primera vez por Vazquez Brage et al. (1996) y en él se calculaba el valor de Myerson. En este caso calcularemos también el valor posicional.

En 1991 se celebraron las elecciones al Parlamento de la Comunidad Autonómica de Aragón. La mayoría de las decisiones en un Parlamento se toman por mayoría absoluta, y como el Parlamento de Aragón está constituído por 67 diputados, la mayoría absoluta se obtiene con un mínimo de 34 miembros.

Tras las elecciones, la composición del Parlamento Aragonés fue la siguiente:

- Partido Socialista Obrero Español (PSOE), 30 diputados.
- Partido Popular (PP), 17 diputados.
- Partido Aragonés Regionalista (PAR), 17 diputados.
- Izquierda Unida (IU), 3 diputados.

Las afinidades entre los distintos partidos se pueden describir través del siguiente grafo de comunicación.

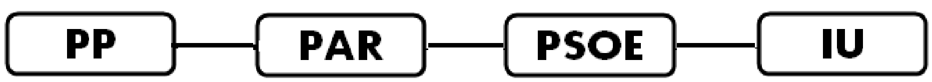

Figura 2.1: Grafo de afinidades.

Como se puede observar el grafo tiene cuatro nodos que se corresponden con los partidos políticos y tres arcos que representan las posibilidades de comunicación. Así, tanto el PP como el PSOE pueden pactar con el PAR, sin embargo, no pueden pactar entre ellos sin la presencia del PAR. Además, el PSOE puede pactar con IU. En este caso los jugadores no negocian con dinero, sino con parte del poder del parlamento que tratan de repartirse.

Una coalición tendrá todo el poder si posee más de la mitad de los votos, es decir, 34 en este ejemplo concreto.

Sea $d(S)$ el número de diputados obtenidos por la coalición S; la función característica de este juego será:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } d(S) \geq 34 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El grafo de comunicaciones está restringido ya que algunos nodos no se comunican; por ejemplo el PP no se comunica con el PSOE ni con IU (no se comunican en el sentido de que no parece que puedan colaborar directamente). Por lo tanto estamos ante un juego cooperativo con comunicación restringida. El valor de Myerson y el valor posicional proporcionarán posibles soluciones para esta situación para entender el poder de cada uno de los partidos.

Valor de Myerson

Esta situación se puede modelizar como un juego TU en el que los jugadores son los partidos políticos, PSOE, PP, PAR y IU. Entonces tenemos el juego (N, v, A), con $N = \{PP, PAR, PSOE, IU\}$

Definiremos por tanto al PP como el jugador 1; PAR, jugador 2; PSOE jugador 3; y IU, jugador 4.

Según el grafo representado en la figura 2.1 y el número de votos obtenidos por cada partido, las coaliciones ganadoras minimales son $\{PP, PAR\}$ y $\{PAR, PSOE\}$.

En este juego, los jugadores PP y PSOE son indistinguibles, y por tanto simétricos. Entonces su valor de Myerson coincide: $\mu_{PP}(N, v, A) = \mu_{PSOE}(N, v, A)$.

IU es un jugador nulo, es decir: $\mu_{IU}(N, v, A) = 0$.

Además,

$$\mu_{PP}(N, v, A) + \mu_{PAR}(N, v, A) + \mu_{PSOE}(N, v, A) + \mu_{IU}(N, v, A) = 1$$

Basta entonces con calcular $\mu_{PP}(N, v, A)$.

El valor de Myerson del PP se calcula de la siguiente manera: dividiendo el número de permutaciones tales que el PP hace ganadora a la coalición de los partidos que están antes del PP (es decir, que aparece el orden PAR, PP, PSOE; e IU en cualquier posición) entre el número de permutaciones. En este caso:

1 2 3 4	**2 1 3 4**	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	**2 1 4 3**	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	**4 2 1 3**
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	**2 4 1 3**	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

Entonces, tenemos 4 permutaciones tales que el PP hace ganadora a la coalición de los partidos que estaban antes de que llegase:

$$2134 : PAR\ PP\ PSOE\ IU$$

$$2143 : PAR\ PP\ IU\ PSOE$$

$$2413 : PAR\ IU\ PP\ PSOE$$

$$4213 : IU\ PAR\ PP\ PSOE$$

y un total de $4! = 24$ permutaciones posibles.

Por lo tanto,

$$\mu_{PP}(N, \upsilon, A) = \frac{4}{4!} = \frac{1}{6}$$

Y calculando el valor de Myerson para el resto de jugadores:

$$\mu_{PP}(N, \upsilon, A) = \mu_{PSOE}(N, \upsilon, A) = \frac{1}{6}$$

$$\mu_{PAR}(N, \upsilon, A) = 1 - (\mu_{PP}(N, \upsilon, A) + \mu_{PSOE}(N, \upsilon, A)) = 1 - (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) = \frac{2}{3}$$

Entonces el valor de Myerson $\mu^N(N, \upsilon, A)$ para el juego (N, υ, A) será:

$$\mu^N(N, \upsilon, A) = (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0)$$

siendo PP el primer jugador, PAR el segundo, PSOE el tercero e IU el cuarto. Los resultados coinciden con los obtenidos en Vazquez Brage et al. (1996).

Por lo tanto, el valor de Myerson predijo que el partido más poderoso sería el PAR ya que era el único partido necesario para formar cualquier coalición ganadora. Finalmente, el PP y el PAR se unieron para formar una coalición gobernante y la presidencia fue ocupada por un miembro del PAR.

Valor posicional

Esta situación también se puede modelizar como un juego TU en el que los jugadores son las aristas del grafo que nos muestran las posibilidades en la comunicación entre los nodos. Veamos entonces como se calcula el valor posicional para este mismo juego.

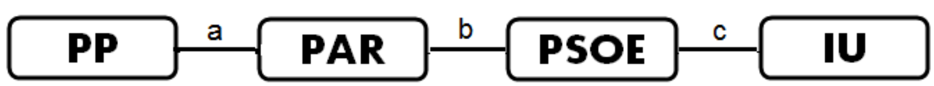

Figura 2.2: Grafo de afinidades

Entonces los jugadores son las aristas, $N = \{a, b, c\}$

Primeramente calculamos el valor de Shapley $\Phi(A, \upsilon)$. Para ello, indicamos todas las posibles permutaciones de los jugadores a, b y c, e indicamos con un 1 si su llegada hará ganadora a la coalición y con un 0 en caso contrario:

	a	b	c
abc	1	0	0
acb	1	0	0
bac	0	1	0
bca	0	1	0
cab	1	0	0
cba	0	1	0
	3	3	0

Entonces el valor de Shapley es $\Phi(A, \upsilon) = (\frac{3}{6}, \frac{3}{6}, 0)$, y simplificando:

$$\Phi(A, \upsilon) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

Finalmente, repartimos el valor de cada arco de forma equitativa entre los nodos que lo forman, por lo tanto:

$$\Pi(N, \upsilon, A) = (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},\ \ 0)$$

recordemos que el primer término se corresponde con el PP, el segundo con PAR, el tercero con el $PSOE$ y el último con IU.

Entonces,

$$\Pi(N, \upsilon, A) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0)$$

Como ocurría con el valor de Myerson, el jugador 2, que se corresponde con el PAR, es el más poderoso.

2.3.2. Elecciones municipales al Ayuntamiento de Pontevedra, 2019.

En este ejemplo se analiza el poder que poseen los distintos partidos políticos que obtuvieron concejales en las elecciones del pasado mes de mayo de 2019 en el Ayuntamiento de Pontevedra. En total, estaban en juego 25 puestos, por lo que la mayoría absoluta se obtendría con 13 o más concejales.

Tras las votaciones se obtuvieron los siguientes resultados:

- Bloque Nacionalista Gallego (BNG), 11 concejales.
- Partido Popular (PP), 9 concejales.
- Partido Socialista Obrero Español (PSOE), 4 concejales.

- Ciudadanos (Cs), 1 concejal.

Las afinidades entre los distintos partidos se pueden describir través del siguiente grafo de comunicación.

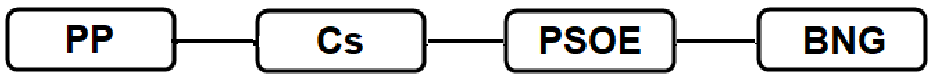

Figura 2.3: Grado de afinidades.

Como se puede observar, el grafo tiene cuatro nodos que se corresponden con los partidos políticos y tres arcos que representan las posibilidades de comunicación entre partidos. Así, el PSOE puede pactar tanto con Cs como con el BNG, pero no puede pactar con el PP sin la presencia de Cs. El BNG solo puede pactar directamente con el PSOE, con la presencia del PSOE podría pactar también con Cs.

Una coalición tendrá todo el poder si posee más de la mitad de los votos, es decir, 13 en este ejemplo concreto.

Sea $d(S)$ el número de concejales obtenidos por la coalición S; la función característica de este juego será:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } d(S) \geq 13 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El grafo de comunicaciones está restringido ya que algunos nodos no se comunican directamente; el BNG no se comunica directamente con el PP ni con Cs (no se comunican en el sentido de que no parece que puedan colaborar directamente); el PSOE no se comunica directamente con el PP; Cs no se comunica directamente con el BNG, etc.

Por lo tanto estamos ante un juego cooperativo con comunicación restringida. El valor de Myerson y el valor posicional proporcionarán posibles soluciones para esta situación para entender el poder de cada uno de los partidos.

Valor de Myerson

Esta situación se puede modelizar como un juego TU en el que los jugadores son los partidos políticos, PP, Cs, PSOE y BNG. Entonces tenemos el juego (N, v, A), con $N = \{PP, Cs, PSOE, BNG\}$

Definiremos por tanto al PP como el jugador 1; Cs, jugador 2; PSOE jugador 3; y BNG, jugador 4.

Según el grafo representado en la figura 2.3 y el número de votos obtenidos por cada partido, las coaliciones ganadoras minimales son $\{PP, Cs, PSOE\}$ y $\{PSOE, BNG\}$.

Se cumple que,

$$\mu_{PP}(N, v, A) + \mu_{Cs}(N, v, A) + \mu_{PSOE}(N, v, A) + \mu_{BNG}(N, v, A) = 1$$

El valor de Myerson de un partido determinado se calcula dividiendo el número de permutaciones tales que dicho partido hace ganadora a la coalición de los partidos que están antes que él, entre el número de permutaciones. El número de permutaciones posibles será 4!, es decir, 24.

- Permutaciones tales que el **PP** hace ganadora a la coalición de los partidos que estaban antes de que llegase:

Cs	PSOE	PP	BNG
PSOE	Cs	PP	BNG

  Por lo tanto,

$$\mu_{PP}(N, v, A) = \frac{2}{4!} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

- Permutaciones tales que **Cs** hace ganadora a la coalición de los partidos que estaban antes de que llegase:

PP	PSOE	Cs	BNG
PSOE	PP	Cs	BNG

  Por lo tanto,

$$\mu_{Cs}(N, v, A) = \frac{2}{4!} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

- Permutaciones tales que **PSOE** hace ganadora a la coalición de los partidos que estaban antes de que llegase:

PP	Cs	PSOE	BNG
PP	Cs	BNG	PSOE
PP	BNG	Cs	PSOE
PP	BNG	PSOE	Cs
Cs	PP	PSOE	BNG
Cs	PP	BNG	PSOE
Cs	BNG	PP	PSOE
Cs	BNG	PSOE	PP
BNG	PP	Cs	PSOE
BNG	PP	PSOE	Cs
BNG	Cs	PP	PSOE
BNG	Cs	PSOE	PP
BNG	PSOE	PP	Cs
BNG	PSOE	Cs	PP

  Por lo tanto,

$$\mu_{PSOE}(N, v, A) = \frac{14}{4!} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

- Permutaciones tales que **BNG** hace ganadora a la coalición de los partidos que estaban antes de que llegase:

PP	PSOE	BNG	Cs
Cs	PSOE	BNG	PP
PSOE	PP	BNG	Cs
PSOE	Cs	BNG	PP
PSOE	BNG	PP	Cs
PSOE	BNG	Cs	PP

Por lo tanto,

$$\mu_{Cs}(N, v, A) = \frac{6}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Entonces el valor de Myerson $\mu^N(N, v, A)$ para el juego (N, v, A) será:

$$\mu^N(N, v, A) = (\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$$

siendo PP el primer jugador, Cs el segundo, PSOE el tercero y BNG el cuarto.

Por lo tanto, el valor de Myerson predijo que los partidos más poderosos serían el PSOE y el BNG. Finalmente, PSOE y BNG se unieron para formar una coalición.

Valor posicional

Esta situación también se puede modelizar como un juego TU en el que los jugadores son las aristas del grafo que nos muestran las posibilidades en la comunicación entre los nodos. Veamos entonces como se calcula el valor posicional para este mismo juego.

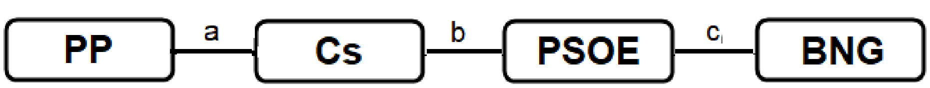

Figura 2.4: Grafo de afinidades

Entonces, en este caso los jugadores son las aristas, $N = \{a, b, c\}$

Primeramente calculamos el valor de Shapley $\Phi(A, v)$. Para ello, indicamos todas las posibles permutaciones de los jugadores a, b y c, e indicamos con un 1 si su llegada hará ganadora a la coalición y con un 0 en caso contrario:

	a	b	c
abc	0	1	0
acb	0	0	1
bac	1	0	0
bca	0	0	1
cab	0	0	1
cba	0	0	1
	1	1	4

Entonces el valor de Shapley es $\Phi(A, v) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6}) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})$.

Finalmente, repartimos el valor de cada arco de forma equitativa entre los nodos que lo forman, por lo tanto:

$$\Pi(N, v, A) = (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6},\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6},\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3},\ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3})$$

recordemos que el primer término se corresponde con el PP, el segundo con Cs, el tercero con el $PSOE$ y el último con BNG.

Entonces,

$$\Pi(N, v, A) = (\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3})$$

Como ocurría con el valor de Myerson, el PSOE y el BNG son los jugadores más poderosos según la solución proporcionada por el valor posicional. El valor de Myerson trata del mismo modo al PP y Cs; sin embargo, el valor posicional tiene en cuenta que Cs tiene una posición un poco más favorable que el PP ya que puede servir de puente de unión entre el PP y el PSOE.

Capítulo 3

Caracterizaciones axiomáticas del valor posicional

En este tercer capítulo se dan una serie de caracterizaciones axiomáticas para el valor posicional. La primera de ellas será una caracterización para juegos con grafos sin ciclos, introducida en Borm et al. (1992). Las siguientes caracterizaciones se proponen para juegos con grafos arbitrarios: una de ellas basada en la propiedad de contribuciones equilibradas propuesta por Slikker (2005); y otra propuesta por Van den Nouweland y Slikker (2012). Recordemos que a lo largo de todo el capítulo nos encontramos en el contexto de grafos no orientados.

3.1. Una caracterización para grafos sin ciclos

En el tercer capítulo de Borm et al. (1992) se dan una serie de propiedades para el valor de Myerson y el valor posicional. En este apartado nos centraremos en las propiedades que permitirán caracterizar el valor posicional. En este caso, el grafo no tendrá ciclos.

Definición 3.1. *Una regla de asignación $\gamma : G^N \to \mathbb{R}^N$ es* ***eficiente en componentes*** *si, para todo juego con comunicación restringida $(N, \upsilon, A) \in G^N_{\mathcal{C}}$ y $T \in N/A$,*

$$\sum_{i \in T} \gamma_i(N, \upsilon, A) = \upsilon(T).$$

Entonces una regla de asignación es eficiente en componentes si los jugadores en cada una de las componentes distribuyen el valor de la misma entre ellos, y no se produce transferencia de utilidad entre las diferentes componentes del juego. Es decir, la propiedad de eficiencia en componentes nos indica que cada componente conexa T del grafo (N, A) se reparte la utilidad que puede conseguir.

Definición 3.2. *Una regla de asignación $\gamma : G^N \to \mathbb{R}^N$ es* ***aditiva*** *si*

$$\gamma(N, \upsilon + \omega, A) = \gamma(N, \upsilon, A) + \gamma(N, \omega, A)$$

$\forall (N, \upsilon), (N, \omega) \in G^N_{\mathcal{C}}$ y el grafo de comunicación (N, A).

Definición 3.3. *Un arco $a \in A$ se denomina* ***arco superfluo*** *para la situación de comunicación (N, υ, A) si*

$$r_N^{\upsilon}(L) = r_N^{\upsilon}(L \cup \{a\}) \quad \forall\ L \subseteq A$$

Por lo tanto, en cada subsistema de comunicación, la presencia de un arco superfluo no afecta a las ganancias de la coalición ya que dicho arco no desempeña ninguna función.

Definición 3.4. *Una regla de asignación $\gamma : G^N \to \mathbb{R}^N$ verifica la* ***propiedad del arco superfluo*** *si*

$$\gamma(N, \upsilon, A) = \gamma(N, \upsilon, A \setminus \{a\})$$

$\forall (N, \upsilon, A) \in G_{\mathcal{C}}^N$ *y* $\forall\ a \in A$ *arco superfluo en* (N, υ, A).

Tras definir la eficiencia en componentes, la aditividad y la propiedad del arco superfluo, formulamos el siguiente Lema.

Lema 3.1. *El valor posicional* $\Pi : G_{\mathcal{C}}^N \to \mathbb{R}^N$ *satisface la eficiencia de componentes, la aditividad y la propiedad del arco superfluo.*

Prueba.

Aditividad:

La aditividad se sigue de la aditividad del valor de Shapley,

$$r_A^{\upsilon+\omega} = r_A^{\upsilon} + r_A^{\omega} \quad \text{y} \quad r_N^{\upsilon+\omega} = r_N^{\upsilon} + r_N^{\omega}$$

$\forall \upsilon, \omega \in G_{\mathcal{C}}^N$ (juegos con comunicación restringida); y $\forall (N, A)$ grafos de comunicación.

Eficiencia en componentes:

Sea $(N, \upsilon, A) \in G_{\mathcal{C}}^N$ y $T \in N/A$. Entonces:

$$\sum_{i \in T} \Pi_i(N, \upsilon, A) = \sum_{i \in T} \sum_{a \in A_i} \frac{1}{2} \Phi_a(A, r_N^{\upsilon}) = \sum_{a \in A(T)} \Phi_a(A, r_N^{\upsilon}) =$$

$$= \sum_{a \in A(T)} \Phi_a(A(T), r_N^{\upsilon}) = r_N^{\upsilon}(A(T)) = \upsilon(T)$$

donde la tercera igualdad se cumple por la definición del valor de Shapley y por lo siguiente:

$$r_N^{\upsilon}(L \cup a) - r_N^{\upsilon}(L) = r_N^{\upsilon}((L \cap A(T)) \cup a) - r_N^{\upsilon}(L \cap A(T)) \ \forall L \subseteq A \text{ y } a \in A(T)$$

Propiedad de arco superfluo:

Si $a \in A$ es un arco superfluo de $(N, \upsilon, A) \in G^N$, entonces por la definición 3.3 verifica:

$$r_N^{\upsilon}(L) = r_N^{\upsilon}(L \cup \{a\}) \quad \forall\ L \subseteq A$$

Esto implica que el arco a es un jugador nulo en el juego (A, r_N^{υ}) y $\Phi_a(A, r_N^{\upsilon}) = 0$.

Además, se deduce que $\Phi_b(A, r_N^{\upsilon}) = \Phi_b(A \setminus \{a\}, r_N^{\upsilon}) \quad \forall b \in A \setminus \{a\}$.

Por lo tanto, $\Pi(N, \upsilon, A) = \Pi(N, \upsilon, A \setminus \{a\})$ y queda probada la propiedad del arco superfluo. $\square$

Definición 3.5. *Una situación de comunicación* $(N, \upsilon, A) \in G_C^N$ *se denomina de* ***arco anónimo*** *si existe una función f:* $\{0, 1, ..., |A|\} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$r_N^{\upsilon}(L) = f(|L|) \ \ \forall L \subseteq A.$$

Entonces, en una situación de comunicación de arco anónimo, todos los nodos tienen la misma importancia. La intensidad comunicativa de un nodo por lo tanto puede ser medida por su grado y por tanto las ganancias se pueden asignar de forma proporcional al grado. El grado, d, de un grafo se corresponde con:

$$d_i(N, A) = |A_i|.$$

Definición 3.6. *Una regla de asignación* $\gamma : G^N \to \mathbb{R}^N$ *verifica la* ***propiedad del grado*** *si, para todas las situaciones de comunicación de arco anónimo,* $\gamma(N, \upsilon, A)$ *es un múltiplo del grado del vector* $d(N, A) = (d_i(N, A))_{i \in N}$*, es decir,*

$$\gamma(N, \upsilon, A) = \alpha \cdot d(N, A) \quad \textit{para algún } \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

En Borm et al. (1992), se incluye una definición equivalente de arco anónimo:

Lema 3.2. *Sea* $(N, \upsilon, A) \in G^N$*.* (N, υ, A) *verifica la propiedad de arco anónimo si y solo si*

$$r(N, L \setminus \{a\}) = r(N, L \setminus \{b\}) \quad \forall \ \ L \subseteq A \quad y \quad a, b \in L.$$

Lema 3.3. *El valor posicional* Π *satisface la propiedad del grado.*

Prueba.

Sea $(N, \upsilon, A) \in G_C^N$ un juego que verifica la propiedad de arco anónimo.

Si $A = \emptyset$, $\Pi(N, \upsilon, A) = 0 = d(N, A)$.

Entonces, suponemos que $A \neq \emptyset$.

Sea f la función dada en la definición de arco anónimo, y $a \in A$.

Ya que (A, r_N^{υ}) es un juego anónimo, es decir, todos sus arcos son simétricos, tenemos que:

$$\Phi_a(A, r_N^{\upsilon}) = \tfrac{1}{|A|} r_N^{\upsilon}(A) = \tfrac{1}{|A|} f(|A|).$$

Por lo tanto,

$$\Pi_i(N, \upsilon, A) = \sum_{a \in A_i} \frac{1}{2} \Phi_a(A, r_N^{\upsilon}) = \sum_{a \in A_i} \frac{1}{2} \frac{f(|A|)}{|A|} = \frac{1}{2} \frac{f(|A|)}{|A|} |A_i| = \frac{1}{2} \frac{f(|A|)}{|A|} d_i(N, A), \quad \forall i \in N \qquad \square$$

Ahora, probaremos que las propiedad antes mencionadas caracterizan el valor posicional Π en la subclase de las situaciones de comunicación libres de ciclos, donde los grados de comunicación no contienen ciclos.

Denotaremos por G_*^N a las situaciones de comunicación libres de ciclos.

Teorema 3.1. *El valor posicional es la única regla de asignación sobre G_*^N que satisface la eficiencia de componentes, la aditividad, la propiedad del arco superfluo y la propiedad del grado.*

Prueba.

Sea $\gamma : G_*^N \to \mathbb{R}$ que satisface la eficiencia en componentes, la aditividad, la propiedad del arco superfluo y la propiedad del grado.

Como ya hemos probado que el valor posicional satisface estas cuatro propiedades en los Lemas 3.1 y 3.3, basta con probar que:

$$\gamma(N, \upsilon, A) = \Pi(N, \upsilon, A)$$

para comprobar la unicidad.

Sea (N, A) un grafo de comunicación libre de ciclos.

Por aditividad, y por el hecho de que $\{u_S||S| \geqq 2\}$ es una base de la clase G_0^N de juegos 0-normalizados, falta probar que,

$$\gamma(N, \beta u_S, A) = \Pi(N, \beta u_S, A) \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad S \in 2^N \text{con} \quad |S| \geqq 2. \tag{3.1}$$

Sea $\beta \in \mathbb{R}$ y $S \in 2^N$, $|S| \geqq 2$ fijos a lo largo de esta prueba. Además, por conveniencia de notación definimos $w = \beta u_S$.

Para probar la igualdad (3.1) distinguiremos entre dos casos:

En el primer caso, no hay componentes $T \in N/A$ con $S \subseteq T$. Entonces, $r_N^v(L) = 0$ $\forall L \subseteq A$. Así, $\Phi_a(A, r_N^w) = 0 \quad \forall a \in A$ y, en consecuencia, $\Pi_i(N, \upsilon, A) = 0 \quad \forall i \in N$.

Además, como en este caso cada arco es superfluo, la propiedad del arco superfluo implica que $\gamma(N, \omega, A) = \gamma(N, \omega, \emptyset)$. Entonces, dado que $(N, \omega, \emptyset)$ es un arco anónimo, la propiedad de grado implica que hay un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma_i(N, \omega, \emptyset) = \alpha d_i(N, \emptyset) = 0 \quad \forall i \in N.$$

Por lo tanto, $\gamma = \Pi$.

En el segundo caso, sea $T \in N/A$ tal que $S \subseteq T$. Entonces, $(T, A(T))$ es un árbol y existe un único conjunto $H(S) \subseteq T$ definido por

$$H(S) = \cap \{C|S \subseteq C \subseteq T, (C, A(C))\}$$

es un subgrafo conectado de S.

Es sencillo verificar que

$$r_N^\omega(L) = \begin{cases} \beta & \text{si } A(H(S)) \subseteq L \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3.2}$$

Por lo tanto,

$$\Phi_a(A, r_N^{\omega}) = \begin{cases} |A(H(S))|^{-1}\beta & \text{si } a \in A(H(S)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que implica que

$$\Pi_i(N, \omega, A) = \sum_{a \in A_i \cap A(H(S))} \frac{1}{2}|A(H(S))|^{-1}\beta = \frac{d_i(N, A(H(S)))}{2|A(H(S))|}\beta = \frac{d_i(N, A(H(S)))}{\sum\limits_{j \in N} d_j(N, A(H(S)))}\beta$$

$\forall i \in N$.

Además, (3.2) implica que cada arco $a \notin A(H(S))$ es superfluo. Y así, la propiedad del arco superfluo implica que

$$\gamma(N, \omega, A) = \gamma(N, \omega, A(H(S))). \tag{3.3}$$

La situación de comunicación $(N, \omega, A(H(S)))$ es arco anónimo porque el Lema 3.2. y el hecho de que

$$r_N^{\omega}(L\,\{a\}) = r_N^{\omega}(L\,\{b\}) = 0$$

$\forall L \subseteq A(H(S))$ y $a, b \in L$.

Por lo tanto la propiedad del grado implica que hay un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma_i(N, \omega, A(H(S))) = \alpha d_i(N, A(H(S))) \ \forall i \in N. \tag{3.4}$$

Así que, especialmente, $\gamma_i(N, \omega, A(H(S))) = 0 \quad \forall i \in N \setminus H(S)$.

Usando la propiedad de eficiencia en componentes, encontramos que,

$$\sum_{i \in C} \gamma_i(N, \omega, A(H(S))) = \sum_{i \in H(S)} \gamma_i(N, \omega, A(H(S))) = \omega(T) = \beta.$$

Así, de (3.4) se concluye que

$$\alpha = \left(\sum_{i \in H(s)} d_i(N, A(H(S))) \right)^{-1} \beta. \tag{3.5}$$

Combinando estos resultados, se obtiene que $\gamma = \Pi$ $\square$

3.2. Una caracterización basada en contribuciones equilibradas

En este apartado, mostramos una caracterización del valor posicional para grafos arbitrarios basada en la propiedad de contribuciones equilibradas.

Continuando con la notación del apartado anterior, sea γ una regla de asignación para juegos con comunicación restringida arbitrarios. En Slikker (2005) se introduce la siguiente propiedad.

Definición 3.7. *Una regla de asignación $\gamma : G^N \to \mathbb{R}$ verifica la propiedad de **contribuciones equilibradas** si,*

$$\sum_{a\in A_j} [\gamma_i(N, \upsilon, A) - \gamma_i(N, \upsilon, A \setminus \{a\})] = \sum_{a\in A_i} [\gamma_j(N, \upsilon, A) - \gamma_j(N, \upsilon, A \setminus \{a\})] \tag{3.6}$$

$\forall$ (N, υ, A) *situación de comunicación arbitraria y* $\forall i, j \in N$ *y siendo:*

$A_i = \{a \in A \mid i \in a\}$ *el conjunto de arcos en el grafo de comunicación* (N, A) *al que pertenece el jugador* i.

$A_j = \{a \in A \mid j \in a\}$ *el conjunto de arcos en el grafo de comunicación* (N, A) *al que pertenece el jugador* j.

Entonces, una regla de asignación verifica la propiedad de contribuciones equilibradas si la utilidad que pierde o gana el jugador i debida a la disminución de capacidad de comunicación del jugador j coincide con la utilidad que pierde o gana el jugador j debida a la disminución de capacidad de comunicación del jugador i en sentido que se indica en la expresión (3.6).

A continuación, probaremos que el valor posicional satisface la propiedad de contribuciones equilibradas y eficiencia en componentes (descrita en el apartado anterior). Para ello proporcionaremos previamente la definición de juego de unanimidad y una descripción alternativa a la dada en el capítulo anterior del valor posicional.

Definición 3.8. *Sea N un conjunto de jugadores y $\mathbb{R} \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$. El **juego de unanimidad** (N, u_R) es el juego definido por*

$$u_R(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \subseteq S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función característica del juego de arcos (A, r_N^υ) asociado a la situación de comunicación (N, υ, A) se puede escribir como una combinación lineal de juegos de unanimidad de manera única:

$$r^\upsilon = \sum_{L\subseteq A} \lambda_L(r^\upsilon) u_L.$$

En Slikker (2005), se escribe el valor posicional en términos de los coeficientes de unanimidad del juego de arco asociado ya que $\forall i \in N$,

$$\Pi_i(N, \upsilon, A) = \sum_{a\in A_i} \frac{1}{2}\Phi_a(N, r^\upsilon) = \sum_{a\in A_i} \frac{1}{2} \sum_{L\subseteq A: a\in L} \frac{\lambda_L(r^\upsilon)}{|L|} = \sum_{L\subseteq A} \frac{1}{2}\lambda_L(r^\upsilon)\frac{|L_i|}{|L|}$$

Utilizaremos esta descripción para demostrar el siguiente Lema.

Lema 3.4. *El valor posicional* Π *satisface la eficiencia de componentes y las contribuciones equilibradas.*

Prueba

En el Lema 3.1. de este tercer capítulo se ha probado que el valor posicional verifica la eficiencia en componentes. Por lo tanto, falta probar que verifica la propiedad de contribuciones equilibradas.

Sea (N, v, A) un situación de comunicación e $i, j \in N$ dos jugadores distintos. Entonces:

$$\sum_{a \in A_j} [\Pi_i(N, v, A) - \Pi_i(N, v, A \setminus \{a\})] =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{a \in A_j} \left[\sum_{L \subseteq A} \lambda_L(r^v) \frac{|L_i|}{|L|} - \sum_{L \subseteq A \setminus \{a\}} \lambda_L(r^v) \frac{|L_i|}{|L|} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{a \in A_j} \sum_{L \subseteq A : a \in L} \lambda_L(r^v) \frac{|L_i|}{|L|} =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{L \subseteq A} |L_j| \lambda_L(r^v) \frac{|L_i|}{|L|} =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{L \subseteq A} \lambda_L(r^v) \frac{|L_i||L_j|}{|L|} =$$

$$\sum_{a \in A_i} [\Pi_j(N, v, A) - \Pi_j(N, v, A \setminus \{a\})]$$

donde la primera igualdad se sigue por definición y las siguientes, reordenando términos. $\square$

Finalmente, proponemos la siguiente caracterización del valor posicional para situaciones de comunicación arbitrarias.

Teorema 3.2. *El valor posicional es la única regla de asignación en el dominio de todas las situaciones de comunicación que verifica la eficiencia de componentes y la propiedad de contribuciones equilibradas.*

Prueba:

El Lema anterior (Lema 3.4.) indica que el valor posicional verifica la eficiencia de componentes y la propiedad de contribuciones equilibradas. Supongamos que ϕ satisface estas dos propiedades y probemos que $\phi = \Pi$

Esta demostración se realizará por inducción en $|A|$.

$|A| = 0$:

$\forall (N, v, A)$, las dos reglas de asignación satisfacen la propiedad de eficiencia en componentes, por lo tanto coinciden, $\Pi = \phi$.

Sea $K \geq 1$ y supongamos que Π y ϕ coinciden para todo (N, v, A) con $|A| \leq K - 1$.

Sea (N, v, A) tal que $|A| = K$.

Veamos que $\forall T \in N/A$ y $\forall i \in T$, $\phi_i(N, v, A) = \Pi(N, v, A)$.

Si $|T| = 1$, esta igualdad se sigue directamente de la propiedad de eficiencia en componentes.

Si $|T| \geq 2$, sea $T \in N/A$. Sin pérdida de generalidad, denotemos $T = \{1, 2, ..., t\}$. Por las propiedades de eficiencia de componentes y contribuciones equilibradas, tenemos el siguiente sistema de igualdades,

$$|A_2|\phi_1(N, v, A) - |A_1|\phi_2(N, v, A) = \sum_{a \in A_2} \phi_1(N, v, A\ \ \{a\}) - \sum_{a \in A_1} \phi_2(N, v, A\ \ \{a\});$$
$$|A_c|\phi_1(N, v, A) - |A_1|\phi_c(N, v, A) = \sum_{a \in A_t} \phi_1(N, v, A)\,\{a\}) - \sum_{a \in A_1} \phi_t(N, v, A)\,\{a\});$$
$$\sum_{i \in T} \phi_i(N, v, A) = v(T).$$

La primera igualdad $t - 1$ proviene de la propiedad de contribuciones equilibradas aplicada al par $\{1, j\} \quad \forall j \in \{2, ..., t\}$. Nótese que desde $|T| \geq 2$ y $j \in T\ \forall j \in \{1, ..., t\}$, $|A_j| \geq 1 \quad \forall j \in \{1, ..., t\}$. La última igualdad viene de la propiedad de eficiencia de componentes.

Por la hipótesis de inducción se deduce que el sistema anterior es equivalente a

$$|A_2|\phi_1(N, v, A) - |A_1|\phi_2(N, v, A) = \sum_{a \in A_2} \Pi_1(N, v, A\ \ \{a\}) - \sum_{a \in A_1} \Pi_2(N, v, A\ \ \{a\});$$
$$|A_c|\phi_1(N, v, A) - |A_1|\phi_t(N, v, A) = \sum_{a \in A_t} \Pi_1(N, v, A)\,\{a\}) - \sum_{a \in A_1} \Pi_t(N, v, A)\,\{a\});$$
$$\sum_{i \in T} \phi_i(N, v, A) = v(T).$$

Es un ejercicio sencillo para mostrar que este es un sistema regular en t variables, $\phi_1(N, v, A), ..., \phi_t(N, v, A)$. En consecuencia, hay una única solución.

Ya que el valor de posición verifica las dos propiedades del Teorema, $\Pi_1(N, v, A), ..., \Pi_t(N, v, A)$ es una solución, y, por tanto, la solución es única.

Por lo tanto, podemos concluir que $\phi(N, v, A) = \Pi(N, v, A) \quad \forall (N, v, A)$ con $|A| = K$.

□

3.3. Una caracterización para grafos arbitrarios

En van den Nouweland y Slikker (2012) se trata una caracterización del valor posicional para grafos arbitrarios diferente a la propuesta por Slikker basada en la propiedad de contribuciones equilibradas. En este apartado se realiza un cambio de enfoque, ya que suponemos fijo el conjunto de jugadores N y trabajamos con el par (g, v), siendo g el grafo y v la función de valoración que asigna un valor a cada red en G.

Sea $S \subseteq N$ una coalición en N, $g(S)$ denota los arcos en el grafo g que están entre los jugadores en la coalición S.

La noción de conectividad induce, para cualquier red $g \in G$, una partición $\pi(g)$ del conjunto de jugadores N en coaliciones de jugadores mutuamente conectados donde estas coaliciones son máximas con respecto a la inclusión del conjunto. Los componentes del grafo g son $C(g) = \{(S, g(S)) | S \in \pi(g)\}$.

Para cada red $g \in G$, $g \neq \emptyset$, definimos la función de valoración de unanimidad $u_g : G \to \mathbb{R}$ por

$$u_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \subseteq h \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto, cada función de valoración se puede escribir como una combinación lineal de funciones de valoración de unanimidad u_g de manera única:

$$\mathrm{v} = \sum_{g \in G, g \neq \emptyset} \lambda_g(\mathrm{v}) u_g,$$

siendo $\lambda_g(\mathrm{v}), g \in G \setminus \{\emptyset\}$, coeficientes de unanimidad.

Definición 3.9. *Una función de valoración* v *es* ***aditiva en componentes*** *si el valor del grafo de comunicación es siempre igual a la suma de los valores de los arcos en cada uno de sus componentes.*

$$\mathrm{v}(g) = \sum_{(S, g(S)) \in C(g)} \mathrm{v}(g(S)) \ \ \forall g \in G$$

En adelante, el conjunto de todas las funciones de valoración aditivas en componentes se denotarán por V^{CA}.

Como en van den Nouweland y Slikker (2012), consideraremos dos dominios para las reglas de asignación:

- El dominio $G \times V$, que contiene todas las situaciones de comunicación.
- El dominio $G \times V^{CA}$, que contiene solo las situaciones de comunicación con funciones de valoración aditivas en componentes.

Es importante destacar que cuando trabajemos con este último dominio de funciones de valoración aditivas en componentes, debemos verificar que los axiomas utilizados no nos lleven fuera de este dominio.

Para evitar introducir una notación adicional para el valor de Shapley, se escribe el valor posicional utilizando los coeficientes de unanimidad.

El **valor posicional** es una regla de asignación Π en la que cada jugador $i \in N$ en una situación de comunicación (g, v) recibe la mitad del valor de Shapley de cada uno de los arcos en los que está involucrado dicho jugador, es decir:

$$\Pi_i(g, \mathrm{v}) = \sum_{g' \subseteq g} \frac{|g'_i|}{|g'|} \lambda_{g'}(\mathrm{v})$$

donde $\lambda_{g'}(\mathrm{v})$ es un coeficiente de unanimidad.

Consideraremos el valor posicional como una regla de asignación en el dominio $G \times V^{CA}$ de situaciones de comunicación con funciones de valoración aditivas en componentes y en el dominio $G \times V$

de todas las situaciones de comunicación.

A continuación se incluyen una serie de definiciones que nos permitirán establecer una axiomatización del valor posicional. Algunas de las propiedades utilizadas por Borm et al. (1992) e introducidas en la sección 3.1. para establecer la axiomatización del valor posicional en las situaciones de comunicación libres de ciclos serán adaptadas y reinterpretadas para adaptarlas a estas situaciones arbitrarias.

Comenzamos destacando la siguiente propiedad por no haber sido tratada con anterioridad.

Definición 3.10. *Una regla de asignación γ en $G \times V$, y por lo tanto también en $G \times V^{CA}$, es* ***descomponible en componentes*** *si*

$$\gamma_i(g, \mathrm{v}) = \gamma_i(g(S), \mathrm{v})$$

para todas las situaciones de comunicación $(g, \mathrm{v}) \in G \times V^{CA}$ con v función de valoración aditiva en componentes, $\forall (S, g(S)) \in C(g)$ y $\forall i \in S$.

Lema 3.5. *El valor posicional es descomponible en componentes.*

Prueba

Sea $\mathrm{v} \in V^{CA}$, $g \in G$, $(S, g(S)) \in C(g)$ y $i \in S$.

Si $|S| = 1$, entonces $S = \{i\}$ para un cierto i y, por definición del valor posicional, $g_i = \emptyset$ y $\Pi_i(g, \mathrm{v}) = \Pi_i(g(S), \mathrm{v}) = 0$.

Supongamos $|S| \geq 2$. Entonces:

$$\Pi_i(g, \mathrm{v}) = \sum_{g' \subseteq g} \frac{|g'_i|}{2|g'|} \lambda_{g'}(\mathrm{v})$$

$$= \sum_{g' \subseteq g(S)} \frac{|g'_i|}{2|g'|} \lambda_{g'}(\mathrm{v}) + \sum_{g' \subseteq g \setminus g(S)} \frac{|g'_i|}{2|g'|} \lambda_{g'}(\mathrm{v}) + \sum_{g' \subseteq g : g' \cap g(S) \neq \emptyset \wedge g' \setminus g(S) \neq \emptyset} \frac{|g'_i|}{2|g'|} \lambda_{g'}(\mathrm{v})$$

$$= \sum_{g' \subseteq g(S)} \frac{|g'_i|}{2|g'|} \lambda_{g'}(\mathrm{v})$$

$$= \Pi_i(g(S), \mathrm{v}),$$

donde la tercera igualdad se debe al hecho de que $|g'_i| = 0 \ \forall g' \subseteq g \ g(S)$, ya que $i \in S$ y $(S, g(S)) \in C(g)$ y $\lambda_{g'}(\mathrm{v}) = 0 \quad \forall g' \subseteq g$ tal que $g' \cap g(S) \neq \emptyset$ y $g' \ g(S) \neq \emptyset$. □

Definición 3.11. *Una regla de asignación γ definida en $G \times V (G \times V^{CA})$ es* ***eficiente en componentes*** *si*

$$\sum_{i \in S} \gamma_i(g, \mathrm{v}) = \mathrm{v}(g(S))$$

para todas las situaciones de comunicación $(g, \mathrm{v}) \in G \times V^{CA}$ con una función de valoración aditiva en componentes y $(S, g(S)) \in C(g)$.

Esto es, para cada componente de un grafo, los beneficios conjuntos de sus jugadores son iguales al valor de sus arcos.

Lema 3.6. *El valor posicional es eficiente en componentes.*

Prueba

Sea $\mathrm{v} \in V^{CA}$, $g \in G$, $(S, g(S)) \in C(g)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{i \in S} \Pi_i(g, \mathrm{v}) &= \sum_{i \in S} \Pi_i(g(S), \mathrm{v}) \\ &= \sum_{i \in S} \sum_{g' \subseteq g(S)} \frac{|g'_i|}{2|g'|} \lambda_{g'}(\mathrm{v}) \\ &= \sum_{g' \subseteq g(S)} \lambda_{g'}(\mathrm{v}) = \mathrm{v}(g(S)),\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue de la descomponibilidad en componentes del valor posicional. □

Definición 3.12. *Una regla de asignación γ en $G \times V(G \times V^{CA})$ es* ***aditiva*** *si*

$$\gamma(g, \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = \gamma(g, \mathrm{v}_1) + \gamma(g, \mathrm{v}_2)$$

para todas las situaciones de comunicación (g, v_1), $(g, \mathrm{v}_2) \in G \times V$.

Es importante destacar que si $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V^{CA}$, entonces $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V^{CA}$ y por lo tanto, podemos considerar la aditividad de una regla de asignación en el dominio de situaciones de comunicación con funciones de valoración aditivas en componentes.

Lema 3.7. *El valor posicional es aditivo.*

Esta propiedad ya ha sido probada con anterioridad para el valor posicional.

Definición 3.13. *Un arco $a \in g$ en una situación de comunicación (g, v) se dice* ***superfluo*** *si*

$$\mathrm{v}(g') = \mathrm{v}(g' \setminus \{a\}) \qquad \forall g' \subseteq g \text{ grafos.}$$

Esta propiedad establece que la presencia o ausencia de un arco que no tiene influencia en el valor de ningún grafo, tampoco tiene influencia en las asignaciones de los jugadores en dicho grafo.

Veamos ahora que:

Definición 3.14. *Una regla de asignación γ en $G \times V(G \times V^{CA})$ satisface la propiedad de arco superfluo si*

$$\gamma(g, \mathrm{v}) = \gamma(g \setminus \{a\}, \mathrm{v})$$

$\forall (g, \mathrm{v}) \in G \times V$ situaciones de comunicación y $\forall a$ arcos superfluos en (g, v).

Lema 3.8. *El valor posicional satisface la propiedad de arco superfluo.*

En la primera sección de este capítulo se ha probado esta propiedad para el valor posicional.

Definición 3.15. *Una regla de asignación γ en $G \times V(G \times V^{CA})$ verifica la propiedad de* ***arco anónimo*** *si para cada grafo $g \in G$ y para cada $\mathrm{v} \in V$ (o V^{CA})*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } \gamma_i(g, \mathrm{v}) = \alpha |g_i| \quad \forall i \in N.$$

Lema 3.9. *El valor posicional satisface la propiedad de arco anónimo.*

Prueba:

Sea $g \in G$ y $\mathrm{v} \in V$ con la propiedad de arco anónimo. Entonces es sencillo probar por inducción al número de arcos en un grafo que,

$$\gamma_{g'}(\mathrm{v}) = \gamma_{g''}(\mathrm{v})$$

$\forall g', g'' \subseteq g$ con $|g'| = |g''|$.

Entonces, podemos encontrar un $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{g' \subseteq g} \frac{\lambda_{g'}(\mathrm{v})}{g'} = \beta \quad \forall a \in G.$$

Usando esto, tenemos que para cada $i \in N$

$$\Pi(g, \mathrm{v}) = \sum_{g' \subseteq g} \frac{|g_i'|}{2|g'|} \lambda_{g'}(\mathrm{v}) = \sum_{g' \subseteq g} \sum_{a \in g_i'} \frac{\lambda_{g'}(\mathrm{v})}{2|g'|}$$

$$= \sum_{a \in g_i} \frac{1}{2} \sum_{g' \subseteq g : a \in g'} \frac{\lambda_{g'}(\mathrm{v})}{|g'|} = \sum_{a \in g_i} \frac{1}{2} \beta = \frac{\beta}{2} |g_i|.$$

□

Teniendo en cuenta estas definiciones, se propone la siguiente axiomatización del valor posicional.

Teorema 3.3. *El valor posicional es la única regla de asignación en $G \times V^{CA}$ que es eficiente en componentes, aditiva, y satisface las propiedades de arco superfluo y arco anónimo.*

Prueba:

Ya hemos probado que el valor posicional satisface las propiedades de eficiencia en componentes, aditividad, arco superfluo y arco anónimo en el dominio (G, V), por lo tanto, es evidente que también verifica estas propiedades en el dominio (G, V^{CA}).

Supongamos que existe una regla de asignación $\gamma : G \times V^{CA} \to \mathbb{R}^N$ verificando las propiedades de eficiencia en componentes, aditividad, arco superfluo y arco anónimo.

Sea $g \in G$ y $\mathrm{v} \in V^{CA}$.

Sabemos que

$$\mathrm{v} = \sum_{g' \in G, g' \neq \emptyset} \lambda_{g'}(\mathrm{v}) u_{g'},$$

además, como v es una función de valoración aditiva en componentes, $\gamma_{g'}(\mathrm{v}) = 0$ para todos los grafos g' que tienen dos arcos que no están en el mismo componente. Así, la aditividad de γ implica que

$$\gamma(g, \mathrm{v}) = \sum_{g' \in G : (N(g'), g') \in C(g')} \gamma(g, \lambda_{g'}(\mathrm{v}) u_{g'}).$$

Por lo tanto, es suficiente con demostrar que $\gamma(g, \lambda_{g'}(\mathrm{v}) u_{g'})$ se determina de forma única para todo $g' \in G$ con la propiedad de que $(N(g'), g') \in C(g')$.

Sea $g' \in G$ con $(N(G'), G') \in C(g')$ y $\omega = \lambda_{g'}(\mathrm{v}) u_{g'}$. Se distinguen dos casos:

- *Caso 1:*

  Supongamos $g' \setminus g \neq \emptyset$. Entonces $\omega(g'') = 0 \quad \forall g'' \subseteq g$. Así, cada arco $a \in g$ es superfluo en (g'', ω), para cada $g'' \subseteq g$ con $a \in g''$.

  Aplicando repetidamente la propiedad de arco superfluo de γ podemos concluir que $\gamma(g, \omega) = \gamma(\emptyset, \omega)$. En el sistema de comunicación vacío, cada componente consiste en un solo jugador aislado. La propiedad de eficiencia en componentes de γ nos da $\gamma_i(\emptyset, \omega) = \omega(\emptyset) = 0$ para cada $i \in N$.

- *Caso 2:*

  Supongamos $g' \subseteq g$. Sea $a \in g \setminus g'$ y $g'' \subseteq g$ con $a \in g''$. Entonces,

$$\omega(g'') = \omega(g'' \setminus \{a\}) = \begin{cases} \lambda_{g'}(\mathrm{v}) & \text{si } g' \subseteq g'' \\ 0 & \text{si } g' \setminus g'' \neq \emptyset \end{cases}$$

  Por lo tanto, cada arco $a \in g \setminus g'$ es superfluo en (g'', ω), para cada $g'' \subseteq g$ con $a \in g''$. Aplicando repetidamente la propiedad del arco superfluo (eliminando así los arcos en $g \setminus g'$ uno por uno) de γ podemos concluir que,

$$\gamma(g, \omega) = \gamma(g', \omega) \tag{3.7}$$

  La función de valoración ω es un arco anónimo en g'. Por lo tanto, mediante el arco anónimo de γ, podemos encontrar un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para cada $i \in N$ se sostiene que,

$$\gamma_i(g', \omega) = \alpha |g'_i|. \tag{3.8}$$

  Debido a $(N(g'), g') \in C(g')$, sabemos que $\Pi(g') = \Big\{ N(g'), \{i\}_{i \in N \setminus N(g')} \Big\}$.

  Como $u_{g'}$ es aditiva en componentes, entonces se tiene que ω es aditiva en componentes. Usando la eficiencia de componentes de γ, obtenemos,

$$\sum_{i \in N(g')} \gamma_i(g', \omega) = \omega(g') = \lambda_{g'}(\mathrm{v}). \tag{3.9}$$

Tomando, (3.8) y (3.9),

$$\lambda_{g'}(\mathrm{v}) = \sum_{i \in N(g')} \gamma_i(g', \omega) = \sum_{i \in N(g')} \alpha |g'_i| = 2\alpha |g'|,$$

De lo que se deduce fácilmente que $\alpha = \dfrac{\lambda_{g'}(\mathrm{v})}{2|g'|}$. Y junto con las igualdades (3.6) y (3.7), se demuestra que $\gamma(g, \omega)$ está determinada de forma única. □

Para finalizar este capítulo, vamos a proponer una nueva axiomatización del valor posicional. En este caso, en vez de trabajar con una regla de asignación eficiente en componentes, requeriremos que sea eficiente a nivel global.

Definición 3.16. *Una regla de asignación γ en $G \times V(G \times V^{CA})$ es* ***eficiente*** *si*

$$\sum_{i \in N} \gamma_i(g, \mathrm{v}) = \mathrm{v}(g)$$

para todas las situaciones de comunicación $(g, \mathrm{v}) \in G \times V(G \times V^{CA})$.

Lema 3.10. *El valor posicional es eficiente.*

Prueba:

Sea $\mathrm{v} \in V$ y $g \in G$.

$$\sum_{i \in N} \Pi_i(g, \mathrm{v}) = \sum_{i \in N} \sum_{g' \subseteq g} \frac{|g'_i|}{2|g'|} \lambda_{g'}(\mathrm{v}) = \sum_{g' \subseteq g} \lambda_{g'}(\mathrm{v}) = \mathrm{v}(g).$$

donde la primera igualdad se obtiene de la definición del valor posicional. □

Además, con esta propiedad de eficiencia, se puede proporcionar una axiomatización del valor posicional en un dominio que incluya todas las funciones de valoración.

Teorema 3.4. *El valor posicional es la única regla de asignación en $G \times V$ que es eficiente, aditiva y verifica las propiedades de arco superfluo y arco anónimo.*

Prueba:

Ya hemos probado que el valor posicional Π es eficiente, aditivo y verifica las propiedades de arco superfluo y arco anónimo. Por lo tanto, falta probar que existe una única regla de asignación en el dominio $(G \times V)$ que verifica estas cuatro propiedades.

Supongamos que existe una regla de asignación $\gamma : G \times V \to \mathbb{R}^N$ verificando las propiedades de eficiencia, aditividad, arco superfluo y arco anónimo.

Sea $g \in G$ y $\mathrm{v} \in V$. Sabemos que,

$$\mathrm{v} = \sum_{g' \in G, g' \neq \emptyset} \lambda_{g'}(\mathrm{v}) u_{g'},$$

Así, la aditividad de γ implica que

$$\gamma(g, \mathrm{v}) = \sum_{g' \in G} \gamma(g, \lambda_{g'}(\mathrm{v}) u_{g'}).$$

Por lo tanto, es suficiente con demostrar que $\gamma(g, \lambda_{g'}(\mathrm{v}) u_{g'})$ se determina de forma única para todo $g' \in G$.

Sea $g' \in G$ y $\omega = \lambda_{g'}(\mathrm{v}) u_{g'}$. Se distinguen dos casos:

- *Caso 1:*

  Supongamos $g' \setminus g \neq \emptyset$. Entonces $\omega(g'') = 0 \quad \forall g'' \subseteq g$. Así, ω es un arco anónimo en g y por la propiedad de arco anónimo de γ podemos encontrar un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma_i(g, \omega) = \alpha |g_i| \quad \forall i \in N$.

  En el grafo vacío $|g_i| = 0 \quad \forall i$, lo que nos da $\gamma_i(\emptyset, \omega) = \alpha |g_i| = 0 \quad \forall i \in N$.

  Si $g \neq \emptyset$, podemos usar la eficiencia de γ para,

  $$0 = \sum_{i \in N} \gamma_i(g, \omega) = \sum_{i \in N} \alpha |g_i| = 2\alpha |g|.$$

  Por lo tanto, $\alpha = 0$ y $\gamma_i(g, \omega) = \alpha |g_i| = 0 \quad \forall i \in N$.

- *Caso 2:*

  Supongamos $g' \subseteq g$. De la correspondiente parte de la demostración del Teorema anterior, obtenemos (3.7) y (3.8).

  Usando la eficiencia de γ,

  $$\sum_{i \in N(g')} \gamma_i(g', \omega) = \omega(g') = \lambda_{g'}(\mathrm{v}). \tag{3.10}$$

  Tomando, (3.8) y (3.10), tenemos que,

  $$\lambda_{g'}(\mathrm{v}) = \sum_{i \in N} \gamma_i(g', \omega) = \sum_{i \in N} \alpha |g'_i| = 2\alpha |g'|,$$

  De lo que se deduce fácilmente que $\alpha = \dfrac{\lambda_{g'}(\mathrm{v})}{2|g'|}$. Y junto con las igualdades (3.7) y (3.8), se demuestra que $\gamma(g, \omega)$ está determinada de forma única. □

Capítulo 4

Relación entre el valor de Myerson y el valor posicional

El valor posicional ha sido sobradamente descrito en el capítulo anterior. Por lo tanto, en este apartado expondremos las principales propiedades del valor de Myerson y a continuación se estudiará la relación existente entre el valor posicional y el valor de Myerson dada por Casajus (2007).

Destacar que en Kongo (2010) también se incluye una comparación del valor posicional y el valor de Myerson pero no será tratada en este documento por basarse en una estructura totalmente diferente a las situaciones de comunicación con grafos no dirigidos trabajadas en este documento. En Kongo (2010) se propone dividir de antemano cada arco en dos, y definir un nuevo juego en el conjunto de arcos divididos. Así, el valor posicional se podrá ver como el valor de Shapley de ese nuevo juego y lo mismo ocurrirá con el valor de Myerson. La diferencia entre ambos valores radicará en la existencia de una estructura de coalición en el juego modificado.

El valor de Myerson $\mu : G^N \to \mathbb{R}^N$ satisface la eficiencia de componentes, la aditividad y la propiedad de arco superfluo. Además, es la única regla de asignación cumple la eficiencia en componentes y es equitativa.

En Casajus (2007) se tratan dos estructuras diferentes de juegos, la estructura de cooperación y la estructura de conferencia. En los juegos con estructura de cooperación, los arcos conectan exactamente a dos jugadores. Sin embargo, en los juegos con estructura de conferencia los arcos pueden conectar a cualquier número de jugadores. Por este motivo, en los juegos con estructura de conferencia, Casajus sustituye la forma de jugador-arco, por la forma de jugadores-hiperarcos, que será una generalización de la anterior.

A lo largo de este último capítulo nos centraremos en los juegos con estructura de cooperación, para así continuar en el contexto de los juegos TU con grafo de comunicación, puesto que la estructura de cooperación de la que habla Casajus no es más que los grafos de comunicación que han sido tratados a lo largo de este documento.

En este apartado expresaremos el valor posicional para un juego con estructura de cooperación en términos del valor de Myerson en la forma agente-arco del juego original. Mientras que el valor posicional enfatiza el papel de los arcos, el valor de Myerson se centra en los jugadores. Por lo tanto, dividiremos a los jugadores en agentes separados que representen exactamente cada uno de los arcos de un jugador.

Definición 4.1. *Para cualquier juego con estructura de cooperación $G = (N, v, A)$, su* ***forma agente-arco (LAF)****, $LAF(G) = (\bar{N}, \bar{v}, \bar{A})$ se define como:*

$$\bar{N} = \bigcup_{i \in N} \bar{N}(i), \qquad \bar{N}(i) := \{(i, \lambda) | \lambda \in L_i\} \tag{4.1}$$

$$\bar{A} = \bar{A}^0 \cup \bigcup_{i \in N} A^{\bar{N}(i)}, \quad \bar{A}(0) := \{i, j | ij \in L\}, \quad \overline{ij} := \{(i, ij), (j, ij)\} \tag{4.2}$$

$$\bar{v}(\bar{K}) = v(N(\bar{K})), \quad N(\bar{K}) := \left\{i \in N | \bar{N}(i) \cap \bar{K} \neq \emptyset\right\}, \quad \bar{K} \subseteq \bar{N} \tag{4.3}$$

En este contexto, definimos un arco $\{i, j\}$ como ij. N denota el conjunto de jugadores en $G = (N, v, A)$ y el conjunto de jugadores $\bar{N}$ comprende los jugadores-arco (i, λ), para todos los jugadores $i \in N$ y todos los arcos $\lambda \in A_i$.

Al suponer que no hay jugadores aislados, todos los conjuntos agentes-arcos $\bar{N}(i)$ son no vacíos.

La estructura de cooperación $\bar{A}$ contiene los arcos originales ij como los arcos $\bar{i}, \bar{j}$ en el conjunto de arcos $\bar{A}^0$.

$\bar{A}$ conecta completamente el conjunto de arcos-agentes $\bar{N}(i)$ de cualquier jugador original $i \in N$ a través del conjunto de arcos $A^{\bar{N}(i)}$.

Además, por (4.3), cualquiera de los agentes de un jugador, es tan productivo como el jugador original, y cualquiera de ellos es suficiente para hacer el trabajo.

A continuación se incluye un ejemplo que nos permitirá visualizar la definición y estas aclaraciones con mas facilidad.

Ejemplo 4.1. *Sea G un juego con estructura de cooperación. Incluimos el grafo del juego G y el grafo de su forma agente-arco, LAF(G). Los arcos en LAF(G) que se corresponden con los arcos originales en G se indican con líneas continuas, mientras que los arcos que conectan a los distintos agentes de un jugador se representan con líneas discontinuas.*

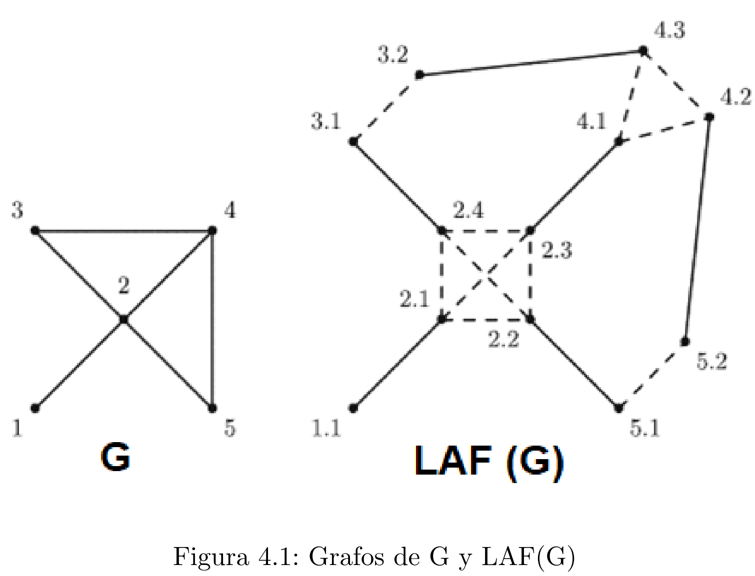

Figura 4.1: Grafos de G y LAF(G)

El jugador 1 tiene un solo arco en G por lo que está representado por un agente único 1.1 en LAF(G). Además, las líneas son continuas en este caso, y el arco que une a los jugadores 1 y 2 en G, se corresponde con el arco que une a los agentes 1.1 y 2.1. El jugador 2 tiene cuatro arcos en G que están representados por los agentes 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 en LAF(G) que están completamente conectados entre sí. Los jugadores 3 y 5 tienen dos arcos en G que están representados pos dos agentes cada uno en LAF(G). Y finalmente en G el jugador 4 tiene tres arcos que se corresponden con los tres agentes 4.1, 4.2 y 4.3, completamente conectados entre sí, de LAF(G).

A continuación proporcionamos la axiomatización del valor posicional para los juegos con estructura de cooperación dada por primera vez en Casajus (2007).

Teorema 4.1. *Para toda situación de comunicación restringida 0-normalizada y sin jugadores aislados,* $G = (N, v, A)$ *tenemos que,*

$$\Pi_i(G) = \mu_{\bar{N}(i)}(LAF(G)) \qquad \forall i \in N$$

Finalmente, y como ya hemos mencionado, en Casajus (2007) se propone un resultado similar para juegos con estructura de conferencia en el que se elimina la restricción de que los arcos conecten exactamente a dos jugadores, para trabajar con hiperarcos que podrán conectar a cualquier número de jugadores. Esta caracterización puede consultarse en Casajus (2007) y no se incluye aquí por tratarse de una estructura diferente a la utilizada en este Trabajo Fin de Máster.

Bibliografía

[1] Algaba, E., Bilbao, J.M., Borm, P. y López, J. (1998). The position value for union stable systems. FEW Research Memorandum; Vol. FEW 768. Tilburg: Operations research 52, 221?236.

[2] Borm, P., Owen, G. y Tijs, S. (1992). On the position value for comunication situations. SIAM Journal on Discrete Mathematics 5(3), 305-320.

[3] Casajus, A. (2007). The position value is the Myerson value, in a sense. International Journal of Game Theory (2007) 36, 47-55.

[4] Ghintran, A. (2013). Weighted position values. Mathematical Social Sciences 65, 157?163.

[5] Kongo, T. (2010). Difference between the position value and the Myerson value is due to the existence of coalition structures. International Journal of Game Theory (2010) 39, 669-675.

[6] Meessen, R. (1988). Communication games. Master's thesis, Department of Mathematics, University of Nijmegen, the Netherlands (in Dutch).

[7] Myerson, R. (1977). Graphs and cooperation in games. Mathematics of Operations Research 2 (3), 225-229.

[8] Shapley, L. (1953). A value for n-person games. Contributions to the Theory of Games II. Princeton University Press, Princeton, 307-317.

[9] Slikker, M. (2005). A characterization of the position value. International Journal of Game Theory 33(4), 505-514.

[10] Van den Nouweland, A., Borm, P. y Tijs, S. (1992). Allocation Rules for Hypergraph Communication Situations. International Journal of Game Theory (1992) 20, 255-268.

[11] Van den Nouweland, A. y Slikker, M. (2012). An axiomatic characterization of the position value for network situations. Mathematical Social Sciences, 64(3), 266-271.

[12] Van den Nouweland, A. y Slikker, M. (2016). The position value for partition function form network games. Journal of Public Economic Theory, 18, 226-247.

[13] Vazquez Brage, M., García Jurado, I. y Carreras, F. (1996). The Owen Value Applied to Games with Graph-Restricted Communication. Games and Economic Behavior, 12, 42-53.