USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Universida de Vigo

Trabajo Fin de Máster

El problema de asignación

Olalla Muiño Rodríguez

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2015-2016

Propuesta de Trabajo Fin de Máster

Título en galego: O problema de asignación

Título en español: El problema de asiinación

English title: The assignement problem

Modalidad: Modalidad A

Autor/a: Olalla Muiño Rodríguez, Universidad de Vigo

Director/a: Leticia Lorenzo Picado, Universidade de Vigo;

Breve resumen del trabajo:
En el problema de asignación clásico de investigación operativa, se quiere repartir un conjunto de tareas entre un grupo de trabajadores. Se conoce el tiempo de realización (o coste) que supone la asignación de cada trabajador a cada tarea y el objetivo es encontrar la asignación que minimice el tiempo global, teniendo en cuenta que cada trabajador ha de realizar una única tarea y cada tarea ha de ser realizada por un único trabajador. Este problema también se estudia dentro de la teoría de juegos cooperativa, donde su interpretación es un poco diferente. En lugar de haber un decisor que es el encargado de repartir las tareas entre los trabajadores, cada trabajador actúa como un decisor independiente y cada tarea está regulada por un empresario independiente. En este nuevo enfoque el objetivo varía, ya que se quieren maximizar los beneficios de la asignación y a su vez repartir dichos beneficios entre los trabajadores y los empresarios. El problema de asignación en teoría de juegos aparece habitualmente asociado a un modelo de mercado donde nos encontramos con un conjunto finito de compradores que está interesado en adquirir un bien y un conjunto de vendedores, cada uno de ellos con un bien en venta. Inicialmente se busca la asignación más eficiente y posteriormente se estudia el reparto de los beneficios generados entre los compradores y vendedores de manera que no se rompan los acuerdos alcanzados en un primer momento. Cuando en estos mercados no hay dinero, sino que la asignación se realiza en función de preferencias estamos ante los problemas de emparejamiento (Gale y Shapley, 1962), donde el objetivo es encontrar asignaciones que sean estables. El objetivo de este TFM es realizar una breve revisión de los principales trabajos realizados y aplicar alguno de dichos resultados a un problema real.

Recomendaciones: Es recomendable haber cursado las materias: Redes y planificación, Introducción a la Teoría de juegos y Juegos Cooperativos.

Doña Leticia Lorenzo Picado, profesora de la Universidade de Vigo, informan que el Trabajo Fin de Máster titulado

El problema de asignación

fue realizado bajo su dirección por doña Olalla Muiño Rodríguez para el Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que el trabajo está terminado, da su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Santiago de Compostela, a 30 de junio de 2016.

La directora:

Doña Leticia Lorenzo Picado

La autora:

Doña Olalla Muiño Rodríguez

Índice general

Resumen

Resumen en español

El problema de asignación se ocupa de aquellas situaciones en las que las unidades a asignar son indivisibles y, en la mayoría de las situaciones, sin la posibilidad de pagos monetarios. La asignación de alumnos a los colegios u universidades, la manera en las que se organizan algunos mercados laborales o la organización de un sistema para la asignación de riñones procedentes de donantes son algunos de los ejemplos en los que se ha aplicado el desarrollo teórico del problema de asignación en estos últimos años. En el trabajo presentado a continuación se abordará el problema de asignación desde una perspectiva teórica. Se estudian propiedades deseables de los emparejamientos, como que sean estables y óptimos. Dicha teoría irá acompañada de su aplicación a los casos de emparejamientos entre hombres y mujeres, de estudiantes con universidades y de riñones de donantes vivos con paciententes. Además se explicará en detalle el algoritmo propuesto por David Gale en 1974 que será de gran utilidad para el caso de los intercambios de riñones, problema en que se centrará este trabajo.

English abstract

The assignement problem focuses on those situations where the elements that are going to be allocated are indivisible and monetary transfer are rarely allowed. The allocation of students to schools or universities, the way to organize some labour markets or the organization of a kidney-exchange system are some of the examples in which theoretical developments related to the assignement problem have been applied in the last years. In the presetn work, the assignment problem will be studied from a theoretical point of view. We will focus on the appealing properties an assignment should comply: stability and optimality. This theoretical study will be accompained by its applications: pairing men and women, students with their colleges and kidneys with their patients. In addition, we explain in detail the algorithm proposed by David Gale in 1974. This algorithm will be very useful in order to solve the problem of kidney-exchange that conforms the main issue in this work.

Prefacio

En un mercado tradicional los precios de los artículos se ajustan solos de manera que se produce un equilibrio entre la oferta y la demanda. Sin embargo no todas las situaciones son así, entran en juego otros factores que no se pueden medir con dinero como el altruismo, el amor, el prestigio o la amistad. Es el problema de asignación el que se enfoca en el análisis de los mercados de emparejamiento en los que no se produce ese equilibrio o que no existen intercambios monetarios. Son las personas o instituciones las que, conociendo cuáles son sus intereses y motivaciones, llegan a un acuerdo. Este tipo de problemas de emparejamiento los encontramos en muchas situaciones, como puede ser en el mercado de trabajo, entre trabajadores y empresas; en la asignación de estudiantes a colegios o universidades o entre donantes y receptores de órganos para trasplantes; entre otras. En la búsqueda de fórmulas que permitan comprender cómo funcionan dicho procesos y encontrar la solución más eficiente a través de un mecanismo destacan Lloyd Shapley y Alvin Roth, galardonados con el Premio Nobel en Ciencias Económicas en el año 2012.

Shapley hizo uso de la teoría de juegos cooperativos para buscar distintas formas de emparejamiento estable. La estabilidad es la clave para el desarrollo de un área de las matemáticas económicas que intentan determinar cómo un conjunto de individuos deben cooperar para conseguir el mejor acuerdo. En 1962 LLoyd Shapley y David Gale explicaron la idea de estabilidad en un artículo titulado “College Admissions and the Stability of Marriage”(en castellano, admisiones de universidades y la estabilidad del matrimonio). Dicha idea es explicada a través de un ejemplo muy elocuente: la búsqueda de la persona idónea para formar un matrimonio estable, problema conocido como el “Stable Marriage Problem”o el “Problema de las parejas estables”. Supongamos que tenemos n hombres y n mujeres que desean establecer una relación con una persona del sexo opuesto y que ordenan sus preferencias respecto a sus potenciales parejas (con la opción de quedarse soltero). El problema consiste en cómo asignar las parejas de tal manera que no pueda ocurrir, de manera simultánea, que un hombre preferiría estar emparejado con una mujer distinta su pareja actual y que esa misma mujer también lo prefiera a él por encima de su pareja actual, es decir que no ocurran rupturas. Si se pueden evitar dichas rupturas estamos frente a una situación estable. Nótese que dicho emparejamiento se debe realizar respetando las preferencias individuales de cada uno de los participantes. Dada la relación de la modelización de este tipo de problemas de asignación con los planteamientos de la Teoría de Juegos, lo lógico es que se intente analizar la existencia de soluciones eficientes y estables (el núcleo) a través de la utilización de un mecanismo para calcularlas. Gale y Shapley diseñaron un algoritmo de emparejamiento, el mecanismo de aceptación diferida, que siempre da lugar a una asignación estable.

La solución a este problema tiene múltiples aplicaciones en la vida real, ya que existen muchas situaciones en las que un conjunto de individuos o instituciones A puede ser asignado a un conjunto de individuos o instituciones B, y en las cuales hay una clara preferencia de parte de unos u otros sobre el resultado de la asignación. Este es el caso, por ejemplo, al que se enfrenta un estudiante que está solicitando admisión a múltiples instituciones académicas de manera simultánea y en donde el estudiante tiene una lista de preferencias, mientras que las instituciones también pueden tener un *ranking* de cuáles son sus estudiantes preferidos. Este problema es el denominado “College Admissions Problem”o el “Problema de las Admisiones de Universidades (o colegios)”. Dicho problema también es tratado por Gale y Shapley con ayuda del algoritmo de aceptación diferida, pero se diferencia en algunos aspectos del problema del matrimonio. En este caso las asignaciones en vez de realizar emparejamientos de uno a uno se realizan de varios a uno, varios estudiantes son asignados a una misma universidad o colegio. Aunque el artículo se hizo famoso en las Facultades de Economía de forma inmediata, su relevancia en el mundo real no fue reconocida hasta principios de los 80, cuando Alvin Roth lo aplicó al estudio de problemas prácticos.

Gran parte del trabajo de Roth se basa en la teoría creada por Shapley. En la entrega del Premio Nóbel, la Academia Sueca los citó por "la teoría de asignaciones estables y el diseño práctico de mercados". En general se adjudica a Shapley la contribución teórica, el algoritmo de aceptación diferida es la base de este trabajo, y a Roth la puesta en práctica de la teoría. Roth realizó dicha aplicación en problemas reales como la asignación de los nuevos médicos a los distintos hospitales que competían por los mejores profesionales en Estados Unidos, la asignación de estudiantes a distintos institutos o el mejor de los posibles emparejamientos entre grupos de donantes de riñón y los pacientes que necesitaban un trasplante. En 1982, Roth pasó a la cátedra de Economía de la Universidad de Pittsburgh, sus 16 años de estancia en Pittsburgh coincidieron con dos hechos notables. En 1985 se inauguró el Centro de Trasplantes de la Universidad de Pittsburgh, uno de los mayores hospitales de trasplantes del mundo y unos años después, el cirujano de Boston Joseph Murray ganó el Premio Nóbel de Medicina por realizar con éxito el primer trasplante de riñón. Roth se sintió atraído por el problema de encontrar donantes compatibles para los pacientes que los necesitaban. A principios del año 2000, los hospitales comenzaron a realizar intercambios de riñones con dos pares de donantes-pacientes. En dichos intercambios, los pacientes son incompatibles con su donante incial mientras que son compatibles con el donante del otro par, por lo tanto cada paciente recibe un riñón del donante designado al otro. A pesar de realizar estos intercambios existía una escasez considerable de riñones en Estados Unidos, en 2002 había más de 55.000 pacientes en lista de espera en para recibir riñones de donantes muertos. Unos 3.400 pacientes murieron estando en la lista de espera y otros 900 se volvieron demasiado enfermos para afrontar el trasplante. Roth escribió un artículo en 2004 con Utku Ünver y Tayfun Sönmez en el que adaptaron el algoritmo TTC ("Top Tranding Cycle") introducido por David Gale en 1974, para garantizar un mecanismo de selección que fuera eficiente. En este caso, el mecanismo permite intercambios multilaterales a través de ciclos que aumenta la capacidad del mercado, que es una de las condiciones deseables propuestas por Roth. Su propuesta, publicada en el Quarterly Journal of Economics, suponía intercambios sin restricción en la cantidad.

Este trabajo se estructurará en dos capítulos fundamentales acompañado de un capítulo final de conclusiones y de una implementación práctica de un algoritmo de emparejamiento haciendo uso del lenguaje de programación `R` . En el Capítulo 1 se recogen los fundamentos teóricos del problema de asignación para diferentes problemas y se organiza de la siguiente manera. En la sección 1.1 se trata con el problema de las parejas estables o de matrimonio, en la sección 1.2 se habla sobre el problema de las admisiones de universidades y, por último se trata con el problema de asignación de bienes indivisibles en la sección 1.3. En esta última sección se define el algoritmo de ciclos de intercambio TTC de Gale y se describen sus buenas propiedades. Por otro lado el Capítulo 2 se organiza de la siguiente forma. En las secciones 2.1 y 2.2 se describen las funciones básicas del riñón, el fallo renal y las dos causas fundamentales de incompatibilidad. Mientras que la sección 2.3 recoge información sobre el trasplante cruzado. En la sección 2.4 se describe la aplicación del algoritmo TTC de Gale al problema de asignación de trasplantes cruzados de riñones de donantes vivos y más adelante en la sección 2.5 se presentan dos adaptaciones del algoritmo TTC de Gale para el caso de añadir donaciones indirectas, se añade la opción de que un paciente ceda a su donante a cambio de una situación prioritaria en la lista de espera, y el caso en el que un paciente tenga más de un donante. Las conclusiones se presentan en el Capítulo 3 y la implementación práctica se puede ver en el Apéndice A el cual se divide en dos secciones: en una se explica y se expone el código fuente mientras que en otra se calculan dos asignaciones expuestas en dos ejemplos pertenecientes a este trabajo.

Capítulo 1

Problema de asignación

En un problema de asignación nos vamos a encontrar con un mercado con múltiples lados cuyo objetivo principal es encontrar emparejamientos entre dichos lados que verifiquen ciertas propiedades deseables. En este tipo de problemas generalmente no se trata con intercambios monetarios para demandar u ofertar, sino que se tendrán en cuenta otras cualidades. Hay numerosas situaciones de la vida real donde se pueden usar los problemas de asignación. Por ejemplo el mercado de trabajo, el inmobiliario o la asignación de estudiantes a escuelas, universidades u hospitales. Los matemáticos Gale y Shapley en 1962 se plantearon si se podían realizar asignaciones adecuadas en diferentes situaciones, para ser más concretos trataron con problemas del tipo bilateral, donde el mercado está compuesto por dos lados en los que se puede tanto demandar como ofertar. Dentro de este tipo de mercados nos encontramos con las asignaciones *one-to-one* (uno a uno), donde se emparejan uno a uno los agentes de cada lado del mercado, y las asignaciones *many-to-one* (varios a uno), a un lado del mercado solo le corresponde un individuo mientras que al otro se le asignan varios. En este capítulo vamos a tratar con los mismos modelos que usaron Gale y Shapley, ambos del tipo bilateral: el problema del matrimonio, en el que se busca un emparejamiento uno a uno entre hombres y mujeres y, en el caso de los modelos varios a uno tenemos el problema de admisión en las universidades.

El modelo del matrimonio tiene múltiples aplicaciones, concretamente se utiliza en el mercado laboral cuando las empresas proponen puestos de trabajo y éstos son evaluados por los que optan al trabajo y viceversa, las empresas ordenan por unas preferencias (normalmente sobre el perfil) a los candidatos que desean contratar. En el caso del problema de asignación de estudiantes a universidades (o de escolares a colegios) se tiene que en uno de los lados del mercado (las universidades o los colegios) hay más de una plaza ofertada, es decir, cada universidad ofrece un determinado número de plazas, donde aquellas ofertadas por una misma universidad (colegio) son percibidas como idénticas por los estudiantes. El papel de las universidades es pasivo, es decir que son los estudiantes los que solicitan plaza, y las universidades (o colegios) se limitan a aceptar o rechazar al estudiante. Este último problema se abordó por primera vez en el trabajo de Gale y Shapley (1962) [1]. En dicho artículo ambos matemáticos argumentaron que un emparejamiento adecuado en un mercado bilateral debería cumplir que todos los agentes estén contentos con sus respectivas parejas, las asignaciones que cumplan esto serán llamadas estables. Además demostraron que estas asignaciones siempre existen mediante el desarrollo de un algoritmo que proporciona asignaciones estables: el algoritmo de aceptación diferida (el algoritmo de Gale y Shapley).

Además de los mercados bilaterales, también nos encontramos con los unilaterales, modelos en los que se buscarán asignaciones de agentes a objetos indivisibles, es decir que solamente demanda un lado del mercado. Shapley y Scarf en 1974 introdujeron este tipo de problemas en [6]. A lo largo de la sección en la que tratamos con los mercados unilaterales hablaremos de dos situaciones: una en la que no haya una asignación inicial entre los agentes y los objetos y otra en la que sí que exista esa asignación, es decir que será una asignación con derecho a propiedad. Este último caso se tratará con más detalle y en él se expondrán los estrechos lazos que existen entre este tipo de modelos y la teoría de juegos. Veremos que el conjunto de asignaciones estables en el modelo con derecho a propiedad es igual al núcleo de un juego cooperativo. Se llegará a que en el caso del modelo de asignación para que una pareja se lleve a cabo es necesario y suficiente que el agente esté de acuerdo con el objeto obtenido. Dicha relación nos será de gran ayuda para trabajar con el algoritmo TTC de Gale (mecanismo que se utilizará para resolver estos problemas) y sus propiedades.

1.1. Modelo de matrimonio

En el modelo de matrimonio nos encontramos con dos conjuntos de agentes finitos y disjuntos entre sí, $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ y $W = \{w_1, \ldots, w_p\}$ que denotan el conjunto de hombres y de mujeres respectivamente. Cada hombre (mujer) tiene un orden de preferencias sobre con qué mujer (hombre) emparejarse y sobre permanecer soltero. Este modelo define un mercado bilateral *one-to-one* (uno a uno). Formalmente, cada hombre $m \in M$ realiza una lista en un orden estricto sobre el conjunto $W \cup \{m\}$ y, similarmente, cada mujer $w \in W$ tiene una lista ordenada de preferencias estrictas sobre el conjunto $M \cup \{w\}$. A la lista de preferencias para el hombre m la denotaremos por P_m y a la lista de preferencias para la mujer w por P_w, dichas preferencias se entienden de la siguiente manera: cuando decimos que un agente i (hombre o mujer) prefiere la opción a a la b se denotará por aP_ib. Por ejemplo si tenemos que $P_w = m_1, m_2, w, m_3$ diremos que la mujer w prefiere al hombre m_1 antes que al hombre m_2 (el cual es su segunda opción), pero de no estar emparejada con ninguno de estos dos prefiere quedarse soltera, es decir prefiere estar sola antes que emparejarse con el hombre m_3. De la misma manera se interpreta una lista de preferencias de un hombre m, pongamos de ejemplo la lista $P_m = w_2, m, w_3, w_1$ en la cual w_2 es la mujer favorita de m y la única opción de emparejamiento para m, ya que sino se empareja con ésta prefiere quedarse soltero. Uniendo todas las listas de preferencias obtenemos P, el conjunto de las listas de preferencias para todos los individuos o agentes, es decir

$$P = \{P_{m_1}, P_{m_2}, \ldots, P_{m_n}, P_{w_1}, \ldots, P_{w_p}\}.$$

Supondremos que las preferencias de cada individuo (hombre o mujer) cumplen las siguientes propiedades:

1. Son estrictas: ningún individuo es indiferente entre dos alternativas.

2. Son transitivas: las elecciones de cada individuo no son contradictorias, es decir, dado un agente i,

$$\text{si } aP_ib \text{ y } bP_ic \Rightarrow aP_ic.$$

3. Son completas: esto significa que cada agente puede decidir su grado de deseo entre dos alternativas cualesquiera, formalmente dado un agente i,

$$aP_ib \text{ o } bP_ia \text{ para cualquier par de alternativas } a, b.$$

Con respecto a las preferencias nos referiremos a que una mujer w es **aceptable** para el hombre m si wP_mm es decir, que la mujer w es preferida para el hombre m que quedarse soltero y, análogamente, el hombre m es **aceptable** para la mujer w si mP_ww. Por otro lado describimos el problema asignación de matrimonios por la tripla (M, W, P). El objetivo en este tipo de problemas es encontrar una asignación o emparejamiento entre el conjunto de hombres y mujeres de acuerdo a sus preferencias.

Definición 1. *Una asignación $\mu : M \cup W \to M \cup W$ es una función biyectiva que verifica:*

(a) $\mu(m) = w \Leftrightarrow \mu(w) = m$. *y,*

(b) $\mu(m) \in M \cup \{m\}$ *y* $\mu(w) \in W \cup \{w\}$.

La primera condición refleja la bilateralidad de estos problemas: si la asignación empareja al hombre m con la mujer w, entonces ha de emparejar a la mujer w con el hombre m. Mientras que la segunda quiere decir que si un agente x no está soltero en la asignación μ (es decir que $\mu(x) \neq x$) debe estar emparejado con un agente del conjunto opuesto. Representaremos una asignación por un conjunto de pares, por ejemplo

Ejemplo 1. *Sean los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, como el conjunto de hombres supera en número al de las mujeres al menos uno de ellos se quedará soltero. Pongamos dos ejemplos de dos asignaciones diferentes*

$$\mu = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & m_4 \\ \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \mu' = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & m_2 & m_4 \\ \\ m_1 & m_3 & w_3 & m_2 & m_4 \end{pmatrix}$$

donde se puede ver que en la asignación μ el hombre m_1 está emparejado con la mujer w_1 o que el hombre m_4 está soltero y según la asignación μ' el hombre m_3 está emparejado con la mujer w_2 y en esta ocasión tanto el hombre m_2 como el m_4 están solteros.

Dado un problema de emparejamiento y dos posibles asignaciones μ y μ', cualquier agente puede comparar ambas asignaciones en términos de la pareja que le asigna cada una de ellas. En este sentido, el agente preferirá aquella que le asigne una pareja más preferida según sus preferencias.

Definición 2. *Dadas dos asignaciones μ y μ', se dice que una mujer w (hombre m) prefiere la asignación μ a la μ' si $\mu(w)P_w\mu'(w)$ $(\mu(m)P_m\mu'(m))$.*

Por tanto, es lógico pensar que queremos una asignación en la que todo agente esté de acuerdo con su pareja, es decir, una asignación en la que no ocurran rupturas. Éstas se producirán cuando los agentes son capaces de mejorar su situación, bien quedándose solteros en lugar de mantenerse con la pareja que se le ha asignado al no ser ésta aceptable, o bien porque hay dos agentes que no están emparejados pero que preferirían estar juntos a estar con las parejas que les propone la asignación. Para evitar que se den estas situaciones debemos presentar un par de propiedades para la exclusión de una asignación o no. La primera nos dice que ningún agente puede ser obligado a emparejarse con un agente del otro lado del mercado si éste no es aceptable para él primero.

Definición 3. *Se dice que una asignación μ es **individualmente racional** si para cada agente su compañero es aceptable. En caso contrario diremos que dicho agente **bloquea** la asignación.*

De esta última definición se puede comprobar que dada una asignación μ tal que $\mu(x) = x$ para todo $x \in M \cup W$, ésta es siempre una asignación individualmente racional. Veamos ahora un caso en el que una asignación no cumple esta última definición a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. *Sean los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ con las siguientes preferencias:*

$$\begin{array}{ll} P_{m_1} = w_1, w_2, w_3. & P_{w_1} = m_3, m_4, m_1, w_1, m_2. \\ P_{m_2} = w_1, w_2, w_3. & P_{w_2} = m_4, m_1, m_3, w_2, m_2. \\ P_{m_3} = w_2, w_3, w_1. & P_{w_3} = m_1, w_3, m_4, m_3, m_2. \\ P_{m_4} = w_3, w_1, w_2. & \end{array}$$

Cabe mencionar que cuando todas las mujeres son aceptables para todos los hombres, como ocurre en este caso, se obvia escribir la opción de quedarse soltero que iría como última opción en las preferencias de cada hombre. Lo mismo ocurriría si los hombres fuesen aceptables para todas las mujeres. Por otro lado, sea la asignación

$$\mu' = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & m_2 \\ \\ m_1 & m_3 & m_4 & m_2 \end{pmatrix}.$$

En este caso tenemos que la asignación no es individualmente racional dado que $\mu'(w_3) = m_4$ *y* m_4 *no es aceptable para* w_3*,* $w_3 P_{w_3} m_4$*, entonces* w_3 *bloquea a la asignación* μ'*.*

La segunda propiedad nos dice que dados un hombre y una mujer que según la asignación no estén emparejados, pero cada uno de ellos se prefieren (según su respectivos órdenes de preferencias) al compañero que se le ha asignado a cada uno. Esto es que dados un hombre m y una mujer w y una asignación μ tales que $\mu(m) \neq w$, pero $wP_m\mu(m)$ y $mP_w\mu(w)$, cuando ocurre esto decimos que la pareja (m, w) **bloquea** a la asignación μ.

Definición 4. *Una asignación* μ *es* ***estable*** *si no es bloqueada por ningún agente ni por ningún par de agentes.*

Utilizamos las asignaciones plasmadas en el Ejemplo 1 para exponer ambos criterios mediante un ejemplo:

Ejemplo 3. *Sean los conjuntos* $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ *y* $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ *con las siguientes preferencias:*

$$\begin{aligned} P_{m_1} &= w_1, w_2, w_3. & \qquad P_{w_1} &= m_3, m_4, m_1, m_2. \\ P_{m_2} &= w_1, w_2, w_3. & P_{w_2} &= m_4, m_1, m_3, m_2. \\ P_{m_3} &= w_2, w_3, w_1. & P_{w_3} &= m_1, m_4, m_3, m_2. \\ P_{m_4} &= w_3, w_1, w_2. \end{aligned}$$

y sean las asignaciones

$$\mu = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & m_4 \\ \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \mu' = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & m_2 \\ \\ m_1 & m_3 & m_4 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Tanto la asignación μ *como la asignación* μ' *son individualmente racionales (todos los individuos prefieren estar casados a solteros), pero si escogemos la pareja* (m_3, w_2) *podemos ver que bloquea a la asignación* μ *dado que* $\mu(m_3) \neq w_2$ *y se cumplen las preferencias* $w_2 P_{m_3} w_3$ *y* $m_3 P_{w_2} m_2$*. Por otro lado es fácil comprobar que la asignación* μ' *es estable dado que el único hombre que no está con su primera opción es* m_2*, que quedó soltero, pero todas las mujeres colocan a dicho hombre como última opción, por tanto no va a existir ninguna pareja ni ningún individuo (ambas asignaciones son individualmente racionales) que bloquee a* μ'*.*

El núcleo de un problema de emparejamiento, el cual denotaremos por $E(M, W, P)$, es el conjunto de las asignaciones estables y es natural pensar que las soluciones razonables a nuestro problema deberían ser asignaciones estables (se verá más adelante). En el artículo [1] se demuestra con ayuda de un mecanismo que siempre va a existir una asignación estable. Algoritmo de aceptación diferida es el nombre que lleva dicho mecanismo el cual puede ser con los hombres proponiendo o con las mujeres proponiendo. Cabe mencionar que este algoritmo siempre da lugar a una asignación estable. Si consideramos que son los hombres quienes proponen, las etapas del algoritmo serían las siguientes:

- Primera etapa: Cada hombre le propone un compromiso a su mujer preferida. Cada mujer que haya recibido al menos una propuesta rechaza a los hombres que son inaceptables para ella o en el caso de tener más de un candidato aceptable, rechaza a todos salvo al hombre más preferido de todos los que la pretendieron. Al elegido lo mantiene, pero puede cambiar de opinión ya que en las siguientes etapas puede obtener una propuesta mejor. Los hombres que no han sido rechazados en esta etapa quedan comprometidos con la mujer que los aceptó.

- Etapa k: los hombres que han sido rechazados en una etapa previa le proponen un compromiso a la próxima mujer en su lista de preferencias (mujer que no le haya rechazado). Las mujeres vuelven a realizar el mismo procedimiento de elección que el descrito en la primera etapa. Se realizará este procedimiento hasta llegar a lo descrito en la última etapa.

- Última etapa: el algoritmo para cuando ningún hombre es rechazado. En esta etapa cada hombre está comprometido con alguna mujer o ha sido rechazado por todas las mujeres aceptables de su lista de preferencias y queda soltero. El algoritmo debe parar en alguna etapa porque solo hay un número finito de hombres y mujeres y ningún hombre le propone a una mujer más de una vez.

Para el caso de las mujeres se realizaría del mismo modo, pero invirtiendo los papeles; las mujeres son las que proponen compromiso y los hombres son los que pueden rechazar, guardar o quedarse con las propuestas. Denotaremos la asignación obtenida en el caso de que propongan los hombres por μ_M y en el caso de que las mujeres propongan la asignación calculada será denotada por μ_W. A continuación explicamos de forma práctica el funcionamiento del algoritmo de aceptación diferida mediante un ejemplo.

Ejemplo 4. *Sean los conjuntos* $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ *y* $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *con las siguientes preferencias:*

$$
\begin{aligned}
P_{m_1} &= w_1, w_2, w_3, w_4. & \qquad P_{w_1} &= m_3, m_2, m_1, m_4.\\
P_{m_2} &= w_1, w_2, w_3, w_4. & \qquad P_{w_2} &= m_4, m_1, m_3, m_2.\\
P_{m_3} &= w_1, w_2, w_3, w_4. & \qquad P_{w_3} &= m_4, m_3, m_2, m_1.\\
P_{m_4} &= w_3, w_4, w_2, w_1. & \qquad P_{w_4} &= m_1, m_2, m_3, m_4.
\end{aligned}
$$

Primera etapa. Proponen compromiso los hombres a su mujeres favoritas, es decir que m_1, m_2 *y* m_3 *le proponen a* w_1 *y* m_4 *a* w_3*. Ahora, las mujeres seleccionan su mejor propuesta donde* w_1 *selecciona a* m_3 *y* w_3 *a* m_4*. En este caso tenemos que las parejas formadas vas a ser las definitivas, ya que son las primeras opciones para ambos lados del mercado, por tanto tenemos parte de la asignación, representamos la asignación provisional a través de la siguiente matriz*

$$
\begin{pmatrix}
w_1 & w_2 & w_3 & w_4\\
m_3 & & m_4 &
\end{pmatrix}.
$$

Segunda etapa. Los hombres m_1 *y* m_2 *son los rechazados en la anterior etapa, por tanto van a proponer un compromiso a su segunda opción, que para ambos es la mujer* w_2 *donde* w_2 *rechaza a* m_2 *y se queda con* m_1*, por tanto la asignación provisional queda de la siguiente manera:*

$$
\begin{pmatrix}
w_1 & w_2 & w_3 & w_4\\
m_3 & m_1 & m_4 &
\end{pmatrix}.
$$

Tercera etapa. El único hombre rechazado ha sido m_2 *por tanto éste propone matrimonio a su tercera opción la cual es la mujer* w_3*, pero ésta lo rechaza dado que ya está emparejada con su hombre preferido. Por tanto la asignación provisional queda igual que en la etapa anterior.*

Cuarta etapa. El hombre rechazado de nuevo, m_2*, propone matrimonio a su siguiente y última mujer,* w_4*, la cual acepta su proposición. Por tanto esta es la última etapa del algoritmo y obtenemos la asignación estable para este ejemplo la cual es*

$$
\mu_M = \begin{pmatrix}
w_1 & w_2 & w_3 & w_4\\
m_3 & m_1 & m_4 & m_2
\end{pmatrix}.
$$

Teorema 1. *Los compromisos que se obtienen con este algoritmo dan lugar a una asignación y además es estable.*

Demostración. La asignación obtenida con el algoritmo de aceptación diferida es individualmente racional. Esto se debe a la estrutura de dicho algoritmo, dado que todas las mujeres van a recibir al menos una propuesta y los hombres proponen en orden decreciente a todas las mujeres que le interesan antes que quedarse solteros.

La asignación también es estable, demostrémoslo por reducción al absurdo. Supongamos que no es estable, entonces existe una pareja (m, w) que bloquea a la asignación obtenida μ, es decir que $mP_w\mu(w)$ y $wP_m\mu(m)$. Por tanto tenemos que m es aceptable para w y viceversa. Como la pareja asignada a m es $\mu(m)$ y $wP_m\mu(m)$ quiere decir que en alguna etapa del algoritmo, el hombre m le hizo una proposición a la mujer w y como $\mu(w) \neq m$ quiere decir que w lo rechazó porque tuvo una oferta mejor. Por lo tanto $\mu(w)P_wm$, esto contradice que $mP_w\mu(w)$. Por tanto el algoritmo presentado nos aporta una asignación estable. □

Como se ha mencionado este algoritmo se podría realizar de forma que son las mujeres quienes proponen y los hombres los que seleccionan. Las asignaciones obtenidas en cada caso generalmente son diferentes, pero ambas son estables.

Definición 5. *Decimos que una asignación μ es* ***óptima*** *si cada individuo está por lo menos por debajo de ella en virtud de cualquier otra asignación estable.*

Dicho esto tenemos que la solución obtenida en el caso de que propongan los hombres, μ_M, es óptima para los hombres y en el caso de que propongan las mujeres, μ_W, será óptima para ellas. Las soluciones obtenidas por ambas formas serán iguales cuando el problema solo tenga una solución estable. Formalmente,

Teorema 2. *Cuando todos los hombres y mujeres tienen preferencias estrictas entonces μ_M es una asignación $M-$óptima (es decir que todos los hombre prefieren la asignación μ_M a cualquier otra) y μ_W es una asignación $W-$óptima (es decir que todas las mujeres prefieren la asignación μ_M a cualquier otra).*

Demostración. Sean los hombres quienes proponen a las mujeres y μ la asignación resultante de aplicar el algoritmo de aceptación diferida. Supongamos por reducción al absurdo que existe μ' una asignación estable y un hombre m tal que $\mu'(m)P_m\mu(m)$ entonces en la construcción de la asignación μ, m es rechazado por $\mu'(m)$ en algún momento ya que m propone en orden decreciente según su lista de preferencias, lo que entra en contradicción con que la asignación obtenida con el algoritmo sea estable, ya que $(m, \mu(m))$ es una pareja válida.

Similarmente para el caso en el que son las mujeres quienes proponen. □

1.2. Problema de las admisiones de universidades

En este caso los dos lados del mercado son los estudiantes, $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, y las universidades, $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$, ambos conjuntos finitos y disjuntos. Cada universidad c_i tiene una cuota q_i que representa la cantidad de plazas que posee dicha universidad. De nuevo ambos lados del mercado tienen preferencias sobre con quién emparejarse, quedarse sin plaza o dejar una vacante. Formalmente cada estudiante $s \in S$ realiza una lista en un orden estricto sobre el conjunto $C \cup \{s\}$ y cada universidad $c \in C$ realiza una lista de preferencias sobre el conjunto $S \cup \{c\}$. A la lista de preferencias del estudiante s la denotaremos por P_s y a la lista de preferencias de la universidad c la denotaremos por P_c. Dichas preferencias se entienden de la misma forma que en el caso del problema del matrimonio, cuando digamos que un agente i prefiere la opción a a la b significa que dicho agente antepone su elección al individuo a ante el b, lo que se denotará por aP_ib. Por ejemplo si tenemos $P_s = c_3, c_2, c_1, s, c_4$ diremos que el estudiante s prefiere la universidad c_3 antes que la c_2 y que la c_1 y prefiere la universidad c_2 antes que la c_1, mientras que prefiere quedarse sin plaza antes que ir a la universidad c_4. Por otro lado si tenemos que la cuota de la universidad c es $q_c = 3$ y tenemos que $P_c = s_2, s_1, c, s_3, s_4$ esto significa que la universidad c acepta al estudiante s_3 de primero, a éste le sigue el estudiante s_1 y después prefiere dejar una vacante antes que admitir a los estudiantes s_3 y s_4. Uniendo todas las listas de preferencias obtenemos P definida de la forma

$$P = \{P_{s_1}, P_{s_2}, \ldots, P_{s_n}, P_{c_1}, P_{c_2}, \ldots, P_{c_m}\}.$$

Consideramos que las preferencias de cada individuo son estrictas, transitivas y completas. Por otro lado definimos el problema de asignación de admisiones de universidades con la tripla (C, S, P) el cual define un mercado bilateral *many-to-one* (varios a uno), debido a que cada universidad se le asignan varios estudiantes, pero en cambio a cada estudiante se le empareja con una universidad o consigo mismo. El objetivo es encontrar una asignación de los estudiantes a las universidades sin que se excedan las cuotas de éstas.

Definición 6. *Una aplicación $\mu : C \cup S \to C \cup S$ es una asignación para el problema (C, S, P) si cumple las siguientes propiedades:*

(a) $|\mu(s)| = 1$, $\forall s$ *y* $\mu(s) \in C \cup \{s\}$,

(b) $|\mu(c)| \leq q_c$

(c) $\mu(s) = c \Leftrightarrow s \in \mu(c)$.

Lo que quiere decir esta definición es que a cada estudiante le corresponde estar en una universidad o en ninguna, que las universidades no pueden exceder su cuota a la hora de admitir estudiantes y, que si un estudiante está emparejado con una universidad es porque ésta lo ha admitido. Al igual que en el caso de los matrimonios se busca una asignación que sea individualmente racional y estable debido a que se quiere que todos los estudiantes prefieran estar en la universidad a quedarse sin plaza y que una universidad prefiera admitir a estudiantes antes que dejar vacantes. Formalmente,

Definición 7. *Una asignación μ del problema (S, C, P) se dice **individualmente racional** si para todo estudiante s se tiene que $\mu(s)P_s s$ y para toda universidad c se tiene que $\mu(c)P_c c$.*

Un par $(s_i, c_i) \in S \times C$ que no están emparejados por la asignación μ (es decir que $\mu(s) \neq c_i$) diremos que bloquea a μ si la universidad prefiere al estudiante s_i antes que uno de los que ha admitido (es decir que $s_i P_{c_i} s_j$ con $s_j \in \mu(c_i)$) y si el estudiante s_i prefiere la universidad c_i a la que se le ha asignado (es decir que $c_i P_{s_i} \mu(s_i)$).

Definición 8. *Una asignación μ del problema (S, C, P) es **estable** si es individualmente racional y no existe ningún par $(s_i, c_i) \in S \times C$ que la bloquee.*

Al igual que en el caso del modelo de matrimonio, el problema de asignación de estudiantes a universidades tiene núcleo $E(S, C, P)$ no vacío. Es decir, siempre existe una asignación estable. Se acude al algoritmo de aceptación diferida adaptándolo a este caso el cual se realizará siendo los estudiantes los que proponen la solicitud a las universidades. El algoritmo seguirá las siguientes etapas:

- <u>Etapa 1</u>: en esta primera etapa los estudiantes solicitan plaza a la primera opción que tienen en su lista de preferencias. Cada universidad, dadas estas solicitudes, admite un máximo de alumnos, su número máximo de plazas, de acuerdo a un determinado orden de prioridad. Si las solicitudes coinciden con el número de la cuota acepta a todos, si es mayor rechaza el sobrante y si es menor acepta a todos dejando plazas libres.

- <u>Etapa k</u>: Los estudiantes que son rechazados en la etapa anterior solicitan entrar en su siguiente mejor opción. Aquí las universidades reconsideran las admisiones provisionales realizadas en la etapa anterior quedándose con sus mejores propuestas y rechazan, si existen, las sobrantes.

- Última etapa: El procedimiento termina cuando cada estudiante está admitido en una universidad o ha sido rechazado por todas las universidades.

A la asignación dada cuando los estudiantes solicitan la denotaremos por μ_S y esta asignación obtenida con el anterior algoritmo vuelve a darnos una asignación estable. Además en [1] podemos encontrar el siguiente resultado:

Teorema 3. *(Teorema 2 de Gale y Shapley (1962)[1].) La asignación μ_S es una solución óptima para los estudiantes, solución $S-$óptima.*

Lo que quiere decir el teorema anterior es que el algoritmo de aceptación diferida produce asignaciones estables y además óptimas para los solicitantes, entonces los estudiantes están al menos igual de contentos con la asignación dada por dicho algoritmo que con otras asignaciones estables. Además la asignación $S-$óptima (la mejor asignación para las estudiantes) es la peor para las universidades y viceversa, como ocurría en el caso de los matrimonios.

En el artículo de Macho-Stadler (2002) [2] se habla sobre el algoritmo usado en las pruebas de acceso a la universidad española. Dicho algoritmo funciona igual que el de aceptación diferida explicado anteriormente, pero con una ligera diferencia: se establece un límite de elecciones a los estudiantes, es decir, dentro de todas las universidades que hay solamente pueden realizar una lista con un número determinado de centros. El algoritmo sigue los siguientes pasos:

- Primer paso: los estudiantes deben señalar un número limitado y ordenado de seis a ocho opciones.

- Segundo paso: los estudiantes se ordenan en función de su nota, de mayor a menor. Y a continuación se toma al primero (en caso de empate entre varios estudiantes se acude a una ordenación arbitraria) y se le empareja provisionalmente con la primera opción de su orden. Se procede de este modo con todos los estudiantes. Si la primera opción está disponible se le asigna ésta (provisionalmente). Si no lo está, se desciende en su orden hasta encontrar en éste una facultad que tenga todavía plazas disponibles.

- Último paso: cuando todos los estudiantes han sido colocados, no quedan centros en su lista o no quedan plazas a las que acceder, finaliza el algoritmo y los emparejamientos provisionales pasan a ser definitivos.

El problema que acarrea poner este límite de seis a ocho opciones es que los estudiantes van a tener incentivos para mentir a la hora de revelar sus preferencias y esto provocará inestabilidad en la asignación obtenida. En caso contrario, si no hubiera una restricción en el número de la lista de preferencias para los solicitantes, ellos dirían la verdad en el orden de las universidades. Se puede ver el problema que surge de utilizar el algoritmo de las pruebas de acceso en el siguiente ejemplo, el cual se ha conseguido en [2]:

Ejemplo 5. *Sea $C = \{c_1, c_2\}$ el conjunto de universidades o de facultades con una cuota $q_i = 2$, $i = 1, 2$, es decir que cada una de ellas con dos plazas disponibles y $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ el conjunto de estudiantes. Las preferencias de las universidades son:*

$$P_{c_1} = s_3, c_1, s_2, s_1 \text{ y } P_{c_2} = s_3, s_2, s_1, c_2.$$

Mientras que las preferencias de los estudiantes son:

$$P_{s_i} = c_1, c_2, s_i, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Realizamos primero el algoritmo sin límites que nos va a aportar una solución estable y la $S-$óptima, como vimos en el Teorema 3.

En la primera etapa del algoritmo todos los estudiantes solicitan plaza en la universidad c_1 y esta admite al estudiante s_3 y rechaza a los otros dos.

En la segunda etapa los estudiantes que han sido rechazados, s_1 y s_2, solicitan plaza a su segunda opción, la universidad c_2 y ésta admite a ambos, ya que su cuota es de dos plazas y como su estudiante favorito está admitido acoge a los siguientes estudiantes favoritos, s_1 y s_2.

Por tanto todos los estudiantes han sido admitidos así que termina el algoritmo y en este caso la asignación obtenida, μ_S, del algoritmo sin restricciones es estable:

$$\mu_S = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 & c_2 & c_2 \\ \\ s_3 & c_1 & s_1 & m_2 \end{pmatrix}.$$

En cambio si los estudiantes tuviera un límite en la elección de universidades, por ejemplo si solo pudiesen elegir una. Es decir las preferencias de las universidades siguen siendo las mismas, mientras que las preferencias de los estudiantes serían las siguientes:

$$P_{s_i} = c_1, s_i, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

En la primera etapa los estudiantes solicitan plaza en su universidad preferida, c_1, ésta rechaza a los estudiantes s_1 y s_2, pero como ya no tienen mas preferencias en la lista llegamos a la asignación obtenida, μ'_S, la cual no es estable:

$$\mu'_S = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 & c_2 & c_2 & s_1 & s_2 \\ \\ s_3 & c_1 & c_2 & c_2 & s_1 & s_2 \end{pmatrix}.$$

1.3. El problema de asignación de bienes indivisibles

En esta sección se presentará el problema de asignación de bienes indivisibles introducido por Shapley y Scarf en 1974 [6]. Este problema está estrechamente relacionado con el problema de intercambio de riñones. Aquí veremos, con más detalle, los estrechos lazos que hay entre un problema de asignación y la teoría de juegos, además trataremos con un mecanismo, el "Top Tranding Cycle"(TTC) de Gale, que cumplirá unas propiedades que ayudarán a cumplir el deseo de encontrar una asignación estable y eficiente.

1.3.1. Reparto de bienes indivisibles

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito con n agentes y sea $O = \{o_1, \ldots, o_n\}$ un conjunto finito con n objetos indivisibles. Cada agente $a_i \in A$ tiene una preferencia estricta denotada por P_{a_i} (un orden o *ranking* estricto) sobre el conjunto de objetos O; es decir P_{a_i} refleja el grado de deseo para el agente a_i de los objetos. Expresamos que un agente a_i prefiera al objeto o_j antes que al o_k (con $o_j \neq o_k$) como $o_j P_{a_i} o_k$. Por otro lado, denotamos como **perfil de preferencia** a $P = (P_{a_i})_{a_i \in A}$ el cual es una lista de órdenes de preferencia atribuidos a cada agente. Denotaremos el conjunto de perfiles de preferencia como $\mathcal{P}$. Definimos el problema de asignación de bienes indivisibles como la terna (A, O, P) que describe un mercado unilateral debido a que solo un lado del mercado tiene preferencias. El objetivo en este tipo de problemas es encontrar una asignación de los objetos a los diferentes individuos de acuerdo a sus preferencias.

Definición 9. *Una aplicación $\alpha : A \to O$ es una **asignación** (de los objetos a los individuos) para el problema (A, O, P) si cumple las siguientes propiedades:*

(a) asigna a cada individuo $a_i \in A$ un único objeto $\alpha(a_i) \in O$ y

(b) no asigna el mismo objeto a dos individuos diferentes, de modo que, para dos individuos a_i y a_j con $a_i \neq a_j$, se tiene que $\alpha(a_i) \neq \alpha(a_j)$.

Denotaremos al conjunto de todas las asignaciones posibles como $\mathcal{A}$.

Definición 10. *Se dice que una función $f : \mathcal{P} \to \mathcal{A}$ es una **regla de asignación** cuando asocia una asignación con cada perfil de preferencias de los individuos.*

Es decir que $f_i(P)$ designa el objeto asignado al agente a_i por la regla f cuando el perfil de preferencias es P. Se puede decir que una regla de asignación formaliza una manera de repartir los objetos entre los agentes dependiendo única y exclusivamente de las preferencias de los agentes sobre los objetos dados. Cabe mencionar que la regla de asignación puede interpretarse como un mecanismo.

Ejemplo 6. *Sean los conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y $O = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}$ y tenemos el siguiente perfil de preferencias:*

P_{a_1}	P_{a_2}	P_{a_3}	P_{a_4}
o_1	o_1	o_2	o_2
o_2	o_4	o_3	o_1
o_3	o_2	o_4	o_3
o_4	o_3	o_1	o_4

Un regla de asignación, f, establece cómo repartir los objetos entre los agentes teniendo en cuenta cada uno de los perfiles de preferencias posibles. Por ejemplo $f(P) = (o_2, o_4, o_3, o_1)$ es una asignación posible en este problema.

Se ve claramente que la asignación propuesta en el Ejemplo 6 puede ser mejorada, dado que si escogemos (o_1, o_4, o_3, o_2) vemos que los agentes a_1 y a_4 mejoran dado que ahora se les ha asignado su primera preferencia mientras que los agentes a_2 y a_3 quedan iguales. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 11. *Dado un problema (A, O, P), una asignación α es **Pareto eficiente** si no existe otra asignación η tal que:*

(a) $\eta(a_i) P_{a_i} \alpha(a_i)$, para algún a_i.

(b) $\alpha(a_i) P_{a_i} \eta(a_i)$, para ningún a_i.

Volviendo al Ejemplo 6 la asignación $\alpha = (o_1, o_4, o_3, o_2)$ no es Pareto eficiente dado que existe una asignación $\eta = (o_2, o_4, o_3, o_1)$ que satisface las dos premisas de la Definición 11. Por otro lado definimos que

Definición 12. *Una regla de asignación f es **Pareto eficiente** si $f(P)$ es una asignación Pareto eficiente para todo P.*

Supongamos ahora que para el perfil de preferencias P dado en el Ejemplo 6 tenemos que $f(P) = (o_1, o_4, o_3, o_2)$ y que $f(P_{a_1}, P'_{a_2}, P_{a_3}, P_{a_4}) = (o_2, o_1, o_3, o_4)$, donde se ha reemplazado la preferencia P_{a_2} por la P'_{a_2} siendo esta última dada por el orden $o_2 o_1 o_3 o_4$. Si pasase esto y las preferencias se hiciesen en referencia a las declaraciones de los agentes, tendríamos que f es manipulable cuando P_{a_2} es la verdadera preferencia de a_2. Si el agente a_2 declara P'_{a_2} e vez de P_{a_2} se tiene que $f_2(P_{a_1}, P'_{a_2}, P_{a_3}, P_{a_4}) = o_1$, que es preferido (según P_{a_2}) por a_2 ante el objeto $f_2(P_{a_1}, P_{a_2}, P_{a_3}, P_{a_4}) = o_4$ el cual consigue nuestro segundo agente declarando su auténtica preferencia. Es decir que a_2 tiene un incentivo a declarar la P'_{a_2} en lugar de P_2. Es normal preguntarse si es posible que un agente, reemplazando una preferencia distinta de la que tiene, puede obtener un objeto mejor que el que hubiera obtenido revelando su auténtica preferencia. Para responder a esta cuestión definimos el concepto de una regla de asignación no manipulable.

Definición 13. *Una regla de asignación f es* ***manipulable*** *si existe un perfil de preferencias P, un agente $a_i \in A$ y una preferencia P'_{a_i} tales que*

$$f(P'_{a_i}, P_{-a_i}) P_{a_i} f(P_{a_i}, P_{-a_i}),$$

donde (P'_{a_i}, P_{-a_i}) denota al perfil obtenido al reemplazar en P la preferencia P_{a_i} por la preferencia P'_{a_i}. Y f es ***no manipulable*** *en caso de que para todo P, un agente $a_i \in A$ y una preferencia P'_{a_i} no ocurra que*

$$f(P'_{a_i}, P_{-a_i}) P_{a_i} f(P_{a_i}, P_{-a_i}).$$

Es decir que la no manipulabilidad de una regla de asignación nos asegura que los agentes revelen su verdaderas preferencias.

1.3.2. Asignación de objetos con derecho a propiedad

Este modelo es una variante del modelo anterior donde además del conjunto de agentes y el conjunto de objetos, nos encontramos con una asignación inicial de éstos, de ahí el derecho a propiedad.

Consideramos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito de n agentes y $O = \{o_1, \ldots, o_n\}$ un conjunto finito de n objetos. Una asignación de agentes a objetos, $\mu : A \to O$, es una **asignación inicial** si cumple que $\mu(a_i) = o_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces tenemos que μ describe todas las parejas agente-objeto, $(a_1, o_1), \ldots, (a_n, o_n)$, presentes en el problema de asignación. Además cada agente $a_i \in A$ tiene una preferencia estricta P_{a_i} (un orden o *ranking* estricto) sobre el conjunto de objetos O. Además de ser estrictas, las preferencias de cada individuo también son transitivas y completas. Por ejemplo si tenemos que el orden de preferencias del agente a_1 es $P_{a_i} = \{o_1, o_3, o_i, o_2\}$ esto significa que prefiere al objeto o_1 antes que al o_3 y éste lo prefiere antes que el suyo asignado inicialmente, o_i. Este último objeto indica un límite en la elección del individuo debido a que los objetos ordenados después del asignado inicialmente se rechazarán, en el caso del ejemplo está el objeto o_2 en esta situación. Dado un agente $a \in A$ definimos su **preferencia débil** R_a de la siguiente manera: dados dos objetos $o, o' \in O$, diremos que $oR_a o'$ cuando $oP_a o'$ o bien el agente es indiferente entre ambos. La preferencia débil no es estricta, pero sí es transitiva y completa. A la cuádrupla (A, O, P, μ) le llamaremos **problema de asignación** donde $\mathcal{C}$ será el conjunto de estos problemas. El objetivo de estos problemas se basa en establecer qué asignaciones podrían obtenerse mediante el intercambio de los objetos (dado que están asignados desde un inicio). Dicha asignaciones cumplirán las mismas propiedades que las expuestas en la definición 9.

A continuación empezamos a establecer la relación que existe entre estos problemas y la teoría de juegos, relación que necesitamos para llegar al objetivo de todos los problemas de asignación: encontrar una asignación estable. En general un juego es descrito por un conjunto de jugadores, un conjunto de resultado factibles, preferencias de jugadores sobre resultados y reglas, éstas determinarían cómo se debe realizar el juego. En el caso del modelo de asignación para que una pareja se lleve a cabo es necesario y suficiente que el agente esté de acuerdo con el objeto obtenido. Dichas reglas junto a un orden de preferencias de los jugadores induce una relación sobre los resultados, llamada relación de dominación.

Definición 14. *Dado un problema (A, O, P, μ) y dos asignaciones factibles α y η, α domina fuertemente a η si existe una coalición de jugadores S tal que:*

(a) Las reglas del juego dan a la coalición S el poder de forzar el resultado α, es decir que se da la igualdad $\{\alpha(a_i), a_i \in S\} = \{\mu(a_i), a_i \in S\}$.

(b) Cada miembro de la coalición de S prefiere α a η, es decir $\alpha(a_i) P_{a_i} \eta(a_i)$, $\forall a_i \in S$.

Es decir que la asignación α domina fuertemente a η si existe alguna coalición S (bloqueadora fuertemente) cuyos miembros tienen el incentivo y los medios para cambiar el resultado de η a α. Por esta razón, si α domina a η, podemos esperar que η no sea el resultado del juego debido, ya que no es estable debido a la existencia de una coalición bloqueadora.

Definición 15. *El Núcleo definido por dominación fuerte, $C_f(\mu)$, de un juego es el conjunto de resultados no dominados fuertemente.*

Teorema 4. *(Teorema de Shapley y Scarf (1962) [6]) El núcleo definido por dominación fuerte del modelo de asignación es igual al conjunto de asignaciones estables.*

La diferencia entre la definición de núcleo y del conjunto de asignaciones estables para el juego de asignación yace en el hecho de que el núcleo está definido vía una relación de dominación en la cual todas las coaliciones juegan un rol potencial, mientras que el conjunto de asignaciones estables está definida con respecto a ciertas clases de coaliciones (un miembro de cada lado, es decir ciertas coaliciones de 2 jugadores). Esto es equivalente a decir, que un resultado no pertenece al núcleo si existe una coalición de agentes o jugadores que bloquean dicho resultado, mientras que un resultado no es estable si existen uno o un par de agentes que lo bloquean.

Por otro lado, definimos la dominación débil la cual nos será de utilidad más adelante para el algoritmo utilizado en el problema de asignación de riñones.

Definición 16. *Dado un problema (A, O, P, μ), un perfil preferencias débiles R y dos asignaciones factibles α y η, α domina débilmente a η si existe una coalición de jugadores S tal que:*

(a) Las reglas del juego dan a la coalición S el poder de forzar el resultado α, es decir que se da la igualdad $\{\alpha(a_i), a_i \in S\} = \{\mu(a_i), a_i \in S\}$.

(b) Algún miembro de la coalición de S prefiere α a η, es decir $\alpha(a_i)P_{a_i}\eta(a_i)$, para algún $a_i \in S$.

(c) Cada miembro de la coalición de S prefiere α a η o es indiferente entre ambas, es decir que $\alpha(a_i)R_{a_i}\eta(a_i), \forall a_i \in S$.

Lo que podemos deducir de la anterior definición es que la asignación α domina débilmente a η si existe alguna coalición S bloqueadora débilmente cuyos miembros tienen el incentivo y los medios para cambiar el resultado de η a α. Por lo tanto podemos definir el Núcleo estricto como sigue

Definición 17. *El Núcleo definido por dominación débil o Núcleo estricto, $C_e(\mu)$, de un juego es el conjunto de resultados no dominados débilmente.*

Veamos a través de un ejemplo que el núcleo definido por dominación débil puede ser vacío cuando se permite la indiferencia de los agentes sobre los objetos, supuesto que hemos eliminado considerando las preferencias de cada individuo estrictas.

Ejemplo 7 (Shapley y Scarf (1974) [6]). *Tenemos tres individuos $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y tres objetos asignados inicialmente, $\mu(a_1) = o_1, \mu(a_2) = o_2$ y $\mu(a_3) = o_3$ con el siguiente perfil de preferencia*

P_{a_1}	P_{a_2}	P_{a_3}
o_2	$o_1 o_3$	o_2
$o_1 o_3$	o_2	$o_1 o_3$

Tenemos 4 asignaciones pertenecientes al núcleo definido por dominación fuerte las cuales son $\alpha_1(A) = (o_1, o_3, o_2)$, $\alpha_2(A) = (o_2, o_1, o_3)$, $\alpha_3(A) = (o_2, o_3, o_1)$ y $\alpha_4(A) = (o_3, o_1, o_2)$. Por otro lado todas las asignaciones están dominadas débilmente. Por ejemplo, para la asignación α_1 tenemos que ninguna coalición que contenga a a_3 puede vetar esta asignación, puesto que a_3 obtiene su objeto más preferido. Ninguna coalición que contenga a a_2 puede vetar esta distribución, puesto que a_2 obtiene uno *de sus objetos más preferidos, de modo que no hay manera de hacerle mejorar. Esto deja a $\{a_1\}$ como la única coalición que podría dominar (fuertemente) a $\alpha_1(A) = (o_1, o_3, o_2)$. Pero como la distribución α_1 asigna a a_1 el objeto de que dispone la coalición $\{1\}$, ésta no puede dominar (fuertemente) a α_1, es decir que $\alpha_1 \in C_f(\mu)$. Por otro lado se tiene que esta asignación no pertenece a $C_e(\mu)$, ya que la coalición $\{a_1, a_2\}$ puede dominar débilmente α_1 mediante la asignación $\alpha_2(A) = (o_2, o_1, o_3)$. Comparando α_1 y α_2 tenemos, obviamente, que a_1 mejora y a_2 no empeora, lo que hace que $\alpha_1 \notin C_e(\mu)$. De forma análoga se realizarían los otros casos.*

Es decir que todos los miembros del núcleo definido por dominación fuerte son "débilmente mejorables"en el sentido de que un miembro de la coalición lo puede hacer mejor mientras que el otro no lo hace peor. Con esto hemos comprobado que el núcleo definido por dominación débil puede ser vacío.

Lo que ocurre en el ejemplo anterior no es lo que nos interesa y como hemos definido en un principio queremos que el perfil de preferencias P esté formado por listas de preferencias estrictas. Debido a que, como veremos más adelante, si no se permite la indiferencia de los agentes entre los objetos tendremos que el núcleo estricto $C_e(\mu)$ será no vacío. Este resultado lo demostraremos con ayuda de un mecanismo en la siguiente sección.

1.3.3. El algoritmo TTC de Gale

Continuamos con el problema de asignación de agentes a objetos indivisibles planteado en esta sección donde buscamos un mecanismo (regla de asignación) que proponga una asignación $\alpha : A \to O$ para cada problema de asignación (A, O, P, μ). Lógicamente se quiere que este mecanismo tenga buenas propiedades, éstas las conseguimos haciendo uso del algoritmo TTC ("Top Tranding Cycle"), sugerido por el matemático y economista David Gale y publicado por Shapley y Scarf (1974) que nos va a proporcionar una asignación en el núcleo. Aquí se presentan la estructura de dicho algoritmo junto a la discusión de las propiedades deseables que la asignación dada por el TTC cumple.

El algoritmo TTC de Gale consiste en resolver un problema de asignación por etapas, en cada una se construye un grafo cuyos nodos son los pares agente-objeto que aún no han sido asignados en las etapas anteriores y cada agente apunta a otro que posee alguno de los objetos más preferidos por el primero (puede ser él mismo). Con ello se genera un ciclo en el que identificamos los nodos que pertenecen a éste para así asignar a cada agente el objeto que señala. Por construcción de la secuencia, cada individuo escogerá un único objeto y además será diferente para cada uno. Eliminados los individuos del ciclo y los objetos que toman, se considera el problema de asignación de los objetos restantes entre los individuos no eliminados y se vuelven a buscar ciclos. Nótese que, en cada etapa, siempre existe al menos un ciclo, si hay varios ciclos no se intersecan entre sí y además un ciclo puede estar formado por un único nodo donde su único agente apuntará a su propio objeto. Escribimos etapa por etapa el algoritmo para verlo más claro:

Dado un problema de asignación (A, O, P, μ)

- Etapa 1: cada agente señala su mejor objeto. Como hay un número finito de agentes y objetos, hay por lo menos un ciclo.

  Los agentes y objetos del ciclo se asignan y salen del problema.

  Si queda al menos un agente se pasa a la siguiente etapa. En otro caso se acaba el proceso del algoritmo y la asignación dada es la solución del problema.

- Etapa $k > 1$: Cada agente que quedó sin asignar en la etapa anterior señala su mejor objeto entre los que quedaron de la etapa anterior. Hay por lo menos un ciclo.

  Los agentes y objetos del ciclo se asignan y salen del problema.

  Se realiza de nuevo el mismo procedimiento si queda al menos un agente, en caso contrario el resultado del algoritmo es la asignación definida al satisfacer los ciclos en todos las pasos.

  Así sucesivamente hasta acabar con los nodos.

Denotaremos por $\alpha : A \to O$ a la asignación obtenida al aplicar el algoritmo TTC de Gale a un problema de asignación $(A, O, P, \mu) \in \mathcal{C}$.

Este algoritmo es el mecanismo ideal para resolver el problema de asignación de agentes a objetos indivisibles dado que la solución (asignación) que nos aporta cumple ciertas propiedades que deseamos. Suponemos que la participación de los agentes es voluntaria, entonces es indispensable que la asignación calculada, $\alpha : A \to O$, sea individualmente racional en el problema dado, es decir que cada agente recibe un objeto al menos tan bueno como su objeto inicial; ya que en caso contrario un agente que no esté conforme puede bloquear la asignación α. Por otro lado también queremos que el mecanismo haga un buen uso de los objetos existentes, esto es que α sea eficiente. Por último, se requiere que el mecanismo sea inmune a secesiones; es decir, que la asignación propuesta cumpla que no exista ningún subconjunto de agentes que puedan bloquear la asignación. Formalmente, estas tres propiedades son las que cumplen las asignaciones no dominadas débilmente, por tanto tenemos que las asignaciones calculadas a través del algoritmo TTC de Gale pertenecerán al núcleo estricto, $C_e(\mu)$. El núcleo de un intercambio es aquella asignación que no puede mejorarse, o bloquearse por ninguna coalición de agentes, i.e., que ningún grupo de agentes puede reorganizarse fuera del grupo y conseguir más utilidad que la obtenida en el grupo. Como se ha mencionado Shapley y Scarf establecieron que el Núcleo contiene siempre al menos una asignación, es decir que el Núcleo es no vacío, pero gracias a Roth y Postlewaite (1977) [4] sabemos que el algoritmo TTC de Gale selecciona la única asignación del núcleo, la cual es no dominada débilmente.

Teorema 5. *El algoritmo TTC de Gale selecciona una asignación del Núcleo y ésta es única.*

Demostración. Sea α la asignación obtenida con el algortimo TTC de Gale del problema (A, O, P, μ) y sean $S_1, S_2, \dots, S_k$ los agentes asignados y retirados del problema en las etapas $1, 2, \dots, k$ del algoritmo. Podemos decir que no existirá ningún agente en la primera etapa que quiera bloquear la asignación α, ya que cualquier agente de esta etapa ha sido asignado a su mejor objeto. Lo mismo sucederá con los agentes de las etapas posteriores, debido a que serán asignados a su mejor objeto de todos los que aún no hayan sido asignados. Por lo tanto demostramos, como queríamos, que α es una asignación que pertenece al Núcleo del problema de asignación (A, O, P, μ).

Tratamos ahora con la unicidad, queremos demostrar que la asignación obtenida α es única. Suponemos entonces que existe una asignación β tal que $\alpha \neq \beta$, comprobemos que β no está en el Núcleo. Cogemos la etapa k a la cual pertenece el primer agente, a, que cumple que $\alpha(a) \neq \beta(a)$ (si justo en esta etapa existen varios agentes que cumplen la desigualdad pues lo escogemos arbitrariamente). Por tanto como $a \in S_k$ y $\forall b \in S_1 \cup \cdots \cup S_{k-1}$ se tiene que $\alpha(b) = \beta(b)$ entonces $\forall b \in S_k$, $\alpha(b) R_b \beta(b)$ y $\alpha(b) \in \mu(S_k)$. Además como $\alpha(a) \neq \beta(a)$ por definición de α, $\alpha(a) P_a \beta(a)$. Lo que quiere decir que S_k bloquea a β entonces esta asignación no pertenece al Núcleo del problema (A, O, P, μ). □

La asignación aportada por el algoritmo TTC de Gale, α, depende lógicamente del perfil de preferencias P, para ser más exactos el objeto asignado por α al agente $a \in A$ depende de su preferencia P_a. Es importante preguntarse si el algoritmo con el que tratamos incentiva a los agentes a que revelen sus verdaderas preferencias, es decir, si el algoritmo TTC de Gale es manipulable o no. Recordando la definición 13 tendremos que el mecanismo definido por el algoritmo TTC de Gale, $f : \mathcal{P} \to \mathcal{A}$, es manipulable si existe un problema de asignación (A, O, P, μ) y un agente $a \in A$ y una preferencia P'_a tal que

$$f_a[A, O, (P'_a, P_{-a}), \mu](a) P_a f_a[A, O, (P_a, P_{-a}), \mu](a),$$

es decir que el agente a obtiene un objeto más preferido al asignado inicialmente, según su verdadera preferencia P_a, declarando P'_a en vez de P_a. En otras palabras, a manipula f en el problema (A, O, P, μ) declarando P'_a. Tenemos que la no manipulabilidad de dicho algoritmo nos asegura que éste utilice la información correcta. En Roth (1982) [3] se puede ver que el algoritmo TTC de Gale es no manipulable.

Teorema 6. *El mecanismo (el que selecciona la asignación de acuerdo al algoritmo TTC de Gale) del Núcleo es no manipulable.*

Demostración. Sea α la asignación obtenida al revelar las preferencias de cada individuo y donde $S_1, \ldots, S_k$ son los agentes asignados y retirados del problema en cada una de las etapas. Entonces, tenemos que ninguno de los agentes contenido en S_1 querrá declarar una preferencia distinta, ya que todos están obteniendo su mejor objeto. Además ningún agente que no pretenezca a esta etapa podrá modificar el resultado de la asignación en esta primera etapa revelando unas preferencias distintas, ya que no forman parte del ciclo.

Lo mismo pasa en las siguientes etapas, en cada una de ellas los agente reciben su mejor objeto una vez eliminados los objetos ya asignados, por lo tanto ninguno de ellos querrá revelar unas preferencias distintas, debido a que están obteniendo su mejor objeto. □

Por último, se tiene que el mecanismo es eficiente en el sentido de Pareto: la asignación α obtenida por el algoritmo TTC de Gale es Pareto eficiente dado que no es posible mejorar a un agente sin que otro empeore (Definición 11). Al ser α una asignación de equilibrio tenemos que todos los objetos son asignados a algún agente y eso provoca que para mejorar el bienestar o la utilidad de uno de estos agentes es necesario que otro empeore.

Resumiendo, tenemos que el algoritmo TTC de Gale cumple buenas propiedades, ya que además de seleccionar la única asignación del Núcleo tenemos que ésta es no manipulable, eficiente en el sentido de Pareto e individualmente racional.

Ejemplo 8. *Sea el problema de asignación (A, O, P, μ) donde se tienen 4 agentes con sus objetos asignados inicialmente, $\mu(a_i) = o_i, i = 1, 2, 3, 4$. En el Cuadro 1.1 está representado el perfil de preferencias, P, donde el orden de preferencia de cada agente se representa por columnas siendo el primer objeto su primera opción y el objeto dentro de un cuadrado indica que es el que posee cada individuo incialmente. Se interpreta de manera que los objetos que estén por encima de los enmarcados son los objetos preferibles al objeto incial, mientras que los que se encuentren por debajo serán rechazados ante el que se posee en el inicio del problema.*

a_1	a_2	a_3	a_4
o_3	o_4	o_1	o_1
o_2	o_1	o_2	$\boxed{o_4}$
o_4	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	o_2
$\boxed{o_1}$	o_3	o_4	o_3

Cuadro 1.1: Perfil de preferencias del problema de asignación (A, O, P, μ).

Aplicamos el algoritmo TTC de Gale al problema de asignación dado, (A, O, P, μ), para encontrar una asignación $\alpha : A \to O$ de los agentes con los objetos. En una primera etapa del algoritmo debemos dibujar un grafo en el cual haya 4 vértices, representando cada uno a cada pareja inicial, y cada agente señala con una flecha a su mejor objeto en esta etapa. Este grafo se muestra en la Figura 1.1.

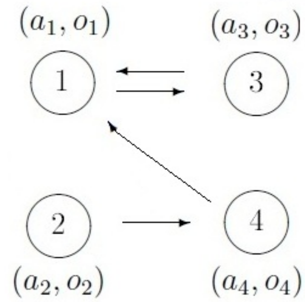


Figura 1.1: Etapa 1 del algoritmo TTC de Gale aplicado al problema de asignación (A, O, P, μ).

En esta etapa existe un ciclo formado por las parejas agente-objeto 1 *y* 3*, por tanto asignamos el objeto 1 al agente 3 y el objeto 3 al agente 1, es decir que* $\alpha(a_1) = o_3$ *y* $\alpha(a_3) = o_1$*. Una vez hechas las asignaciones retiramos a los agentes involucrados en dicho ciclo del problema de asignación. No existe ningún otro ciclo y el problema sigue teniendo agentes por tanto procedemos a la etapa 2 (representada en la Figura 1.2) donde el conjunto de agentes es* $A \setminus \{a_1, a_3\}$ *los cuales señalan a su mejor objeto del conjunto* $O \setminus \{o_1, o_3\}$*.*

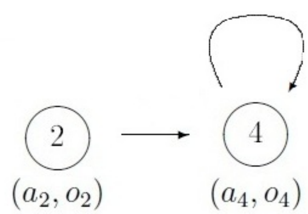


Figura 1.2: Etapa 2 del algoritmo TTC de Gale aplicado al problema de asignación (A, O, P, μ).

Volvemos a tener solamente un ciclo compuesto únicamente por un indiviuo, a_4*, entonces tenemos que dicho agente se queda con su objeto inicial* $\alpha(a_4) = o_4$*. Como seguimos teniendo un agente,* a_2*, procedemos a la etapa 3, el grafo de dicha etapa está representado en la Figura 1.3, donde lógicamente el agente* a_2 *señalará a su propio objeto dado que es el único que queda.*

Figura 1.3: Etapa 3 del algoritmo TTC de Gale aplicado al problema de asignación (A, O, P, μ).

Es decir que se realizará el emparejamiento $\alpha(a_2) = o_2$. *Por tanto la asignación obtenida será*

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \\ o_3 & o_2 & o_1 & o_4 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 2

Problema del intercambio de riñones

Un trasplante de riñón es una operación en la que se introduce un riñón nuevo en el cuerpo de una persona que sufre insuficiencia renal, enfermedad que se produce cuando dicho órgano deja de trabajar como es debido. El órgano trasplantado al paciente puede proceder de una persona, denominada donante, que ha fallecido hace poco por muerte encefálica o de un donante vivo que puede ser un conocido del paciente (familiar o amigo) o no. Un solo riñón sano puede desempeñar la función de dos riñones disfuncionales, por tanto una persona viva puede donar uno de sus riñones sanos a otra cuyos riñones han dejado de funcionar con normalidad. Para realizar el trasplante al paciente antes se tiene que realizar una nefrectomía, operación quirúrgica en la que se extirpa total o parcialmente un riñón al donante. La mayoría de trasplantes de riñón funcionan de forma satisfactoria. La gente que se somete a un trasplante de riñón debe medicarse de por vida para impedir que el cuerpo rechace el nuevo riñón. Pero, aparte de esto, la mayoría de las personas que se han sometido al trasplante pueden seguir manteniendo una vida normal y saludable en cuanto se recuperan de la intervención médica.

Cuando a una persona se le diagnostica insuficiencia renal se le registra en una lista de espera para recibir un órgano sano. Estas personas puede vivir muchos años con tratamientos, pero una larga espera puede empeorar su situación, dejar de ser un buen receptor o morir. En España el tiempo medio en lista de espera es de 18 meses, si bien este dato parece elevado, la tasa de mortalidad en la misma es de las más bajas del mundo, alrededor de un 8 %.

Los trasplantes renales pueden salvar muchas vidas, pero existe una escasez de órganos, frente a los 4.553 pacientes que estaban registrados en la lista de espera a finales del año 2014 se realizaron 2.678 trasplantes de los cuales 423 eran de donantes vivos. Este último número supone un 16 % de todos los trasplantes, porcentaje que nos deja lejos del podio a nivel mundial, ya que la tasa de media es del 40 %. En La Figura 2.1 se pueden observar el número de trasplantes renales de donantes fallecidos y el número de trasplantes de donantes vivos entre los años 1994 y 2014. De estos datos destacamos el escaso porcentaje que ocupan los trasplantes de donantes vivos, pero se puede ver un hecho positivo y es que ese porcentaje va creciendo con el paso de los años. Mencionar que los datos de la cantidad de personas en espera se obvia porque se ha mantenido en el período de años tratado.

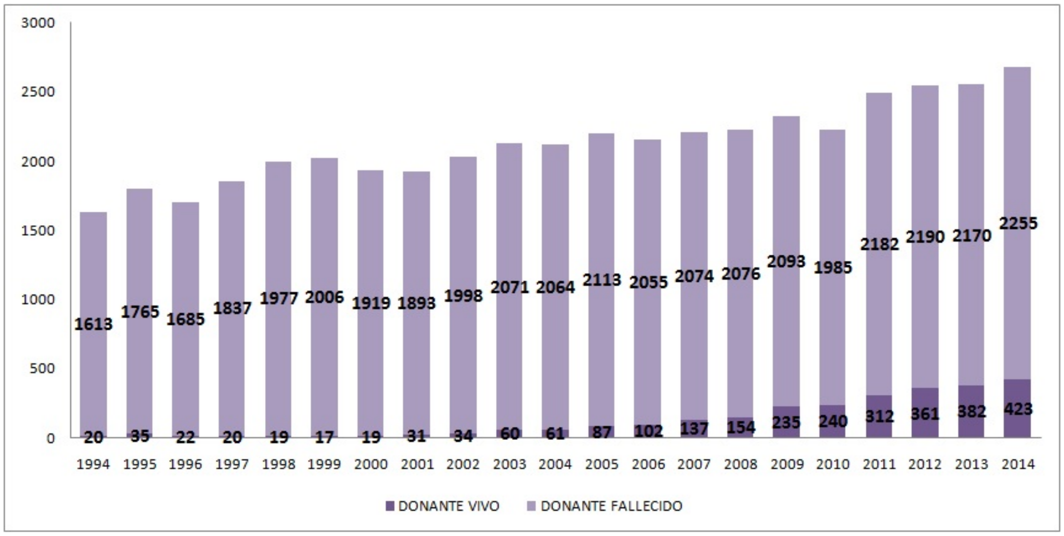


Figura 2.1: Actividad trasplante renal donante fallecido y donante vivo en España de 1994 a 2014. Fuente: elaboración propia a partir del Balance de actividad de la Organización Nacional de Trasplantes en 2014. Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad.

En cambio, España es muy eficiente en la obtención de órganos por muerte encefálica, ya que tiene una tasa de trasplante renal de cadáver por millón de habitantes del $48,3$ la cual nos coloca entre los primeros países. Este dato puede ser el causante de la escasa obtención de donantes en vivo. De todas formas sigue existiendo una escasez de órganos que no permite abastecer al gran número de pacientes que se encuentra a la espera de un trasplante renal. Así pues, podemos decir que la principal problemática para que todo el mundo pueda disfrutar de un trasplante de riñón es dicha escasez.

El trasplante renal de paciente vivo ofrece importantes ventajas respecto al injerto convencional. Aporta una mayor tasa de supervivencia y compensa uno de los grandes problemas actuales: la escasez de donantes jóvenes. Así, el receptor se beneficia de un órgano de mayor calidad y libera una plaza en la lista de espera para que otra persona pueda recibir un órgano de una persona fallecida. La situación ideal es aquella en la que la pareja del paciente o un familiar pueda convertirse en donante pero no siempre es posible debido a los problemas de compatibilidad de tejidos y el consiguiente riesgo de rechazo del órgano trasplantado. De hecho se calcula que en España se rechazan un tercio de los donantes en esta situación y por consiguiente se excluye el órgano del sistema. Es por esto que en los últimos años se ha buscado la manera de intentar solventar los casos en los que un paciente no es compatible con su donante para así conseguir aumentar el número de trasplantes realizados y por tanto reducir la lista de espera. Promocionar la donación de donantes vivos puede contribuir a ese intento de aumento de trasplantes.

En 1986 el médico F.T. Rapaport fue el primero en proponer el trasplante cruzado de riñones de donantes vivos. La idea del trasplante cruzado es la siguiente: supongamos que una pareja de paciente y donante es incompatible y hay otra pareja en las mismas condiciones pero el donante de la primera pareja es compatible con el paciente de la segunda y el paciente de la primera es compatible con el donante de la segunda. Entonces se podrían intercambiar (cruzar) los donantes entre ambas parejas y así realizar ambos trasplantes. Esta idea también es aplicable para ciclos de más de dos parejas.

El problema de asignación, más concretamente el intercambio de bienes indivisibles, descrito en el capítulo anterior es de gran ayuda para tratar con problemas de trasplantes cruzados. Gracias a las contribuciones de un grupo de economistas, destacando a Alvin Roth, de Harvard University, y Tayfun Sönmez y Utku Ünver, de Boston College; podemos describir la adaptación del problema de asignación a este problema real. Haciendo uso de modificaciones de algoritmo TTC de Gale se ordenará de forma eficiente el intercambio de riñones de donantes vivos teniendo en cuenta restricciones que derivan de la dificultad del trasplante renal. En este capítulo se presenta la aplicación del algoritmo TTC de Gale al problema de asignación de trasplantes cruzados de riñones de donantes vivos. A esta aplicación le acompañará información general sobre el riñón y los trasplantes.

2.1. El riñón

Dentro del sistema urinario los riñones son los órganos más importantes debido a que se encargan de la filtración de la sangre con la finalidad de eliminar diversos residuos metabólicos (como son la urea, el ácido úrico, la creatinina o el potasio) mediante la orina. Además de la función de excretar desechos, estos órganos realizan otras como regular la homeoestasis del cuerpo, secretar hormonas o regular la presión arterial.

Cuando los riñones son incapaces de filtrar adecuadamente los residuos mencionados anteriormente es cuando se produce una insuficiencia renal o fallo renal, este fallo se clasifica en dos categorías: la insuficiencia renal aguda la cual es una disminución repentina de la función renal que puede llevar a la pérdida permanente de esta función y, por otro lado, tenemos la insuficiencia renal crónica que se define como un deterioro progresivo e irreversible de la función renal (este deterioro puede durar años e incluso décadas). Las dos causas más comunes del último fallo mencionado son la hipertensión, la diabetes y por herencia genética. Por otro lado, cuando el nivel de una insuficiencia renal es total o casi total y permanente se denota como enfermedad renal terminal y los pacientes que sufren de ésta deben sobrevivir a través de la diálisis o realizándose un trasplante. La diálisis es un tratamiento que se realiza a los pacientes con insuficiencia renal que no disponen de un donante, básicamente existen dos tipos de diálisis:

- Hemodiálisis: tratamiento médico que consiste en eliminar artificialmente las sustancias nocivas o tóxicas de la sangre, especialmente las que quedan retenidas a causa de una insuficiencia renal, mediante un filtro exterior. Después de limpiarla la sangre filtrada es devuelta al cuerpo. Es decir este aparato realiza la función del riñón y por ello el paciente tiene que ir a un lugar adecuado donde dispongan del dispositivo.

- Diálisis peritoneal: este tratamiento no tiene necesidad de realizarse en un centro especializado. Consiste en introducir un líquido, llamado dializado, que se encarga de sacar las toxinas de los vasos sanguíneos y así realizar el filtrado de la sangre. Se denota peritoneal dado que se introduce el tubo que introduce el líquido por la cavidad peritoneal, cavidad abdominal alrededor del intestino. Una vez finalizado el proceso se bombea el dializado para que así sea expulsado con las toxinas.

Pero la diálisis además de ser un tratamiento muy costoso tiene el inconveniente de que deteriora bastante la calidad de vida del paciente. Por ello, la mejor opción para cualquier paciente es la realización de un trasplante.

2.2. Trasplante renal y compatibilidad

La insuficiencia de donantes fallecidos (debida mayoritariamente a la disminución de los accidentes de tráfico) y el aumento de la edad potencial de los donantes junto a las patologías que padecen son las causas principales del aumento de los trasplantes de riñón en vivo que se ha dado en España en los últimos años. De esta manera se intenta abastecer a los pacientes que se encuentran en la lista de espera por un trasplante. Gracias a los conocimientos y a la experiencia, junto al gran avance en los inmunodepresores (medicamentos para evitar el rechazo del órgano tras el trasplante), se ha avanzado en los trasplantes de donantes vivos. Además, esta modalidad es mejor opción que el caso de donantes fallecidos dado que la calidad y probabilidad del éxito de trasplante son mayores en el caso de donante vivo que en el de fallecido.

Para que un trasplante sea exitoso tienen que darse, fundamentalmente, dos compatibilidades genéticas entre paciente y donante: el grupo sanguíneo y la semejanza entre los tipos de tejidos.

El grupo sanguíneo de un ser humano depende de dos proteínas que se denotan por A y B, éstas pueden estar presentes en sangre o no y esto nos lleva a que existen cuatro tipos de grupos sanguíneos: 0, A, B y AB. Si el paciente pertenece al grupo 0 significa que no tiene ninguna de las proteínas presentes en sangre, si pertenece al A tiene la proteína A, si pertenece al B tiene la B y, por último, si pertenece al AB significa que tiene ambas proteínas en su sangre. Es necesario que donante y paciente sean compatibles, ya que en otro caso el sistema inmunitario atacará a cualquier riñón que no sea de un grupo sanguíneo compatible con el suyo. Dicho esto la incompatibilidad de grupo sanguíneo se determina muy fácilmente ya que se rige por la regla de que no se puede recibir la proteína que no se posee. Es decir que la compatibilidad se distribuye por un sistema denominado sistema AB0 el cual se clasifica de la siguiente manera:

- Grupo 0: solo puede recibir del grupo cero, pero es donante universal; es decir que puede donar a todos los grupos.
- Grupo A: puede recibir del grupo 0 y del A, y puede donar al A y al AB.
- Grupo B: puede recibir del grupo 0 y del B, y puede donar al B y al AB.
- Grupo AB: puede recibir de todos los grupos mientras que solo puede donar al AB.

Cabe mencionar además del sistema “AB0”que existe otra clasificación importante para describir grupos sanguíneos en humanos la cual se denomina factor Rh (Rhesus). Éste es una proteína integral de la membrana de los glóbulos rojos el cual puede estar presente en sangre o no. Las personas con factores Rhesus en sangre se clasifican como Rh positivas, mientras que aquellas sin los factores se clasifican como Rh negativas. Mencionar que la coincidencia del Rh entre paciente y donante no es importante que se dé dado que se puede corregir o atenuar con el tratamiento inmunodepresor.

La segunda compatibilidad relevante es el tipo de tejido HLA (“Human Leukocyte Antigen”) estos son antígenos formados por moléculas (proteínas) que se encuentran en la superficie de casi todas las células de los tejidos de un individuo y también en los leucocitos de la sangre. Su función es diferenciar lo propio de lo ajeno y asegurar la respuesta inmune que defiende el organismo de agentes infecciosos. En lo referente al rechazo hay seis tipos de proteínas, dos del tipo A, dos del B y dos del DR, denominadas antígenos leucocitarios humanos. Dichas proteínas pueden tener diferentes versiones, centenares, que vienen determinadas genéticamente y que varían debido a diferentes factores como puede ser la raza. Evidentemente, cuando el donante y el paciente compartan las características de todas las proteínas, coincidencia muy improbable, se minimiza la probabilidad de rechazo mientras que aumentará en relación al número de disparidades. Además de lo mencionado, a pesar de que haya compatibilidad de HLA puede ocurrir que el receptor tenga anticuerpos a las proteínas del donante y así hacer menos probable el éxito del trasplante. Un claro ejemplo en el que se da esta situación es el caso de parejas con un hijo en común, ya que la madre puede crear anticuerpos del padre durante el embarazo y así reducir esa probabilidad de éxito. De hecho si escogemos dos personas seleccionadas al azar la probabilidad de que sean compatibles es de más del 50 % mientras que la probabilidad de que un hombre pueda donar un riñón a la madre de un hijo común es del 33 %. Se puede conocer la existencia de estos anticuerpos combinando muestras de sangre del donante y del receptor potencial. En el caso de encontrarnos con ellos, hecho denominado prueba cruzada positiva, se descarta la donación.

Además de estas características afectan otros factores, como la edad, el peso o la salud, que también son importantes para determinar la calidad del trasplante. Que exista una compatibilidad alta es muy importante dado que cuánto más alta menos agresivo será el postratamiento inmunodepresor.

2.3. Trasplantes cruzados

En todos los países occidentales menos del 50 % de los pacientes que se incluyen en la lista de espera son trasplantados cada año, esto hace que la brecha que existe entre el número de pacientes que necesitan un trasplante renal y el número de trasplantes renales vaya en aumento y muchos pacientes fallecen esperado un nuevo riñón debido a las complicaciones de la insuficiencia renal crónica que no pueden ser corregidas por diálisis. Debido a esto y como se ha mencionado, los trasplantes en vivo han ido creciendo con el paso de los años pero esto nos lleva a otros problemas, ya que en la mayoría de los países este tipo de trasplantes es una donación dirigida, esto es, el donante vivo dona su riñón a un paciente concreto como puede ser entre familiares o amigos. Por desgracia en estos casos existe la probabilidad de que no sean compatibles el paciente y el donante, ya sea por el grupo sanguíneo o que la prueba cruzada haya dado positiva, es decir, que el paciente es sensible a determinados antígenos del donante y eso no permite realizar la donación. Como solución a la voluntad de donación se propone la posibilidad de que pacientes que no puedan recibir un riñón de su donante puedan intercambiar el donante de manera que cada uno de los receptores reciba un riñón compatible y los donantes reciben su deseo de donación. La práctica clínica del llamado programa de intercambio de donantes de riñón de vivo o trasplante renal cruzado no se puso en práctica hasta finales de los años noventa en Estados Unidos y Europa.

Las opciones de trasplante que ofrece este intercambio de donantes de parejas incompatibles son:

a) Cruces simples son: aquellos en los que dos parejas donante receptor incompatibles intercambian sus respectivos donantes. Por razones éticas y legales las extirpaciones de los riñones se deben hacer de forma simultánea, ya que si alguien revoca su consentimiento cuando ya se ha realizado algún trasplante se quedaría un paciente sin su nuevo órgano. De esta manera se evita que uno de los participantes decida no donar, aunque esto implica que haya muchos recursos disponibles como son disponibilidad de personal o de quirófanos.

b) Cruces a tres o más bandas son: aquellos en los que se forma un ciclo de trasplantes con la participación de más de dos parejas. Este caso puede complicar la logística, ya que a medida que crecen las parejas involucradas en un ciclo más difícil es realizar las nefrectomías debido a la simultaneidad de las mismas.

c) Intercambio utilizando parejas compatibles: se trata de un cruce simple o a varias bandas pero una o varias de las parejas incluidas son compatibles. La decisión de entrar en el *pool* de parejas de trasplante cruzado puede estar motivada por un deseo de favorecer a otras parejas, por encontrar un donante más óptimo o por ambas, por ejemplo si entre una pareja donante-receptor inicial hay mucha diferencia de edad puede incluirse una pareja compatible para intercambiar el donante por otro con una menor diferencia de edad con el receptor.

d) Intercambio con la lista de espera: esta posibilidad se ha utilizado en EEUU y se basa en la inclusión del donante de una pareja incompatible como si fuera un donante altruista para favorecer una cadena de trasplantes. El receptor de este donante, no beneficiado con la cadena de trasplantes ocuparía un lugar preferente en la lista de espera por muerte encefálica.

e) Utilización de donante altruista o buen samaritano: se incluye el donante buen samaritano en el conjunto de parejas incompatibles, como inicio de una cadena de trasplantes que finaliza en un enfermo de la lista de espera de cadáver. Esta opción facilita la logística, ya que las cadenas pueden ser no simultáneas, dado que si en un determinado momento la cadena se rompe porque uno de los donantes no pueda ser nefrectomizado o revoque su consentimiento, no quedará ningún receptor sin trasplantar cuyo donante haya efectuado la donación renal.

En cuanto al caso de España, el Programa Nacional de Donación Renal Cruzada está formado por una red de centros que deben cumplir con una serie de requisitos (véanse en Donación Cruzada,ONT). Cada uno de estos centros inscriben en un registro nacional a todas aquellas parejas donante-receptor que cumplan con algunas de las siguientes características: incompatibilidad del grupo sanguíneo, prueba cruzada positiva o la existencia de un beneficio asociado a un procedimiento de trasplante renal cruzado, como puede ser más compatibilidad o menos diferencia entre la edad del donante y del paciente. Para realizar cada asignación entre donante y paciente se usa un programa informático, puesto en marcha en el año 2009, el cual asigna a través de un algoritmo cuales son las mejores parejas considerando los dos factores de compatibilidad. Dicho programa trata con los siguientes casos: los cruces simples, cruces de más de dos parejas, la posibilidad de incluir parejas compatibles o un buen samaritano. Se puede observar el cambio positivo que ha tenido este programa en la Figura 2.2 donde se puede observar claramente un aumento del número de parejas activas en los cruces realizados, el cual no ha ido solo dado que le acompaña un aumento del número de centros adscritos al programa de 8 en el año que el programa se puso en marcha (2009) a 23 (de 11 comunidades) en el año 2015.

Figura 2.2: Número de parejas activas en los cruces realizados en España. Fuente: Programa Nacional de Donación Renal Cruzada, Organización Nacional de Trasplantes, 2014

Con respecto a los resultados de los cruces, desde el inicio del programa de trasplante cruzado hasta mayo de 2013 se han realizado un total de 44 trasplantes cruzados: 16 cadenas simples una de las cuales incluye donante buen samaritano y cuatro cadenas de tres trasplantes otra de las cuales incluye un donante buen samaritano. El primer trasplante cruzado realizado en España fue con una cadena simple, tras el cruce de 24 parejas, en el año 2009. En marzo de 2013, un total de 168 parejas habían sido registradas en algún momento, manteniéndose activas 94 para el cruce de ese mismo mes. Es importante señalar el avance producido en el primer trimestre del 2013, con 26 trasplantes realizados, que suponen un 28,5 % de los 191 llevados a cabo con donante vivo en España y para ese mismo periodo.

Desde su puesta en marcha por primera vez en 1991 en Corea del Sur, se han desarrollado diferentes programas de trasplante cruzado a nivel mundial, tanto nacionales como es el caso de Holanda, Reino Unido, Australia, Canadá y España, como multicéntricos. En la mayoría de los programas se considera que el número de intercambios entre donantes de parejas incompatibles se posibilita de manera significativa cuando el número de parejas incompatibles supera las 100. Describimos algunos de los programas más importantes de Estados Unidos y Europa sin ser exhaustivos:

En EEUU se ubican varios programas de trasplantes cruzados. El primer programa en ser fundado fue el *New England Program for Kidney Exchange* (NEPKE), perteneciente al Hospital General de Massachusetts y en el que se llevó a cabo el primer trasplante cruzado en el año 2003. Otro programa de EEUU que merece ser comentado es el de la escuela de medicina de UCLA, que recibe el nombre de *Ucla Kidney Exchange Program*, éste trata con dos tipos de trasplantes cruzados: los cruces simples y las cadenas de trasplante. Dichas cadenas comienzan con un buen samaritano en las que el donante del enfermo que ha recibido el riñón del donante altruista dona su órgano a otro paciente desconocido. Por último, otro centro de los Estados Unidos de América es el *Johns Hopkins Comprehensive Transplant*

Center el cual desde el 2001 tiene un programa de trasplantes renales cruzados llamado *Paired Kidney Exchange Johns Hopkins*, en el que en el año 2003 se llevó a cabo el primer trasplante cruzado con un ciclo de tres parejas y en 2005 también fue pionero en realizar un ciclo con 5 parejas implicadas. Cabe mencionar que la UNOS (United Network for Organ Sharing) dispone de un programa de trasplantes cruzados llamado *Kidney Paired Donation* (KPD), que une a todos los centros de Estados Unidos que pueden realizar trasplantes cruzados. Entre estos centros destaca el Northwestern Memorial de Chicago, ya que realizó en 2010 un ciclo que involucró nada menos que a 8 parejas, el ciclo más largo realizado hasta la fecha. Ubicados en el continente europeo podemos encontrar en el Reino Unido un programa de donación cruzada llamado *National Matching Scheme for Paired and Pooled (kidney) Donation*, en el cual se han llevado a cabo intercambios entre dos parejas, pero aún no se han realizado cruces de tres o más parejas; en Holanda el Erasmus Medical Center; en Alemania se implementó un programa en 2004 en el cual participaron 7 centros médicos de trasplantes alemanes y, en Portugal se realizó por primera vez en el año 2013 un trasplante cruzado con el Programa Nacional para Doação Renal Cruzada. Por otro lado en Europa se intenta que exista una colaboración entre varios países que ya tienen su propio programa nacional (España, Portugal, Italia y Francia) para así aumentar el número de trasplantes cruzados gracias a las relaciones que puedan desarrollar.

2.4. Problema de asignación de pacientes a riñones de donantes vivos

En esta sección adaptamos el problema de asignación de agentes a objetos indivisibles descrito en la sección 1.2 del capítulo anterior al problema de asignación de trasplantes cruzados de riñones. En particular se hará uso del caso con derecho a propiedad haciendo uso del algoritmo TTC de Gale para la búsqueda de la solución. Se tratará únicamente con riñones de donantes vivos, es decir que vamos a ver cómo se plantea el problema de asignación de riñones de donantes vivos a pacientes con insuficiencia renal. Se dispondrán de parejas de paciente-donante incompatibles, donde los pacientes serán el conjunto de agentes y los órganos el conjunto de objetos indivisibles y el derecho a propiedad vendrá determinado por esa asignación inicial que representa dichas parejas. Por otro lado la lista de preferencias de cada agente está determinada por un médico, es decir que las preferencias no son exactamente del agente sino que se elaboran según la compatibilidad de los órganos de los donantes disponibles. Por otro lado, debido a la semejanza de este problema concreto con el caso general, se hará uso del algoritmo TTC de Gale para encontrar la mejor asignación que realice las máximas parejas posibles de paciente-donante compatible. La aplicación del algoritmo TTC dará lugar a una asignación en el núcleo del problema, por lo tanto será estable y también eficiente. Por otra parte, cabe mencionar que la no manipulabilidad no es de gran interés en este problema concreto debido a que las preferencias son totalmente objetivas (hechas a través de un criterio médico) y no como en el caso general descrito en el capítulo 1 que eran subjetivas. Por todo ello el algoritmo TTC de Gale es un buen mecanismo para encontrar ciclos de trasplante renal cruzado y así conseguir mejorar la situación en la que se encuentran las personas que esperan un trasplante de riñón. Con todo esto procedemos a exponer el problema de asignación de riñones de donantes vivos a pacientes formalmente.

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito de n pacientes y $O = \{o_1, \ldots, o_n\}$ un conjunto finito de n riñones de donantes vivos. Además tenemos una asignación inicial de pacientes a riñones $\mu : A \to O$ con $\mu(a_i) = o_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, es decir, μ describe todas las n parejas de paciente-donante $(a_1, o_1), \ldots, (a_n, o_n)$ presentes en el problema de asignación. Suponemos que para todo $i = 1, \ldots, n$, el paciente a_i es incompatible con el riñón del donante o_i, si no lo fueran, se realizaría el trasplante entre ellos y la pareja no estaría presente en el problema de asignación. Cada agente $a_i \in A$ tiene una preferencia estricta P_{a_i} (un orden o *ranking* estricto) sobre el conjunto de objetos O. Para nuestra aplicación, P_{a_i} refleja el grado de compatibilidad del paciente a_i con los riñones de los donantes. Es el médico del paciente quien determina el orden sobre el conjunto de riñones disponibles dependiendo de la compatibilidad de los mismos con su paciente. En particular, $o_j P_{a_i} o_i$ significa que el riñón del donante j es compatible con el paciente i mientras que $o_i P_{a_i} o_j$ significa que el paciente i y el donante j son incompatibles. Además, $o_j P_{a_i} o_{j'}$ significa que el riñón del donante j es a priori mejor para el paciente i que el riñón del donante j'. Sea $a_i \in A$ un paciente genérico, dada P_{a_i}, tenemos la preferencia débil R_{a_i} donde para todo par de riñones o, $o' \in O$, $oR_{a_i}o'$ si y sólo si, o bien $o = o'$ o bien $oP_{a_i}o'$. Con esto tenemos un perfil de preferencias de los pacientes sobre los riñones que denotamos por $P = (P_{a_i})_{a_i \in A}$. Un problema de asignación de pacientes a riñones de donantes vivos queda determinado por la tupla (A, O, P, μ). Denotamos por $\mathcal{C}$ el conjunto de todos estos problemas de asignación. La solución buscada será una asiganción $\alpha : A \to O$ de los pacientes con los riñones, donde ningún riñón corresponde a más de un agente. En el Ejemplo 9 podemos ver el funcionamiento del algoritmo TTC Gale aplicado a un problema sencillo de intercambio de riñones. Además el problema tratado en dicho ejemplo se ha calculado a mano y con ayuda de un programa realizado con el *software* `R`. Esta aplicación se puede ver en la sección A.2.

Ejemplo 9. *Sea el problema de asignación (A, O, P, μ) donde se tienen 11 pacientes con sus riñones asignados inicialmente, $\mu(a_i) = o_i, i = 1 \ldots, 11$. En el Cuadro 2.1 está representado el perfil de preferencias, P, donde el orden de preferencia de cada paciente se representa por columnas siendo el primer objeto su primera opción y el objeto dentro de un cuadrado indica el donante inicial de cada paciente. Se interpreta de manera que los riñones que estén por encima del donante inicial serán considerados compatibles, según el nefrólogo (médico especialista en riñones), con cada paciente y estos estarán ordenados de más compatibilidad a menos. Los riñones que se encuentran tras el órgano enmarcado tampoco son compatibles con el paciente.*

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
o_8	o_{10}	o_4	o_{10}	o_2	o_{11}	o_2	o_7	o_1	o_3	o_5
o_6	o_8	o_6	$\boxed{o_4}$	o_8	o_7	o_{11}	o_2	o_3	o_1	o_2
o_{10}	o_6	o_8	o_8	o_{11}	o_9	o_9	o_{11}	o_8	o_9	o_4
o_4	o_4	o_{10}	o_6	o_9	o_2	o_8	o_9	o_4	o_8	o_1
$\boxed{o_1}$	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	o_5	o_7	o_4	o_4	o_6	o_{10}	$\boxed{o_{10}}$	o_3
o_5	o_9	o_5	o_7	o_4	o_8	o_{10}	o_{10}	o_6	o_6	o_6
o_2	o_7	o_9	o_2	$\boxed{o_5}$	o_{10}	$\boxed{o_7}$	o_4	o_5	o_5	o_8
o_{11}	o_{11}	o_2	o_9	o_{10}	o_5	o_6	o_5	$\boxed{o_9}$	o_4	o_9
o_7	o_3	o_{11}	o_{11}	o_6	$\boxed{o_6}$	o_5	$\boxed{o_8}$	o_2	o_2	o_{10}
o_9	o_1	o_7	o_3	o_1	o_3	o_3	o_1	o_{11}	o_7	o_7
o_3	o_5	o_1	o_1	o_3	o_1	o_1	o_3	o_7	o_{11}	$\boxed{o_{11}}$

Cuadro 2.1: Perfil de preferencias del problema de asignación (A, O, P, μ).

Aplicamos el algoritmo TTC de Gale al problema de asignación dado, (A, O, P, μ), para encontrar una asignación $\alpha : A \to O$ de los pacientes con los riñones. En una primera etapa del algoritmo debemos dibujar un grafo en el cual haya 11 vértices, representando cada uno a cada pareja inicial, *y cada paciente señala con una flecha a su mejor objeto en esta etapa. Este grafo se muestra en la Figura 2.3.*

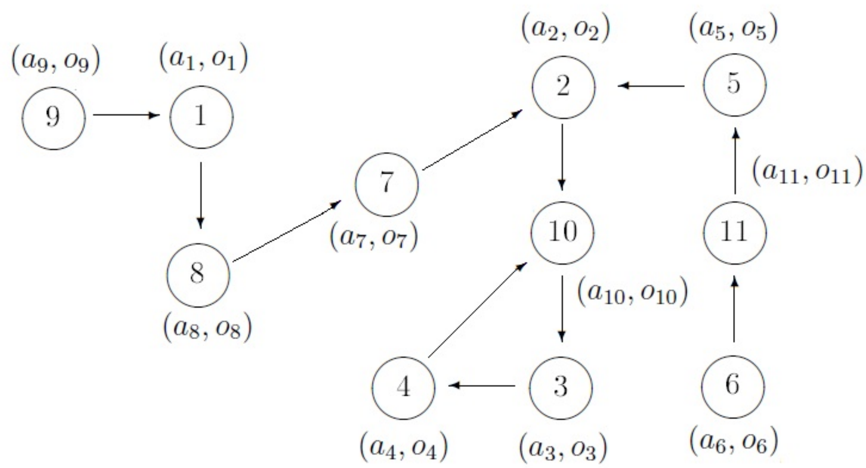


Figura 2.3: Etapa 1 del algoritmo TTC de Gale aplicado al problema de asignación (A, O, P, μ).

En esta etapa existe un ciclo formado por las parejas paciente-donante 3, 4 *y* 10, *por tanto asignamos el riñón 4 al paciente 3, el riñón 10 al paciente 4 y el riñón 3 al paciente 10, es decir que* $\alpha(a_3) = o_4$, $\alpha(a_4) = o_{10}$ *y* $\alpha(a_{10}) = o_3$. *Una vez hechas las asignaciones retiramos a los pacientes involucrados en dicho ciclo del problema de asignación. No existe ningún otro ciclo y el problema sigue teniendo pacientes por tanto procedemos a la etapa 2 (representada en la Figura 2.4) donde el conjunto de pacientes es* $A \setminus \{a_3, a_4, a_{10}\}$ *los cuales señalan a su mejor riñón del conjunto* $O \setminus \{o_3, o_4, o_{10}\}$.

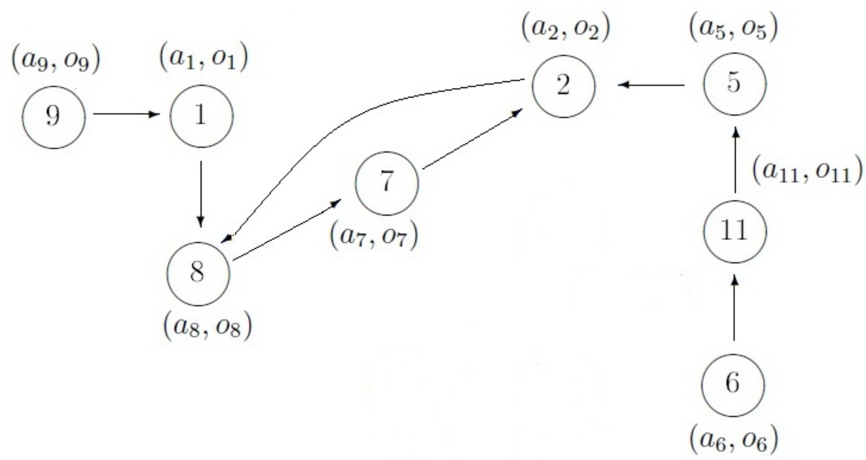


Figura 2.4: Etapa 2 del algoritmo TTC de Gale aplicado al problema de asignación (A, O, P, μ).

Volvemos a tener solamente un ciclo compuesto por las parejas 2, 8 y 7 por lo tanto realizamos las asignaciones $\alpha(a_2) = o_8$, $\alpha(a_8) = o_7$ *y* $\alpha(a_7) = o_2$ *y retiramos los pacientes involucrados del problema. Como seguimos teniendo pacientes procedemos a la etapa 3, el grafo de dicha etapa está representado en la Figura 2.5, donde cada paciente del conjunto* $A \setminus \{a_2, a_3, a_4, a_7, a_8, a_{10}\}$ *señala a su mejor riñón del conjunto* $O \setminus \{o_2, o_3, o_4, o_7, o_8, o_{10}\}$.

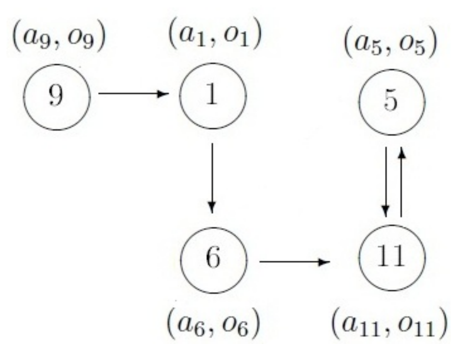


Figura 2.5: Etapa 3 del algoritmo TTC de Gale aplicado al problema de asignación (A, O, P, μ).

Esta última etapa contiene un ciclo formado por los agentes 5 y 11 por tanto se realiza la asignación $\alpha(a_5) = o_{11}$ *y* $\alpha(a_{11}) = o_5$, *retiramos los agentes del problema y nos quedamos con los pacientes y riñones 1, 6 y 9 en la etapa 4 la cual se representa en la Figura 2.6.*

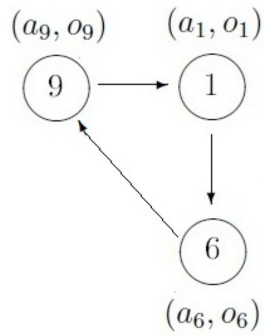


Figura 2.6: Etapa 4 del algoritmo TTC de Gale aplicado al problema de asignación (A, O, P, μ).

En esta última etapa agotamos los pacientes dado que los tres involucrados forman un ciclo con las asignaciones $\alpha(a_1) = o_6$, $\alpha(a_6) = o_9$ y $\alpha(a_9) = o_1$. La asignación final del núcleo obtenida por el algoritmo será:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \\ o_6 & o_8 & o_4 & o_{10} & o_{11} & o_9 & o_2 & o_7 & o_1 & o_3 & o_5 \end{pmatrix}$$

O también puede ser representada marcando las asignaciones de los riñones a cada paciente (en este caso en negrita) en el perfil de preferencias como se puede mostrar en el Cuadro 2.2.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
o_8	o_{10}	$\boldsymbol{o_4}$	$\boldsymbol{o_{10}}$	o_2	o_{11}	$\boldsymbol{o_2}$	$\boldsymbol{o_7}$	$\boldsymbol{o_1}$	$\boldsymbol{o_3}$	$\boldsymbol{o_5}$
$\boldsymbol{o_6}$	$\boldsymbol{o_8}$	o_6	$\boxed{o_4}$	o_8	o_7	o_{11}	o_2	o_3	o_1	o_2
o_{10}	o_6	o_8	o_8	$\boldsymbol{o_{11}}$	$\boldsymbol{o_9}$	o_9	o_{11}	o_8	o_9	o_4
o_4	o_4	o_{10}	o_6	o_9	o_2	o_8	o_9	o_4	o_8	o_1
$\boxed{o_1}$	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	o_5	o_7	o_4	o_4	o_6	o_{10}	$\boxed{o_{10}}$	o_3
o_5	o_9	o_5	o_7	o_4	o_8	o_{10}	o_{10}	o_6	o_6	o_6
o_2	o_7	o_9	o_2	$\boxed{o_5}$	o_{10}	$\boxed{o_7}$	o_4	o_5	o_5	o_8
o_{11}	o_{11}	o_2	o_9	o_{10}	o_5	o_6	o_5	$\boxed{o_9}$	o_4	o_9
o_7	o_3	o_{11}	o_{11}	o_6	$\boxed{o_6}$	o_5	$\boxed{o_8}$	o_2	o_2	o_{10}
o_9	o_1	o_7	o_3	o_1	o_3	o_3	o_1	o_{11}	o_7	o_7
o_3	o_5	o_1	o_1	o_3	o_1	o_1	o_3	o_7	o_{11}	$\boxed{o_{11}}$

Cuadro 2.2: Asignación calculada por el algoritmo TTC de Gale para problema de asignación (A, O, P, μ).

Observemos que en este problema todos los pacientes mejoran su situación ya que todos ellos obtienen un riñón compatible.

Pero se podría dar el caso que haya pacientes que se les asigne su propio donante y que por lo tanto no tendrían un riñón compatible disponible. Haremos una pequeña modificación en el ejemplo anterior para explicar mejor este caso.

Ejemplo 10. *Tomamos los datos el Ejemplo 9 con una ligera modificación, vamos a considerar que la lista de preferencias del paciente a_6 es la siguiente:*

$$a_6: \quad o_{11} \quad o_7 \quad o_1 \quad o_2 \quad o_4 \quad o_8 \quad o_{10} \quad o_5 \quad \boxed{o_6} \quad o_3 \quad o_9,$$

donde el orden del más prioritario al menos se lee de izquierda a derecha. El cambio que se ha hecho en la lista del paciente a_6 es que se han intercambiado la posición el órgano o_9 con el o_1. De esta manera las tres primeras etapas serían realizadas de igual modo que en el, pero la etapa 4 del algoritmo sería diferente al caso tratado con anterioridad. En la Figura 2.7 podemos ver representado el grafo de dicha etapa con la modificación.

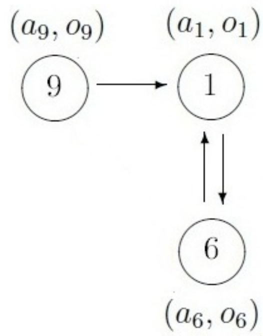


Figura 2.7: Etapa 4 del algoritmo TTC de Gale aplicado al problema de asignación (A, O, P, μ) del Ejemplo 9 con la modificación en las preferencias del agente a_6.

Tenemos un ciclo formado el cual involucra a los pacientes a_1 y a_6. Realizamos las asignaciones $\alpha(a_1) = o_6$ y $\alpha(a_6) = o_1$. Como queda un paciente, el a_9 seguimos con el algoritmo y pasamos a la etapa 5. Donde el grafo de esta etapa esta representado en la Figura 2.8.

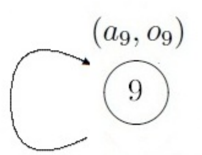


Figura 2.8: Etapa 5 del algoritmo TTC de Gale aplicado al problema de asignación (A, O, P, μ) del Ejemplo 9 con la modificación en las preferencias del agente a_6.

Esta es la última etapa, ya que agotamos todos los pacientes del problema. En ella como solamente queda el paciente a_9 tenemos que el único ciclo formado es aquel que involucra al propio paciente. Por tanto la asignación a realizar es $\alpha(a_9) = o_9$ la cual coincide con la asignación inicial, es decir que $\mu(a_9) = \alpha(a_9)$. Esto quiere decir que el paciente a_9 no tiene un donante compatible disponible. Con esto la asignación obtenida con el algoritmo TTC en este caso está representada en el Cuadro 2.3, donde las asignaciones están marcadas en negrita.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
o_8	o_{10}	$\boldsymbol{o_4}$	$\boldsymbol{o_{10}}$	o_2	o_{11}	$\boldsymbol{o_2}$	$\boldsymbol{o_7}$	o_1	$\boldsymbol{o_3}$	$\boldsymbol{o_5}$
$\boldsymbol{o_6}$	$\boldsymbol{o_8}$	o_6	$\boxed{o_4}$	o_8	o_7	o_{11}	o_2	o_3	o_1	o_2
o_{10}	o_6	o_8	o_8	$\boldsymbol{o_{11}}$	$\boldsymbol{o_1}$	o_9	o_{11}	o_8	o_9	o_4
o_4	o_4	o_{10}	o_6	o_9	o_2	o_8	o_9	o_4	o_8	o_1
$\boxed{o_1}$	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	o_5	o_7	o_4	o_4	o_6	o_{10}	$\boxed{o_{10}}$	o_3
o_5	o_9	o_5	o_7	o_4	o_8	o_{10}	o_{10}	o_6	o_6	o_6
o_2	o_7	o_9	o_2	$\boxed{o_5}$	o_{10}	$\boxed{o_7}$	o_4	o_5	o_5	o_8
o_{11}	o_{11}	o_2	o_9	o_{10}	o_5	o_6	o_5	$\boxed{\boldsymbol{o_9}}$	o_4	o_9
o_7	o_3	o_{11}	o_{11}	o_6	$\boxed{o_6}$	o_5	$\boxed{o_8}$	o_2	o_2	o_{10}
o_9	o_1	o_7	o_3	o_1	o_3	o_3	o_1	o_{11}	o_7	o_7
o_3	o_5	o_1	o_1	o_3	o_9	o_1	o_3	o_7	o_{11}	$\boxed{o_{11}}$

Cuadro 2.3: Asignación calculada por el algoritmo TTC de Gale para problema de asignación (A, O, P, μ) dado en el Ejemplo 9 con una modificación en la lista de preferencias del paciente a_6.

2.5. Modificaciones del algoritmo TTC de Gale

En la sección anterior se presenta a través del Ejemplo 9 la versión más simple del algoritmo TTC de Gale, pero en esta sección haremos uso del algoritmo TTC de Gale modificado introducido por Roth *et al.* (2004) [5] para el caso en el que existan donaciones indirectas. Esto quiere decir que para un paciente cabría la posibilidad de ceder a su donante a cambio de una posición prioritaria en la lista de espera por muerte encefálica. Además se tratará con otra modificación para el caso en el que se plantea que un paciente pueda tener más de un donante.

2.5.1. Introducción de donaciones indirectas

En [5] se plantea una modificación del algoritmo TTC de Gale introduciendo donaciones indirectas al problema, éstas consisten en un intercambio entre uno de los donantes en vivo (incompatible con su pareja) y la lista de espera de riñones por muerte encefálica; para ser más exactos por una posición prioritaria en dicha lista. Lo que quiere decir es que si una pareja queda excluida de los ciclos, el donante de la citada pareja podría donar a un paciente que se encuentre en la lista de espera a cambio de que dicho paciente le ceda una situación ventajosa para minimizar la espera por un nuevo órgano. Se deducen consecuencias de esta adaptación:

- Los pacientes en la lista de espera se benefician del incremento de las llegadas de riñones a la lista.
- La probabilidad de que el paciente del donante reciba un riñón se incrementa.

- Una consecuencia negativa es que este cambio puede perjudicar a los pacientes del grupo sanguíneo cero:
  - Por un lado los que estén en la lista perderán prioridad cuando el paciente de la donación indirecta es del grupo 0.
  - Por otro lado muy pocos de los riñones que provengan de una donación indirecta serán del tipo 0 (solo si existe una prueba cruzada positiva) dado que es un donante universal.

Por último cabe mencionar que lo de ceder una situación prioritaria es un estudio complejo, ésta se elegirá a través de un sistema de puntuación en el cual se tienen en consideración diversos datos del paciente como la necesidad que tiene por un órgano nuevo o el tiempo que lleva esperando el trasplante.

Tenemos los mismos elementos para el problema de asignación $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $O = \{o_1, \ldots, o_n\}$ conjuntos finitos de n elementos, representando los pacientes y los riñones respectivamente; además también existe una asignación inicial μ como se entendía en la sección anterior. En este caso lo que añadimos a mayores es la opción de entrar en la lista de espera con prioridad, denotada por ω, por tanto las preferencias (estrictas) de cada paciente serán sobre el conjunto de objetos disponibles junto a la opción ω, $O \cup \{\omega\}$, esta jerarquía se sigue rigiendo por la compatibilidad del paciente con los riñones junto con la elección de una situación prioritaria en la lista por muerte encefálica. Por tanto la solución a este problema será una asignación $\alpha : A \to O \cup \{\omega\}$ que empareje a cada paciente con un riñón o con ω. Dicho esto, además de obtener ciclos en la aplicación del algoritmo se formarán **cadenas** en el grafo

Definición 18. *Una **cadena** es una lista ordenada de parejas paciente-donante* $((a_1, o_1), \ldots, (a_m, o_m))$ *tal que el paciente a_1 señala al donante o_2, ..., el paciente a_{m-1} señala al donante o_m y el paciente a_m señala a ω.*

Es decir que el paciente final de la cadena será el que recibe la situación prioritaria en la lista mientras que el donante del principio de la cadena será quien done el riñón a un paciente que esté en la lista el cual, al igual que la situación prioritaria, será elegido a través de un sistema complejo. Para el caso práctico se usará una regla de selección de la cadena. Elegir la cadena mínima puede no ser eficiente en cambio si se selecciona la más larga beneficiará a otros pacientes. Esta selección también puede ser usada para aumentar la afluencia de riñones de donantes vivos de tipo 0 para la lista de espera.

Lema 1. *(Lema 1 en [5]) Consideremos un grafo en el cual cada nodo representa a las parejas de paciente-donante y otro nodo representa la opción ω, suponemos que cada paciente señala hacia un riñón o hacia ω. Entonces existe un ciclo, una cadena o ambos.*

Podemos introducir el algoritmo TTCC (Top Tranding Cycle Chains), adaptación del algoritmo TTC de Gale para el caso de introducir donaciones indirectas en el problema de asignación. Para el mecanismo que definimos más adelante se usa un regla de selección de cadenas, pero esta regla puede regirse por diferentes pasos en los que puede que se trate con pacientes que realicen un papel pasivo, es decir, que permanecen en el problema y pueden ser señalados pero ellos no participarán en la elección sobre el conjunto de riñones que sigan en el problema o ω. Mientras que el resto de los pacientes que realizan el papel activo sí pueden elegir sobre todas las opciones que quedan, incluidos los donantes de los pacientes que toman dicho papel pasivo. Así que en cualquier momento del procedimiento algunos de los pacientes son activos y otros son pasivos. Las etapas del algoritmo TTCC son las siguientes:

- <u>Paso 1:</u> Cada paciente señala a su mejor riñón (bien sea un riñón o ω).
- <u>Paso 2:</u> Por el Lema 1 siempre existirá un ciclo, una cadena o ambos entonces:
  1. Continuar al paso 3 si no existen ciclos. De lo contrario, se llevan a cabo todos los ciclos y se retiran los pacientes y los riñones involucrados en ellos.

2. Los pacientes restantes señalan su mejor opción entre los riñones restantes junto a ω. Se llevan a cabo todos los ciclos obtenidos y se retiran los pacientes y riñones involucrados en ellos. Repetir hasta que no quede ningún ciclo.

- Paso 3: Si no quedan pares, paramos el proceso. De lo contrario, por el Lema 1 existe una cadena o más entonces usar la regla de selección de cadena para quedarnos solamente con una. La regla de selección de cadena también determina si la cadena seleccionada se elimina y los intercambios asociados se realizan (incluyendo el riñón del final de la cadena, que se asigna a un paciente en la lista de espera) o si la cadena seleccionada se mantiene en el procedimiento pasando a ser pasivos los pacientes involucrados en ella.

- Paso 4: Una vez seleccionada una cadena, se pueden formar nuevos ciclos. Repetimos los pasos 2 y 3 con los pacientes que siguen activos y los riñones no asignados hasta que no quede ningún paciente.

Al final obtendremos la asignación $\alpha : A \to O \cup \{\omega\}$ que nos dará las asignaciones de los órganos y la situación prioritaria en la lista con los pacientes. Aquellos órganos no asignados se asignarán a un paciente en la lista de espera a través de un proceso de selección que considere diferentes factores. Vale la pena subrayar que la forma de selección de la cadena no afecta al paciente que se encuentra al final de una cadena (señalando ω). Sin embargo, si el órgano de su donante inicial se ofrece a la lista de espera o a otro paciente con un donante vivo incompatible sí depende del procedimiento de la regla. La regla de selección se podrá aplicar de diferentes formas, por ejemplo:

1. Se elige la cadena más corta se elimina y los intercambios asociados se realizan.

2. Se elige la cadena más larga se elimina y los intercambios asociados se realizan. Si no es única se aplica una regla de desempate para elegir una de ellas.

3. Se elige la cadena más larga se mantienen en el problema los pacientes involucrados, pero pasan a ser pasivos. Si no es única se aplica una regla de desempate para elegir una de ellas.

4. Se ordena a los pares paciente-donante en una única lista y se escoge la cadena que comience con el par de mayor prioridad. Una vez escogida se elimina y los intercambios asociados se realizan.

5. Se ordena a los pares paciente-donante en una única lista y se escoge la cadena que comience con el par de mayor prioridad. Una vez escogida se mantienen en el problema los pacientes involucrados, pero pasan a ser pasivos.

La gama de reglas de selección es muy amplia, incluso se podrían realizar fusiones entre lo ejemplos expuestos anteriormente, por ejemplo si fusionamos las reglas 4 y 5 obtenemos una regla que aumentará el flujo de entrada de donantes vivos de tipo 0 para pacientes en la lista de espera. Esta regla funcionaría de la siguiente manera: se priorizan los pares de paciente-donante de modo que los que tengan un donante del tipo 0 se antepondrán a los que no estén en este caso. Se escoge la cadena que comience por el par de mayor prioridad y se elimina en caso de que la pareja tenga un donante de tipo 0 o, en caso contrario, se mantiene.

Una cadena que se forma en una etapa intermedia del procedimiento probablemente aumente en las siguientes etapas si se mantiene en el problema, pero si se retira existirá una pérdida de eficiencia.

Teorema 7. *(Teorema 1 en [5]) El algoritmo TTCC es Pareto eficiente si la regla de selección permite que los pacientes de la cadena escogida permanezcan disponibles para ser señalados en siguientes etapas.*

Que el algoritmo sea manipulable o no también depende de la regla de selección de la cadena (véase en [5]), en los distintos ejemplos de reglas dados anteriormente tenemos que el 5 además de ser eficiente es no manipulable. Procedemos a realizar una aplicación del algoritmo TTCC. Cabe mencionar que la forma de priorizar los pares será a través del orden y como están ordenados de más a menos tenemos que: el más prioritario es el paciente 1 al que le seguiría el 2 y así sucesivamente.

Ejemplo 11. *Sea el problema de asignación $(A, O \cup \{\omega\}, P, \mu)$, donde se tienen 11 pacientes con sus respectivos donantes asignados inicialmente, $\mu(a_i) = o_i$, $i = 1, \ldots, 11$. Además en este problema también se añade la opción ω, opción de entrar en la lista de espera en una posición prioritaria. El perfil de preferencias P está representado en el Cuadro 2.4 el cual representa las preferencias de cada paciente sobre el conjunto de órganos y ω (marcada en azul). Mencionar que se ha tomado como referencia el perfil de preferencias del Ejemplo 9. Los riñones asignados incialmente que aparecen enmarcados son incompatibles al que igual que todo órgano que esté por debajo de ellos para cada paciente.*

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
o_8	o_{10}	o_4	o_{10}	o_2	o_{11}	o_2	o_7	o_1	o_3	o_5
ω	o_8	o_6	$\boxed{o_4}$	o_8	o_7	o_{11}	o_2	o_3	o_1	o_2
o_6	o_6	o_8	o_8	ω	o_9	o_9	o_{11}	o_8	o_9	o_4
o_{10}	o_4	o_{10}	o_6	o_{11}	o_2	o_8	o_9	o_4	ω	o_1
o_4	ω	ω	o_5	o_9	o_4	o_4	o_6	o_{10}	o_8	o_3
$\boxed{o_1}$	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	o_7	o_7	o_8	o_{10}	o_{10}	o_6	$\boxed{o_{10}}$	o_6
o_5	o_9	o_5	o_2	o_4	o_{10}	$\boxed{o_7}$	o_4	o_5	o_6	o_8
o_2	o_7	o_9	o_9	$\boxed{o_5}$	o_5	o_6	o_5	$\boxed{o_9}$	o_5	o_9
o_{11}	o_{11}	o_2	o_{11}	o_{10}	$\boxed{o_6}$	o_5	$\boxed{o_8}$	o_2	o_4	o_{10}
o_7	o_3	o_{11}	o_3	o_6	o_3	o_3	o_1	o_{11}	o_2	o_7
o_9	o_1	o_1	o_1	o_1	o_1	o_1	o_3	o_7	o_7	$\boxed{o_{11}}$
o_3	o_5	o_1		o_3					o_{11}	

Cuadro 2.4: Perfil de preferencias del problema de asignación $(A, O \cup \{\omega\}, P, \mu)$ en el caso de añadir la opción de una situación prioritaria en la lista por muerte encefálica.

Procedemos a aplicar el algoritmo TTCC para encontrar la asignación $\alpha : A \to O \cup \{\omega\}$ de los pacientes con los riñones y la opción ω. En una primera etapa del algoritmo dibujamos el grafo, representado en la Figura 2.9. En él cada vértice representa a cada pareja inicial y cada uno señala a su mejor opción.

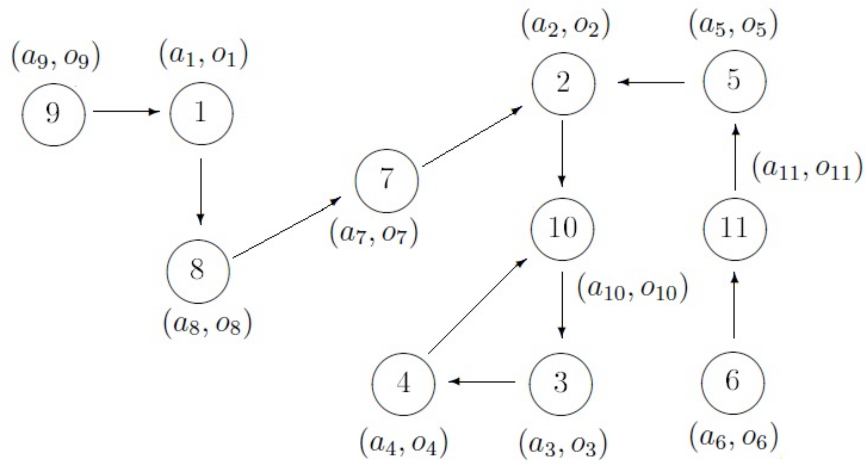


Figura 2.9: Etapa 1 del algoritmo TTCC aplicado al problema de asignación $(A, O \cup \{\omega\}, P, \mu)$.

En esta primera etapa existe un ciclo formado por las parejas paciente-donante 3*,* 4 *y* 10*, por tanto asignamos el riñón 4 al paciente 3, el riñón 10 al paciente 4 y el riñón 3 al paciente 10, es decir que* $\alpha(a_3) = o_4$*,* $\alpha(a_4) = o_{10}$ *y* $\alpha(a_{10}) = o_3$*. Una vez hechas las asignaciones retiramos a los pacientes involucrados en dicho ciclo del problema de asignación. No existe ningún otro ciclo y el problema sigue teniendo pacientes por tanto procedemos a la etapa 2 (representada en la Figura 2.4) donde el conjunto de pacientes es* $A \backslash \{a_3, a_4, a_{10}\}$ *los cuales señalan a su mejor opción del conjunto* $O \cup \{\omega\} \backslash \{o_3, o_4, o_{10}\}$*.*

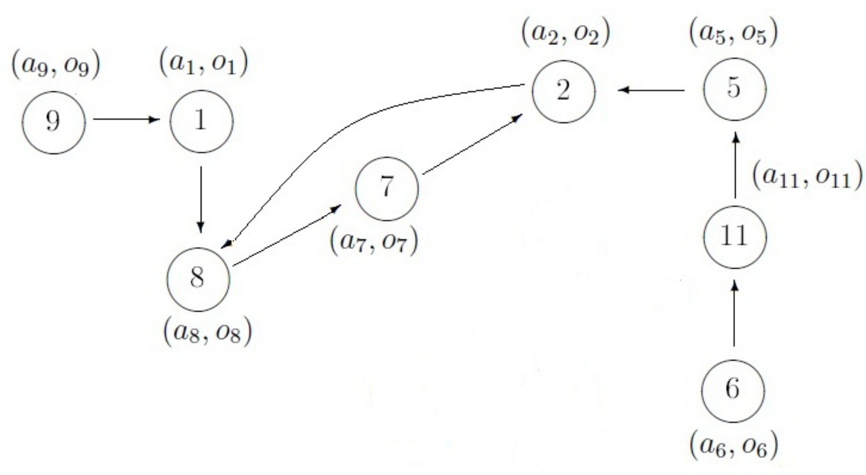


Figura 2.10: Etapa 2 del algoritmo TTCC aplicado al problema de asignación $(A, O \cup \{\omega\}, P, \mu)$.

Volvemos a tener solamente un ciclo compuesto por las parejas 2, 8 y 7 con las asignaciones $\alpha(a_2) = o_8$, $\alpha(a_8) = o_7$ *y* $\alpha(a_7) = o_2$ *y retiramos los pacientes involucrados del problema. Como seguimos teniendo pacientes procedemos a la etapa 3, el grafo de dicha etapa está representado en la Figura 2.11, donde cada paciente del conjunto* $A \setminus \{a_2, a_3, a_4, a_7, a_8, a_{10}\}$ *señala a su mejor riñón del conjunto* $O \cup \{\omega\} \setminus \{o_2, o_3, o_4, o_7, o_8, o_{10}\}$.

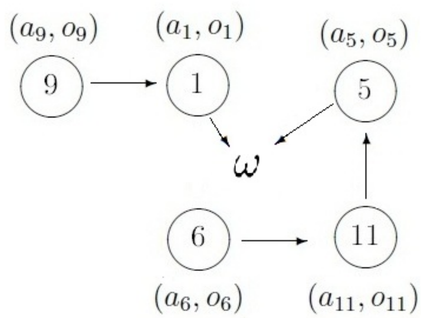


Figura 2.11: Etapa 3 del algoritmo TTCC aplicado al problema de asignación $(A, O \cup \{\omega\}, P, \mu)$.

Como en esta etapa no hay ciclos nos fijaremos en las cadenas, dado que mientras haya ciclos las cadenas se obvian. Se han formado dos cadenas: la cadena $c_1 = ((a_9, o_9), (a_1, o_1))$ *y la cadena* $c_2 = ((a_6, o_6), (a_{11}, o_{11}), (a_5, o_5))$. *Por tanto seleccionamos la cadena* c_2 *dado que es la que comienza con el paciente* a_6 *el cual tiene mayor prioridad que* a_9, *paciente con el que empieza la cadena* c_1. *Continuamos el procedimiento del algoritmo, donde fijamos la cadena* c_2 *y pasan a ser pasivos los pacientes* a_6, a_{11} *y* a_5. *Entonces tratamos solamente con los pacientes* a_1 *y* a_9 *como activos, es decir que solo miramos a quién señalan estos dos pacientes, pero seguimos considerando el conjunto de opciones a elegir a* $O \cup \{\omega\} \setminus \{o_2, o_3, o_4, o_7, o_8, o_{10}\}$. *El grafo de esta etapa 4 se encuentra representado en la Figura 2.12*

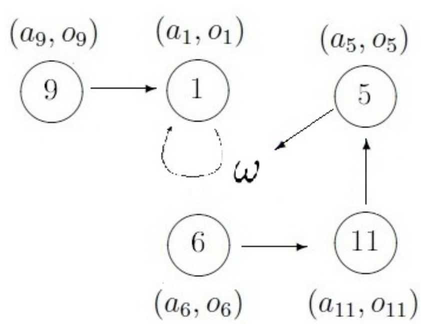


Figura 2.12: Etapa 4 del algoritmo TTCC aplicado al problema de asignación $(A, O \cup \{\omega\}, P, \mu)$.

Se ha formado el ciclo compuesto solamente por el paciente a_1, *es decir que* $\alpha(a_1) = o_1$. *Continuamos con la cadena elegida en la etapa 3 y los pacientes que la componen siguen siendo pasivos, pero ahora tenemos como único paciente activo el paciente* a_9 *que elegirá su mejor opción en el conjunto* $O \cup \{\omega\} \setminus \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_7, o_8, o_{10}\}$. *Con esto nos quedará el siguiente grafo (representado en la Figura 2.13).*

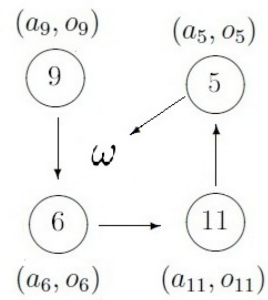


Figura 2.13: Etapa 5 del algoritmo TTCC aplicado al problema de asignación $(A, O \cup \{\omega\}, P, \mu)$.

En esta última etapa se ha formado una única cadena con todos los pacientes (activos y pasivos) que quedaban en el problema. Entonces tenemos que $\alpha(a_9) = o_6$, $\alpha(a_6) = o_{11}$, $\alpha(a_{11}) = o_5$ y $\alpha(a_5) = \omega$. Lo que quiere decir es que el paciente a_5 obtiene una situación prioritaria en la lista de espera mientras que el donante inicial del paciente a_9, o_9, será donado a un paciente compatible con él elegido entre los pacientes de la lista de espera.

Por tanto la asignación α obtenida será la siguiente (Cuadro 2.5):

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
o_8	o_{10}	$\boldsymbol{o_4}$	$\boldsymbol{o_{10}}$	o_2	$\boldsymbol{o_{11}}$	$\boldsymbol{o_2}$	$\boldsymbol{o_7}$	o_1	$\boldsymbol{o_3}$	$\boldsymbol{o_5}$
ω	$\boldsymbol{o_8}$	o_6	$\boxed{o_4}$	o_8	o_7	o_{11}	o_2	o_3	o_1	o_2
o_6	o_6	o_8	o_8	$\boldsymbol{\omega}$	o_9	o_9	o_{11}	o_8	o_9	o_4
o_{10}	o_4	o_{10}	o_6	o_{11}	o_2	o_8	o_9	o_4	ω	o_1
o_4	ω	ω	o_5	o_9	o_4	o_4	o_6	o_{10}	o_8	o_3
$\boxed{\boldsymbol{o_1}}$	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	o_7	o_7	o_8	o_{10}	o_{10}	$\boldsymbol{o_6}$	$\boxed{o_{10}}$	o_6
o_5	o_9	o_5	o_2	o_4	o_{10}	$\boxed{o_7}$	o_4	o_5	o_6	o_8
o_2	o_7	o_9	o_9	$\boxed{o_5}$	o_5	o_6	o_5	$\boxed{o_9}$	o_5	o_9
o_{11}	o_{11}	o_2	o_{11}	o_{10}	$\boxed{o_6}$	o_5	$\boxed{o_8}$	o_2	o_4	o_{10}
o_7	o_3	o_{11}	o_3	o_6	o_3	o_3	o_1	o_{11}	o_2	o_7
o_9	o_1	o_1	o_1	o_1	o_1	o_1	o_3	o_7	o_7	$\boxed{o_{11}}$
o_3	o_5	o_1		o_3					o_{11}	

Cuadro 2.5: Representación de la asignación α obtenida a través del algoritmo TTCC para el problema de asignación $(A, O \cup \{\omega\}, P, \mu)$ en el caso de añadir la opción de una situación prioritaria en la lista por muerte encefálica.

En el caso de que se elija una regla en la que el procedimiento sea escoger la cadena más larga puede que se dé el caso en el que no sea única y haya que utilizar un modo de desempate. Una ejemplo sería el siguiente: en el caso de que tengamos varias cadenas en el grafo se escogerá la cadena más larga y sino es única escogerá la cadena que contenga al paciente más prioritario (el más prioritario es el paciente 1). Si existen cadenas que contienen al mismo paciente se pasará a mirar cuál contiene al siguiente con mayor prioridad y así progresivamente. Una vez elegida la cadena los pacientes que pertenezcan a ésta no serán eliminados, pero pasarán a tomar un papel pasivo. Para ver una aplicación de esta regla de selección de cadenas modificamos en el siguiente ejemplo una de las lista de preferencias del Ejemplo 11.

Ejemplo 12. *Cogiendo los datos del Ejemplo 11 pero aplicando el pequeño cambio de poner al órgano* o_5 *en la segunda posición en las preferencias del paciente* a_1*, quedando el resto en el mismo orden, tendríamos que las dos primeras etapas se realizarían de la misma forma que en el ejemplo modificado, por tanto obviamos la representación y la explicación de ambas. Mientras que en la tercera etapa nos encontramos con dos cadenas de la misma longitud (representadas en la Figura 2.14):* $c_1 = ((a_9, o_9), (a_1, o_1), (a_5, o_5))$ *y* $c_2 = ((a_6, o_6), (a_{11}, o_{11}), (a_5, o_5))$*. De las cuales por la regla de selección a utilizar elegiremos a la cadena* c_1*, ya que al tener la misma longitud se escoge la cadena que contenga al paciente con mayor prioridad, en este caso la cadena escogida contiene al paciente* a_1 *mientras que la cadena* c_2 *no.*

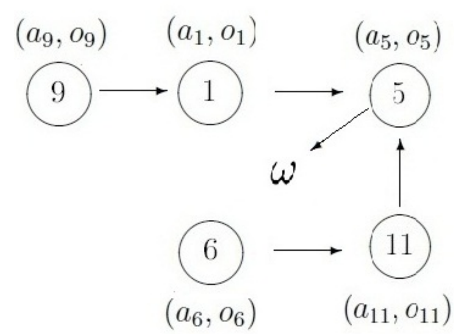


Figura 2.14: Etapa 3 del algoritmo TTCC aplicado al problema de asignación $(A, O \cup \{\omega\}, P, \mu)$ modificando las preferencias del paciente a_1.

Continuando con el algoritmo TTCC obtendríamos la asignación representada en el Cuadro 2.6.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
o_8	o_{10}	$\boldsymbol{o_4}$	$\boldsymbol{o_{10}}$	o_2	$\boldsymbol{o_{11}}$	$\boldsymbol{o_2}$	$\boldsymbol{o_7}$	o_1	$\boldsymbol{o_3}$	o_5
$\boldsymbol{o_5}$	$\boldsymbol{o_8}$	o_6	$\boxed{o_4}$	o_8	o_7	o_{11}	o_2	o_3	o_1	o_2
ω	o_6	o_8	o_8	$\boldsymbol{\omega}$	o_9	o_9	o_{11}	o_8	o_9	o_4
o_6	o_4	o_{10}	o_6	o_{11}	o_2	o_8	o_9	o_4	ω	$\boldsymbol{o_1}$
o_{10}	ω	ω	o_5	o_9	o_4	o_4	o_6	o_{10}	o_8	o_3
o_4	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	o_7	o_7	o_8	o_{10}	o_{10}	$\boldsymbol{o_6}$	$\boxed{o_{10}}$	o_6
$\boxed{o_1}$	o_9	o_5	o_2	o_4	o_{10}	$\boxed{o_7}$	o_4	o_5	o_6	o_8
o_2	o_7	o_9	o_9	$\boxed{o_5}$	o_5	o_6	o_5	$\boxed{o_9}$	o_5	o_9
o_{11}	o_{11}	o_2	o_{11}	o_{10}	$\boxed{o_6}$	o_5	$\boxed{o_8}$	o_2	o_4	o_{10}
o_7	o_3	o_{11}	o_3	o_6	o_3	o_3	o_1	o_{11}	o_2	o_7
o_9	o_1	o_1	o_1	o_1	o_1	o_1	o_3	o_7	o_7	$\boxed{o_{11}}$
o_3	o_5	o_1		o_3					o_{11}	

Cuadro 2.6: Representación de la asignación η obtenida a través del algoritmo TTCC para el problema de asignación $(A, O \cup \{\omega\}, P, \mu)$ en el caso de añadir la opción de una situación prioritaria en la lista por muerte encefálica y modificar el Ejemplo 11.

Como podemos observar la situación del paciente a_1 mejora mientras que la del a_{11} empeora, comparándola con la asignación obtenida en el Ejemplo 11.

2.5.2. Introducción de más de un donante por paciente

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito de n pacientes y sea $O' = \{o_1, \ldots, o_m\}$ un conjunto de m riñones de donantes vivos donde el conjunto O' es mayor que el conjunto A, es decir que $m > n$; lo que quiere decir que algún paciente posee más de un donante inicial. Para mayor comodidad nos referiremos a los pacientes a_i por i para todo $i = 1, \ldots, n$; por tanto definimos $O_i = \{o_{i1}, \ldots, o_{ik_i}\}$ siendo k_i el número de donantes que tiene inicialmente el paciente i. Para resolver este problema, se aplicará una sencilla modificación para obtener un problema equivalente a los explicados en la sección 2.4 la cual se basa en definir un nuevo conjunto $A' = \{a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nk_n}\}$ replicando a cada paciente i tantas veces como donantes disponga, es decir, k_i. Realizando esta réplica de los pacientes seguiremos teniendo una asignación inicial, $\mu' : A' \to O'$, biyectiva; es decir, que la aplicación μ' sigue definiendo los pares paciente donante, en este caso m pares. Por otro lado, también hay que redefinir el perfil de preferencias, que denotaremos por P'. Este perfil recoge las preferencias de cada paciente sobre el conjunto de riñones de donantes vivos, éste estará ordenado de manera que el primer objeto en el *ranking* es el de mayor compatibilidad con el paciente. Para el paciente que posea más de un donante se realizarán tantas réplicas de su lista de preferencias como donantes tenga incialmente es decir, $P'_i = \{P_{i1}, \ldots, P_{ik_i}\}$. El objetivo sigue siendo el mismo, resolver el problema de asignación

(A', O', P', μ') encontrar una asignación $\alpha' : A' \to O'$ que empareje a los pacientes y los donantes de una forma eficiente para una mayor satisfacción en los trasplantes. Mencionar que con la modificación hecha queda un problema de asignación con el mismo número de agentes que de objetos procedemos a explicar el algoritmo TTC de Gale en este nuevo caso en el cual se debe tener en cuenta que cuando se retire un paciente del problema se tendrán que retirar con él todos los objetos que poseía en un principio participando en la asignación; es decir que cada paciente va a donar uno de sus riñones. Sea entonces el problema de asignación (A', O', P', μ'), obtendremos una asignación α' del algoritmo TTC de Gale a través de las siguientes etapas:

- Etapa 1: Se construye un grafo con nodos que representan a las diferentes parejas paciente-donante. Se representarán de la siguiente manera: el nodo 1.1 es la pareja (a_{11}, o_{11}), ..., el nodo $1.k_1$ es la pareja (a_{1k_1}, o_{1k_1}) y así para todos los pacientes a_{ik_i} con $i = 1, \ldots, n$.

  Cada agente señala a su mejor donante, de manera que de cada nodo solo sale una flecha. Entonces construimos los ciclos, ya que al menos existe un ciclo y en el caso de que haya más de uno no se intersecan.

  Se eliminan del grafo todos aquellos pacientes que pertenezcan a un ciclo junto a su mejor riñón y se les asigna el donante señalado, es decir, se satisfacen los ciclos. Además se retiran del grafo todas las réplicas que correspondan a los pacientes que ya pertenecen a un ciclo, ya que estos solo donarán uno de sus riñones.

  Por último, si queda algún paciente se pasa a la siguiente etapa donde se repite el mismo procedimiento.

- Etapa $k > 1$: Se construye el grafo con las parejas restantes de la etapa anterior que aún no han sido asignadas.

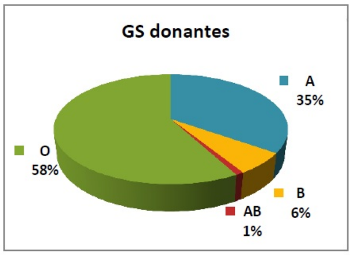
  Cada paciente señala a su mejor órgano, de manera que de cada uno solo sale una flecha.

  Se eliminan del grafo todos aquellos pacientes que pertenezcan a un ciclo junto a su mejor objeto y se les asigna el objeto señalado, es decir, se satisfacen los ciclos. Además se retiran del grafo todas las réplicas que correspondan a los pacientes que ya pertenecen a un ciclo, ya que solo donarán uno de sus riñones.

  Por último, si queda algún paciente se pasa a la siguiente etapa donde se repite el mismo procedimiento.

El algoritmo terminará cuando no quede ningún paciente. Esto se traduce en que todos los pacientes tendrán asignado un riñón donde estos emparejamientos vienen dados por la asignación obtenida $\alpha' : A' \to O'$.

Para mostrar esta modificación tomamos el Ejemplo 9 y añadimos solamente un donante a mayores para uno de los pacientes, el paciente 5, con este segundo riñón añadido realizaremos un estudio considerando cuatro casos diferentes: que el donante a mayores sea del grupo 0, del grupo A, del grupo B o del grupo AB; es decir consideramos los diferentes grupos sanguíneos. De esta manera también se podrá observar lo que influye añadir un donante de un grupo sanguíneo u otro. Para hacer este estudio más real tendremos en consideración el porcentaje de cada grupo sanguíneo tanto para donantes como para receptores tal y como se puede ver en la Figura 2.15. Dado que en nuestro Ejemplo hay 11 pacientes, atendiendo a los porcentajes anteriores los vamos a distribuir en: 4 pacientes y 4 riñones del grupo 0, 4 pacientes y 4 riñones del grupo A, 2 pacientes y 2 riñones del grupo B y, 1 paciente y 1 riñón del grupo AB.



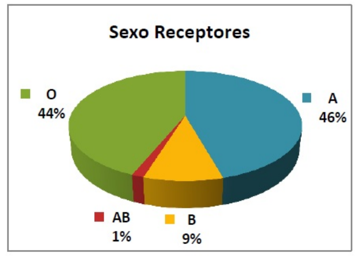


Figura 2.15: Porcentajes de donantes y receptores clasificados por grupos sanguíneos

Ejemplo 13. *(Paciente con dos donantes considerando los cuatro grupos sanguíneos) Sea el problema* (A', O', P', μ') *un problema de asignación donde* $|A| = 11$ *y* $|A'| = |O'| = 12$*, es decir tenemos un paciente con dos donantes iniciales, en este caso es el paciente* a_5 *con los objetos* o_{51} *y* o_{52}*. Por otro lado como vamos a considerar que el órgano* o_{52} *pertenezca a cada uno de los grupos sanguíneos tenemos que asignar los 11 pacientes y los 11 órganos iniciales a cada grupo sanguíneo, por tanto tenemos que: los pacientes* a_1, a_2, a_3 *y* a_4 *junto a los riñones* o_2, o_4, o_6 *y* o_{10} *son del grupo 0; los pacientes* a_5, a_6, a_7 *y* a_8 *juntos a los riñones* o_2, o_7, o_9 *y* o_{11} *son del grupo A; los pacientes* a_9 *y* a_{10} *junto a los riñones* o_1 *y* o_3 *son del grupo B y, por último el paciente* a_{11} *y el riñón* o_5 *son del grupo AB. A continuación se muestran los resultados de cada uno de los casos en los se puede observar en cada perfil de preferencias* P' *la duplicación del agente 5, con* a_{51} *y* a_{52}*, también se puede contemplar en los diferentes perfiles la situación del órgano* o_{52} *debido a la compatibilidad de los diferentes grupos sanguíneos. Plasmaremos solamente los grafos para el caso del grupo 0 dado que en el resto de los casos se realizaría de la misma manera. Comentar que este problema también se ha calculado a través del programa realizado en* `R`*. En la sección A.2 solo se ha expuesto la aplicación para el primer caso a tratar, en el que se considera que el órgano a mayores (*o_{52}*) pertenece al grupo sanguíneo 0.*

- ***Grupo*** 0*:*

  En este caso suponemos que el órgano o_{52} *pertenece al grupo sanguíneo 0. En el Cuadro 2.7 se observa dónde posiciona cada paciente a dicho órgano (destacado en color rojo) y, como es lógico, al ser del grupo 0 (considerando la compatibilidad por grupos) puede donar tanto a su propio grupo como al resto; por ello podemos ver que riñón del segundo donante del paciente 5 ocupa una posición alta en todos los casos.*

a_1	a_2	a_3	a_4	a_{51}	a_{52}	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
a_8	o_{10}	o_{52}	o_{52}	o_2	o_2	o_{11}	o_2	o_7	o_1	o_3	o_{52}
o_{52}	o_{52}	o_4	o_{10}	o_8	o_8	o_7	o_{52}	o_2	o_{52}	o_1	o_{51}
o_6	o_8	o_6	$\boxed{o_4}$	o_{11}	o_{11}	o_{52}	o_{11}	o_{52}	o_3	o_9	o_2
o_{10}	o_6	o_8	o_8	o_{52}	o_{52}	o_9	o_9	o_{11}	o_8	o_8	o_4
o_4	o_4	o_{10}	o_6	o_9	o_9	o_2	o_8	o_9	o_4	$\boxed{o_{10}}$	o_1
$\boxed{o_1}$	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	o_{51}	o_7	o_7	o_4	o_4	o_6	o_{10}	o_{52}	o_3
o_{51}	o_9	o_{51}	o_7	o_4	o_4	o_8	o_{10}	o_{10}	o_6	o_6	o_6
o_2	o_7	o_9	o_2	$\boxed{o_{51}}$	$\boxed{o_{51}}$	o_{10}	$\boxed{o_7}$	o_4	o_{51}	o_{51}	o_8
o_{11}	o_{11}	o_2	o_9	o_{10}	o_{10}	o_{51}	o_6	o_{51}	$\boxed{o_9}$	o_4	o_9
o_7	o_3	o_{11}	o_{11}	o_6	o_6	$\boxed{o_6}$	o_{51}	$\boxed{o_8}$	o_2	o_2	o_{10}
o_9	o_1	o_7	o_7	o_1	o_1	o_3	o_3	o_1	o_{11}	o_7	o_7
o_3	o_{51}	o_1	o_1	o_3	o_3	o_1	o_1	o_3	o_7	o_{11}	$\boxed{o_{11}}$

Cuadro 2.7: Perfil de preferencias del problema de asignación (A', O', P', μ') siendo el riñón o_{52} del grupo 0.

Antes de aplicar el algoritmo TTC de Gale destacar que vemos que el riñón del donante o_{52} *está por encima de* o_{51} *y esto puede sorprender, dado que significa que el donante* o_{52} *es compatible con su paciente asignado inicialmente,* a_5*. Esto se debe a que como consideramos que* o_{52} *pertenece al grupo 0 lógicamente puede donar al paciente* a_5 *que es del grupo A. Teniendo en cuenta que el donante a mayores es compatible con su paciente incial se podría llegar a que dicho paciente obtuviese un donante con el que tenga más compatibilidad que con cualquiera de sus dos iniciales.*

Procedemos a aplicar el algoritmo TTC modificado para este caso, por tanto realizamos el primer grafo, representado en la Figura 2.16 , donde cada agente señala a su órgano preferido y vemos que se forma un ciclo en el cual están involucradas los órganos 2, 10, 3 y el segundo órgano del paciente 5.

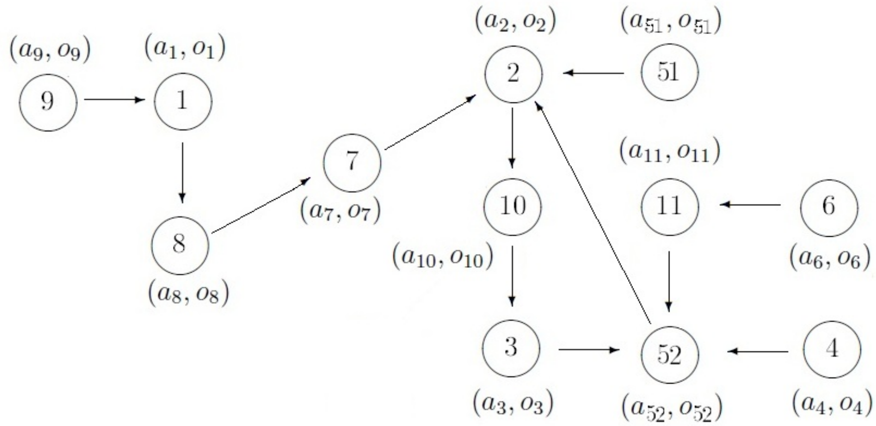


Figura 2.16: Etapa 1 del algoritmo TTC de Gale modificado al problema de asignación $(A', O', P', \mu)'$.

Por tanto asignamos el riñón 2 al paciente 10, el riñón 10 al paciente 3, el riñón 3 al paciente 5 y el riñón del segundo donante (o_{52}) del paciente 5 se dona al paciente 2, es decir que $\alpha(a_2) = o_{10}$, $\alpha'(a_{10}) = o_3$, $\alpha'(a_3) = o_{52}$ y $\alpha'(a_{51}) = \alpha'(a_{52}) = o_2$. Una vez hechas las asignaciones retiramos a los agentes involucrados en dicho ciclo del problema de asignación y, como en este caso está involucrado el segundo donante del paciente 5, retiramos a la otra réplica del agente 5 y su otro donante. No existe ningún otro ciclo y el problema sigue teniendo pacientes por tanto procedemos a la etapa 2 (representada en la Figura 2.17) donde el conjunto de agentes es $A \backslash \{a_2, a_3, a_{51}, a_{52}, a_{10}\}$ los cuales señalan a su mejor riñón del conjunto $O \backslash \{o_2, o_3, o_{51}, o_{52}, o_{10}\}$.

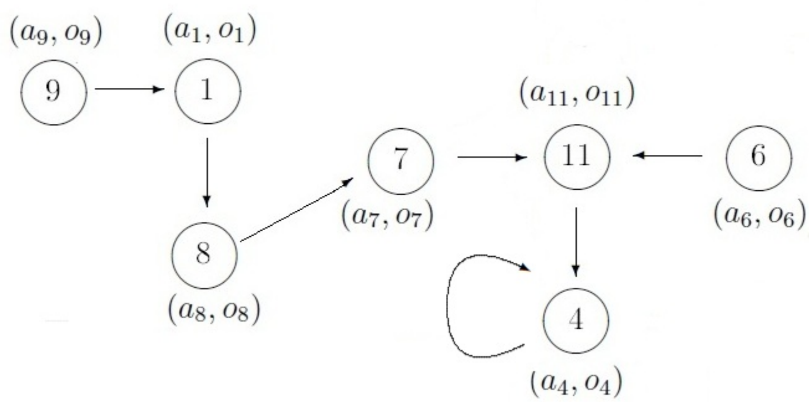


Figura 2.17: Etapa 2 del algoritmo TTC de Gale modificado al problema de asignación $(A', O', P', \mu)'$.

En la segunda etapa nos encontramos con que existe un único ciclo el cual está formado solamente por un agente, el agente 4, esto quiere decir que dicho agente se queda con su donante inicial. Realizamos la asignación $\alpha'(a_4) = o_4$ *y retiramos esta pareja del problema y procedemos a la siguiente etapa donde su grafo está representado en la Figura 2.18.*

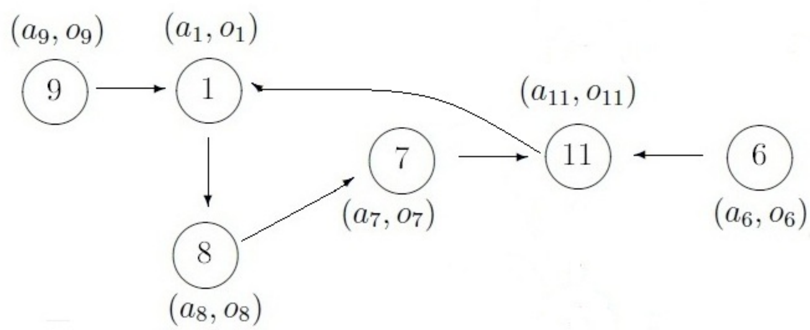


Figura 2.18: Etapa 3 del algoritmo TTC de Gale modificado al problema de asignación $(A', O', P', \mu)'$.

En la etapa 3 del problema hay un ciclo el cual está compuesto por las parejas 1,8,7 y 11, es decir que tenemos las asignaciones $\alpha'(a_1) = o_8$, $\alpha'(a_8) = o_7$, $\alpha'(a_7) = o_{11}$ *y* $\alpha'(a_{11}) = o_1$. *Retiramos dichas parejas del problema y realizamos el grafo de la siguiente etapa en la cual solo participan las parejas 6 y 9. En la Figura 2.19 se puede observar la preferencia de cada uno.*

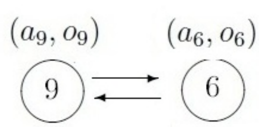


Figura 2.19: Etapa 4 del algoritmo TTC de Gale modificado al problema de asignación $(A', O', P', \mu)'$.

Esta es la última etapa del algoritmo TTC modificado ya que el ciclo abarca las dos parejas que quedaban en el problema, es decir que $\alpha'(a_6) = o_9$ *y* $\alpha'(a_9) = o_6$. *Terminamos así el problema de asignación, se pueden ver las asignaciones aportadas por* α' *en el Cuadro 2.8.*

a_1	a_2	a_3	a_4	a_{51}	a_{52}	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
$\mathbf{a_8}$	$\mathbf{o_{10}}$	$\mathbf{o_{52}}$	o_{52}	$\mathbf{o_2}$	$\mathbf{o_2}$	o_{11}	o_2	$\mathbf{o_7}$	o_1	$\mathbf{o_3}$	o_{52}
o_{52}	o_{52}	o_4	o_{10}	o_8	o_8	o_7	o_{52}	o_2	o_{52}	o_1	o_{51}
o_6	o_8	o_6	$\boxed{\mathbf{o_4}}$	o_{11}	o_{11}	o_{52}	$\mathbf{o_{11}}$	o_{52}	o_3	o_9	o_2
o_{10}	o_6	o_8	o_8	o_{52}	o_{52}	$\mathbf{o_9}$	o_9	o_{11}	o_8	o_8	o_4
o_4	o_4	o_{10}	o_6	o_9	o_9	o_2	o_8	o_9	o_4	$\boxed{o_{10}}$	$\mathbf{o_1}$
$\boxed{o_1}$	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	o_{51}	o_7	o_7	o_4	o_4	o_6	o_{10}	o_{52}	o_3
o_{51}	o_9	o_{51}	o_7	o_4	o_4	o_8	o_{10}	o_{10}	$\mathbf{o_6}$	o_6	o_6
o_2	o_7	o_9	o_2	$\boxed{o_{51}}$	$\boxed{o_{51}}$	o_{10}	$\boxed{o_7}$	o_4	o_{51}	o_{51}	o_8
o_{11}	o_{11}	o_2	o_9	o_{10}	o_{10}	o_{51}	o_6	o_{51}	$\boxed{o_9}$	o_4	o_9
o_7	o_3	o_{11}	o_{11}	o_6	o_6	$\boxed{o_6}$	o_{51}	$\boxed{o_8}$	o_2	o_2	o_{10}
o_9	o_1	o_7	o_7	o_1	o_1	o_3	o_3	o_1	o_{11}	o_7	o_7
o_3	o_{51}	o_1	o_1	o_3	o_3	o_1	o_1	o_3	o_7	o_{11}	$\boxed{o_{11}}$

Cuadro 2.8: Asignación calcula por el algoritmo TTC modificado para el problema de asignación (A', O', P', μ') siendo el riñón o_{52} del grupo 0.

- ***Grupo A***:

En el Cuadro 2.9 vemos reflejado el perfil de preferencias de los 11 pacientes en el caso de que el donante añadido junto al paciente 5 sea de tipo A, por tanto solo podrá donar a los pacientes de tipo A o AB, es decir que los pacientes que pueden tener entre sus más altas preferencias al órgano o_{52} (en el Cuadro 2.9 está en rojo) son los pacientes a_5, el cual se duplica en a_{51} y a_{52}, a_6, a_7, a_8 y a_{11}. Por otro lado vemos marcado en negrita la asignación dada por el algoritmo correspondiente para este caso. Volvemos a ver a o_{52} por encima de o_{51} en la lista de preferencias del paciente a_5 y es por la misma razón que la explicada en el caso anterior. Como el donante o_{52} es del grupo A y a_5 también lo es, se considerará que son compatibles. Además, como se puede observar al paciente a_5 se le ha asignado el órgano o_{52}.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_{51}	a_{52}	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
o_8	o_{10}	$\boldsymbol{o_4}$	$\boldsymbol{o_{10}}$	o_2	o_2	$\color{red}{o_{52}}$	$\boldsymbol{o_2}$	$\boldsymbol{o_7}$	o_1	$\boldsymbol{o_3}$	$\color{red}{o_{52}}$
$\boldsymbol{o_6}$	$\boldsymbol{o_8}$	o_6	$\boxed{o_4}$	$\color{red}{\boldsymbol{o_{52}}}$	$\color{red}{\boldsymbol{o_{52}}}$	$\boldsymbol{o_{11}}$	$\color{red}{o_{52}}$	$\color{red}{o_{52}}$	o_3	o_1	o_{51}
o_{10}	o_6	o_8	o_8	o_8	o_8	o_7	o_{11}	o_2	o_8	o_9	o_2
o_4	o_4	o_{10}	o_6	o_{11}	o_{11}	o_9	o_9	o_{11}	o_4	o_8	o_4
$\boxed{o_1}$	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	$\color{red}{o_{52}}$	o_9	o_9	o_2	o_{10}	o_9	o_{10}	$\boxed{o_{10}}$	$\boldsymbol{o_1}$
$\color{red}{o_{52}}$	$\color{red}{o_{52}}$	$\color{red}{o_{52}}$	o_{51}	o_7	o_7	o_4	o_4	o_6	o_6	$\color{red}{o_{52}}$	o_3
o_{51}	o_9	o_{51}	o_7	o_4	o_4	o_8	o_{10}	o_{10}	$\color{red}{o_{52}}$	o_6	o_6
o_2	o_7	o_9	o_2	$\boxed{o_{51}}$	$\boxed{o_{51}}$	o_{10}	$\boxed{o_7}$	o_4	o_{51}	o_{51}	o_8
o_{11}	o_{11}	o_2	o_9	o_{10}	o_{10}	o_{51}	o_6	o_{51}	$\boxed{\boldsymbol{o_9}}$	o_4	o_9
o_7	o_3	o_{11}	o_{11}	o_6	o_6	$\boxed{o_6}$	o_{51}	$\boxed{o_8}$	o_2	o_2	o_{10}
o_9	o_1	o_7	o_7	o_1	o_1	o_3	o_3	o_1	o_{11}	o_7	o_7
o_3	o_{51}	o_1	o_1	o_3	o_3	o_1	o_1	o_3	o_7	o_{11}	$\boxed{o_{11}}$

Cuadro 2.9: Asignación calcula por el algoritmo TTC modificado para el problema de asignación (A', O', P', μ') siendo el riñón o_{52} del grupo A.

- ***Grupo B***:

Para el caso en el que el órgano o_{52} es del tipo B tenemos plasmado en el Cuadro 2.10 el perfil de preferencias de los pacientes (el órgano a mayores marcado en rojo) y la asignación dada por el algoritmo TTC adaptado para esta situación. En este caso como los pacientes a_9 y a_{10} son del tipo B pueden situar en sus preferencias al órgano o_{52} en lo alto de la lista al igual que el paciente a_{11} dado que es del tipo AB.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_{51}	a_{52}	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
o_8	o_{10}	$\mathbf{o_4}$	$\mathbf{o_{10}}$	o_2	o_2	o_{11}	$\mathbf{o_2}$	$\mathbf{o_7}$	o_{52}	$\mathbf{o_3}$	$\mathbf{o_{52}}$
$\mathbf{o_6}$	$\mathbf{o_8}$	o_6	$\boxed{o_4}$	o_8	o_8	o_7	o_{11}	o_2	$\mathbf{o_1}$	o_{52}	o_{51}
o_{10}	o_6	o_8	o_8	$\mathbf{o_{11}}$	$\mathbf{o_{11}}$	$\mathbf{o_9}$	o_9	o_{11}	o_3	o_1	o_2
o_4	o_4	o_{10}	o_6	o_9	o_9	o_2	o_8	o_9	o_8	o_9	o_4
$\boxed{o_1}$	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	o_{52}	o_7	o_7	o_4	o_4	o_6	o_4	o_8	o_1
o_{52}	o_{52}	o_{52}	o_{51}	o_4	o_4	o_8	o_{10}	o_{10}	o_{10}	$\boxed{o_{10}}$	o_3
o_{51}	o_9	o_{51}	o_7	$\boxed{o_{51}}$	$\boxed{o_{51}}$	o_{10}	$\boxed{o_7}$	o_{52}	o_6	o_6	o_6
o_2	o_7	o_9	o_2	o_{52}	o_{52}	o_{51}	o_{52}	o_4	o_{51}	o_{51}	o_8
o_{11}	o_{11}	o_2	o_9	o_{10}	o_{10}	o_{52}	o_6	o_{51}	$\boxed{o_9}$	o_4	o_9
o_7	o_3	o_{11}	o_{11}	o_6	o_6	$\boxed{o_6}$	o_{51}	$\boxed{o_8}$	o_2	o_2	o_{10}
o_9	o_1	o_7	o_7	o_1	o_1	o_3	o_3	o_1	o_{11}	o_7	o_7
o_3	o_{51}	o_1	o_1	o_3	o_3	o_1	o_1	o_3	o_7	o_{11}	$\boxed{o_{11}}$

Cuadro 2.10: Asignación calcula por el algoritmo TTC modificado para el problema de asignación (A', O', P', μ') siendo el riñón o_{52} del grupo B.

- ***Grupo AB*** *Por último nos encontramos con el caso de que el órgano del segundo donante del paciente 5,* o_{52}*, sea del tipo AB; en estas circunstancias el único paciente que puede preferir al órgano* o_{52} *es el paciente* a_{11} *dado que es el único de tipo AB. Esta situación se puede ver representada en el perfil de preferencias representado en el Cuadro 2.11 en el cual se marca el órgano a mayores en rojo y en negrita la asignación dada solucionando el problema con el algortimo TTC modificado.*

a_1	a_2	a_3	a_4	a_{51}	a_{52}	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
o_8	o_{10}	$\boldsymbol{o_4}$	$\boldsymbol{o_{10}}$	o_2	o_2	o_{11}	$\boldsymbol{o_2}$	$\boldsymbol{o_7}$	$\boldsymbol{o_1}$	$\boldsymbol{o_3}$	$\color{red}{\boldsymbol{o_{52}}}$
$\boldsymbol{o_6}$	$\boldsymbol{o_8}$	o_6	$\boxed{o_4}$	o_8	o_8	o_7	o_{11}	o_2	o_3	o_1	o_{51}
o_{10}	o_6	o_8	o_8	$\boldsymbol{o_{11}}$	$\boldsymbol{o_{11}}$	$\boldsymbol{o_9}$	o_9	o_{11}	o_8	o_9	o_2
o_4	o_4	o_{10}	o_6	o_9	o_9	o_2	o_8	o_9	o_4	o_8	o_4
$\boxed{o_1}$	$\boxed{o_2}$	$\boxed{o_3}$	$\color{red}{o_{52}}$	o_7	o_7	o_4	o_4	o_6	o_{10}	$\boxed{o_{10}}$	o_1
$\color{red}{o_{52}}$	$\color{red}{o_{52}}$	$\color{red}{o_{52}}$	o_{51}	o_4	o_4	o_8	o_{10}	o_{10}	o_6	o_6	o_3
o_{51}	o_9	o_{51}	o_7	$\boxed{o_{51}}$	$\boxed{o_{51}}$	o_{10}	$\boxed{o_7}$	o_4	o_{51}	o_{51}	o_6
o_2	o_7	o_9	o_2	$\color{red}{o_{52}}$	$\color{red}{o_{52}}$	o_{51}	$\color{red}{o_{52}}$	o_{51}	$\boxed{o_9}$	o_4	o_8
o_{11}	o_{11}	o_2	o_9	o_{10}	o_{10}	$\color{red}{o_{52}}$	o_6	$\boxed{o_8}$	$\color{red}{o_{52}}$	o_2	o_9
o_7	o_3	o_{11}	o_{11}	o_6	o_6	$\boxed{o_6}$	o_{51}	$\color{red}{o_{52}}$	o_2	o_7	o_{10}
o_9	o_1	o_7	o_7	o_1	o_1	o_3	o_3	o_1	o_{11}	$\color{red}{o_{52}}$	o_7
o_3	o_{51}	o_1	o_1	o_3	o_3	o_1	o_1	o_3	o_7	o_{11}	$\boxed{o_{11}}$

Cuadro 2.11: Asignación calcula por el algoritmo TTC modificado para el problema de asignación (A', O', P', μ') siendo el riñón o_{52} del grupo AB.

En cómputo, podemos comentar que en el caso de que el riñón o_{52} sea del tipo 0 es donde vemos más cambios con respecto a la asignación que obtenemos en el caso dado en el Ejemplo 9 debido a que vemos una mejora para los pacientes de tipo cero a_1 y a_2 mientras que el resto o queda igual o bien empeoran. Entre ellos destacan los casos de los pacientes a_9 y a_{11} en los que su resultado empeora bastante; esto seguramente se deba a la posición en las preferencias de cada paciente del órgano o_{52}. Por otro lado tenemos el caso de que el donante a mayores pertenezca al grupo sanguíneo B donde solo vemos que empeora la situación del paciente a_9 empeora con respecto al caso en el que no se añade un donante a mayores (el caso visto en el Ejemplo 9). Por último, en los casos que quedan, que el donante a mayores del paciente 5 sea del tipo A y del tipo AB, se obtiene la misma solución; resultado que llama la atención en el caso del grupo sanguíneo A dado que lo lógico sería que sí que cambiase algún resultado dado que cambian las preferencias de 5 pacientes, pero se obtendría ese resultado por la posición que ocupa el órgano o_{52} en este ejemplo (seguramente que si se modificase también se modificaría el resultado). Para el caso del tipo AB es lógico que no se noten cambios con respecto al caso en el que no se añade ningún donante a mayores dado que el único que prefiere el órgano es el paciente a_{11} por tanto la situación es igual que la simple.

La modificación del algoritmo TTC de Gale para el caso en el que uno o varios pacientes tienen más de un donante mantiene las propiedades de que la asignación está en el núcleo y es individualmente racional y, que el mecanismo no es manipulable (por la razón de que las preferencias están hechas por un médico y son totalmente objetivas). Pero esta modificación no es Pareto eficiente debido a que al introducir un donante adicional puede que algún agente empeore con respecto a la asignación que se obtendría sin introducir un donante a mayores. Aunque este donante adicional también puede beneficiar la situación de un paciente y además el algoritmo va a identificar entre los donantes añadidos cuál es el mejor (debido a que uno se asigna antes).

Capítulo 3

Conclusiones

Para terminar, en este apartado se encuentran las principales conclusiones extraídas a lo largo de la elaboración del trabajo, así como las propuestas para prolongar el mismo que han surgido de los problemas tratados en la literatura y observados en el entorno.

En primer lugar, la revisión teórica de la literatura relacionada con el problema de asignación ha supuesto una toma de perspectiva fundamental para la comprensión de diferentes contextos de emparejamientos. Gracias a ciertos conceptos de la teoría de juegos cooperativa se han podido enfocar los problemas de asignación desde un campo conocido y estudiado en la literatura con profundidad. Por otro lado, el estudio del algoritmo de aceptación diferida así como el TTC de Gale, ha otorgado una visión sobre cómo tienen que adaptarse a la situación en la que se aplican, de forma que los emparejamientos que generen sean estables y óptimos. De lo contrario, tal y como se demuestra en la literatura, las asignaciones resultantes pueden resultar ineficientes o no estar preparadas para desincentivar el comportamiento estratégico de los agente involucrados en el problema.

Es conveniente hacer referencia a los problemas tratados durante el trabajo. En lo relativo al problema del matrimonio podemos decir que es como el problema base del progreso de los últimos años en el estudio del problema de asignación. Por otro lado, existen diferentes aplicaciones y extensiones además de la tratada para el problema de admisiones de universidades. En este trabajo solamente se ha considerado poner un número fijo de solicitudes posibles por estudiante, pero en los últimos años se han analizado otras situaciones como el caso en el que aparecen ciertas reglas de prioridad, como la introducción de beneficios por minorías, o el caso en el que existen parejas que desean estar en la misma ciudad o centro; entre otras.

En cuanto a las observaciones relacionadas con los trasplantes cruzados de riñón son muchas las que podemos concluir después de la realización de este trabajo, pero destacaremos algunas de ellas. Se aprecia que la utilización en los últimos años de trasplantes cruzados ha hecho disminuir el número de personas en la lista de espera. Además gracias a los médicos cada vez existen más países que realizan este tipo de trasplantes y los ciclos se componen cada año de más parejas. Además el uso de estos intercambios proporciona una mayor compatibilidad entre el paciente y el donante y, como procede de un donante vivo, también otorga una probabilidad mayor de supervivencia. De la introducción de donaciones indirectas se concluye que los pacientes en lista de espera probablemente se beneficien, pero perjudica a los pacientes de tipo 0. Por tanto sería interesante estudiar una modificación del TTCC para que los donantes universales no se vean afectados por las donaciones indirectas. Es interesante comentar el caso en el que se utilizan donantes altruistas en los programas de trasplantes cruzados de riñones de donantes vivos, ya que pueden facilitar la formación de ciclos y aumentar así la eficiencia del mecanismo. El donante altruista comienza un ciclo que termina con un donante vivo (cuyo paciente ha recibido un riñón al satisfacerse el ciclo) que acabará haciendo una donación indirecta (a la lista de espera) o permaneciendo en el sistema como un donante altruista para empezar futuros ciclos. De la adaptación del algoritmo TTC de Gale para incorporar pacientes con más de un donante vivo potencial, donde solo uno de ellos donará, concluimos que hace más probable su inclusión en ciclos de trasplantes cruzados y que el trasplante finalmente recibido sea un riñón de más calidad. Además considerando el donante a mayores compatible podemos hacer que parejas compatibles también participen en intercambios para así tener la posibilidad de obtener un donante aún mejor para los pacientes.

Este trabajo ha tratado solo con teoría, pero para avanzar en el conocimiento se debe reemplazar la teoría por experimentación y computación. En [5] se realizan varias simulaciones para estimar los efectos de un programa centralizado de trasplantes cruzados de riñones de donantes vivos y para evaluar la importancia de la introducción de donanciones indirectas y la restricción de tratar solo con ciclos de dos parejas, en todos los casos se trata con el algoritmo TTC de Gale y adaptaciones de éste. En [5] se concluye de las simulaciones que las beneficios podrían ser sustanciales, tanto en función del número de trasplantes como en función de la calidad de los mismos. En particular, sus resultados muestran que aumenta el número de trasplantes de riñones de vivos del 54 % al 75 % si se considera que sólo los ciclos de dos parejas son factibles y hasta un 91 % si no existen restricciones en la logitud de los ciclos.

Además de la importancia de las aplicaciones prácticas de la teoría del problema de asignación concluimos destacando que los razonamientos y pruebas en los modelos tratados no se realizan mediante símobolos matemáticos complejos, sino que la mayoría es tratado con un lenguaje corriente. Este hecho es una virtud de este tipo de problemas la cual ha contribuído al éxito de la puesta en práctica de los algoritmos comentados y otros. Por ejemplo, en el caso del intercambio de riñones la facilidad de explicar lo mecanismos y sus ventajas a aquellos no familiarizados con términos matemáticos y que es necesario involucrarlos en el proceso, como los equipos médicos, es de gran ayuda.

Apéndice A

Implementación práctica

En este apartado se aborda la implementación práctica de un algoritmo de emparejamiento usando el lenguaje de programación `R`. La realización de esta tarea responde a dos objetivos. Por un lado, conseguir realizar un programa con los conceptos fundamentales y las reglas básicas de los lenguajes de programación y, en particular, con `R`. Por otro lado, usar un lenguaje de programación para resolver problema real: ofrecer una solución práctica y eficiente a problemas de asignación reales mediante la automatización de los procesos del algoritmo a utilizar.

El programa informático en cuestión ha sido desarrollado de acuerdo al algoritmo TTC de Gale, para el caso simple como el expuesto en el Ejemplo 9 y para el caso en el que algún paciente tenga más de un donante como el problema tratado en el Ejemplo 13, es decir los casos tratados en intercambio de riñones en los que solamente encontremos ciclos (nada de cadenas). Siendo más concretos, el programa está preparado para recibir información relativa al número de pacientes y de riñones a emparejar, a las listas de preferencias de los pacientes sobre el conjunto de riñones y a la asignación inicial entre los dos conjuntos. Con la utilización de dicho datos, el programa presenta la asignación obtenida aplicando el algoritmo TTC de Gale.

Dicho esto, el diagrama elaborado para realizar dicho programa sigue la secuencia de ciertas iteracciones, número de etapas del algoritmo TTC de Gale. Al iniciar el programa se introduce la información necesaria para elaborar la asignación: perfil de preferencias, conjunto de pacientes y de riñones y, asignación incial. Esto es, la información entraría en un bucle que se desarrollaría de la siguiente forma.

- Iteración 0: Se introducen el perfil de preferencias, P y la asignación inicial μ (en el programa denotada como AO).
- Iteración k: Una vez que se detecta un ciclo se siguen los siguientes pasos:
  1. Se buscan los nodos que participan en dicho cilo.
  2. Se añaden a una matriz C las asignaciones del ciclo detectado.
  3. Se eliminan tanto los riñones como los pacientes que participan en el ciclo del perfil de preferencias y de la asignación inicial.
  4. Se comprueba si quedan más pacientes participando en el problema
- Iteración final: La salida del bucle se da cuando no queda ningún participante en el problema.

Un vez fuera del bucle, se obtendrían las asignaciones calculadas siguiendo el orden de obtención durante las iteraciones. Por otro lado comentar que para la búsqueda del ciclo se ha realizado otra función que seguiría el siguiente esquema.

En cada iteración se hace lo siguiente:

1. Se escoge el primer nodo, siguiendo el orden de 1 a adelante.

2. Se mira a qué riñón señala el paciente de dicho nodo.
3. Una vez comprobado el riñón al que señala se mira a quién le pertenece dicho riñón y dicho paciente representará el número para la consideración del siguiente nodo.
4. Antes de volver a ver a quién señala el nuevo nodo se comprueba si se ha formado un ciclo, bien compuesto por un nodo o por más.

Con esta función se obtendría una matriz denominada Ciclo la cual estará formada por todas las aristas obtenidas en la búsqueda del ciclo. Por ello dentro de los pasos de cada etapa debemos encontrar cuáles son los nodos que participan en el ciclo.

A.1. Código fuente

Generamos en forma de lista el perfil del preferencias denominado P y generamos una matriz con dos columnas de pacientes (ind) y riñones (obj), a esta la denominamos AO, pero representa a la asignación incial μ. Comienza la función ttc, la cual sigue los pasos expuestos con anterioridad.

```
#Comienza la función que sigue los pasos del algoritmo TTC de Gale.
ttc <- function(P=NULL,AO=NULL){

  # Creación de matriz de las nuevas asignaciones, la cual se va renovando.
  C <- data.frame(ind=NULL, obj=NULL)

  # Comienzan los pasos de cada etapa
  for(z in 1:length(unique(AO$obj))){

    ## 1. Se obtiene el resultado de la función busq.ciclos (función para encontrar los ciclos)
    Ciclo <- busq.ciclos(P=P,AO=AO)

    ## 2. Añadimos los objetos asignados en cada ciclo a la matriz C.
      #Realizamos la búsqueda de los nodos pertenecientes al ciclo obtenido.
    a=numeric(0)
    n=numeric(0)
    F <- Ciclo$ind
    G<-Ciclo$obj
    for(k in 1:length(unique(Ciclo$ind))){
    if(F[k]==G[length(G)]){
    n=k
     }
    }

      #Añadimos las asignaciones obtenidas en el ciclo a la matriz C

    C<-rbind(C,Ciclo[n:length(unique(Ciclo$ind)),])

    ## 3.Eliminamos los objetos que participan en cada ciclo

      #en la matriz AO
    AO <- AO[-which(AO$ind %in% C$ind),]

      #en la matriz P
    for(i in 1:length(P)){
```

```
      P[[i]] <- P[[i]][P[[i]] %in% AO$obj]
    }

    ## 4. El proceso termina si no quedan más objetos que asignar.

    if(nrow(AO)==0){
      C <- rbind(C,AO)
      return(C)
      break
    }
 }
}

##Función de búsqueda de ciclos que nos dará la matriz Ciclo.
busq.ciclos<- function(P=NULL,AO=NULL){
  Ciclo   <- data.frame(ind=NA, obj=NA)
  nodo <- AO$ind[1] #empezamos con el primer individuo
  for(j in 1:length(unique(AO$ind))){
    # el mejor objeto del individuo a tratar
    Ciclo[j,] <- c(nodo,P[[nodo]][1])
    # se pide al paciente al que le correspone que tiene el riñón
    nodo   <- AO[AO$obj == P[[nodo]][1],"ind"]
    # si el individuo señala su propio objeto volvemos arriba a realizar asignaciones.
    if("Ciclo[j,1]" == "Ciclo[j,2]"){
      return(Ciclo[j,])
      break
    }
    # si dicho individuo cumple el ciclo  volvemos a arriba a realizar asignaciones
    if(nodo %in% Ciclo$ind){
      return(Ciclo)
      break
    }
  }
 }

### Asignación obtenida a través del algoritmo TTC de Gale
ttc(P=P,AO=AO)
```

A.2. Aplicación del programa a los Ejemplos 9 y 13

Para el Ejemplo 9 tenemos que introducir los siquientes datos:

```
#Generamos en forma de lista el perfil del preferencias
P <- list()
P[[1]] <- c(8,6,10,4,1,5,2,11,7,9,3)  # paciente 1
P[[2]] <- c(10,8,6,4,2,9,7,11,3,1,5)  # paciente 2
P[[3]] <- c(4,6,8,10,3,5,9,2,11,7,1)  # paciente 3
P[[4]] <- c(10,4,8,6,5,7,2,9,11,3,1)  # paciente 4
P[[5]] <- c(2,8,11,9,7,4,5,10,6,1,3)  # paciente 5
P[[6]] <- c(11,7,9,2,4,8,10,5,6,3,1)  # paciente 6
P[[7]] <- c(2,11,9,8,4,10,7,6,5,3,1)  # paciente 7
```

```
P[[8]] <- c(7,2,11,9,6,10,4,5,8,1,3)  # paciente 8
P[[9]] <- c(1,3,8,4,10,6,5,9,2,11,7)  # paciente 9
P[[10]] <- c(3,1,9,8,10,6,5,4,2,7,11) # paciente 10
P[[11]] <- c(5,2,4,1,3,6,8,9,10,7,11) # paciente 11


#Generamos una matriz de dos columnas de pacientes ('ind') y riñones ('obj').
#Ésta representa a mu, la asignación incial.
AO<- data.frame(ind=1:11, obj=1:11); AO.

#Asignación obtenida a través del algoritmo TTC a partir de la función ttc
### asignación basada en el algoritmo TTC de Gale
> ttc(P=P,AO=AO)
   ind obj
   10   3
    3   4
    4  10
    8   7
    7   2
    2   8
   11   5
    5  11
    1   6
    6   9
    9   1
```

Como podemos comprobar nos dan las mismas asignaciones que el cálculo manual representado en el Capítulo 2, pero el orden está dado por la búsqueda de los ciclos. Las tres primeras filas representan las asignaciones del primer ciclo compues por las parejas 3, 4 y 10, las siguientes tres filas representan las asignaciones del segundo ciclo compuesto por las parejas 8, 7 y 2, las filas 7 y 8 representan el tercer cilo (encontrado en la tercera etapa) en el que están involucradas las pareas 11 y 5 y, por último tenemos que las tres últimas filas representan el último ciclo en el que participan los pares 1,6 y 9.

Por otro lado para el Ejemplo 13 debemos introducir los datos del perfil de preferencias y de la asignación inicial de manera que al órgano o_{52} lo denotaremos como 12 y duplicaremos la lista de preferencias del paciente a_5. Los siguientes datos serían para el caso en el que el órgano o_{52} pertenece al grupo 0, pero para el resto de los casos se realizaría de forma análoga, únicamente habría que modificar la lista de preferencias debido a que es diferente para cada caso.

```
#Generamos en forma de lista el perfil del preferencias
P <- list()
P[[1]] <- c(8,12,6,10,4,1,5,2,11,7,9,3)  # paciente 1
P[[2]] <- c(10,12,8,6,4,2,9,7,11,3,1,5)  # paciente 2
P[[3]] <- c(12,4,6,8,10,3,5,9,2,11,7,1)  # paciente 3
P[[4]] <- c(12,10,4,8,6,5,7,2,9,11,3,1)  # paciente 4
P[[5]] <- c(2,8,11,12,9,7,4,5,10,6,1,3)  # paciente 51
P[[5]] <- c(2,8,11,12,9,7,4,5,10,6,1,3)  # paciente 52
P[[6]] <- c(11,7,12,9,2,4,8,10,5,6,3,1)  # paciente 6
P[[7]] <- c(2,12,11,9,8,4,10,7,6,5,3,1)  # paciente 7
P[[8]] <- c(7,2,12,11,9,6,10,4,5,8,1,3)  # paciente 8
P[[9]] <- c(1,12,3,8,4,10,6,5,9,2,11,7)  # paciente 9
P[[10]] <- c(3,1,9,8,10,12,6,5,4,2,7,11) # paciente 10
P[[11]] <- c(12,5,2,4,1,3,6,8,9,10,7,11) # paciente 11
```

```
#Generamos una matriz de dos columnas de pacientes ('ind') y riñones ('obj').
#Ésta representa a mu, la asignación incial.

> AO<- data.frame(ind=c(1,2,3,4,5,5,6,7,8,9,10,11), obj=c(1,2,3,4,5,12,6,7,8,9,10,11)); AO
   ind obj
1    1   1
2    2   2
3    3   3
4    4   4
5    5   5
6    5  12
7    6   6
8    7   7
9    8   8
10   9   9
11  10  10
12  11  11
> ttc(P=P,AO=AO)
   ind obj
     2  10
    10   3
     3  12
     5   2
     4   4
     1   8
     8   7
     7  11
    11   1
     6   9
     9   6
```

Acudiendo de nuevo al Ejemplo 13 se pueden comprobar que las asignaciones obtenidas con el programa son las acertadas. La forma de interpretación es la misma que la explicada para el Ejmplo 9.

Bibliografía

[1] Gale D, Shapley LS (1962) College admisions and the stability of marriage, American Mathematical Monthly 69:9-15.

[2] Macho-Stadler I. (2002) ¿Me conoce usted de baile? Una introducción a los modelos de asignación bilateral. En: Un Paseo por la Geometría, Ibáñez-Torres R., Macho-Stadler M. (ed). Universidad del País Vasco, pp 143-158.

[3] Roth AE(1982) Incentive compatibility in a market with indivisible goods, Economics Letters 9: 127-132.

[4] Roth AE, Postlewaite A (1977) Weak versus strong domination in a market with indivisible good, Journal of Mathematical Economics 4: 131-137.

[5] Roth AE, Sönmez T, Ünver U (2004) Kidney exchange, Quarterly Journal of Economics 119:457-488.

[6] Shapley L, Scarf H (1974) On Cores and indivisibilities, Journal of Mathematical Economics 1:23-28.