UNIVERSIDADE DA CORUÑA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Universidade de Vigo

Traballo Fin de Máster

Teoría de xogos e deseño de tarifas en problemas do aeroporto e outros problemas relacionados

Luis Arsenio Méndez Vázquez

Máster en Técnicas Estadísticas

Curso 2014-2015

Proposta de Traballo Fin de Máster

Título en galego: Teoría de xogos e deseño de tarifas en problemas do aeroporto e outros problemas relacionados.
Título en español: Teoría de juegos y diseño de tarifas en problemas del aeropuerto y otros relacionados.
English title: Game theory and design of airport rates and other problems related.
Modalidade: Modalidade A
Autor/a: Luis Arsenio Méndez Vázquez, Universidade de Vigo.
Director/a: Balbina Virginia Casas Méndez, Universidade de Santiago de Compostela.
Titor/a: Balbina Virginia Casas Méndez.
Breve resumo do traballo: Este traballo fin de máster consiste nunha revisión bibliográfica da literatura máis relevante no contexto da asignación de custos no deseño de tarifas en problemas do aeroporto e outros relacionados como o son o problema da autoestrada e o das canles de rego, incluíndo tamén a programación informática dalgunhas regras e a presentación de aplicacións a problemas reais .

Dona Balbina Virginia Casas Méndez, Profesora do Máster en Técnicas Estadísticas e Investigación Operativa da Universidade de Santiago de Compostela, informa que o Traballo Fin de Máster titulado

Teoría de xogos e deseño de tarifas en problemas do aeroporto e outros problemas relacionados

foi realizado baixo a súa dirección por don Luis Arsenio Méndez Vázquez para o Máster en Técnicas Estadísticas. Estimando que o traballo está terminado, dan a súa conformidade para a súa presentación e defensa ante un tribunal.

En Santiago de Compostela, a 22 de Xullo de 2015.

A directora:

Dona Balbina Virginia Casas Méndez

O autor:

Don Luis Arsenio Méndez Vázquez

Índice xeral

Resumo

Resumo en galego

Un problema co que se atopan os concesionarios públicos ou privados dun determinado servizo é o do deseño das tarifas para os usuarios de devandito servizo. Unha parte da teoría de xogos (cf. González Díaz, García Jurado e Fiestras Janeiro 2010) supón que é posible a cooperación entre un conxunto de axentes que, nun principio terían intereses contrapostos, conseguen obter beneficios como froito da súa cooperación. A partir de aquí proporcionanse modelos, solucións e propiedades das mesmas que son potencialmente aplicables, entre outros, ó problema do deseño de tarifas.

Un traballo emblemático nesta liña é debido a Littlechild e Owen (1976), os cales consideran o problema das tarifas de uso e mantemento dos usuarios dunha pista de aterraxe dun aeroporto. Neste contexto, o coñecido valor de Shapley da teoría de xogos admite unha sinxela expresión e verifica propiedades matemáticamente elegantes e intuitivas dende o punto de vista práctico. Traballos posteriores son entre outros o de Aadland e Kolpin (1998) no ámbito das canles de rego de parcelas destinadas a cultivos agrícolas e o de Kuipers, Mosquera e Zarzuelo (2013) no ámbito das autoestradas. Resulta interesante a programación de aplicacións que facilitan o cálculo dos valores que se empregan e existen liñas abertas de investigación neste campo.

Este traballo fin de máster consiste nunha revisión bibliográfica de parte da literatura máis relevante neste contexto, centrándonos no caso de tarifas en problemas de aeroporto e outros relacionados como as autoestradas e as canles de rego xunto coa programación informática dalgunhas regras e a presentación de aplicacións a problemas reais.

English abstract

A problem that public and private distributors of a given service found is the design of rates for the users of this service.

One part of game theory (cf. Gonzalez Díaz, García Jurado and Fiestras Janeiro 2010) suppose that is posible a cooperation between a set of agents that, in the beggining, they had very different interests, achieving to obtain beneffits due to their cooperation. From here models provide solutions and properties which are potentially aplicables, between others, to the airport rate design.

A very important work in this line was made for Littlechild and Owen (1973), who consider the problem of rates about the use and maintenance of users in an airstrip. In this context, the well known Shapley value of game theory admits a simple expression and verifies mathematically elegant and intuitive properties. Later works, are among others that of Aadland and Kolpin (1998) in the field of the irrigation costs of fields and that of Kuipers, Mosquera and Zarzuelo (2013) in the field of the highways. It is interesting the programation of this aplications which make more easy calculating the values that are used and also there exist open research lines in this field.

This end of master´s degree work consits in a bibliographic review of the most important works in this context, focusing in the case of airport rates problems and others related as they could be the highway problem and the irrigation costs problem along with the informatic programation of rules ans showing some real aplications of this problems.

Prefacio

Os psicólogos destacan a importancia do xogo na infancia como medio de formar a personalidade e de aprender de forma experimental a relacionarse en sociedade e a resolver problemas e situacións conflictivas. Tódolos xogos de nenos e de adultos, xogos de mesa ou xogos deportivos, son modelos de situacións conflictivas e cooperativas nas que podemos recoñecer situacións e pautas que se repiten con frecuencia no mundo real. A estadística é unha das ramas das matemáticas que surxiu precisamente dos cálculos para diseñar estratexias vencedoras en xogos de azar. Conceptos tais como probabilidade, media ponderada e distribución ou desviación estándar, son términos acuñados pola estadística matemática e que teñen aplicación no análise de xogos de azar ou nas frecuentes situacións sociais e económicas nas que hai que adoptar decisións e asumir riscos ante compoñentes aleatorios. Pero a teoría de xogos ten unha relación moi distante con respecto da estadística. O seu obxectivo non é o análise do azar ou dos elementos aleatorios senón dos comportamentos estratéxicos dos xogadores. No mundo real, tanto nas relacións económicas como nas políticas sociais, son moi frecuentes as situacións nas que, ó igual que nos xogos, o seu resultado depende do conxunto de decisións de diferentes axentes ou xogadores. Dise dun comportamento que é estratéxico cando se adopta tendo en conta a influencia conxunta sobre o resultado propio e alleo das decisións propias e as alleas.

O principal obxectivo da teoría de xogos é determinar os papeis de conducta racional en situacións de *xogo* nas que os resultados son condicionais ás accións de xogadores interdependentes. Un xogo é calquera situación na cal compiten dous ou máis xogadores. O xadrez e o póker son bos exemplos, pero tamén o son o duopolio e o oligopolio nos negocios. A extensión coa que un xogador acada os seus obxectivos nun xogo depende do azar, dos seus recursos físicos e mentais xunto cos dos seus rivais, das regras do xogo e dos cursos de accións que seguen os xogadores individuais, é dicir, as súas estratexias. Unha estratexia é unha especificación da acción que vai a emprender un xogador en cada continxencia posible do xogo. Suponse que, nun xogo, tódolos xogadores son racionais, intelixentes e que están ben informados. En particular, suponse que cada xogador coñece todo o conxunto de estratexias existentes, non só para el, senón tamén para os seus rivais, e que cada xogador coñece os resultados de tódalas convinacións posibles das estratexias.

A teoría de xogos ten aplicacións en numerosas áreas, como as ciencias políticas ou a estratexia militar, que fomentou algúns dos primeiros desenvolvementos desta teoría. A bioloxía evolutiva, onde se usou ampliamente para comprender e predecir certos resultados da evolución, como o concepto de estratexia evolutiva estable introducido por John Maynard Smith; ou a psicoloxía, onde pode usarse para analizar xogos de simple diversión ou de aspectos máis importantes da vida e a sociedade tamén son claros exemplos de aplicacións. Pero sen dúbida, a súa principal aplicación atopámola nas ciencias económicas porque intenta atopar estratexias racionais en situacións onde o resultado depende non soamente da estratexia dun participante e das condicións do mercado, senón tamén das estratexias elixidas por outros xogadores, con obxectivos distintos ou coincidentes.

Nesta ciencia evolucionouse notablemente, xa que a partir dos instrumentos proporcionados por Von Neumann e Morgenstern comenzouse a progresar no coñecemento da competencia imperfecta, porque ata entón só tiñan explicación *xogos* particularmente simples, como o monopolio ou a competencia perfecta, xa que o monopolio pode ser tratado como un xogo cun único xogador, e a competencia perfecta pode ser entendida tendo en conta un número infinito de xogadores, de xeito que cada axente individual non pode ter un efecto sobre agregados de mercado se actúa individualmente. A teoría de xogos, veu desempeñando nos últimos tempos un papel cada vez maior nos campos de lóxica e ciencias informáticas. Varias teorías de lóxica básanse na semántica propia dos xogos, e informáticos xa comezaron a usar os xogos para representar computacións.

O dilema do prisioneiro, tal e como foi popularizado polo matemático Albert W. Tucker, proporciona un exemplo da aplicación da teoría de xogos á vida real. Outra situación na que se pode ver claramente a aplicación da teoría de xogos á vida real é no caso do reparto de custos asociados á construcción dunha instalación que vai a ser usada por varios axentes, os cales teñen necesidades diferentes que podemos supoñer ordenadas linealmente. Exemplos deste tipo de problemas aparecen en diversos ámbitos como pode ser a pista dun aeroporto que é usada por avións de distintos tamaños e, polo tanto, necesitan diferentes lonxitudes para realizar as operacións de aterraxe e despegue (Littlechild e Owen, 1973). Neste caso, os custos de construcción das pistas van a depender esencialmente do avión de maior tamaño que use a pista, mentres que os custos derivados do uso continuado da pista serán proporcionais ó número de movementos realizados por cada tipo de avión. Este problema é o que se coñece co nome de problema do aeroporto. Outro exemplo sería o dunha canle de rego que é usada por un grupo de agricultores cuxas parcelas están situadas nos marxes de devandita canle. O agricultor que ten as súas parcelas situadas preto da cabeceira da canle necesita que se constrúa un tramo de canle de menor lonxitude que o resto (Aadland e Kolpin, 1998). Nestes problemas hai un único punto de entrada, o inicio da pista ou a cabeceira da canle, e varios puntos de saída determinados pola lonxitude de pista necesaria ou a localización de parcelas. Un caso máis xeral é o relativo á construcción dunha autoestrada (Mosquera e Zarzuelo, 2009). Nunha autoestrada hai diferentes puntos de entrada e saída que delimitan tramos indivisibles. Cada viaxe dentro da autoestrada necesita usar os tramos que están entre o seu punto de entrada e o seu punto de saída. O custo de construcción da instalación ten que ser aboado polos axentes. O problema que se propón consiste en como repartir este custo tendo en conta o custo que tería que abonar cada axente se construíse unha instalación adaptada as súas propias necesidades. Este problema pode abordarse de varias maneiras: propoñer regras directas de reparto de custos basadas nos parámetros do problema, ou asociar un xogo cooperativo e usar algún concepto de solución proposto neste contexto para establecer o custo que ten que abonar cada axente.

Comezaremos o noso traballo cun capítulo no que introduciremos varios conceptos da teoría de xogos que van a ser necesarios para o posterior uso e análise de resultados. No segundo capítulo abordaremos o *problema do aeroporto* ofrecendo distintas solucións para a asignación de custos asociados a construcción da pista de aterraxe tanto no caso simple como considerando unións a priori. No terceiro capítulo analizaremos o denominado *problema da autoestrada* onde calcularemos o seu nucleolo ademáis de proporcionar un algorítmo para o seu cómputo. Para rematar, no cuarto capítulo analizaremos o *problema da asignación de custos de regadío* proporcionando unha caracterización axiomática de distintos mecanismos usando diversos principios tanto estáticos como dinámicos que ademáis son equitativos e que son usados habitualmente polos granxeiros. Ademáis, finalizaremos o traballo vendo o problema de asignación de custos dunha gabia dende o punto de vista de Aadland e Kolpin aplicando a regra que eles mesmos propuxeron a varios exemplos numéricos.

Capítulo 1

Preliminares de teoría de xogos

1.1. Xogos TU

Para a realización deste capítulo, basámonos fundamentalmente no artigo *Sharing costs in airport and highway problems* de M. Gloria Fiestras-Janeiro e Manuel A. Mosquera.

Un *xogo de custo con utilidade transferible* (xogo de custo TU) é un par (N, c) con $N = \{1, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$, representando o *conxunto de xogadores* involucrados nun certo proxecto conxunto e:

$$c : 2^N \to \mathbb{R}$$

é a *función característica* do xogo onde $c(\emptyset) = 0$ e para cada coalición $\emptyset \neq S \subseteq N$, temos que $c(S)$ representa o custo que terían que pagar os xogadores de S se deciden cooperar entre eles. Cando ó cooperar, en lugar de custos xéranse beneficios, en vez de denotar por $c(S)$ usamos $v(S)$ e o correspondente xogo denótase por (N, v) e denomínase simplemente xogo con utilidade transferible. Dada unha coalición, $S \subseteq N$, denotaremos por $\mid S \mid$ ó cardinal de S (número de xogadores da coalición) e denotaremos por G^n á clase de tódolos xogos de n xogadores.

Definición 1.1. Sexa (N, c) un xogo de custos TU.

- Diremos que (N, c) é monótono se o custo dunha coalición é maior ou igual que o custo de calquera das súas subcoalicións, é dicir,

  $$c(S) \geq c(T) \text{ para tódalas coalicións } S, T \in 2^N \text{ tais que } T \subseteq S.$$

- Diremos que (N, c) é subaditivo se o custo dunha coalición é menor ou igual que a suma dos custos de calquera partición de dita coalición, é dicir,

  $$c(S \cup T) \leq c(S) + c(T) \text{ para todo } S, T \in 2^N, S \cap T = \emptyset.$$

- O xogo (N, c) é cóncavo se o custo que aporta un xogador a unha coalición é maior canto máis pequena é a coalición. Así, os xogadores terán máis inventivos a unirse á coalición a que menor custo aporten, é dicir, á gran coalición N. Matemáticamente´, isto é o equivalente a pedir que:

  $$c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) + c(S \cap T)$$

  para cada $S, T \subseteq N$.

Un dos principais obxectivos da teoria de xogos de custo TU é propoñer repartos do custo total $c(N)$ xerado pola cooperación de tódolos xogadores de xeito que se cumplan certas propiedades de estabilidade e xusticia. Formalmente, deséxase atopar un vector de números non negativos $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que:

$$x(N) = \sum_{i=1}^{n} x_i = c(N).$$

Dicimos que un reparto é *individualmente racional* se $x_i \leq c(i)$ para todo $i \in N$ e ademáis o conxunto de repartos individualmente racionais coñécese co nome de *conxunto de imputacións* e denótase por $I(N, c)$. Por outra banda, dicimos que un reparto é *coalicionalmente estable* se:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$$

para todo $\emptyset \neq S \subseteq N$ e ademáis o conxunto de repartos coalicionalmente estables dun xogo de custo TU chámase *núcleo* e defínese entón como:

$$C(N, c) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = c(N), x(S) \leq c(S) \text{ para cada } S \subseteq N\}.$$

Nótese que, dado un $x \in C(N, c)$, $c(N) - c(N \backslash \{i\}) \leq x_i \leq c(i)$.

Debido a un resultado que aparece en Shapley (1971) e en Ichiishi (1981), o núcleo de xogos de custo TU cóncavos é sempre non baleiro e polo tanto sempre podemos atopar repartos coalicionalmente estables.

1.2. O valor de Shapley dun xogo TU

Un reparto que sempre está no núcleo cando o xogo é cóncavo é o coñecido como *valor de Shapley* (Shapley, 1953). Dado un xogo de custo TU (N, c), o valor de Shapley é unha regra de reparto que para cada xogo (N, c) propón que o xogador $i \in N$ debe de asumir o custo dado por:

$$\Phi_i(N, c) = \sum_{S \subseteq N \backslash \{i\}} \frac{|\, S \,|!(|\, N \,| - |\, S \,| - 1)!}{|\, N \,|!} (c(S \cup \{i\}) - c(S)). \tag{1.1}$$

1.3. O nucleolo

O *nucleolo* (Schmeidler, 1969) é unha regra de reparto para xogos de custo TU que trata de maximizar a "satisfacción" das coalicións menos satisfeitas co reparto proposto. Unha boa propiedade desta regra é que, se o núcleo do xogo é non baleiro, entón o nucleolo é o seu centro "lexicográfico" e, polo tanto, é estable. A continuación presentamos a súa representación formal.

Sexan (N, c) un xogo de custo TU, $S \subseteq N$ e $x \in \mathbb{R}^n$ un reparto calquera. O *exceso* $e(S, x)$ *da coalición* S *no reparto* x ven dado por:

$$e(S, x) = c(S) - x(S).$$

Canto máis grande é $e(S, x)$, máis satisfeita esta a coalición S co reparto asignado x xa que paga menos. Definimos $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$ como o vector que se obtén ó ordenar de forma non decrecente os excesos de tódalas coalicións de N no reparto x. Sexan $u, v \in \mathbb{R}^{2^n}$, dise que u é *lexicográficamente máis grande ou igual* que v se $u = v$ ou se existe un índice $s \in \{1, ..., 2^n\}$ tal que $u_k = v_k$ para todo $k \in \{1, ..., s-1\}$ e $u_s > v_s$. Denotarémolo por $u \geq_L v$.

Se $I(N, c) \neq \emptyset$, o *nucleolo* de (N, c) defínese como:

$$\nu(N, c) = \{x \in I(N, c) : \theta(x) \geq_L \theta(y) \text{ para todo } y \in I(N, c)\}.$$

Entón, temos que o nucleolo é a única imputación que lexicográficamente maximiza $\theta(x)$ sobre o conxunto de imputacións.

1.4. O τ-valor

A pesar de que o núcleo é moi convincente como concepto de solución, presenta inconvintes. Un destes inconvintes é que o núcleo podería ser baleiro, nese caso xera asignacións que non son aceptables e outro inconvinte sería que houbese demasiadas asignacións o que tampouco nos sería de utilidade.

Nesta sección centrarémonos no estudo do τ-valor, un concepto de solución que foi introducido por Tijs (1981) para os xogos cuasi-equilibrados ou de compromiso admisible. A pesar de que o τ-valor non xera asignacións para tódolos xogos de utilidade transferible, faino para tódolos xogos con núcleo non baleiro. Aínda máis, cando o τ-valor xera unha asignación, entón esta é única. O τ-valor baséase na idea de compromiso entre un valor superior e outro inferior para cada xogador.

Definición 1.2. Sexa $v \in G^N$ un xogo con utilidade transferible. O vector $M(N,v) \in \mathbb{R}$ con coordenadas:

$$M_i(N,v) = v(N) - v(N \backslash \{i\})$$

denomínase vector superior de v. Pode ser considerado como o máximo pago que o xogador i pode esperar conseguir no xogo, no sentido de que se reclama un pago maior, sería vantaxoso para o resto de xogadores excluílo da gran coalición e dividir o valor $v(N \backslash \{i\})$ entre eles mesmos. Tamén se lle chama pago de utopía do xogador i a $M_i(N,v)$.

Definición 1.3. Sexa $v \in G^N$ un xogo con utilidade transferible. O vector $M(N,v) \in \mathbb{R}$ con coordenadas:

$$m_i(N,v) = \text{máx}_{S:i\in S}\left(v(S) - \sum_{j\in S\backslash\{i\}} M_j(v)\right)$$

denomínase vector de mínimo pago de v. Para cada xogador $i \in N$, o valor $m_i(N,v)$ pode ser considerado como o mínimo dereito do xogador i, no sentido de que pode garantirse a sí mesmo este pago ofrecendolles ós membros dunha coalición adecuada os seus pagos de utopía, o que é un bo acordo para eles, e quedandose él co que resta. Este vector tamén se denomina vector de mínimos dereitos.

Definición 1.4. Sexan $(N,v) \in G^n$ un xogo TU, $m(N,v)$ o vector de mínimos dereitos e $M(N,v)$ o vector dos pagos de utopía dos xogadores. Un xogo $(N,v) \in G^n$ que satisfai as seguintes condicións:

- $m(N,v) \leq M(N,v)$,
- $\sum_{i\in N} m_i(N,v) \leq v(N) \leq \sum_{i\in N} M_i(N,v)$,

chámase *cuasi-equilibrado*.

Definición 1.5. Sexan $(N,v) \in G^n$ un xogo TU cuasi-equilibrado, $m(N,v)$ o vector de mínimos dereitos e $M(N,v)$ o vector dos pagos de utopía dos xogadores. Defínese o τ-valor como o reparto que satisfai:

$$\tau(N,v) = m(N,v) + \alpha(M(N,v) - m(N,v)),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i\in N} \tau_i(N,v) = v(N)$.

Se denotamos a clase dos xogos cuasi-equilibrados por $QBG(N)$ temos que, para un xogo cuasi-equilibrado $v \in QBG(N)$, o τ-valor de v é o único valor de compromiso entre os vectores inferior e superior do xogo que establece unha asignación do valor $v(N)$.

1.5. O valor de Owen

Para determinar as taxas de aterraxe, propoñeremos o modelo de xogos con unións a priori e a extensión do valor de Shapley para estos xogos definida por Owen (1977). Este valor é chamado habitualmente *valor de Owen*. Un sistema de unións a priori para un xogo coalicional de custos é unha partición P do seu conxunto de xogadores, a cal proporciona unha descripción a priori da estrutura cooperativa dos xogadores e $M = \{1, 2, ..., A\}$ é o conxunto dos índices da partición. O valor de Owen é unha regra de asignación de custos para xogos con unións a prioiri basada nas contribucións marxinais, ó igual que o valor de Shapley. Primeiro asocia o custo total entre as unións como o valor de Shapley do xogo inducido entre as unións. Ademáis dentro de cada unha das unións reasígnase o custo que ten que ser pagado entre os membros de cada unión, tendo en conta as súas posibilidades para asociarse a outras unións.

Un conxunto de xogadores N e un sistema de unións P forman un tripla (N, c, P), onde c é a función de custos característica do xogo de custos (N, c) e $P = \{P^1, P^2, ..., P^A\}$ é unha partición do conxunto de xogadores N en unións a priori. Denotarémos o conxunto de tódalas triplas (N, c, P) por $U(N)$ e denotaremos por U a clase de tódolos conxuntos $U(N)$ para calquera N finito. O valor de Owen asigna o custo total entre as unións como o valor de Shapley do xogo inducido xogado entre as diferentes unións. O xogo realizado entre as unións chámase *xogo cociente* e denótase por (P, c^P) onde a función característica c^P defínese por:

$$c^P(Q) := c(\cup_{p^a \in Q} P^a)$$

para todo $Q \subseteq P$: Isto significa que o custo dun (sub)conxunto de unións é igual ó custo do conxunto de tódolos xogadores que pertencen a calquera destas unións. O valor de Shapley do xogo (P, c^P) asigna unha parte do custo total das unións P^A. O valor de Owen distribúe o custo asignado a unión entre os seus membros dacordo coa filosofía do valor de Shapley. Polo tanto, o reparto de custos que cada membro da unión ten que pagar é determinado usando os custos marxinais.

Se tomamos $i \in N$ e P^a a única unión a cal pertence i, é dicir, $i \in P^a \in P$, o valor de Owen do xogo (N, c, P) ven dado pola seguinte fórmula:

$$\sum_{Q \subseteq P \setminus \{P^a\}} \sum_{S \subseteq P^a \setminus \{i\}} \frac{\mid S \mid!(\mid P^a \mid - \mid S \mid -1)! \mid Q \mid!(\mid P \mid - \mid Q \mid -1)!}{\mid P^a \mid! \mid P \mid!} \cdot M_i(Q, S)$$

e denótase por $\psi_i(N, c, P)$, onde $M_i(Q, S)$ denota a contribución marxinal do xogador i a Q e S dada por:

$$c(\cup_{P^\alpha \in Q} P^\alpha \cup S \cup \{i\}) - c(\cup_{P^\alpha \in Q} P^\alpha \cup S).$$

Esta fórmula é un pouco complicada, pero a súa interpretación é bastante similar á do valor de Shapley. O valor de Owen de $i \in P^a \in P$ é o promedio das contribucións marxinais de i en tódalas combinacións dos xogadores que preservan o agrupamento dos xogadores en unións. Dise que unha combinación de xogadores preserva a unión se dous xogadores da mesma coalición non teñen outro xogador entre eles que non sexa membro da mesma unión.

1.6. O τ-valor coalicional

Consideremos (N, v, P) un xogo TU con unións a priori. Se o xogo cociente é cuasi-equilibrado podemos usar o τ-valor para atopar unha asignación do valor total $v(N)$ entre as unións. Polo tanto, a a-ésima unión terá que dividir $\tau_a(v^P)$ entre os seus membros.

Unha asignación de $\tau_a(c^P)$ entre os membros da unión P^a entra dentro da idea que temos do τ-valor. Polo tanto, trátase dun compromiso entre un vector superior e outro inferior. Na determinación destes vectores, temos que ter en conta a posibilidade de que un xogador abandone unha unión e se una a outra. Neste caso defínese o pago de utopía como:

$$M_i(N, v, P) := v(N) - v(N \setminus \{i\}).$$

É o maior pago que pode esperar o xogador i xa que senón sería beneficioso para o resto de xogadores que este abandonase a gran coalición. Ademáis, notemos que $M_i(N, v, P) = M_i(N, v)$. O pago de utopía

$M_i(N,v,P)$ tamén pode ser interpretado como a contribución marxinal do xogador i á contribución marxinal da súa unión a o valor da gran coalición N. Para ver isto, supoñamos que $i \in P^a$ e definamos o xogo (M, v_{-i}^P) por:

$$v_{-i}^P(Q) = v(\cup_{b\in Q} P^b \backslash \{i\})$$

para todo $Q \subseteq M$. Entón temos que:

$$M_i(N,v,P) = v^P(M) - v^P(M\backslash\{a\}) - (v_{-i}^P(M) - v_{-i}^P(M\backslash\{a\})).$$

Cando definimos o vector inferior, supoñemos que un xogador pode abandonar unha unión e formar coalición con algúns dos restantes membros da coalición a que pertence e con un ou máis do resto das unións. Sen embargo, non pode formar unha nova coalición que inclúa algún pero non todos os membros doutra unión. Entón para determinar o pago de mínimos dereitos para o xogador $i \in P^b$, tan só consideraremos as coalicións da forma:

$$P(a) := \{S \subseteq N : S = \cup_{b\in Q} P^b \cup T \text{ para algún } Q \subseteq M\backslash\{a\} \text{ e } T \subseteq P^a\}.$$

Usando esta notación, o pago de mínimos dereitos para o xogador $i \in P^a$ defínese como:

$$m_i(N,v,P) := max_{S\in P(a):i\in S}\left(v(S) - \sum_{j\in S\backslash\{i\}} M_j(N,v,P)\right).$$

O xogador i pode garantirse por si mesmo o pago $m_i(N,v,P)$ ofrecendo ós membros da coalición adecuada os pagos de utopía e tomando o restante para sí mesmo. Notemos que ambas definicións de vector de mínimos dereitos implican que $m(N,v,P) \leq m(N,v)$.

Un xogo con unións a priori (N,v,P) dise cuasi-equilibrado se, e só se, se satisfan as seguintes condicións:

- $v^P \in QBG(M)$
- $m(N,v,P) \leq M(N,v,P)$,
- $\sum_{i\in P^a} m_i(N,v,P) \leq \tau_a(M,v^P) \leq \sum_{i\in P^a} M_i(N,v,P)$ para todo $P^a \in P$.

Denotaremos por $QBU(N)$ ó conxunto dos xogos con unións a priori cuasi equilibrados onde N é o conxunto de xogadores. O τ-valor coalicional defínese para cuasi-xogos equilibrados como un compromiso entre os vectores superior e inferior que para cada unión P^a divide o seu τ-valor $\tau_a(M,v^P)$ entre os seus xogadores.

Definición 1.6. O τ-valor coalicional é unha función:

$$\tau : QBU(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$$

que asigna a todo $(N,v,P) \in QBU(N)$ o vector $(\tau_i(N,v,P))_{i\in N}$ de xeito que, para todo $P^a \in P$ e para todo $i \in P^a$, tense que:

$$\tau_i(N,v,P) := m_i(N,v,P) + \alpha_a(M_i(N,v,P) - m_i(N,v,P)),$$

onde, para cada $a \in M$, α_a é tal que:

$$\sum_{i\in P^a} \tau_i(N,v,P) = \tau_a(M,v^P).$$

Capítulo 2

O problema do aeroporto

A teoría de xogos cooperativos ten demostrado ser unha ferramenta útil para analizar as situacións de asignación de custos. Unha posible aplicación da teoría de xogos é o uso do valor de Shapley para determinar as taxas de aterraxe nos aeroportos. O tipo de xogos que aparece denomínanse *xogos de aeroporto* e foron estudados por Littlechild e Owen (1973), Littlechild e Thompson (1977), e outros. Para a realización deste capítulo basámonos principalmente no artigo *Sharing costs in airport and highway problems* de Fiestras-Janeiro, M.G. et al. (2009), xunto co artigo *Owen's coalitional value and aircraft landing fees*, de Vázquez-Brage, M., et al. (1997).

Consideremos un conxunto finito T que representa o conxunto dos diferentes tipos de avións que van a usar a pista do aeroporto. Cada tipo de avión $t \in T$ necesita unha pista para realizar as súas operacións de aterraxe e despegue e que supón un custo de $c_t > 0$ unidades. Podemos supoñer que $c_1 < c_2 < ... < c_m$ sendo $m = \mid T \mid$ sen perder xeralidade. Ademáis, cada tipo de avión $t \in T$ declara que vai a realizar N_t operacións. A terna $(T, \{N_t\}_{t \in T}, c)$, onde $c = (c_1, ..., c_m)$, denomínase un *problema do aeroporto.*

Cómo repartiríamos o custo de construcción da pista entre as distintas operacións? Un primeiro intento para abordar este problema foi proposto por Baker e Associates (1965) e Thompson (1971). Nos dous traballos proponse a seguinte regra de reparto.

- *Dividir o custo de construcción da pista de aterraxe correspondente ós avións de tipo máis pequeno entre todas as operacións.*

- *Dividir o incremento do custo de construcción da pista de aterraxe que supón habilitala para avións que son do segundo tipo máis pequeno, entre todas as operacións que requiren polo menos unha pista de aterraxe con esa lonxitude.*

- *Proceder deste modo ata chegar ó incremento do custo que supón a ampliación da pista para que os avións de maior tamaño poidan realizar unha operación se se tiña construido adecuada ás necesidades dos avións do segundo tipo máis grande. Neste caso, dividir o incremento do custo entre o número de operacións que realizan os avións de maior tamaño.*

2.1. Xogos TU e taxas de aterraxe dos aeroportos

Unha forma alternativa de abordar o problema é utilizar ferramentas de Teoría de Xogos. A continuación expoñemos o modelo de xogo de custo TU (con utilidade transferible) proposto por Littlechild e Owen (1973). O xogo de custo TU asociado a un problema do aeroporto está dado por (N, c), onde $N = \cup_{t \in T} N_t$ e a función característica está dada por:

$$c(S) = c_{i_S}, \text{ con } i_S = \text{máx}\{t \in T : N_t \cap S \neq \emptyset\}.$$

Isto interprétase como que os avións de maior tamaño necesitarán de pistas máis longas para aterrar. Así, a coalición S non debería de facerse responsable do custo asociado as partes da pista que eles nunca usan nos seus movementos. En particular, se unha pista é adecuada para o tipo t, entón tamén será adecuada para os tipos de avión máis pequenos que t. Polo tanto, os custos de construcción da pista adecuada para un conxunto de movementos S coinciden co custo de construcción asociado a construcción da pista adecuada para o tipo de avión máis grande de todos os que realizan operacións no conxunto S. Polo tanto, o valor que a función característica asigna a unha colección de movementos é o custo de construcción dunha única pista coa mínima lonxitude necesaria para que poindan realizarse todos eses movementos.

Por definición, calquera xogo de aeroporto é subaditivo e cóncavo. Ademáis, por ese feito é coñecido que o núcleo non é baleiro, xa que o valor de Shapley está dentro do núcleo. Para este problema, a proposta duha regla de asignación correspóndese coas pérdidas dos xogadores, é dicir, o valor de Shapley pode ser visto como a cuota a pagar por cada movemento.

Así, o xogo que se asocia a un problema de aeroporto presenta propiedades de interes como mostra o seguinte resultado.

Proposición 2.1. O xogo TU asociado a un xogo do aeroporto é subaditivo, monótono e cóncavo.

2.1.1. Valor de Shapley para xogos do aeroporto

O valor de Shapley do xogo de custo TU asociado a un problema do aeroporto calcúlase de xeito sinxelo. A expresión foi obtida por Littlechild e Owen (1973) e presentámola a continuación.

Teorema 2.2. Dado un problema do aeroporto $(T, \{N_t\}_{t\in T}, c)$ e o seu xogo de custo TU asociado (N, c), o valor de Shapley asigna a cada movemento realizado por un avión do tipo $t \in T$ o valor:

$$\Phi_t(N,c) = \sum_{\tau=1}^{t} \frac{c_\tau - c_{\tau-1}}{\mid N_{\geq\tau} \mid},$$

onde $c_0 := 0$ e $N_{\geq\tau} := \cup_{k=\tau}^{m} N_k$, o conxunto de tódolos movementos feitos polos avións do tipo τ ou de maior tamaño.

Exemplo 2.3. Consideremos 3 tipos de avións con custos $c_1 = 10$, $c_2 = 16$, $c_3 = 20$ e supoñamos que o conxunto de operacións de cada tipo de avión é $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2, 3\}$ e $N_3 = \{4\}$. O xogo do aeroporto asociado ven dado por (N, c) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e a función característica está dada por:

$$\begin{aligned}
c(\emptyset) &= 0\\
c(1) &= 10,\\
c(2) &= c(3) = c(1,2) = c(1,3) = c(2,3) = c(1,2,3) = 16,\\
c(4) &= c(1,4) = c(2,4) = c(3,4) = c(1,2,4) = c(1,3,4) = c(2,3,4) = c(N) = 20.
\end{aligned}$$

O valor de Shapley para este xogo calcúlase como:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(N,c) &= \frac{10}{4} = 2.5\\
\Phi_2(N,c) &= \frac{10}{4} + \frac{6}{3} = 4.5\\
\Phi_3(N,c) &= \frac{10}{4} + \frac{6}{3} = 4.5\\
\Phi_4(N,c) &= \frac{10}{4} + \frac{6}{3} + \frac{4}{1} = 8.5
\end{aligned}$$

e polo tanto:

$$\Phi(N,c) = (2.5, 4.5, 4.5, 8.5).$$

A continuación introducimos o seguinte código de R que nos sirve para o cálculo do valor de Shapley no caso do problema do aeroporto:

```
 VALOR DE SHAPLEY DO PROBLEMA DO AEROPORTO
#---------------------------------
# d[i]=coste tipo i
# d1[i]=no xogadores tipo i
#---------------------------------
REGLAvs<-function(d,d1){
m=length(d1)
n=sum(d1)
c=numeric(m)
c[1]=d[1]/n
for(i in 2:m){c[i]=c[i-1]+(d[i]-d[i-1])/(n-sum(d1[1:i-1]))}
return(c)
}

d<-c(10,16,20)

d1<-c(1,2,1)

REGLAvs(d,d1)
```

Esta asignación interprétase do seguinte xeito: o custo de construción da primeira parte da pista de aterraxe ten valor c_1 que é asumido polos avións de tódolos tipos a partes iguais. Despóis o custo de construción da segunda parte da pista ten valor $c_2 - c_1$ e é asumido polos avións de todos os tipos excepto o primeiro e a partes iguais polos avións do tipo $2, 3, ..., m$. Continuando con este proceso, o custo total c_m é asociado a todos os movementos do aeroporto.

Obsérvese que dado un tipo de avión $t \in T$, verifícase que as operacións correspondentes pagan o mesmo, a saber:

$$\Phi_i(N, c) = \Phi_j(N, c) = \varphi_t$$

para calquera $i, j \in N_t$. Ademáis, o valor pódese calcular como

$$\varphi_t = \varphi_{t-1} + \frac{c_t - c_{t-1}}{\mid N_{\geq \tau} \mid},$$

se $t \geq 1$, sendo $\varphi_0 = 0$ e $c_0 = 0$.

Pois ben, o valor de Shapley do xogo asociado ó problema do aeroporto coincide coa regra de reparto de construcción proposta por Baker e Associates (1965) e Thompson (1971).

2.1.2. O nucleolo para xogos do aeroporto

No caso do xogo do aeroporto o nucleolo pode calcularse de modo recursivo de acordo a fórmula obtida por Littlechild (1974).

Teorema 2.4. Dado un problema do aeroporto $(T, \{N_t\}_{t \in T}, c)$ e o seu xogo de custo TU asociado (N, c), o nucleolo asigna a cada axente i o valor:

$$\nu_i = \gamma_k, \text{ para calquera } i \in \cup_{t_{k-1} < t \leq t_k} N_t, \text{ con } k = 1, ..., k'$$

onde γ_k está definido por:

$$\gamma_k = \text{mín} \left\{ \text{mín}_{t_{k-1}+1 \leq t \leq m-1} \left\{ \frac{c_t - c_{t_{k-1}} + \gamma_{k-1}}{s_\ell - s_{\ell_{k-1}} + 1} \right\}, \frac{c_m - c_{t_{k-1}} + \gamma_{k-1}}{s_m - s_{\ell_{k-1}}} \right\}, \tag{2.1}$$

sendo t_k o maior índice onde se acada o mínimo na ecuación (2.1),

$$c_0 = \gamma_0 = t_0 = s_0 = 0, \ \ s_t = \sum_{j=1}^{t} \mid N_j \mid \ \text{ e } t_{k'} = m.$$

Exemplo 2.5. Vexamos no Exemplo 2.3 como se distribúe o custo dacordo co nucleolo. Aplicando o procedemento descrito no Teorema 2.4 e tomando $c_0 = \gamma_0 = t_0 = s_0 = 0$, entón,

$$\gamma_1 = \text{mín}\left\{\text{mín}\left\{\frac{10}{2}, \frac{16}{4}\right\}, \frac{20}{4}\right\} = 4.$$

Polo tanto, $\ell_1 = 2$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 4$. Ademáis, $\gamma_2 = \frac{20-16+4}{4-3} = 8$ e $\ell_2 = 4$. Polo tanto, o nucleolo ven dado por:

$$\nu(N, c) = (4, 4, 4, 8).$$

O seguinte código de R serve para o cálculo do nucleolo:

```
#-----------------------------------------
# NUCLEOLUS DO XOGO DO AEROPORTO
#-----------------------------------------
# c[i] coste tipo i
# x[i] número de xogadores tipo i
#-----------------------------------------
CALCULOs<-function(x){return(cumsum(x))}
nucleolus_AEROPUERTO<-function(c,x){
l<-1:length(c)
linicial<-l
m<-length(c)
s<-CALCULOs(x)
gamma<-c()
Indexminimo<-c()
laux1<-l[(1<=l)&(l<=(m-1))]
vaux1<-numeric(length(laux1))
for(j in 1:length(laux1)){
vaux1[j]<-c[j]/(s[j]+1)
}
Indexminimo[1]=max(which(vaux1==min(vaux1)))
gamma[1]<-min(min(vaux1),c[m]/s[m])
if(Indexminimo[1]>=2){
for(i in 2:Indexminimo[1]){gamma[i]<-gamma[1]}
}
Indexminimo=Indexminimo[1]
i=Indexminimo[1]+1
while(i<=m){
laux<-l[((linicial[i-1]+1)<=l)&(l<=(m-1))]
if(length(laux)!=0){
vaux=numeric(length(laux))
for(j in laux){
vaux[which(laux==j)]=(c[j]-c[i-1]+gamma[i-1])/(s[j]-s[i-1]+1)
}
Indexminimo=Indexminimo+max(which(vaux==min(vaux)))
gamma[i]<-min(min(vaux),(c[m]-c[Indexminimo]+gamma[i-1])/
```

```
+(s[m]-s[Indexminimo]))
if(Indexminimo >= i){
for (k in i: Indexminimo){
gamma[k]<-gamma[i]
}
}
i=Indexminimo+1
}else{
gamma[i]<-(c[m]-c[l[i-1]]+gamma[l[i-1]])/(s[m]-s[l[i-1]])
i=i+1
}
}
return(gamma) }
c<-c(10,16,20)
x<-c(1,2,1)
CALCULOs
nucleolus_AEROPUERTO
gamma
# [1] 4 4 8
```

Obsérvese que non é necesario describir a función característica para obter o reparto do custo que propón o valor de Shapley e o nucleolo. Poden obterse directamente a partir dos parámetros do problema inicial.

2.1.3. O τ-valor para os xogos do aeroporto

Tijs e Driessen (1986) e Driessen (1988) aplicaron o τ-valor no contexto dos xogos de aeroporto. Debido a que os xogos de aeroporto son cóncavos;

$$c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) + c(S \cap T)$$

para todo $S, T \subseteq N$ eles calcularon o que se chama *τ-valor inverso* que se expresa como

$$\tau^r(N, c) = -\tau(N, -c).$$

Tijs e Driessen (1986) probaron que isto ten unha interpretación satisfactoria en termos de custos separables e non separables, que describiremos a continuación. O custo separable de movemento $i \in N$ no xogo de custos (N, c) é:

$$SC(i, c) := c(N) - c(N \backslash \{i\}).$$

Notemos que este custo é non negativo se (N, c) é un xogo de aeroporto. É a parte do custo total $c(N)$ que é totalmente atribuíble ó movemento i, debido a que o custo reduciráse nesta cantidade se o movemento i se cancela. Polo tanto, $SC(i, c)$ é unha cota inferior da contribución ó custo $c(N)$ que ten que ser pagado por i. Agora, para cada cada coalición $S \subseteq N$, o *custo non separable* ven dado por:

$$NSC(S, c) := c(S) - \sum_{i \in S} SC(i, c).$$

Driessen (1988) probou que $NSC(S, c) \geq 0$ para todo $S \subseteq N$ en calquera xogo de aeroporto (N, c).

Unha cota superior para a contribución do xogador i ó custo non separable $NSC(N, c)$ é:

$$w(i, c) := \text{mín}_{S: i \in S} NSC(S, c).$$

Formando unha coalición S que conteña ó i que minimiza $NSC(S, c)$, o xogador i pode garantirse unha contribución máxima de $SC(i, c) + NSC(S, c)$ ó permitir que tódolos outros xogadores $j \in S$ paguen os seus custos separables ($SC(j,c)$) e cubrindo o resto do custo da coalición S por sí mesmo. Notemos que os outros xogadores $j \in S$ estarán dacordo con isto xa que eles só terán que pagar a cota inferior da súa contribución. O vector $w(c) = (w(i,c))_{i \in N}$ chámase vector de pesos do xogo (N,c). Driessen (1988) probou que para calquera xogo de aeroporto (N,c) cúmprese que:

$$\sum_{i \in N} w(i,c) \geq NSC(N,c),$$

así que a suma das contribucións maximais de tódolos movementos ó custo non separable $NSC(N,c)$ é suficiente para cubrir estes custos.

Coas notacións descritas anteriormente, obtemos para cada movemento $i \in N$ unha cota inferior $SC(i,c)$ e unha cota superior $SC(i,c) + w(i,c)$ sobre a contribución ós custos deste movemento. Tomando a media ponderada de estes dous límites, onde o peso é tal que a suma das contribucións dos movementos cubre exactamente os custos totais $c(N)$ obtemos o τ-valor inverso como:

$$\tau_i^r(N,c) = \begin{cases} SC(i,c) & se \quad NSC(N,c) = 0, \\ SC(i,c) + NSC(N,c)\dfrac{w(i,c)}{\sum_{j \in N} w(j,c)} & se \quad NSC(N,c) > 0. \end{cases}$$

Driessen (1988) obtivo unha expresión exacta para o τ-valor inverso dun xogo de aeroporto en termos do custo c_t, $1 \leq t \leq m$. Describiremos esta expresión no seguinte teorema.

Teorema 2.6. Sexa (N,c) un xogo de aeroporto.

1. Se $\mid N_m \mid \geq 2$, entón:

$$\tau_i^r(N,c) = (c_m / \sum_{t=1}^{m} \mid N_t \mid c_t) c_k$$

   para cada $i \in N_k$ e $k = 1, 2, ..., m$.

2. Se $\mid N_m \mid = 1$ e $m \geq 2$, entón

$$\tau_i^r(N,c) = (c_{m-1} / (\sum_{t=1}^{m-1} \mid N_t \mid c_t + c_{m-1})) c_k$$

   para cada $i \in N_k$ e $k = 1, 2, ..., m-1$, e

$$\tau_i^r(N,c) = \tau_j^r(N,c) + c_m - c_{m-1}$$

   para cada $i \in N_m$ e $j \in N_{m-1}$.

Polo tanto, se hai polo menos dous movementos realizados por avións de tipo m, entón o τ-valor inverso asigna a cada movemento unha taxa de aterraxe que é proporcional ó custo de construcción da pista de aterraxe adecuada para o seu tamaño. Se os avións de maior tamaño só realizan un movemento, entón nunha primeira etapa o seu custo separable $c_m - c_{m-1}$ é asignado a este movemento, e nunha segunda etapa asignase o resto do custo c_{m-1} a tódolos movementos en proporción do seu custo. Notemos que no segundo paso o movemento dos avións de tipo N_m considérase como se fose do tipo N_{m-1}. Ademáis tamén cabe dicir que o Teorema 2,6 é válido para tódolos xogos de aeroporto que consten con ó menos dous xogadores (movementos).

Exemplo 2.7. Para este exemplo consideraremos os datos do Exemplo 2.3, onde tiñamos 3 tipos de avións con custos $c_1 = 10$, $c_2 = 16$, $c_3 = 20$ e supoñamos que o conxunto de operacións de cada tipo de avión é $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2,3\}$ e $N_3 = \{4\}$. O xogo do aeroporto asociado ven dado por (N, c) con $N = \{1,2,3,4\}$. Tendo en conta que $\tau^r(N,c) = -\tau(N,c)$ temos que:

$$\begin{aligned}
c(\emptyset) &= 0 \\
-c(1) &= -10, \\
-c(2) &= -c(3) = -c(1,2) = -c(1,3) = -c(2,3) = -c(1,2,3) = -16, \\
-c(4) &= -c(1,4) = -c(2,4) = -c(3,4) = -c(1,2,4) = -c(1,3,4) = -c(2,3,4) = -c(N) = -20.
\end{aligned}$$

En primeiro lugar calcularemos os pagos de utopía para cada i:

$$\begin{aligned}
M_1(N,-c) &= -c(N)\backslash(-c(\{1\})) = 0, \\
M_2(N,-c) &= -c(N)\backslash(-c(\{2\})) = 0, \\
M_3(N,c) &= -c(N)\backslash(-c(\{3\})) = 0, \\
M_4(N,c) &= -c(N)\backslash(-c(\{4\})) = 16 - 20 = -4.
\end{aligned}$$

de onde obtemos que o vector de pagos de utopía ven dado por

$$M(N,-c) = (0,0,0,-4).$$

Por outra banda, calcularemos o vector de mínimos dereitos

$$\begin{aligned}
m_1(N,-c) &= \text{máx}_{S:1\in S}\left(-c(S) - \sum_{j\in S\backslash\{1\}} M_j(c)\right) \\
&= \text{máx}\{4-10, 4-16, 4-20\} = -6, \\
m_2(N,c) &= \text{máx}_{S:2\in S}\left(c(S) - \sum_{j\in S\backslash\{2\}} M_j(c)\right) \\
&= \text{máx}\{4-16, 4-20\} = -12, \\
m_3(N,c) &= \text{máx}_{S:3\in S}\left(c(S) - \sum_{j\in S\backslash\{3\}} M_j(c)\right) \\
&= \text{máx}\{4-16, 4-20\} = -12, \\
m_4(N,c) &= \text{máx}_{S:4\in S}\left(c(S) - \sum_{j\in S\backslash\{4\}} M_j(c)\right) \\
&= \text{máx}\{-16, -20\} = -16.
\end{aligned}$$

polo que o vector de mínimos dereitos ven dado por:

$$m(N,-c) = (-6,-12,-12,-16).$$

de onde se segue que:

$$\begin{aligned}
\tau(N,-c) &= (-6,-12,-12,-16) + \alpha(6,12,12,12), \\
\sum \tau_i(N,-c) &= -20.
\end{aligned}$$

e polo tanto,

$$\tau(N,-c) = (-6+6\alpha, -12+12\alpha, -12+12\alpha, -16+12\alpha).$$

Igualando a suma das compoñentes a -20, obtemos que:

$$\sum \tau_i(N,-c) = -46 + 42\alpha = -20 \Rightarrow 42\alpha = 26,$$

de onde se segue que: $\alpha = \frac{13}{21}$. Finalmente,

$$\tau^r(N,c) = \left(6 - 6\frac{13}{21}, 12 - 12\frac{13}{21}, 12 - 12\frac{13}{21}, 16 - 12\frac{13}{21}\right).$$

2.2. Xogos con unións a priori e taxas de aterraxe

Nesta sección, propoñeremos o uso dun modelo coa súa correspondente solución conceptual que nos permetirá ter en conta a organización dos avións en compañías aéreas. Adoptaremos o modelo de xogos coalicionais con unións a priori e a extensión do valor de Shapley introducida por Owen (1977). Debido a que queremos argumentar que o valor de Owen nos proporciona un método apropiado para determinar as taxas de aterraxe, estamos interesados na caracterización axiomática deste valor. Sen embargo, algunhas caracterizacións axiomáticas que existen na literatura tan só son válidas cando o sistema de unións é fixo e os xogos coalicionais son variables. Pero no contexto da determinación das taxas de aterraxe cando se ten en conta que os avións se organizan en liñas aéreas, é máis atractivo cando nos damos conta de que a importancia do valor de Owen é parcialmente debida ó feito de que ten demostrado ser unha ferramenta moi útil para analizar o proceso de unión e formación de coalicións. Por este motivo proporcionaremos unha caracterización do valor de Owen que é válida cando o xogo coalicional é fixo e o sistema de unións está suxeito a cambios. Os custos teñen unha estrutura simple pero a súa vez interesante: Os custos de construcción dunha pista de aterraxe dependen esencialmente, como xa diximos anteriormente, do tamaño do maior avión para o cal a pista está diseñada, mentres que os custos posteriores asociados ó uso da pista son proporcionais ó número de movementos realizados por cada tipo de avión. Polo tanto, o custo pode ser dividido en dúas partes: o custo variable no que se incurre cando os avións aterran ou despegan do aeroporto, e os custos fixos de construcción da pista. En xeral, non hai problemas ó asignar os custos variables xa que son xerados por avións individuais. Sen embargo, os custos fixos, son máis difíciles de asignar debido a que son máis ou menos independentes dos movementos realizados polos avións individuais. Aínda que o enfoque do problema de asignación de custos en pistas de aterraxe que platexamos arriba é útil, ignora un importante aspecto da situación, o feito de que os movementos realizados polos avións nos aeroportos non son polo xeral movementos individuais xa que en realidade os aeroportos teñen acordos coas liñas aéreas. Polo tanto, os movementos realizados polos avións nun certo aeroporto están agrupados respecto da compañía aérea a que pertencen. Este feito terá un impacto importante no problema de asignación dos custos xa que as liñas aéreas con maior número de operacións nun certo aeroporto poderían ter máis oportunidades de negociar descontos nas taxas de aterraxe ou outro tipo de vantaxes respecto das que contan cun menor número de movementos. Polo tanto, propoñeremos un modelo que teña en conta o feito de que os movementos realizados polos aeroplanos son organizados en función da liña aérea a que pertencen.

2.2.1. Valor de Owen para xogos do aeroporto con unións a priori

No contexto dos xogos de aeroporto, o valor de Owen toma unha forma máis simple. Primeiro modelizaremos o problema de asignación de custos descrito ó comezo deste capítulo, tamén teremos en conta o feito de que os movementos no conxunto N son agrupados dacordo as liñas aéreas as que pertencen. Supoñamos que hai A liñas aéreas que usan o aeroporto. Entón temos un sistema de unións a priori $P = \{P^1, P^2, ..., P^A\}$, onde P^a está formada polos movementos do conxunto N que son feitos polos avións da compañía aérea a. Polo tanto a tripla (N, c, P), onde N e c son os definidos ó principio do capítulo e P como o definimos arriba, modela a asignación de custos no problema do aeroporto. O valor de Owen de (N, c, P) asigna a cada movemento realizado por cada avión do tipo t e que pertence á liña aérea a o custo:

$$\psi_{a,t}(N, c, P) = \sum_{\tau=1}^{t} \frac{c_\tau - c_{\tau-1}}{\mid A_{\geq\tau} \mid \cdot \mid N^a_{\geq\tau} \mid}, \tag{2.2}$$

onde $c_0 := 0, N^a_{\geq\tau} := \cup_{k=\tau}^m N_k \cap P^a$, o conxunto de avións da liña aérea a que son do tipo τ ou maiores, e $A_{\geq\tau} := \{\alpha \in \{1, 2, ..., A\} : N^\alpha_{\geq\tau} \neq \emptyset\}$, o conxunto de liñas aéreas que posúen avións do tipo τ ou maior tamaño. Esta asignación ten a seguinte interpretación: o custo de construción da primeira parte da pista de aterraxe, c_1, no cal incurren tódolos tipos de avión é asumido por tódalas liñas aéreas a partes iguais. Dentro de cada liña aérea os custos asignados son reasignados a partes iguais entre todos os avións que a forman. Despóis, o custo de construcción da segunda parte da pista, o custo $c_2 - c_1$ no que incurren tódolos tipos de avións excepto os do tipo 1, é dividido a partes iguais entre tódalas liñas aéreas que posúen avións do tipo 2 ou maior e dentro de cada liña aérea o custo asignado é reasignado a partes iguais entre os avións dos tipos $2, 3, ..., m$. Continuando con este proceso, o custo c_m é asignado a tódolos movementos do aeroporto.

Hai que ter en conta que cando as taxas se calculan dacordo co valor de Owen, as taxas totais pagadas por unha liña aérea só dependen do tipo de avións da liña aérea que fan os movementos no aeroporto e non do número de avións que posúe a liña aérea. Pero para un liña aérea que usa un aeroporto específico de xeito intensivo, é dicir, fai moitos movementos nese aeroporto, o total das taxas a pagar pode ser distribuído entre máis movementos. Como consecuencia, as *tasas por movemento* serán máis baixas para as liñas aéreas que usan o aeroporto de xeito intensivo que para as que usan o aeroporto en veces puntuais.

Podería parecer estraño que cando as taxas son calculadas dacordo co valor de Owen, as taxas totais a pagar por unha liña aérea non cambian cando esta liña aérea decide facer máis movementos no aeroporto con avións que son de tipos máis pequenos que ou tan grandes como os que xa se utilizaban no aeroporto. Sen embargo, debemos de darnos conta de que as taxas que nos calculamos usando o valor de Owen son só parte das taxas totais que teñen que ser pagadas, é dicir, a parte destinada a cubrir os custos fixos da construcción e mantemento da área de movementos do aeroporto. Os custos variables asociados as chegadas e saídas constitúe outra parte do total das taxas. Isto causa que as taxas totais que teñen que ser pagadas por unha liña aérea son maiores cando se decide facer máis movementos no aeroporto.

Hai que ter en conta que a comparación das taxas que fixemos arriba, non nos di o que sucederá cando varias liñas aéreas se fusionen. Máis ben, compáranse as taxas específicas para as distintas compañías aéreas nunha situación existente. As fusións son tratadas no Teorema 2.7, o cal establece que as fusións serán rentables dende o punto de vista da determinación das taxas de aterraxe cando se utiliza o valor de Owen para calculalas. Co fin de facilitar a notación, denotaremos as taxas totais a pagar por unha liña aérea a,

$$\sum_{t: N_t \cap P^a \neq \emptyset} \mid N_t \cap P^a \mid \cdot \psi_{a,t}(N, c, P),$$

por $\psi_a(N, c, P)$. Antes de establecer o teorema que proporcionan Vázquez-Brage et al. (1997), defínese formalmente a fusión das compañías aéreas.

Sexa (N, c, P) un xogo do aeroporto do xeito descrito anteriormente, onde $1, 2, ..., A$ son compañías aéreas. Asumiremos sen pérdida de xeralidade, que as liñas aéreas do 1 a a $(a \leq A)$ se fusionarán nunha nova comañía aérea a^*. Entón, teremos un novo xogo do aeroporto, (N, c, P^*), o cal esta formado polo mesmo conxunto de movementos e posúe a mesma función de custo que o xogo do aeroporto orixinal, pero sen embargo, distinto conxunto de unións a priori P^* definido como $P^* = \{P^{a*}, P^{a+1}, P^{a+2}, ..., P^A\}$, onde $P^{a*} = \cup_{\alpha=1}^a P^\alpha$. Polo tanto, temos unha nova liña aérea que agrupa a tódolos movementos das compañías fusionadas.

Teorema 2.8. Sexa (N, c, P) un xogo de aeroporto e supoñamos que as compañías aéreas entre 1 e a $(2 \leq a \leq A)$ fusiónanse nunha nova liña aérea a^*. Entón $\psi_{a^*}(N, c, P^*) \leq \sum_{\alpha \in \{1,2,\ldots,a\}} \psi_\alpha(N, c, P)$, onde a desigualdade é estricta se, e so se, $a < A$.

Caracterización do valor de Owen

Como nos propoñemos usar o modelo dos xogos con unións a priori para describir o problema de asignación de custos no problema do aeroporto e usar o valor de Owen para determinar as taxas de aterraxe, temos que xustificar o seu uso neste contexto. Sen embargo, tódalas caracterizacións do valor de Owen existentes na literatura (ver Owen, 1977, Hart e Kurz, 1983 e Winter, 1992) usan axiomas relacionados coa función caraterística dos correspondentes xogos coalicionais. De feito, isto é equivalente a xustificar o valor de Owen para a familia de tódolos xogos coalicionais con un sistema fixo de unións a priori. Sen embargo, cando aplicamos o valor de Owen no contexto da asignación de custos do aeroporto, é máis atractivo ter unha caracterización que poida ser aplicada a unha situación onde o xogo coalicional é fixo e onde as unións estan posiblemente suxeitas a cambios. Nesta sección proporcionaremos unha caracterización axiomática do valor de Owen neste sentido.

Recordemos que $U(N)$ denota ó conxunto de tódalas triplas da forma (N, c, P) e U a clase de tódolos conxuntos $U(N)$ onde N é finito. Entón, observamos que o valor de Owen é unha xeralización do valor de Shapley. É dicir, podemos identificar o conxunto de xogos de coalición (sen un sistema de unións) co subconxunto de U formado polos xogos que posúen únicamente sistemas de unións a priori triviais. Un sistema trivial de unións é un sistema de unións no que cada unión contén exactamente un único xogador. Dado que o valor de Owen destos xogos coincide co valor de Shapley do correspondente xogo coalicional, o valor de Owen é unha xeralización do valor de Shapley para os xogos con unións a priori. Por suposto, o valor de Owen é unha das posibles respostas á pregunta de como xeralizar o valor de Shapley para aquelas situacións nas que o sistema de unións non é trivial. Para comprender esta idea introduciremos o valor de Shapley coalicional.

Definición 2.9. Un valor de Shapley coalicional é unha regra de asignación ψ para xogos con unións a priori, a cal asigna a cada xogo cun sistema de unións $(N, c, P) \in U(N) \subseteq U$ un elemento de $\mathbb{R}^N$ de xeito que para tódolos xogos con sistemas de unións trivias ψ coincide co valor de Shapley do correspondente xogo coalicional.

No resto desta sección imos a centrarnos en estudar os valores de Shapley coalicionais. Isto é equivalente á centrarnos no estudo das regras de asignación que satisfan as propiedades que caracterízan o valor de Shapley (cf. Shapley, 1953 e Dubey, 1982). Introduciremos dúas propiedades máis das regras de asignación para xogos con unións a prioiri e probaremos que o valor de Owen é o único valor de Shapley coalicional que satisfai estas dúas propiedades.

A primeira propiedade, *contribucións equilibradas*, é unha propiedade que establece que se dous xogadores i e j están na mesma unión a proiri, entón a pérdida (ou ganancia) que o xogador i inflixe ó xogador j cando decide abandonar a unión é a mesma que a pérdida (ou ganancia) inflixida sobre o xogador i cando j abandona a unión. Esta propiedade reflexa a idea de que tódolos xogadores dunha unión obteñen os mesmos beneficios ó formar parte da unión e que non se pode dar o caso de que un xogador específico extraiga os beneficios totais que son xerados pola formación da unión.

Definición 2.10. Unha regra de asignación ψ en U é de contribucións equilibradas se para todo $(N, c, P) \in U(N)$, todo $P^a \in P$, e todo $i, j \in P^a$:

$$\psi_i(N, c, P) - \psi_i(N, c, P_{-j}) = \psi_j(N, c, P) - \psi_j(N, c, P_{-i}),$$

onde P_{-i} é o sistema de unións que obtemos cando o xogador i se separa da unión a que pertence, é dicir, $P_{-i} := \{P^1, ..., P^{a-1}, P^a \backslash \{i\}, P^{a+1}, ..., P^A, \{i\}\}$, e P_{-j} é definido de xeito análogo.

A segunda propiedade, a propiedade do *xogo cociente*, establece que o comportamento dunha regra de asignación é consistente no sentido de que a suma dos beneficios asignados ós xogadores individuais que forman unha unión é igual ó beneficio total asignado á unión no xogo que se xoga entre as unións. No contexto dos xogos de aeroporto, isto significa que para unha compañía aérea non importa se as autoridades aeroportuarias calculan as taxas por movemento ou por compañía aérea.

Definición 2.11 Unha regra de asignación ψ sobre U ten a propiedade do xogo cociente se para todo $(N, c, P) \in U(N)$ e para todo $P^a \in P$:

$$\sum_{i \in P^a} \psi_i(N, c, P) = \psi_{P^a}(P, c^P, \mathcal{P}),$$

onde $\mathcal{P}$ é o sistema trivial de unións para o conxunto de xogadores P, é dicir, $\mathcal{P} := \{\{P^1\}, \{P^2\}, ..., \{P^A\}\}$.

O seguinte teorema establece que as contribucións equilibradas e o xogo cociente caracterizan un único valor de Shapley coalicional.

Teorema 2.12 O valor de Owen é o único valor de Shapley coalicional que satisfai as propiedades de contribucións equilibradas e de xogo cociente.

Proba.

(a) Unicidade: Supoñamos que existen dous valores de Shapley coalicionais ψ^1 e ψ^2 satisfacendo as propiedades de contribucións equilibradas e de xogo cociente. Entón, podemos atopar un xogo coalicional (N, c) e, para este xogo (N, c), un sistema de unións $P = \{P^1, P^2, ..., P^A\}$ con un número maximal de unións de xeito que $\psi^1(N, c, P) \neq \psi^2(N, c, P)$. Agora, tendo en conta que tanto ψ^1 como ψ^2 satisfán a propiedade de xogo cociente, para todo $P^a \in P$ e para todo $l \in \{1, 2\}$ temos que:

$$\sum_{i \in P^a} \psi_i^l(N, c, P) = \psi_{P^a}^l(P, c^P, \mathcal{P})$$

onde $\mathcal{P}$ denota o sistema de unións triviais que aparece na Definición 2.11. Pero entón, como ψ^1 e ψ^2 son valores de Shapley coalicionais,

$$\sum_{i \in P^a} \psi_i^1(N, c, P) = \sum_{i \in P^a} \psi_i^2(N, c, P) = \Psi_{P^a}(P, c^P). \tag{2.3}$$

Polo tanto, se $P^a \in P$ é tal que P^a está formado por un único xogador, é dicir, $P^a = \{i\}$, entón:

$$\psi_i^1(N, c, P) = \psi_i^2(N, c, P).$$

Agora, tomando $P^a \in P$ formado polo menos por dous elementos e elixindo $i, j \in P^a$, como ψ^1 e ψ^2 satisfan a propiedade de contribucións equilibradas,

$$\psi_i^l(N, c, P) - \psi_j^l(N, c, P) = \psi_i^l(N, c, P_{-j}) - \psi_j^l(N, c, P_{-i}),$$

para todo $l \in \{1, 2\}$. Pero entón, que P sexa maximal implica que:

$$\psi_i^1(N, c, P) - \psi_j^1(N, c, P) = \psi_i^2(N, c, P) - \psi_j^2(N, c, P).$$

Polo tanto, podemos establecer a existencia dunha constante K^a tal que:

$$\psi_i^1(N, c, P) - \psi_i^2(N, c, P) = K^a$$

para todo $i \in P^a$. Pero entón, usando (2.3), está claro que $K^a = 0$, isto é, $\psi_i^1(N, c, P) = \psi_i^2(N, c, P)$ para todo $i \in P^a$ e $\psi^1(N, c, P) = \psi^2(N, c, P)$ polo que chegamos a unha contradición e polo tanto queda probada a unicidade.

(b) Existencia: É ampliamente coñecido (véxase, por exemplo Winter, 1992) que o valor de Owen satisfai a propiedade de xogo cociente. Tamén se proba en Vázquez-Brage et al. (1996) que o valor de Owen satisfai a propiedade de contribucións equilibradas.

2.2.2. τ-valor para xogos do aeroporto con unións a priori

Nesta sección, introduciremos e estudaremos unha extensión do τ-valor, o cal foi introducido en Tijs (1981), para os xogos con unións a priori. Referirémonos a este valor como o τ-valor coalicional. Ao igual que o valor de Owen coalicional, o τ-valor coalicional calcúlase en dous pasos, en primeiro lugar ó nivel das unións e despóis ó nivel dos xogadores individuais. O τ-valor coalicional, ó igual que o valor de Owen, determina unha asignación da utilidade total dispoñible para os xogadores. As unións son unidades de negociación que están formadas para o propósito de influír sobre o poder de negociación dos xogadores na gran coalición. Este feito é o que distingue o τ-valor coalicional do τ-valor para xogos con estruturas coalicionais que foi introducido e estudado por Driessen e Tijs (1992).

Ao igual que o τ-valor para xogos con utilidade transferible, o τ-valor coalicional non pode ser definido para tódolos xogos con unións a priori. Sen embargo, no Capítulo 1 identificouse a clase dos xogos con utilidade transferible de xeito que para todo xogo desta clase e todo sistema de unións a priori dos seus xogadores, poidamos definir o τ-valor coalicional para o correspondente xogo con unións a priori.

Usaremos o τ-valor coalicional que introducimos anteriormente para determinar as taxas de aterraxe de xeito que poidamos ter en conta a organización dos movementos en liñas aéreas. O método usando custos separables e non separables que describimos anteriormente, pódese extender fácilmente para calcular o τ-valor inverso para xogos de custo con unións a priori.

Para determinar o τ-valor inverso dun xogo do aeroporto con unións a prioiri, primeiro calcularemos o τ-valor inverso de cada liña aérea no xogo cociente (P, c^P). Para simplificar a notación, denotaremos $c(P^a)$ o custo da liña aérea a mediante $c(a)$, e denotaremos a taxa total a pagar pola liña aérea a por:

$$\tau^r_a(N, c, P) = \tau^r_{P^a}(P, c^p).$$

Teorema 2.13. Sexa (N, c, P) un xogo do aeroporto con unións a priori.

1. Se hai polo menos dúas liña aéreas que teñen un movemento realizado por un avión do tipo m, entón:
$$\tau^r_a(N, c, P) = \frac{c(A)}{\sum_{\alpha=1}^{A} c(\alpha)} c(a),$$
para cada $a = 1, 2, ..., A$.

2. Se só unha liña aérea ten un movemento realizado por un avión de tipo m e $A \geq 2$, entón:
$$\tau^r_a(N, c, P) = \frac{c(A-1)}{\sum_{\alpha=1}^{A-1} c(\alpha) + c(A-1)} c(a),$$
para cada $a \neq A$, e
$$\tau^r_A(N, c, P) = \tau^r_{A-1}(N, c, P) + c(A) - c(A-1).$$

3. Se hai unha única liña aérea, entón $\tau^r_a(N, c, P) = c(a)$ para a única liña aérea a.

Proba. Este teorema é consecuencia directa do Teorema 2.6 tendo en conta que o xogo cociente (P, c^P) é por si mesmo un xogo de aeroporto. Isto é, para tódolos conxuntos de liñas aéreas $M \subseteq A$, temos que:

$$\begin{aligned} c^P(M) &= c(\cup_{a \in M} P^a) \\ &= \text{máx}\{c_t : \text{hai un } a \in M \text{ tal que } \ P^a \cap N_t \neq \emptyset\} \\ &= \text{máx}\{c(a) : a \in M\}. \end{aligned}$$

A interpretación dos resultados do Teorema 2,13 é como segue. Se hai polo menos dúas liñas aéreas que teñen un movemento realizado polo avión de tamaño máis grande, entón o τ-valor inverso coalicional asigna a cada liña aérea unha taxa de aterraxe proporcional ó custo dunha pista adecuada para esta liña aérea. Se só existe unha liña aérea na que se realizan movementos para os avións de tamaño máis grande e hai polo menos dúas liñas aéreas diferentes, entón a liña aérea A paga o seu custo separable $c(A)-c(A-1)$ e o custo restante $c(A-1)$ é dividido entre as liñas aéreas en proporción dos seus custos, considerando a liña aérea A como a seguinte con maior custo $A-1$. Finalmente, se só hai unha liña aérea, $A=1$, entón o xogo cociente só ten un xogador, o cal terá que pagar o custo completo $c(A)$.

No seguinte teorema proporcionado en Casas-Méndez et al. (2003) diremos como se dividen os custos $\tau_a^r(N,c,P)$ entre os movementos de P^a, para cada liña aérea $a=1,2,...,A$.

Teorema 2.14 Sexa (N,c,P) un xogo de aeroporto con unións a priori.

1. Se $n_m \geq 2$ entón:
$$\tau_i^r(N,c,P)=\frac{\tau_a^r(N,c,P)}{\sum_{j\in P^a} c(j)}c(i),$$
para cada $i\in P^a$ e $a=1,2,...,A$.

2. Se $n_m=1$, entón:
$$\tau_i^r(N,c,P)=\frac{\tau_a^r(N,c,P)}{\sum_{j\in P^a} c(j)}c(i),$$
para $i\in P^a$, $a\neq A$,
$$\tau_i^r(N,c,P)=\frac{\tau_A^r(N,c,P)-(c_m-c_{m-1})}{\sum_{j\in P^A} c(j)-(c_m-c_{m-1})}c(i),$$
para cada $i\in P^A$, $i\notin N_m$,
$$\tau_i^r(N,c,P)=c_m-c_{m-1}+\frac{\tau_A^r(N,c,P)-(c_m-c_{m-1})}{\sum_{j\in P^A} c(j)-(c_m-c_{m-1})}c_{m-1},$$
para cada $i\in P^A$, $i\in N_m$.

O reparto dos custos que nos proporciona o Teorema 2.14 ten unha interpretación similar a que nos proporcionan os Teoremas 2.6 e 2.13. Se existen polo menos dous moventos realizados polos avións de maior tamaño, a contribución dunha liña aérea divídese entre os seus movementos en proporción ó seu custo. O mesmo método úsase para liñas aéreas $a\neq A$ se hai un único movemento realizado polo avión de tipo maior, que entón forma parte da compañía A. Neste caso, o único movemento realizado polo avión de maior tamaño ten que pagar o seu custo separable c_m-c_{m-1}. O custo restante,
$$\tau_A^r(N,c,P)-(c_m-c_{m-1}),$$
é asignado ós movementos da aeroliña A proporcionais ós seus custos, polo que o movemento de tipo N_m é agora considerado como de tipo N_{m-1}. Notemos que se $n_m=1$ e ademáis $P^A\cap N_{m-1}\neq\emptyset$, enton para $i\in N_m$ e $j\in N_{m-1}$ temos que:
$$\tau_i^r(N,c,P)=c_m-c_{m-1}+\tau_j^r(N,c,P),$$
onde se ve máis claramente a analoxía con Teorema 2.6.

Para ilustrar o uso do τ-valor inverso para calcular as taxas de aterraxe nos aeroportos, consideraremos o exemplo de Labacolla, o aeroporto de Santiago de Compostela, España, durante os tres primeiros meses de 1993, que tamén foi considerada en Vázquez-Brage et al. (1997). No Cadro 2.3,

Tipo	t	Número de movementos	Custo	Valor de Shapley
CESSNA	1	10	8120	6.455
LEARJET-25	2	6	15134	12.075
B-757	3	78	32496	26.054
DC-9	4	464	34265	27.574
B-737	5	232	39494	35.044
B-727	6	438	44850	46.488
DC-10	7	30	50000	218.150

Cadro 2.1: Información sobre os diferentes tipos de avións que usaron en Labacolla durante ese ano. Número de movementos realizados clasificados por tipo, custo e valor de Shapley.

Tipo	t	Número de movementos	Custo	Inversa do τ-valor
CESSNA	1	10	8.120	8.301
LEARJET-25	2	6	15.134	15.470
B-757	3	78	32.496	33.218
DC-9	4	464	34.265	35.027
B-737	5	232	39.494	40.372
B-727	6	438	44.850	45.847
DC-10	7	30	50.000	51.112

Cadro 2.2: Información sobre os diferentes tipos de avións que usaron en Labacolla durante o período de tempo estudiado.

clasificaremos os distintos tipos de avións que se usan en Labacolla no período estudado, o número de movementos realizados por cada tipo e o seu custo asociado. Tamén proporcionaremos a asignación dos custos totais dacordo coa inversa do τ-valor cando os movementos son tratados como entidades separadas en vez de como parte dunha liña aérea. Tódolos custos están dados en miles de Pesetas.

No Cadro 2.2 reflexamos información a cerca do número de movementos realizados por cada tipo de avión que usou Labacolla durante o período de tempo estudiado xunto co seu custo, ademáis de proporcionar a inversa do τ-valor. No período considerado, houbo 23 liñas aéreas operando en Labacolla. Aparecen expresados na primeira columna do Cadro 2.3, onde tamén se especifica o número de movementos realizados por cada tipo de avión para cada liña aérea mentres que, na última columna desta táboa, indicamos o valor da inversa do τ-valor coalicional para cada un dos movementos, distinguidos por tipo e aeroliña. As taxas veñen dadas en miles de Pesetas.

Hai que destacar que, para o mesmo tipo de avión, as taxas por movemento son menores para as liñas aéreas que utilizan o aeroporto de Labacolla de xeito máis intensivo. Isto é debido ó feito de que as liñas aéreas con maior número de movementos poden distribuir os seus custos entre todos eses movementos, mentres que unha liña aérea cun número de movementos que sexa baixo tamén ten que distribuir os seus custos entre esos poucos movementos. Notemos que a taxa total que ten que ser pagada por unha liña aérea só depende do tipo de avión que usa no aeroporto e non do número de movementos que faga. Recordemos que no xogo do aeroporto tan só considerabamos os custos fixos de construcción da pista. Os custos variables asociados ós movementos poden ser directamente atribuídos a varios movementos e constituír outra parte das taxas totáis. Polo tanto, as taxas totais que teñen que ser pagadas por unha liña aérea, é dicir, os custos fixos e os custos variables, serán maiores se a liña aérea decide facer un maior número de movementos no aeroporto.

Tres das liñas aéreas que usaron Labacolla no período de tempo que estamos a considerar, Aviaco, Iberia e Viasa forman parte do grupo Iberia. Supoñamos que o grupo Iberia decide negociar as taxas para as tres aeroliñas que o forman como se fosen un só grupo. Entón obteríamos unha situación con únicamente 21 unidades de negociación, nas cales a inversa do τ-valor para o grupo Iberia é 12900.035 (en miles de Pesetas). Notemos que este valor é maior que a suma das taxas que terían que pagar no caso de que negociasen individualmente, que sería

$$12 \times 174.002452 \times 2.668 + 438 \times 3.492 + 30 \times 262.767 = 12706.466 \quad \text{miles de Pesetas.}$$

Isto móstranos que as liñas aéreas fusionadas non reducen necesariamente as súas taxas de aterraxe se estas son determinadas usando a inversa do τ-valor.

En xeral, a proporción do custo da taxa é menos variable entre os distintos tipos de avións e liñas aéreas, cando a inversa do τ-valor ou a inversa do τ-valor coalicional é utilizada para calcular esas taxas que están nos cadros 2.2 e 2.3, que no caso de que usemos o valor de Shapley ou o valor de Owen que representamos nos cadros 2.1 e 2.4, respectivamente. Outra diferencia entre o valor de Owen e o τ-valor coalicional é que as fusións de liñas aéreas non reducen necesariamente as taxas de aterraxe se estas son determinadas usando a inversa do τ-valor coalicional, mentres que sempre se reducirán se o utilizamos o valor de Owen.

Observación. É un problema aberto o estudo do nucleolo con unións a priori, en xeral, e para o caso do aeroporto en xeral.

Liña aérea	Número de movementos	Tipo de avión	Inversa do τ-valor
Air Europa	36	B-757	9.820
	172	B-737	11.936
Aviaco	12	DC-9	174.002
Britannia	6	B-737	401.112
British Airways	2	B-757	990.115
Condor Flugdienst	2	B-757	990.115
Caledonian Airways	2	B-757	990.115
Eurobelgian Airlines	2	B-737	1203.35
Futura	32	B-737	75.208
Gestair Executive Set	2	CESSNA	247.407
Iberia	452	DC-9	2.668
	438	B-727	3.492
Air Charter	2	B-737	1203.335
Corse Air	4	B-737	601.667
Air UK Leisure	2	B-737	1203.335
Ibertrans	2	CESSNA	247.407
LTE	36	B-757	55.006
Mac Aviation	6	LEARJET 25	153.705
Monarch Airlines Ltd.	3	B-737	802.223
Sobelair	6	B-737	401.112
Trabajos Aéreos	2	CESSNA	247.407
Tea Basel LTD	2	B-737	1203.335
Oleohidráulica Balear SA	4	CESSNA	123.704
Viasa	30	DC-10	262.737
Spanair	2	B-737	1203.335

Cadro 2.3: Número de movementos realizados polos distintos tipos de avións que posúe cada liña aérea no aeroporto de Labacolla xunto co seu respectivo τ-valor.

Liña aérea	Número de movementos	Tipo de avión	Valor de Owen
Air Europa	36	B-757	8.110
	172	B-737	11.183
Aviaco	12	DC-9	151.093
Britannia	6	B-737	369.224
British Airways	2	B-757	843.378
Condor Flugdienst	2	B-757	843.378
Caledonian Airways	2	B-757	843.378
Eurobelgian Airlines	2	B-737	1107.673
Futura	32	B-737	69.230
Gestair Executive Set	2	CESSNA	176.522
Iberia	452	DC-9	2.037
	438	B-727	9.070
Air Charter	2	B-737	1107.673
Corse Air	4	B-737	553.836
Air UK Leisure	2	B-737	1107.673
Ibertrans	2	CESSNA	176.522
LTE	36	B-757	46.854
Mac Aviation	6	LEARJET 25	120.367
Monarch Airlines Ltd.	3	B-737	1107.673
Sobelair	6	B-737	369.224
Trabajos Aéreos	2	CESSNA	176.522
Tea Basel LTD	2	B-737	1107.673
Oleohidráulica Balear SA	4	CESSNA	88.261
Viasa	30	DC-10	334.778
Spanair	2	B-737	1107.673

Cadro 2.4: Número de movementos realizados polos distintos tipos de avións que posúe cada liña aérea no aeroporto de Labacolla xunto co seu respectivo valor de Owen.

Capítulo 3

O problema da autoestrada

Para a realización deste capítulo, basámonos no artigo *Sharing costs in highways: A game theoretic approach*, de J. Kuipers et al. (2013), e na tese *Essays on Operations Research Games and Cautious Behavior*, de Manuel Alfredo Mosquera Rodríguez (2007).

Neste capítulo, plantexaremos un modelo de xogo con utilidade transferible chamado *xogo da autoestrada*. Neste modelo, asumiremos que un axente está completamente caracterizado pola sección de autoestrada que usa, o que significa que tódolos vehículos no noso modelo son da mesma clase. Tamén supoñeremos que cada sección ten un custo fixo que se corresponde, ou ben cos custos iniciais de construcción, ou cos custos periódicos de mantemento. Despóis, analizaremos o comportamento de dous dos conceptos de solución máis coñecidos para xogos de utilidade transferible dentro da clase dos xogos de autoestrada e aplicarémolos sobre datos reais.

Un problema da autoestrada é unha 4-tupla $\Gamma = (N, M, C, T)$ onde N é un conxunto finito de axentes, M é un conxunto finito e completamente ordenado de seccións, $C : M \to \mathbb{R}_{++}$ representa o custo de cada sección e $T : N \to 2^M$ é unha función que representa, para cada axente $i \in N$, o conxunto de seccións $T(i) \subseteq M$ usadas por cada axente. Debido a que cada axente usa un conxunto consecutivo de seccións, esixiremos que: cada $T(i)$ sexa da forma $\{t \in M : a_i \leq t \leq b_i\}$ onde a_i representa á primeira sección usada polo axente i e b_i representa a última sección usada por i. Tamén esixiremos que cada sección sexa usada como mínimo por un axente, isto é, que se verifique que:

$$\cup_{i \in N} T(i) = M.$$

No caso de que a $4-$tupla dun problema da autoestrada Γ non estea establecida, denotaremos o conxunto de axentes de Γ por N_Γ, o conxunto de seccións por M_Γ, etcétera.

Observación 3.1. Notemos que un problema da autoestrada (N, M, C, T) correspondese cun problema do aeroporto (Littlechild e Thompson, 1977) se:

$$\text{mín} T(i) = \text{mín} M \text{ para todo } i \in N.$$

Exemplo 3.2. A Figura 3.1 representa un pequeno problema da autoestrada para a autoestrada que conecta A Coruña con Vigo. Catro axentes que utilizan a autoestrada represéntanse como liñas debaixo da autoestrada. Os axentes están numerados como $1, 2, 3$ e 4. Supoñendo que estos son os únicos axentes involucrados, definimos $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Os puntos negros na autoestrada representan as entradas e saídas que a dividen en 4 seccións. A Coruña-Santiago (1); Santiago-Padrón (2); Padrón-Pontevedra (3); e Pontevedra-Vigo (4). Entón definimos o conxunto de seccións como $M = \{1, 2, 3, 4\}$ co seu orde natural. Agora asignaremos os custos de cada sección: $C(1) = 8$, $C(2) = 4$, $C(3) = 6$ e $C(4) = 6$. Xa que o axente 1 viaxa só a traves da seccion 1 entre A Coruña e Santiago, temos que $T(1) = \{1\}$, o axente 2 viaxa entre Padrón e Vigo e polo tanto, $T(2) = \{3, 4\}$. Por outra banda, o axente 3 viaxa entre A Coruña e Pontevedra e como consecuencia $T(3) = \{1, 2, 3\}$. Finalmente, o axente 4 viaxa entre

Santiago e Vigo polo que $T(4) = \{2, 3, 4\}$.

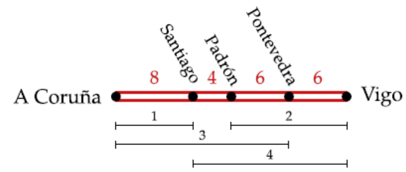

Figura 3.1: Autoestrada liñal do Exemplo 3.2

Notemos que os conxuntos $T(i)$ son todos consecutivos e que cada sección está como mínimo nun dos conxuntos $T(i)$. Polo tanto, a 4-tupla Γ é de feito un problema da autoestrada e a Figura 3.1 é a súa representación informal. Por outra banda tamén podemos calcular o valor de Shapley. A continuación mostramos a súa aplicabilidade neste contexto para os datos do exemplo anterior mediante o uso de R:

```
# Valor de Shapley do problema da autoestrada
#-----------------------------------------
# c[i] coste tipo i
# t[i] número de xogadores do tipo i
#-----------------------------------------
vshapley<-function(t,c){
rigual<-c()
for(j in 1:length(c)){
rigual[j]<-c[j]/(t[j])
}
return(rigual)
}
c<-c(8,4,6,6)
t<-c(2,2,3,2)
vshapley
rigual
#[1] 4 2 2 3
```

A continuación, refirirémonos a:

$$\sum_{t \in M} C(t)$$

como o custo dun problema da autoestrada (N, M, C, T). Claro está que é posible asignar o custo dun problema da autoestrada sen modelar ningún xogo de xeito teórico. Unha maneira natural de repartir custos nun problema da autoestrada sería repartir os custos dos recursos de cada sección de xeito igualitario entre os axentes que a usan. Definiremos a regra de asignación ξ como:

$$\xi_i(\Gamma) = \sum_{t \in T(i)} \frac{C(t)}{\mid \{j \in N : t \in T(j)\} \mid} \tag{3.1}$$

para calquera problema da autoestrada $\Gamma = (N, M, C, T)$ e para todo axente $i \in N$. Hai que ter en conta que ξ está ben definida e asigna o custo total tendo en conta o feito de que $\cup_{i \in N} T(i) = M$. Para o Exemplo 3.2 temos que $\xi = (4, 5, 8, 7)$.

Dado un xogo da autoestrada, $\Gamma = (N, M, C, T)$ definimos o xogo asociado (N, c) como:

$$c(S) = C(T(S)) \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Neste caso, para calquera $S \subseteq N$, a notación $T(S)$ denota $\cup_{i \in S} T(i)$ e para cada $M' \subseteq M$, a notación $C(M')$ denota $\sum_{t \in M'} C(t)$. Isto é, o custo no que incurre a coalición S defínese como o custo total das seccións usadas por membros de S. Diremos que (N, c) é o ***xogo de autoestrada*** asociado a Γ. A continuación representamos o custo asociado a cada coalición $S \subseteq N$ no Exemplo 3.2.

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{N\}$
$c(S)$	0	8	12	18	16	20	18	24	24	16	24	24	24	24	24	24

Cadro 3.1: Custo asociado a cada coalición do xogo de autoestrada do exemplo 3.2.

Recordemos que en teoría de xogos, un vector $x \in \mathbb{R}^N$ pode ser interpretado como o reparto dos custos asignados a cada xogador $i \in N$ en calquera xogo (N, c) e chámase *asignación* para (N, c). Unha asignación $x \in \mathbb{R}^N$ é eficiente para (N, c) se:

$$\sum_{i \in N} x_i = c(N),$$

isto é, se os repartos dos xogadores suman o custo total. Un *valor* para unha clase de xogos é unha función Ψ, que asocia con cada xogo (N, c) da mesma clase, unha asignación eficiente $\psi(N, c) \in \mathbb{R}^N$. Un valor para unha clase de xogos define unha regra de asignación para un problema da autoestrada de xeito obvio, coa condición de que a clase conteña a tódolos xogos de autoestrada.

O noso primeiro resultado neste capítulo, relaciona o valor de Shapley coa regra de asignación de custos para o problema da autoestrada ξ que definimos ó comezo deste capítulo.

Proposición 3.3. Sexan Γ un problema da autoestrada e (N, c) o xogo da autoestrada asociado. Entón verifícase que:

$$\Phi(N, c) = \xi(\Gamma).$$

Proba. Sexa $\Gamma = (N, M, C, T)$. Para todo $t \in M$ definimos o xogo (N, c_t) por:

$$c_t(S) = \begin{cases} C(t) & \text{se } t \in T(S), \\ \\ 0 & \text{noutro caso,} \end{cases}$$

para todo $S \subseteq N$. Notemos que o valor de Shapley é eficiente (Shapley, 1953). Ademáis, está claro por (1.1) que o valor de Shapley satisfai a propiedade de simetría:

$$\Phi_i(N, c) = \Phi_j(N, c),$$

para todo $i, j \in N$ sempre e cando:

$$c(S \cup \{i\}) = c(S \cup \{j\}),$$

para todo $S \subseteq N \backslash \{i, j\}$. Tamén está claro por (1.1) que o valor de Shapley satisfai a propiedade de xogador nulo, é dicir, $\Phi_i(N, c) = 0$ sempre e cando $c(S \cup \{i\}) = c(S)$ para todo $S \subseteq N \backslash \{i\}$. Entón,

$$\Phi_i(N, c_t) = \begin{cases} \frac{C(t)}{|\{j \in N : t \in T(j)\}|} & \text{se } t \in T(i), \\ \\ 0 & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Ademáis, o valor de Shapley é aditivo (Shapley, 1953):

$$\Phi(N, c) + \Phi(N, d) = \Phi(N, c + d),$$

para todo par de xogos (N, c), (N, d). Polo tanto, obtemos para cada $i \in N$ que

$$\Phi_i(N, c) = \sum_{t \in M} \Phi_i(N, c_t) = \sum_{t \in T(i)} \Phi_i(N, c_t) = \xi_i(\Gamma).$$

Proposición 3.4. Sexa (N, M, C, T) un problema da autoestrada. Entón, o xogo asociado (N, c) é monótono e cóncavo.

Proba. Sexa $S \subseteq R \subseteq N$. Debido a que $T(S) \subseteq T(R)$ e $C(t) \geq 0$ para cada $t \in M$, temos que:

$$c(S) = \sum_{t \in T(S)} C(t) \leq \sum_{t \in T(R)} C(t) = c(R).$$

Polo tanto, (N, c) é un xogo monótono.

Sexan agora $S, R \subseteq N$. Entón,

$$\begin{aligned} c(S) + c(R) &= C(T(S)) + C(T(R)) \\ &= C(T(S) \cup T(R)) + C(T(S) \cap T(R)) \\ &\geq C(T(S \cup R)) + C(T(S \cap R)) \\ &= c(S \cup R) + c(S \cap R), \end{aligned}$$

de onde a desigualdade se segue porque $C(t) \geq 0$ para cada $t \in M$, $T(S \cup R) = T(S) \cup T(R)$ e $T(S \cap R) \subseteq T(S) \cap T(R)$. Polo tanto, concluímos que o xogo (N, c) é cóncavo.

3.1. O nucleolo nos xogos de autoestrada

Como vimos anteriormente, o nucleolo dun xogo, $\nu(N, c)$, está formado por unha única imputación se $I(N, c) \neq \emptyset$ (doutro xeito $\nu(N, c) = \emptyset$).

Para un xogo (N, c) denotaremos por $D(N, c)$ a *familia das coalicións propias* de N con excesos minimais en ν, isto é,

$$D(N, c) = \{S \subset N : e(S, \nu) \leq e(T, \nu), \text{ para todo } T \subset N \text{ con } S, T \neq \emptyset\}.$$

Escribiremos D cando non haiga posibilidade de confusión.

Un resultado esencial para o cálculo do nucleolo de xogos cóncavos é debido a Arín e Iñarra (1998) e resultará crucial para determinar o valor do nucleolo nos xogos de autoestrada. Na terminoloxía de

Arín e Iñarra, unha familia A de coalicións é unha antipartición de N se $\{N\backslash S : S \in A\}$ é unha partición de N. Este resultado indícase a continuación na seguinte proposición.

Proposición 3.5. (Arín e Iñarra, 1998). Para calquera xogo cóncavo (N, c), a familia D contén unha partición ou unha antipartición de N.

A Proposición 3.5 pode ser usada para determinar o nucleolo dun xogo cóncavo como segue. Sexan (N, c) un xogo, $x \in \mathbb{R}^n$ unha asignación eficiente e A unha familia non baleira de coalicións de N. Definimos o *exceso medio* de A en x por:

$$e(A, x) = \frac{\sum_{S \in A} e(S, x)}{\mid A \mid}.$$

Se A é unha partición de N entón,

$$e(A, x) = \frac{\sum_{S \in A} c(S) - c(N)}{\mid A \mid},$$

e se A é unha antipartición de N, entón:

$$e(A, x) = \frac{\sum_{S \in A} c(S) - (\mid A \mid -1)c(N)}{\mid A \mid}.$$

Notemos que en ambos casos o exceso medio non depende de x. Ademáis, da Proposición 3.5 tamén se segue que:

$$e(D, \nu) = \text{mín}\{e(A, \nu) : A \text{ é unha patición ou antipartición de } N\}.$$

Xa que os números $e(A, \nu)$ nesta minimización non dependen de ν, é posible determinar $e(D, \nu)$, así como unha partición ou antipartición contida nela, simplemente enumerando todas as particións e antiparticións de N. En xeral, isto non é práctico debido ó gran número de particións e antiparticións que existen. Sen embargo, cando as particións e antiparticións proveñen dunha familia cun número pequeno de coalicións relevantes, pode ser un método eficaz. Iste é o caso dos xogos de autoestrada. A continuación daremos un refinamento da Proposición 3.5 para unha subclase dos xogos cóncavos.

Definición 3.6. Dicimos que unha coalición $S \subseteq N$ é *esencial* se existe unha partición non trivial P de S de xeito que:

$$c(S) \geq \sum_{R \in P} c(R).$$

Definición 3.7. Unha coalición $S \subset N$ dise que é *saturada* se non existe unha coalición R tal que $S \subset R$ e $c(S) \geq c(R)$.

Definición 3.8. Unha coalición $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, dicimos que é *relevante* se é esencial e saturada.

Denotaremos mediante $RC(N, c)$ ó conxunto das coalicións relevantes para un xogo (N, c) e defínese:

$$\overline{RC}(N, c) = RC(N, c) \cup \{N\backslash\{i\} : i \in N\}.$$

Por comodidade, usaremos a notación RC e $\overline{RC}$ se non existe confusión.

Lema 3.9. Sexa (N, c) un xogo cóncavo de xeito que N é esencial e ademáis $c(N\backslash\{i\}) \leq c(N)$ para todo $i \in N$. Entón:

1. $e(S, \nu) > 0$ para todo $S \subset N, S \neq \emptyset$,

2. $\nu_i > 0$ para todo $i \in N$,
3. $D \subseteq \overline{RC}$.

Proba. A proba deste lema non a incluiremos neste traballo. Baséase nas definicións de coalición esencial, saturada, concavidade de xogos, exceso e nucleolo, e faise redución ó absurdo.

O seguinte corolario é consecuencia directa da Proposición 3.5 e do terceiro apartado do Lema 3.9.

Corolario 3.10 Sexa (N, c) un xogo cóncavo de xeito que N é esencial e tal que $c(N \backslash \{i\}) \leq c(N)$ para todo $i \in N$. Entón $D \cap \overline{RC}$ contén unha partición ou unha antipartición de N.

3.2. O exceso minimal do nucleolo no problema da autoestrada

Na clase dos xogos de autoestrada, as coalicións relevantes poden ser fácilmente identificadas. Sexa (N, c) un xogo de autoestrada asociado a un problema de autoestrada $\Gamma = (N, M, C, T)$. Entón, a coalición $S \subset N$ é saturada se:

$$S = \{i \in N : \min T(S) \leq \min T(i) \leq \max T(i) \leq \max T(S)\},$$

e é esencial se non existe ningunha partición $\{R, R'\}$ de S de xeito que $T(R) \cap T(R') = \emptyset$. Notemos que ó sumo pode haber:

$$\frac{1}{2} \mid M \mid (\mid M \mid +1) - 1$$

coalicións relevantes para o xogo da autoestrada. Isto é debido a que:

$$\frac{1}{2} \mid M \mid (\mid M \mid +1)$$

é o número de posibles combinacións para $\min T(S)$ e $\max T(S)$ e por definición N non pode ser relevante.

Observación 3.11 Nun problema de autoestrada, dicimos que dous axentes son do mesmo tipo se usan exactamente as mesmas seccións. Os axentes do xogo da autoestrada que son do mesmo tipo son xogadores simétricos e polo tanto, a súa asignación do nucleolo é a mesma. Como consecuencia, a complexidade do algoritmo para o cálculo do nucleolo non dependerá do número de axentes pero sí do número de tipos de axentes que teñamos.

Polo Corolario 3.10, se queremos calcular os excesos minimais do nucleolo de (N, c), só temos que calcular os excesos medios de tódalas particións e antiparticións de N contidas en $\overline{RC}$ sempre que N sexa esencial.

Definición 3.12. Diremos que o problema da autoestrada Γ é descompoñible se existe unha partición non trivial $\{L, R\}$ de N de xeito que $\{T(L), T(R)\}$ forma unha partición de M.

Observemos que N é non esencial en (N, c) se Γ é descompoñible, xa que entón:

$$c(N) = C(T(N)) = C(T(L)) + C(T(R)) = c(L) + c(R).$$

Recíprocamente, se N non é esencial en (N, c), existe unha partición $\{L, R\}$ de N de maneira que $c(N) = c(L) + c(R)$, o cal tan só é posible se L e R son tais que $\{T(L), T(R)\}$ é unha partición de M. Observemos tamén que as coalicións L e R na partición de N nun problema da autoestrada descompoñible deben de ser coalicións relevantes. Polo tanto, temos o seguinte corolario.

Corolario 3.13. Sexan $\Gamma = (N, M, C, T)$ un problema da autoestrada e (N, c) o seu xogo de autoestrada asociado. Entón $D \cap \overline{RC}$ contén unha partición ou unha antipartición de N.

Proba. Se Γ non é descopoñible, entón N é esencial en (N, c). Ademáis, dacordo coa Proposición 3.4, (N, c) é monótono e polo tanto satisfai que:

$$c(N \backslash \{i\}) \leq c(N),$$

para todo $i \in N$. Neste caso o resultado séguese polo Corolario 3.10. Se Γ é descompoñible, entón existe unha partición $\{L, R\}$ de N con $L, R \in RC$ de xeito que $\{T(L), T(R)\}$ forman unha partición de M e polo tanto:

$$c(N) = c(L) + c(R).$$

Ademáis, temos que dacordo coa Proposición 3.4, que (N, c) é cóncavo e como consecuencia o seu núcleo non é baleiro. Isto implica que $e(S, \nu) \geq 0$ para todo $S \subseteq N$. Como $c(N) = c(L) + c(R)$, temos que:

$$e(L, \nu) = e(R, \nu) = 0.$$

Entón, temos que $\{L, R\} \subseteq D \cap \overline{RC}$, de onde se segue o resultado.

De feito, como nos mostra este resultado, para os xogos de autoestrada tan só necesitaremos considerar antiparticións en $\overline{RC}$.

Lema 3.14. Sexan $\Gamma = (N, M, C, T)$ un problema da autoestrada e (N, c) o seu xogo de autoestrada asociado. Entón, $D \cap \overline{RC}$ contén unha antipartición de N.

Proba. Se Γ é descompoñible, entón como argumentamos na proba do Corolario 3.13, existe unha partición $\{L, R\}$ de N con:

$$\{L, R\} \subseteq D \cap \overline{RC}.$$

Como $\{L, R\}$ tamén é unha antipartición, queda probado o lema para este caso.

Por outra banda, supoñamos agora que Γ non é descompoñible. Sexa entón P unha partición de N e definamos a súa antipartición asociada como:

$$A_P = \{S^c : S \in P\}.$$

Temos que probar que $e(A_P, \nu) \leq e(P, \nu)$. Entón, como sabemos que:

$$\begin{aligned} e(A_P, \nu) &= \frac{\sum_{S \in A_P} c(S) - (\mid A_P \mid -1)c(N)}{\mid A_P \mid} = \frac{\sum_{S \in P} c(S^c) - (\mid P \mid -1)c(N)}{\mid P \mid}, \\ e(P, \nu) &= \frac{\sum_{S \in P} c(S) - c(N)}{\mid P \mid}. \end{aligned}$$

Agora, temos que ver que se verifica:

$$\sum_{S \in P} c(S^c) - \sum_{S \in P} c(S) \leq (\mid P \mid -2)c(N). \tag{3.2}$$

Para $t \in M$, denotaremos por η_t ó número de coalicións $S \in P$ tais que $t \in T(S^c)$ e por ξ_t ó número de coalicións $S \in P$ tais que $t \in T(S)$. Entón:

$$\sum_{S \in P} c(S^c) - \sum_{S \in P} c(S) = \sum_{t \in M} \eta_t C(t) - \sum_{t \in M} \xi_t C(t) = \sum_{t \in M} (\eta_t - \xi_t) C(t).$$

Polo tanto, é suficiente probar que:

$$\eta_t - \xi_t \leq \mid P \mid -2$$

para todo $t \in M$. Sexa entón $t \in M$. Temos claramente que $\eta_t \leq \mid P \mid$, polo que non temos nada que probar se $\xi_t \geq 2$. Deste xeito, supoñamos que $\xi_t < 2$. Entón, $\xi_t = 1$ e precisamente existe un $\hat{S} \in P$ con $t \in T(\hat{S})$ e como $\hat{S}^c = \cup_{S \in P \setminus \{\hat{S}\}} S$ séguese que $t \notin T(\hat{S}^c)$, de onde deducimos que $\eta_t \leq \mid P \mid -1$. Polo tanto,

$$\eta_t - \xi_t = \eta_t - 1 \leq \mid P \mid -2.$$

Polo que de feito, $e(A_P, \nu) \leq e(P, \nu)$.

Pola Proposición 3.5 sabemos que D contén unha partición ou unha antipartición. Se D contén unha partición, digamos P, entón D tamén contén a antipartición A_p, xa que $e(A_P, \nu) \leq e(P, \nu)$. Podemos polo tanto concluír que D contén unha antipartición. Como supoñemos que Γ non é descompoñible, polo Lemma 3.9 3., polo tanto a antipartición tamén está contida en $\overline{RC}$, o que proba o lema.

Proposición 3.15. Sexan $\Gamma = (N, M, C, T)$ un problema da autoestrada e (N, c) o seu xogo de autoestrada asociado. Entón, verifícase polo menos unha das seguintes afirmacións.

1. Existen $L, R \in RC$ con $L \cup R = N$, tais que:

$$\{L, R\} \cup \{N \setminus \{i\} : i \in L \cap R\} \subseteq D.$$

2. Existe $S \in RC$ tal que:

$$\{S\} \cup \{N \setminus \{i\} : i \in S\} \subseteq D.$$

3. $\{N \setminus \{i\} : i \in N\} \subseteq D$.

Proba. Polo Lema 3.14, $D \cap \overline{RC}$ contén unha antipartición de N. Sexa:

$$A = \{A_1, ..., A_k\} \subseteq D \cap \overline{RC}$$

tal antipartición, entón $A_\ell \in RC$ ou $\mid A_\ell \mid = n-1$ para cada $\ell \in \{1, ..., k\}$. Se $r = \mid \{S \in A : S \in RC\} \mid$, os casos 1.,2. e 3. correspondense con $r = 2, r = 1$ e $r = 0$, respectivamente. Polo tanto, temos que probar que $r \leq 2$.

Para probalo, procederemos por redución ó absurdo. Supoñamos que $r \geq 3$. Sexan entón $A_1, A_2, A_3 \in RC$ e supoñamos sen pérdida de xeralidade que $\min M \in T(A_1)$ e que $\max M \in T(A_2)$. Como $A_1, A_2 \in RC$, séguese que $\max T(A_1) < \max M$ e $\min T(A_2) > \min M$ polo que $\min M \notin T(A_1) \cap T(A_2)$ e $\max M \notin T(A_1) \cap T(2)$.

Por definición de antipartición, $A_3^c \subseteq A_1 \cap A_2$, e entón:

$$T(A_3^c) \subseteq T(A_1) \cap T(A_2),$$

de onde se segue que:

$$M = T(A_3) \cup T(A_3^c) \subseteq T(A_3) \cup (T(A_1) \cap T(A_2)).$$

Debido a isto, $\min M \in T(A_3)$ e $\max M \in T(A_3)$ o que entra en contradición co feito de que $A_3 \in RC$.

Definamos,

$$\begin{aligned}
\beta(L, R) &= \frac{c(L) + c(R) + \sum_{i \in L \cap R} c(N \setminus \{i\}) - (\mid L \cap R \mid +1) c(N)}{\mid L \cap R \mid +2} \text{ para } L, R \in RC, \\
\gamma(S) &= \frac{c(S) + \sum_{i \in S} c(N \setminus \{i\}) - (\mid S \mid) c(N)}{\mid S \mid +1} \text{ para } S \in RC, \\
\delta &= \frac{\sum_{i \in N} c(N \setminus \{i\}) - (\mid N \mid -1) c(N)}{\mid N \mid}.
\end{aligned}$$

Definamos ademáis:

$$\begin{aligned}\beta &= \min\{\beta(L,R) : L,R \in RC \text{ con } L \cup R = N\},\\ \gamma &= \min\{\gamma(S) : S \in RC\},\\ \lambda &= \min\{\beta,\gamma,\delta\}.\end{aligned}$$

Corolario 3.16. Sexan Γ un problema da autoestrada e (N, c) o seu xogo asociado. Entón $e(D,\nu) = \lambda$ e ademáis:

1. Se $\lambda = \beta = \beta(L, R)$ para $L, R \in RC$ con $L \cup R = N$, entón:

$$\nu_i = c(N) - c(N\backslash\{i\}) + \lambda,$$

   para todo $i \in L \cap R$, $\nu(L) = c(L) - \lambda$ e $\nu(R) = c(R) - \lambda$.

2. Se $\lambda = \gamma = \gamma(S)$ para $S \in RC$ entón, $\nu_i = c(N) - c(N\backslash\{i\}) + \lambda$ para todo $i \in S$ e $\nu(S) = c(S) - \lambda$.

3. Se $\lambda = \delta$, entón $\nu_i = c(N) - c(N\backslash\{i\}) + \lambda$ para todo $i \in N$.

Proba. Trátase de comprobar que:

$$\begin{aligned}\beta(L,R) &= e(\{L,R\} \cup \{N\backslash\{i\} : i \in L \cap R\},\nu) \text{ se } L,R \in RC \text{ con } L \cup R = N,\\ \gamma(S) &= e(\{S\} \cup \{N\backslash\{i\} : i \in S\},\nu) \text{ se } S \in RC,\\ \delta &= e(\{N\backslash\{i\} : i \in N\},\nu).\end{aligned}$$

Entón, pola Proposición 3.15 o mínimo destos números correspóndese con unha antipartición de D. Se o mínimo atópase en 1., as coalicións L e R están en D e polo tanto, $\nu(S) = c(S) - \lambda$. Ademáis, $N\backslash\{i\} \in D$ e entón,

$$\nu_i = c(N) - \nu(N\backslash\{i\}) = c(N) - c(N\backslash\{i\}) + \lambda \text{ para todo } i \in L \cap R.$$

Os casos (2) e (3) próbanse de xeito similar.

Se $\lambda = \delta$ obtemos o nucleolo de xeito inmediato para tódolos axentes. Se $\lambda = \gamma < \delta$, obtemos o valor do nucleolo para os axentes que pertencen á coalición adecuada $S \in RC$. Para obter o nucleolo dos axentes restantes en S^c, é posible formular un problema da autoestrada reducido cos axentes contidos no conxunto S^c e repetir o procedemento neste problema máis pequeno. Se $\lambda = \beta < \min(\gamma, \delta)$, obtemos o valor do nucleolo para os axentes nunha coalición da forma $L \cap R$ con $L, R \in RC$ e $L \cup R = N$. Para obter o nucleolo dos restantes axentes temos que formular dous xogos reducidos de autoestrada, un para os axentes que están en L^c e outro para os axentes que se atopan na coalición R^c.

3.3. O problema reducido da autoestrada

Sexa $\Gamma = (N, M, C, T)$ un problema da autoestrada. A continuación formularemos para $Z \in RC$ e $\pi \in [0, \frac{1}{2}c(Z)]$ un problema reducido da autoestrada:

$$\Gamma_{\pi,Z} = (N_{\pi,Z}, M_{\pi,Z}, C_{\pi,Z}, T_{\pi,Z})$$

con conxunto de axentes $N_{\pi,Z} = Z^c$. As seccións que se atopan fora de $T(Z)$ permanecen no problema reducido e as seccións que están en $T(Z)$ son reemplazadas por un conxunto de m novas seccións $NS = \{t_1, t_2, ..., t_m\}$, disxuntas de M polo que temos que:

$$M_{\pi,Z} = M\backslash T(Z) \cup NS.$$

As novas seccións de NS forman un conxunto consecutivo ordenado, $t_1 < t_2 < ... < t_m$ e colócanse no sitio onde se atopaba o conxunto de seccións consecutivas $T(Z)$. O número m e o custo das novas seccións está determinado polo conxunto de axentes os cales, no problema da autoestrada orixinal, usan as seccións de $T(Z)$ con custo positivo, pero cun custo total menor que π. Denotaremos por N^* a este conxunto de axentes.

Para todo $i \in N_{\pi,Z}$, definimos:

$$g_i = \text{mín}\{\pi, C(T(i) \cap T(Z))\}$$

e polo tanto

$$N^* = \{i \in N_{\pi,Z} : 0 < g_i < \pi\}.$$

Por outra banda, distinguiremos entre os axentes de N^* ós cales a súa primeira sección pertence a $T(Z)$ e os axentes de N^* ós cales a súa última sección é pertencente a $T(Z)$. A continuación, definiremos os seguintes conxuntos:

$$\begin{aligned} N_\ell^* &= \{i \in N^* : \text{máx}\, T(i) \in T(Z)\} \\ N_r^* &= \{i \in N^* : \text{mín}\, T(i) \in T(Z)\}. \end{aligned}$$

O seguinte lema móstranos que os conxuntos N_ℓ^* e N_r^* conteñen entre eles os dous a tódolos axentes que están en N^* e ademáis, a súa intersección é igual ó baleiro.

Lema 3.17 Os conxuntos N_ℓ^* e N_r^* forman unha partición de N^*.

Proba. En primeiro lugar, probaremos por redución ó absurdo que $N_\ell^* \cap N_r^* = \emptyset$. Tomemos $i \in N^*$ e supoñamos que $i \in N_\ell^* \cap N_r^*$, entón temos que máx$T(i) \in T(Z)$ e mín$T(i) \in T(Z)$, o que implica que $T(i) \subseteq T(Z)$. Como Z está saturado, séguese que $i \in Z$ o que entra en contradicción coa elección $i \in N^* \subseteq Z^c$. A continuación, probaremos que $N_\ell^* \cup N_r^* = N^*$. Eliximos $i \in N^*$ e supoñamos que $i \notin N_\ell^*$ e $i \notin N_r^*$, entón verifícase que mín$T(i) \notin T(Z)$ e máx$T(i) \notin T(Z)$ o que implica que $T(i) \cap T(Z) = \emptyset$ ou $T(Z) \subseteq T(i)$. O caso $T(i) \cap T(Z) = \emptyset$ contradí o feito de que $g_i > 0$, e o caso $T(Z) \subseteq T(i)$ contradí que $g_i < \pi$.

Definamos, para todo $i \in N^*$,

$$\varsigma_i = \begin{cases} g_i & se \quad i \in N_\ell^*, \\ \pi - g_i & se \quad i \in N_r^*. \end{cases}$$

Agora o número m, número de novas seccións, é igual ó número dos diferentes valores $\varsigma_i + 1$. Sexa $\xi \in \mathbb{R}_{++}^m$ o vector formado por $m-1$ valores diferentes ς_i e o número π dispostos en orde estrictamente crecente. Notemos que $\xi_m = \pi$ xa que $\varsigma_i < \pi$ para todo $i \in N^*$. Definimos a función de custos $C_{\pi,Z}$ por:

$$C_{\pi,Z}(t) = \begin{cases} C(t) & se & t \in M \backslash T(Z), \\ \xi_1 & se & t = t_1, \\ \xi_k - \xi_{k-1} & se & t = t_k \text{ con } 1 < k \leq m. \end{cases}$$

Sexa $i \in N^*$, entón denotamos por $k(i)$ ó único índice $k \in \{1, ..., m-1\}$ de xeito que $\varsigma_i = \xi_k$ e definimos a función:

$$T_{\pi,Z} : N_{\pi,Z} \to 2^{M_{\pi,Z}}$$

por:

$$T_{\pi,Z}(i)=\begin{cases} T(i) & se \quad g_i=0,\\ (T(i)\backslash T(Z))\cup NS & se \quad g_i=\pi,\\ (T(i)\backslash T(Z))\cup\{t_1,...,t_{k(i)}\} & se \quad i\in N^*_\ell,\\ (T(i)\backslash T(Z))\cup\{t_{k(i)+1},...,t_m\} & se \quad i\in N^*_r,\end{cases}$$

para todo $i\in N_{\pi,Z}$. Notemos que a definición asegura que, para cada $i\in N_{\pi,Z}$, temos que $T_{\pi,Z}(i)$ contén un conxunto consecutivo de seccións de $M_{\pi,Z}$. Polo tanto,

$$\Gamma_{\pi,Z}=(N_{\pi,Z},M_{\pi,Z},C_{\pi,Z},T_{\pi,Z})$$

é un problema da autoestrada válido.

Para o seguinte lema, necesitamos tomar $\pi\le\frac{1}{2}c(Z)$.

Lema 3.18. $T(N^*_\ell)\cap T(N^*_r)=\emptyset$ e $T(N^*_\ell)\cup T(N^*_r)$ non contén tódalas seccións de $T(Z)$

Proba. En primeiro lugar probaremos que $T(i)\cap T(j)=\emptyset$ para todo $i\in N^*_\ell$ e $j\in N^*_r$. Supoñamos pola contra que existe $i\in N^*_\ell$ e $j\in N^*_r$ con $T(i)\cap T(j)\neq\emptyset$. Entón, temos que $T(Z)\subseteq T(i)\cup T(j)$ e obtemos:

$$g_i+g_j=C(T(i)\cap T(Z))+C(T(j)\cap T(Z))\ge C(T(Z))=c(Z)\ge 2\pi,$$

o que contradí que $g_i<\pi$ e $g_j<\pi$. Así, de feito temos que $T(i)\cap T(j)=\emptyset$ para todo $i\in N^*_\ell$ e $j\in N^*_r$. Entón, séguese de inmediato a afirmación $T(N^*_\ell)\cap T(N^*_r)=\emptyset$ e ademáis,

$$C(T(Z)\cap T(N^*))=\text{máx}\{g_i:i\in N^*_\ell\}+\text{máx}\{g_i:i\in N^*_r\}<2\pi\le C(T(Z)).$$

A desigualdade estricta implica que $T(Z)\not\subseteq T(N^*_\ell)\cup T(N^*_r)$.

Corolario 3.19. O número de seccións do problema reducido da autoestrada $\Gamma_{\pi,Z}$ non excede o número de seccións de Γ.

Proposición 3.20 Sexa $\Gamma=(N,M,C,T)$ un problema da autoestrada co xogo da autoestrada (N,c) asociado. Tomemos $Z\in RC$ e $\pi\in[0,\frac{1}{2}c(Z)]$. Entón, a función característica $c_{\pi,Z}$ do xogo da autoestrada $(N_{\pi,Z},c_{\pi,Z})$ que ten asociado o problema da autoetrada reducido $\Gamma_{\pi,Z}$, ven dado por:

$$c_{\pi,Z}(S)=\text{mín}\{c(S),\pi+C(T(S)\backslash T(Z))\}$$

para todo $S\subseteq N$.

A seguinte proposición proporcionanos unha fórmula para o xogo reducido de Davis-Maschler. Denotaremos como $(Q^c,c^{x,Q})$ o xogo reducido de Davis-Maschler dun xogo (N,c), onde $Q\subseteq N$ é o conxunto de xogadores e x é unha asignación para (N,c).

Proposición 3.21. Sexa (N,M,C,T) un problema da autoestrada, e x un elemento do núcleo do xogo (N,c) da autoestrada asociado e sexa

$$Z\in D(x)=\{S\subset N:e(S,x)\le(T,x)\text{ para todo }T\subset N,S,T\neq\emptyset\}.$$

Entón, a función característica $c^{x,Z}$ do xogo reducido de Davis-Maschler ven dada por:

$$c^{x,Z}=\text{mín}\{c(S),\pi+C(T(S)\backslash T(Z))\}\text{ para todo }S\subseteq N,$$

onde $\pi = c(Z) - x(Z)$.

As fórmulas para o xogo da autoestrada reducido e o xogo reducido de Davis-Maschler son iguais, pero as condicións baixo as que se manteñen son distintas. O seguinte corolario móstranos que ambas condicións se satisfan se a redución é con respecto do nucleolo ν e unha coalición en $D \cap RC$.

Corolario 3.22. Sexa (N, M, C, T) un problema da autoestrada co xogo (N, c) asociado e sexa $Z \in D \cap RC$. Entón $c^{\nu,Z} = c_{\pi,Z}$, onde $\pi = c(Z) - \nu(Z)$.

3.4. Algorítmo para o cálculo do nucleolo do xogo da autoestrada

Os resultados das seccións anteriores suxiren unha aproximación recursiva para calcular o nucleolo dun xogo da autoestrada. Presentaremos o algoritmo na forma dunha función $\nu = nucleolo(\Gamma)$, onde a función *nucleolo* toma as súas entradas dun problema da autoestrada arbitrario Γ e proporciona as suas saidas en ν, o nucleolo do xogo de autoestrada asociado. No algoritmo usaremos a convención $\phi = \infty$

$$
\begin{array}{rcl}
\underline{\text{función}}\ \nu & = & nucleolo(\mathit{\Gamma}); \\
\beta & = & \text{mín}\{\beta(L,R) : L, R \in RC \text{ e } L \cup R = N\}; \\
\gamma & = & \text{mín}\{\gamma(S) : S \in RC\}; \\
\lambda & = & \text{mín}(\beta, \gamma, \delta); \\
\underline{\text{se}}\ \lambda & = & \infty\ \underline{\text{entón}} \\
\nu & = & c(N); \\
\underline{\text{senón se}}\ \lambda & = & \delta\ \underline{\text{entón}} \\
\nu_i : & = & c(N) - c(N \backslash \{i\}) + \lambda \text{ para todo } i \in N; \\
\underline{\text{senón se}}\ \lambda & = & \gamma\ \underline{\text{entón}} \\
\text{elixe} \quad S & \in & RC \text{ tal que } \lambda = \gamma(S); \\
\nu_i := c(N) & - & c(N \backslash \{i\}) + \lambda \text{ para todo } i \in S; \\
\nu_{N \backslash S} & := & \text{nucleolo}(\mathit{\Gamma}_{\lambda,S}); \\
\underline{\text{senón se}} \quad \lambda & = & \beta \quad \underline{\text{entón}} \\
\text{elixe } L, R \in RC \text{ tais que } \lambda & = & \beta(L,R) \text{ e } L \cup R = N; \\
\nu_i := c(N) - c(N \backslash \{i\}) & + & \lambda \text{ para todo } i \in L \cap R; \\
\nu_{N \backslash L} & := & \text{nucleolo}(\mathit{\Gamma}_{\lambda,L}); \\
\nu_{N \backslash R} & := & \text{nucleolo}(\mathit{\Gamma}_{\lambda,R}); \\
\underline{fin}; & & \\
\underline{fin}; & &
\end{array}
$$

O correcto funcionamento do algoritmo básase nos resultados establecidos na Proposición 3.21 e no Corolario 3.22.

Corolario 3.23. A función *nucleolo* calcula o nucleolo de calquera problema da autoestrada en tempo finito.

Para a seguinte proposición supoñemos que a función *nucleolo* calcula os pagos do nucleolo para cada tipo de axente, non para cada axente individual. Isto fará a complexidade independente do número de axentes.

Proposición 3.24. A función *nucleolo* execútase en tempo $\mathcal{O}(m + m^3k + k^2)$, onde m é o número de seccións na entrada do problema da autoestrada e k é o número de coalicións relevantes.

Como o número de coalicións relevantes é limitado por $\frac{1}{2}m(m+1)$ para un problema da autoestrada con m seccións, é certo que a complexidade é polo menos $\mathcal{O}(m^5)$. Se aplicamos a Proposición 3.22 á subclase dos xogos de aeroporto, a complexidade derivada convertese en $\mathcal{O}(m^4)$ sustituindo $k = \mathcal{O}(m)$ coalicións relevantes. Sen embargo, é fácil de atopar unha cota de complexidade $\mathcal{O}(m^3)$ para a función *nucleolo* no caso dos xogos de aeroporto, tendo en conta que os números $\beta(L, R)$ non necesitan ser calculados. Esta é a mesma cota para a complexidade que a proporcionada para xogos de aeroporto descrita por Littlechild (1974).

Finalmente, veremos cun exemplo numérico o funcionamento do algoritmo.

Exemplo 3.25 Sexa (N, M, C, T) o problema da autoestrada representado na Figura 3.2, con $N = \{13, 24, 35, 15\}$, $M = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ e $C : M \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$[1] de xeito que $C(t_1) = 8$, $C(t_2) = 4$, $C(t_3) = C(t_4) = 6$ e $T : N \longrightarrow 2^M$ é tal que $T(13) = \{t_1, t_2\}$, $T(24) = \{t_2, t_3\}$, $T(35) = \{t_3, t_4\}$ e $T(15) = M$. O xogo de custos TU asociado a este problema é

S	$\emptyset$	$\{13\}$	$\{24\}$	$\{35\}$	$\{15\}$	$\{13,24\}$	$\{13,35\}$	$\{13,15\}$	$\{24,35\}$
$c(S)$	0	12	10	12	24	18	24	24	16

S	$\{24,15\}$	$\{35,15\}$	$\{13,24,35\}$	$\{13,24,15\}$	$\{13,35,15\}$	$\{24,35,15\}$
$c(S)$	24	24	24	24	24	24

S	$\{N\}$
$c(S)$	24

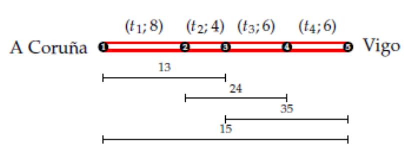

Figura 3.2: Autoestrada liñal do exemplo 3.23

En primeiro lugar, identificaremos as coalicións relevantes:

$$RC(N, c) = \{\{13\}, \{24\}, \{35\}, \{13, 24\}, \{24, 35\}\}.$$

A continuación, buscamos as coalicións que cumplan as condicións do Corolario 3.16. Non hai ningunha correspondente ó apartado 1. Entón, só temos que calcular γ e δ. Polo tanto,

[1] Cambiamos a notación neste exemplo para unha maior claridade.

$$\begin{aligned}
\gamma(\{13\}) &= \frac{12}{2}, \\
\gamma(\{24\}) &= \frac{10}{2}, \\
\gamma(\{35\}) &= \frac{12}{2}, \\
\gamma(\{13,24\}) &= \frac{18}{3} \text{ e } \gamma(\{24,35\}) = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Entón,

$$\gamma = \text{mín}\left\{6,5,6,\frac{16}{3}\right\} = 5.$$

Por outra banda, $\delta = \frac{24}{4}$ e entón,

$$\lambda = \text{mín}\{\gamma,\delta\} = 5 \text{ que se corresponde coa coalición } Z = \{24\}.$$

Polo tanto, $\nu_{24} = 5$.

Agora, procedemos a reducir (N,M,C,T). Os axentes en Z^c teñen que pagar o custo de $T(Z)$ menos o custo que foi pagado polo axente 24, isto é,

$$C(\{24\}) - \nu_{24} = 10 - 5 = 5.$$

Pasamos a consideralo problema:

$$\Gamma_{\pi,Z} = (N_{\pi,Z}, M_{\pi,Z}, C_{\pi,Z}, T_{\pi,Z}) \text{ con } \pi = 5.$$

Entón:

$$\begin{aligned}
N_{5,Z} &= \{13,35,15\} \\
g_{13} &= \text{mín}\{5,4\} = 4 \\
g_{35} &= \text{mín}\{5,6\} = 5 \\
g_{15} &= \text{mín}\{5,10\} = 5 \\
N^* &= \{13\} \\
N^*_l &= \{13\} \\
N^*_r &= \emptyset \\
\varsigma_{13} &= 4 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow \xi = (4,5). \\
N_{\pi,Z} &= \{13,35,15\}, \\
M_{\pi,Z} &= \{t_1, t_1^5, t_2^5, t_4\},
\end{aligned}$$

$$C_{\pi,Z} : M_{\pi,Z} \to R_{++}$$

é tal que:

$$\begin{aligned}
C_{\pi,Z}(t_1) &= C(t_1) = 8, \\
C_{\pi,Z}(t_1^5) &= \xi_1 = 4, \\
C_{\pi,Z}(t_2^5) &= \xi_2 - \xi_1 = 1, \\
C_{\pi,Z}(t_4) &= C(t_4) = 6,
\end{aligned}$$

e por outra banda,

$$T_{\pi,Z} : N_{\pi,Z} \to 2^{M_{\pi,Z}}$$

é tal que:

$$\begin{aligned} T_{\pi,Z}(13) &= \{t_1, t_1^5\}, \\ T_{\pi,Z}(35) &= \{t_1^5, t_2^5, t_4\} \text{ e} \\ T_{\pi,Z}(15) &= M_{\pi,Z}. \end{aligned}$$

O problema está representado na Figura 3.3 e o xogo de utilidade transferible asociado a este problema é:

S	$\emptyset$	$\{13\}$	$\{35\}$	$\{15\}$	$\{13,35\}$	$\{13,15\}$	$\{35,15\}$	$N_{\pi,Z}$
$C_{\pi,Z}(S)$	0	12	11	19	19	19	19	19

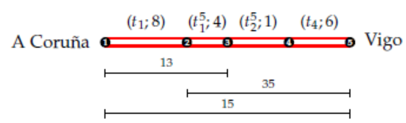

Figura 3.3: Segunda autoestrada liñal do exemplo 3.23

Notemos que, o problema é diferente do orixinal. Unha mostra disto é o feito de que os axentes 13 e 35 no problema novo, teñen seccións en común, mentres que no orixinal eso non sucede.

Para este novo problema seguimos o mesmo procedemento para calcular o nucleolo. O conxunto de coalicións relevantes é:

$$RC(N_{\pi,Z}, c_{\pi,Z}) = \{\{13\}, \{35\}\}.$$

Entón,

$$\gamma = \text{mín}\left\{6, \frac{11}{2}\right\} = 5.5 \text{ e } \delta = \frac{19}{3},$$

polo que, λ =5.5 que se corresponde coa coalición $\overline{Z} = \{35\}$ e ν_{35} =5.5.

O problema reducido que podemos obter de este problema é o seguinte. Do procedemento obtemos,

$$\begin{aligned} \pi &= 5.5, \\ N_{5.5,\overline{Z}} &= \{13, 15\}, \\ g_{13} &= \text{mín}\{5.5, 4\} = 4, \\ g_{15} &= \text{mín}\{5.5, 11\} = 5.5, \\ N^* &= \{13\}, g_{13} = 4 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow \xi = (4, 5.5), \\ N_l^* &= \{13\}, \\ N_r^* &= \emptyset. \end{aligned}$$

Entón, o problema reducido da autoestrada é:

$$(N_{\pi,\overline{Z}}, M_{\pi,\overline{Z}}, C_{\pi,\overline{Z}}, T_{\pi,\overline{Z}})$$

de xeito que $N_{\pi,\overline{Z}} = \{13, 15\}$, $M_{\pi,\overline{Z}} = \{t_1, t_1^{5.5}, t_2^{5.5}\}$ e

$$C_{\pi,\overline{Z}} : M_{\pi,\overline{Z}} \to \mathbb{R}_{++}$$

é tal que:

$$\begin{aligned} C_{\pi,\overline{Z}}(t_1) &= 8, \\ C_{\pi,\overline{Z}}(t_1^{5.5}) &= \xi_1 = 4, \\ C_{\pi,\overline{Z}}(t_2^{5.5}) &= \xi_2 - \xi_1 = 1.5 \end{aligned}$$

e

$$T_{\pi,\overline{Z}} : N_{\pi,\overline{Z}} \longrightarrow 2^{M_{\pi,\overline{Z}}}$$

é tal que $T_{\pi,\overline{Z}}(13) = \{t_1, t_1^{5.5}\}$ e $T_{\pi,\overline{Z}}(15) = M_{\pi,\overline{Z}}$. O problema está representado na Figura 3.4 e o xogo TU de custos asocicado a este problema é

S	$\emptyset$	$\{13\}$	$\{15\}$	$N_{\pi,Z}$
$C_{\pi,\overline{Z}}(S)$	0	12	13.5	13.5

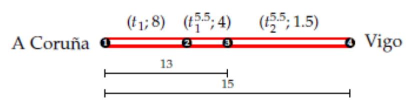

Figura 3.4: Terceira autoestrada liñal do exemplo 3.23

Agora $RC = \{13\}$, $\gamma(13) = 6 = \gamma = \lambda = \delta$, o que se corresponde coa coalición $\{13\}$ de onde $\nu_{13} = 6$ e polo tanto $\nu_{15} = 7.5$. Entón, o nucleolo para (N, c) é:

$$\nu = (6, 5, 5.5, 7.5).$$

Podemos comparar o nucleolo con valor de Shapley e o τ-valor. Mediante as fórmulas que definimos anteriormente, obtemos que o valor de Shapley é:

$$\Phi(N, c) = \left(\frac{16}{3}, \frac{10}{3}, 5, \frac{31}{3}\right),$$

e o τ-valor é:

$$\tau(N, c) = \left(\frac{144}{29}, \frac{120}{29}, \frac{144}{29}, \frac{288}{29}\right).$$

Capítulo 4

O problema das gabias

Neste capítulo usaremos unha mostra de vintecinco canles de rego, tamén chamadas gabias, para tratar de modelizar como se debería de realizar a asignación de xeito equitativo. Esta mostra tomámola do artigo *Shared irrigation costs: An empirical and axiomatic analysis* de Aadland, D. e Kolpin, V. (1998) no cal se basa fundamentalmete este capítulo. As canles de rego da nosa mostra son principalmente usadas para suministrar auga nos meses de verán. As canles comezan nunha comporta que se utiliza para controlar o volume de auga desviada dende a vía fluvial continuando a través dos terreos dos gandeiros. Cada rancho distribúese ó longo da canle de rego de xeito que non hai dous usuarios que compartan a mesma porción de canle. A auga desvíase da canle principal de rego co fin de inundar os campos de cultivo e ademáis proporcionar auga para o gando como se pode observar na Figura 4.1. Ó longo da nosa mostra, os gandeiros son individualmente responsables dos custos de mantemento nos que se incurre ó levar a cabo a conservación das canles privadas que se ramifican da canle principal. Isto é, só se repartirán os custos de mantemento da canle de rego principal. Os gastos máis comúns implican a reparación da comporta, eliminación de sedimentos e escombros e a limpeza das orillas da acequia. En xeral, os gastos anuais van dende os 1000$ ata os 2000$, aínda que estos gastos teñen un alto grao de volatilidade. Dada a natureza non previsible do clima e do gando, que son os principais causantes do deterioro das canles de rego, os gastos anuais poden oscilar entre cero e 20000$.

Os tipos de repartos de custos que atopamos na nosa mostra foron de dous tipos, o primeiro é o chamado *método de asignación de custos en serie*. Baixo esta regra, os custos de mantemento de cada proxecto son compartidos por cabeza, por reparto da auga ou unha base por hectárea por tódolos que se benefician do proxecto. Dentro do reparto de auga, cada gandeiro está dotado dunha cantidade de auga e os custos distribúense a través de cada unidade de auga usada. A segunda regra que atopamos na nosa mostra, é o mecanismo por medio do cal tódolos custos de mantemento se reparten equitativamente entre os gandeiros independentemente de quen se beneficie, unha vez máis, por cabeza, por reparto de auga ou unha base por hectáreas. O único valor atípico na nosa mostra foi unha combinación do reparto de custos medios e marxinais onde calquera traballo sobre a comporta usa a regra de promedio por hectáreas mentres que todos os demáis proxectos están suxeitos a prezos de custos marxinais, isto é, os custos son pagados enteiramente polo gandeiro propietario da terra onde o proxecto se leva a cabo. Como un breve resumo, catorce das vintecinco gabias da nosa mostra usan o método de reparto de custos en serie, sete usan unha base por cabeza, tres unha base por reparto de auga e catro unha base por hectárea. Un total de dez canles usan unha variación do reparto de custos medio, unha usa unha base por cabeza, tres unha base por reparto de auga e seis usan unha base por hectárea. Finalmente, unha canle usou a combinación entre custos marxinais e medios como se sinalou anteriormente.

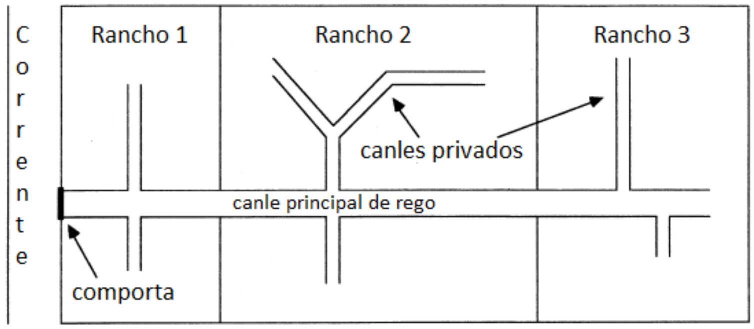

Figura 4.1: Representación gráfica dunha canle de rego compartida.

4.1. Análise axiomático

Para realizar o análise axiomático hai que ter en conta dúas características esenciais das canles de rego. En primeiro lugar, tódolos axentes usan a auga para regar as terras do rancho. Como consecuencia, os axentes non poden ser ordenados pola forma na que utilizan a auga. En segundo lugar, as gabias teñen a capacidade de realizar de xeito óptimo, ou case óptimo, o rego da propiedade de cada gandeiro en toda a temporada de cultivo. Polo tanto o problema de asignación que se presenta é un problema de asignación de custos.

A continuación, introduciremos a notación formal coa que denotaremos as canles de regadío da nosa mostra. Sexa $N = \{1, 2, ..., n\}$ o conxunto finito e ordenado de axentes que teñen acceso as canles, ordenados tendo en conta a localización secuencial ó longo dos límites da canle. O axente i é así o i-ésimo usuario augas abaixo da comporta da gabia. Para cada $i \in N$, sexa c_i o custo anual de mantemento do segmento da canle situado na propiedade do i-ésimo axente e polo tanto, todos estos custos caracterízanse polo vector $c = (c_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^N_+$. Trátase da determinación dunha asignación equitativa dos custos de mantemento agregados $\sum_{i=1}^n c_i$.

Definición 4.1. Unha función $\xi : \mathbb{R}^N_+ \longrightarrow \mathbb{R}^N_+$ é unha regra de reparto de custos se para cada $c \in \mathbb{R}^N_+$ séguese que $\sum_{i=1}^n \xi_i(c) = \sum_{i=1}^n c_i$, onde $(\xi_i(c))_{i\in N} = \xi(c)$.

a) A regra de reparto de custos medios defínese por $\xi_i^m(c) = \sum_{j=1}^n c_j/n$ para cada $i \in N$.

b) A regra de reparto de custos en serie defínese como $\xi_i^s(c) = \frac{c_1}{n} + ... + \frac{c_i}{(n-i+1)}$ para cada $i \in N$.

A regra de reparto de custos medios toma simplemente os custos totais de mantemento das gabias e divídeos equitativamente entre tódolos axentes que requiren o uso destos segmentos para satisfacer as necesidades de rego.

Para aclarar mellor estes mecanismos, é beneficioso considerar o seguinte exemplo representativo.

Exemplo 4.2. Supoñamos $N = \{1, 2, 3\}$ e $c = (6, 1, 5)$ os custos medidos en miles de dólares. A regra de reparto de custos medios divide os custos agregados de xeito uniforme entre os tres axentes, isto é, $\xi^m(c) = (4, 4, 4)$. Por outra banda, a regra de reparto de custos en serie divide os custos do segmento 1 equitativamente entre os tres axentes; divide os custos do segmento 2 equitativamente entre os axentes 2 e 3 e asigna todo o custo do segmento 3 ó axente 3 xa que é o único axente que require os seus servicios. Polo tanto, $\xi^s(c) = (2, 2.5, 7.5)$.

Pasamos agora á lista de principios de equidade estáticos e dinámicos que os gandeiros apoiaban de maneira explícita. Estes principios forman a base para a caracterización dos esquemas observados na nosa mostra. Na medida na que a equidade estática e dinámica persistente suxire satisfación a unha asignación no desempeño do mecanismo, a nosa caracterización ofrece soporte teórico para a lonxevidade observada dos mecanismos na nosa mostra.

Axioma Diremos que ξ é de *custos monótona* se $\xi(c) \leq \xi(c')$ sempre e cando $c \leq c'$.

Axioma Diremos que ξ satisfai *orde* se $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}^N_+$ e $i \leq j$.

Axioma Finalmente, ξ é *sen subsidio* se $\sum_{h \leq i} \xi_h(c) \leq \sum_{h \leq i} c_h$ para todo $i \in N$ e $c \in \mathbb{R}^N_+$.

Estes tres axiomas teñen interpretacións directas. A monotonía establece que o incremento de custos non pode inducir decrecementos en ningún dos repartos de custos dos axentes. Este criterio de equidade garante que ningún axente pode gañar tomando accións que causen que os custos globais se eleven. O axioma de orde establece que os repartos de custos son clasificados dacordo cos recursos usados. Se $j > i$, entón máis segmentos da gabia deben de manterse para prover as necesidades do axente j-ésimo que non son requeridas polo axente i. Entón, a regra de orde suxire que a j débeselle de asignar un pago polo menos tan grande como o do axente i. O criterio libre de subsidio prohibe que calquera grupo de axentes poida ser obligado a pagar máis que o seu custo marxinal colectivo, isto é, o custo independente. Se algún subsidio está presente, entón algúns subconxuntos de axentes pagan colectivamente para o mantemento de tódolos segmentos da gabia que usan, ademáis fan un pago subvencionado adicional ós axentes situados augas abaixo, un resultado que considera este principio como inxusto.

Pódese comprobar que a regra de repartos en serie satisfai cada un destos tres axiomas mentres que o reparto de custos medios só satisfai os dous primeiros. Ademáis os gandeiros da enquisa indican que a violación de calquera destos tres principios sería inxusta. A caracterización aparente do reparto de custos medios na nosa mostra, debe de ser consistente con este feito. En consecuencia, consideraremos unha regra modificada que se esforza por ser tan próxima como é posible á regra de repartos medios sen deixar de verificar os criterios de monotonía dos custos, orde e libre de subsidios.

Definición 4.3. Unha regra de reparto de custos medios restrinxida é un mecanismo que verifica as propiedades de monotonía de custos, orde e libre de subsidios e que a súa vez obtén a diferencia máis pequena entre a maior e a menor asignación de custos que calquera outro mecanismo deste tipo en cada perfil de custos posible.

A regra de reparto de custos medios obtén o estado no cal o maior e o menor asignación de custos é son idénticos. Unha regra de reparto de custos medios restrinxidos busca conseguir este obxectivo, e ó mesmo tempo cumprir os estándares de xustiza establecidos. Esta definición, sen embargo, non ofrece ningunha garantía tanto de existencia como de unicidade. O noso primeiro resultado demostra a existencia dunha única regra de reparto de custos medios restrinxida e proporciona unha fórmula explícita para o seu cálculo.

Para establecer esta fórmula, é convinte adoptar a seguinte notación. Dado $h, i \in N \cup \{0\}$ con $i > h$ defínese o custo *per cápita* atribuíble ós segmentos $\{h+1, ..., i\}$ da gabia cando estes se distribúen entre os correspondentes gandeiros como:

$$P(h, i) = \frac{\sum_{h<j\leq i} c_j}{(i-h)}.$$

Teorema 4.4. Existe unha única regra de repartos medios ξ^r. Máis aínda, ξ^r pode ser construída recursivamente como segue. Sexan:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \text{mín}\{P(0,i) : i > 0\},\\
h_1 &= \text{máx}\{i : P(0,i) = \mu_1\}, ...,\\
\mu_j &= \text{mín}\{P(h_{j-1},i) : i > h_{j-1}\},\\
h_j &= \text{máx}\{i : P(h_{j-1},i) = \mu_j\}, ...
\end{aligned}$$

Denotando por n' o índice final j desta secuencia finita, $\xi_i^r(c) = \mu_j$ para cada $j = 1,...,n'$ e $i \in (h_{j-1}, h_j]$.

Proba. Sexa ξ que satisfai a Definición 4.3 e sexa ξ^r definida anteriormente. En primeiro lugar, establecemos que $\xi_n(c) = \xi_n^r(c)$ para todo c e para probalo supoñamos que $\xi_n(c) < \xi_n^r(c)$ para algún c. A propiedade de orde implica que $\xi_n(c) \geq \sum c_i/n$, isto é, existe j de xeito que $\xi_j^r(c) < \xi_{j+1}^r(c) = \xi_n^r(c)$. Se temos en conta a definición de ξ^r e a nosa hipótese inicial, séguese que $\sum_{i\leq j} c_i = \sum_{i\leq j} \xi_i(c)$. Pero isto entra en contradición co feito de que sexa libre de subsidios, implicando que $\xi_n(c) \geq \xi_n^r(c)$ para todo c. Como ξ minimiza a diferencia entre o maior e o menor reparto de custos e non hai ningún outro mecanismo de clasificación que satisfaga libre de subsidios xunto co feito de que ξ asigne un maior reparto ó axente 1 que ξ^r, concluímos que $\xi_n(c) = \xi_n^r(c)$ para todo c.

Teñamos en conta que se $\xi_n^r(c) = \xi_1^r(c)$, teríamos que a diferencia entre o maior e o menor reparto de custos baixo ξ^r é igual a cero, implicando que $\xi(c) = \xi^r(c)$.

Ademáis, podemos afirmar que se $\xi_n^r(c) = \xi_i^r(c)$ implica que $\xi(c) = \xi^r(c)$ entón se $\xi_n^r(c) = \xi_{i+1}^r(c)$ tamén implica que $\xi(c) = \xi^r(c)$. Sexa c tal que $\xi_n^r(c) = \xi_{i+1}^r(c)$. Se $\xi_n^r(c) = \xi_i^r(c)$, a nosa afirmación séguese por hipótese. Supoñamos que $\xi_n^r(c) > \xi_i^r(c)$, o que implica que $\sum_{h\leq i} \xi_h^r(c) = \sum_{h\leq i} c_i$. Tomando $c' \leq c$ de xeito que $\xi_h^r(c') = \xi_h^r(c)$ para todo $h \leq i$ e $\xi_n^r(c') = \xi_i^r(c)$. Por hipótese, $\xi(c') = \xi^r(c')$ e polo tanto $\sum_{h\leq i} \xi_h(c') = \sum_{h\leq i} \xi_h^r(c') = \sum_{h\leq i} c_i$. As propiedades de monotonía dos custos e libre de subsidios implican que $\xi_h(c') = \xi_h(c)$ para cada $h \leq i$. Pero xa tiñamos establecido que $\xi_n(c) = \xi_n^r(c)$ e como ademáis temos que $\xi_n^r(c) = \xi_j^r(c)$ para todo $j \geq i+1$, concluímos que $\xi(c) = \xi^r(c)$ de onde se segue a proba da afirmación. A conclusión séguese por indución.

A pesar da fórmula aparentemente complexa ofrecida polo Teorema 4.4 o seu cálculo resulta sinxelo. O valor μ_1 é simplemente o menor custo per cápita atribuíble a unha parte continua da gabia comenzando esta dende a comporta e $\{1,...,h\}$ representa a secuencia máis longa de segmentos de gavia para obter este custo per cápita. O menor custo per cápita dun segmento de gavia continuo comezando en $h_1 + 1$ é μ_2 que se obtén mediante a lonxitude $\{h_1 + 1,..., h_2\}$ e así sucesivamente.

Considerando o exemplo anterior para o cal $N = \{1,2,3\}$ e $c = (6,1,5)$, ocusto per cápita do primeiro segmento é 6, o custo per cápita dos dous primeiros segmentos é 3.5 e o dos tres segmentos é 4. En consecuencia, $\mu_1 = 3{,}5$ e $h_1 = 2$. De aquí séguese que $\xi^r(c) =$(3.5,3.5,5), que pode ser comparado con $\xi^m(c) = (4,4,4)$ e $\xi^s(c) = (2,2.5,7.5)$.

A continuación veremos outro exemplo para comprender mellor o que sucede na fórmula presentada no Teorema 4.4.

Exemplo 4.5. Sexan $N = \{1,2,3,4,5\}$ e $c = (6,2,5,4,5)$. Neste caso o custo mínimo per cápita obtense para a lonxitude $\{1,2\}$ e como consecuencia, $\mu_1 = 4$ e $h_1 = 2$. Entre os tres segmentos residuais $\{3,4,5\}$, o custo mínimo per cápita obtense para os segmentos $\{3,4\}$ e así, $\mu_2 = (c_3 + c_4)/2 =$4.5 e $h_2 = 4$. Polo tanto, séguese que:

$$\xi^r = (4,4,4.5,4.5,5)$$

e

$$\xi^s(c) = (1.2,1.7,3.36,5.36,10.36).$$

Aínda que o noso análise se adapta especialmente á aplicación dos repartos de custos de rego, é interesante comparar o reparto de custos medios restrinxido coa asignación igualitaria introducida por Dutta e Ray (1989) dentro do contexto xeral dos xogos cooperativos con utilidade transferible. Un *xogo de rego* pode ser transformado nun xogo con utilidade transferible definindo para cada $S \subseteq N$, o valor $v(S) = -c(S)$ onde $c(S)$ representa o custo mínimo de mantemento de tódolos axentes en S, isto é,

$$c(S) = \sum_{j \leq \text{máx}\{i \in S\}} c_j.$$

Ademáis o xogo v é convexo xa que verifica que:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

para todo $S, T \subseteq N$ con $v(\emptyset) = 0$. No contexto de xogos convexos, Dutta e Ray probaron que a asignación igualitaria defínese de maneira única por unha fórmula similar a que aparece no Teorema 4.4. De feito, é fácil de probar que no ámbito dos xogos de rego, a regra de reparto de custos restrinxida e a asignación igualitaria son indistinguibles. Así, o análise de Dutta e Ray tamén defende ξ^r como un medio equitativo para o reparto de custos de irrigación.

A continuación, presentaremos unha propiedade de equidade dinámica que captura a idea de que os aumentos de custos non deben inducir a esos grupos que disfrutaron de subsidios no pasado a inequívocamente intensificar as súas explotacións de aqueles que financian estes subsidios.

Axioma ξ satisfai reciprocidade se:

(a) $\sum_{h \leq i} \xi_h(c) \leq \sum_{h \leq i} c_h$,

(b) $c' \geq c$, e

(c) $\sum_{h \leq i} [c_h - \xi_h(c)] \geq \sum_{j > i} (c'_j - c_j)$.
Colectivamente implica que non é certo que $\xi_h(c') - \xi_h(c) < \xi_j(c') - \xi_j(c)$ para todo $h \leq i$ e $j > i$.

É dicir, a reciprocidade establece que se (a) os axentes $\{1, ..., i\}$ son subvencionados colectivamente, (b) os custos increméntanse de c a c', e (c) os custos inducidos sobre os segmentos máis alá de i son colectivamente menores que o subsidio disfrutada por $\{1, ..., i\}$, entón considérase inxusto ter cada axente en $\{1, ..., i\}$, o grupo que recibiu o subsidio, disfrutando dunha cuota estrictamente menor que a de cada axente en $\{i+1, ..., n\}$ (grupo que financia o subsidio). Intuitivamente, sempre e cando os aumentos de custo atribuíbles ós axentes $\{i+1, ..., n\}$ non sobrepasen o subsidio otorgado ós axentes $\{1, ..., i\}$, os axentes subvencionados deben polo menos unha pequena deuda ó grupo da subsidio. A reciprocidade esixe que esta deuda sexa garantida como mínimo por un membro do grupo que subvencionou que garanta que se conceda un aumento da cuota non máis grande que o maior aumento experimentado pola cuota dentro do grupo subvencionado.

Teorema 4.6. A regra de reparto de custos medios restrinxidos caracterízase polas propiedades de monotonía, orde, libre de subsidios e reciprocidade.

Así, as dúas propiedades estáticas de equidade de orde e libres de subsidios, xunto coas dúas propiedades dinámicas equitativas da monotonía dos custos e reciprocidade determinan totalmente a regra de repartos medios restrinxida.

Recordemos que a Definición 4.3 caracteriza o reparto de custos medios restrinxidos como resultado de minimizar a diferencial entre o maior e o menor reparto de custos suxeitos ós criterios de monotonía de custos, orde e libre de subsidios.

O reparto de custos en serie tamén aparece na nosa mostra. Pasamos agora a unha defensa axiomática deste procedemento para o reparto dos custos de regadío.

Axioma ξ é *semi marxinal* se $\xi_{i+1}(c) \leq \xi_i(c) + c_{i+1}$ para todo $i = 1, ..., n-1$.

Axioma ξ é *incrementalmente libre de subsidios* se para todo $i \in N$,

$$\sum_{h \leq i}[\xi_h(c') - \xi_h(c)] \leq \sum_{h \leq i}[c'_h - c_h]$$

sempre e cando $c' \geq c$.

Intuitivamente, a semi marxinalidade esixe que se $\xi_i(c)$ se considera unha asignación xusta para un i individuo usando só os segmentos $\{1, ..., i\}$ da canle, entón o axente $i+1$ non debería esperar pagar máis que $\xi_i(c)$ xunto co custo total de mantemento do segmento c_{i+1}. O principio incrementalmente libre de subsidios formula o feito de que a asignación sexa libre de subsidios cunha perspectiva gradual. En efecto, tomando $\xi(c)$ como a situación actual, a propiedade incrementalmente libre de subsidios dinos que non hai ningún grupo de axentes obligados a pagar incrementalmente máis que a escalada gradual colectiva dos custos de mantemento.

A regra de reparto de custos en serie caracterízase pola monotonía dos custos, orde, semimarxinalidade e por ser incrementalmente libre de subsidios.

O Teorema 4.7 demostra que o reparto de custos en serie está caracterizado por dous principios estáticos de equidade (orde e semimarxinalidade) e dous principios dinámicos de equidade (monotonía de custos e o principio incremental libre de subsidios).

4.2. Variacións ponderadas

Na nosa mostra tamén se atopan variacións das regras de reparto de custos medios e de reparto de custos en serie debidas á variación das hectáreas e a auga. Estas variantes poden ser caracterizadas usando resultados análogos ós nosos resultados per cápita. En particular, supoñemos que a cada axente se lle asigna un peso $p_i > 0$. Os pesos poderíanse corresponder coas hectáreas regadas, o peso do reparto de auga ou quizais algunha outra medida. Consideremos a seguinte definición.

Definición 4.8. A función $\omega : \mathbb{R}^N_+ \longrightarrow \mathbb{R}^N_+$ é unha regra de reparto de custos *p-ponderada* se para cada $c \in \mathbb{R}^N_+$ séguese que $\sum_{i=1}^n \omega_i(c)p_i = \sum_{i=1}^n c_i$.

1. A regra de reparto de custos medios p-ponderada está definida por:

$$\omega_i^a(c) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j}{\sum_{j=1}^n p_j}.$$

2. A regra de reparto de custos en serie p-ponderada defínese mediante:

$$\omega_i^s(c) = \frac{c_1}{\sum_{j \geq 1} p_j} + \frac{c_2}{\sum_{j \geq 2} p_j} + ... + \frac{c_i}{\sum_{j \geq i} p_j}$$

para cada $i \in N$.

As regras de reparto de custos medios e en serie p-ponderadas, son versións ponderadas análogas ós mecanismos atopados na Definición 4.1. A regra de reparto de custos medios p-ponderada asigna os custos totais uniformemente a través de cada unidade de peso, mentres que a regra de reparto de custos en serie divide os custos de cada segmento de xeito equitativo entre cada unidade de peso que require auga para pasar a través do segmento correspondente. Para mostralo, consideraremos o noso exemplo anterior no cal $N = \{1, 2, 3\}$ e $c = (6, 1, 5)$. Supoñamos ademáis que $p = (1, 2, 3)$ de onde se segue que $\omega^a(c) = (2, 2, 2)$ e $\omega^s(c) =$(1,1.2,2.86).

Ó igual que no caso do axuste per cápita, a regra de reparto de custos medios p-ponderada, non satisfai o axioma fundamental de equidade da nosa mostra, é dicir, o análogo a libre de subsidios no caso ponderado. De novo, apelaremos a un mecanismo promedio restrinxido, que se define seguindo a introdución dos homólogos ponderados dos nosos axiomas de equidade per-cápita.

Axioma ω é de *custos monótona* se $\omega(c) \leq \omega(c')$ sempre e cando $c \leq c'$.

Axioma ω satisfai *orde* se $\omega_i(c) \leq \omega_j(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}_+^N$ e $i \leq j \in N$.

Axioma ω é *libre de subsidios* se $\sum_{h \leq i} \omega_h(c) p_h \leq \sum_{h \leq i} c_h$ para todo $i \in N$ e $c \in \mathbb{R}_+^N$.

Axioma ω satisfai *reciprocidade* se $\sum_{h \leq i} \omega_h(c) p_h \leq \sum_{h \leq i} c_h$, $c' \geq c$, e

$$\sum_{h \leq i} [c_h - \omega_h(c) p_h] \geq \sum_{j > i} (c'_j - c_j)$$

colectivamente implica que non se verifica que $\omega_h(c') - \omega_j(c)$ para todo $h \leq i$ e $j > i$.

Axioma ω é *semi marxinal* se:

$$\omega_{i+1}(c) \leq \omega_i(c) + \frac{c_{i+1}}{p_{i+1}}$$

para todo $i = 1, ..., n-1$.

Axioma ω é *incrementalmente libre de subsidios* se para todo $i \in N$,

$$\sum_{h \leq i} [\omega_h(c') - \omega_h(c)] p_h \leq \sum_{h \leq i} [c'_h - c_h]$$

sempre e cando se teña que $c' \geq c$.

Definición 4.9. Unha regra de reparto de custos p-ponderada é un mecanismo que verifica monotonía de custos, orde e a súa vez libre de subsidios p-ponderadas que consegue a menor diferencia entre a maior e a menor asignación ponderada que calquera outro mecanismo deste tipo en cada un dos posibles perfís de custos.

Cada un dos nosos anteriores resultados poden ser reformulados en termos do axuste p-ponderado. En efecto, cada unidade de peso adopta o papel que anteriormente estaba nas mans dos axentes dentro do marco per cápita.

4.3. Asignación de custos con estructura coalicional

A continuación, imos a plantexar a extensión deste problema ó caso de unións a priori, o que sería aplicable se os granxeiros deciden agruparse en cooperativas ou se cada granxeiro posee varios terreos distintos. Deste xeito, o *problema de custos dunha gabia con unións a priori*, ou problema de custos con estrutura coalicional, ven dado pola terna (N, c, P), onde $N = \{1, ..., n\}$ é o conxunto de fincas que hai ó longo da canle de rego, c é o vector de custos da canle e $P = \{P_1, ..., P_m\}$, con $m \leq n$, é unha partición do conxunto N, onde $M = \{1, ..., m\}$ é o conxunto de granxeiros ou cooperativas. Neste caso, unha regra de reparto de custos é unha función f que asigna a cada problema de custos con unións a priori (N, c, P) un vector $f(N, c, P) = (f_i(N, c, P))_{i \in N}$ tal que:

$$\sum_{i \in N} f_i(N, c, P) = \sum_{i \in N} c_i.$$

A continuación imos a propoñer *unha extensión da regra de reparto de custos promedio* para este caso, que foi proposta en Alonso-Meijide et al (2003). Por este motivo, imos a utilizar o procedemento que usou Owen (1977) para construír a extensión do valor de Shapley dun xogo TU para o caso de xogos con unións a priori. Consideraremos, polo tanto, dúas etapas:

1. Repártense os custos entre as unións e para iso, defínese o problema de custos cociente, no que únicamente se consideran os custos das distintas unións e onde o custo dunha unión hai que calculalo tendo en conta o custo do tramo de canle necesario para satisfacer as necesidades desa unión. Para formalizar a idea anterior, consideramos para cada coalición $S \subseteq N$ o índice $\tau_S = \text{máx}\{i : i \in S\}$. Tomaremos unha permutacion $\sigma \in \Pi(M)$, onde

$$\Pi(M) = \{\sigma : \{1, ..., m\} \rightarrow M\},$$

onde: $\sigma(l)$ denota o axente que ocupa a posición l, de xeito que $\tau_{P_{\sigma(1)}} < ... < \tau_{P_{\sigma(m)}}$, isto é, ordenamos as unións de xeito crecente con respecto ós tramos da canle que sexan necesarios usar. Defínese o *problema de custos cociente* como a tupla (M, c^P), onde $M = \{1, ..., m\}$ e

$$c^P = (c^P_{\sigma(l)})_{\sigma(l) \in M},$$

con $c^P_{\sigma(1)} = \sum_{j=1}^{\tau_{P_{\sigma(1)}}} c_j$ e $c^P_{\sigma(l)} = \sum_{j=\tau_{P_{\sigma(l-1)}}+1}^{\tau_{P_{\sigma(l)}}} c_j$ para todo $l \in M$, $l > 1$, é o vector de custos marxinais das unións. O reparto de custos entre as unións lévase a cabo aplicando a regra de Aadland e Kolpin ó problema (M, c^P), obténdose $\xi(M, c^P)$.

Exemplo 4.10. Sexan $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $c = (5, 4, 9, 2, 20, 8, 30)$. Tense que:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \text{mín}\{5, 4.5, 6, 5, 8, 8, 11.1\} = 4.5 \ e \ h_1 = 2 \\ \mu_2 &= \text{mín}\{9, 5.5, 10.3, 9.75, 13.8\} = 5.5 \ e \ h_2 = 4 \\ \mu_3 &= \text{mín}\{20, 14, 19.3\} = 14 \ e \ h_3 = 6 \\ \mu_4 &= 30 \ e \ h_4 = 7. \end{aligned}$$

Polo que $\xi(N, c) = (4.5, 4.5, 5.5, 5.5, 14, 14, 30)$.

Se no exemplo anterior consideramos que temos unha partición $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ onde $P_1 = \{1, 3\}$, $P_2 = \{2, 4\}$, $P_3 = \{6\}$ e $P_4 = \{5, 7\}$ tense que o problema cociente ven dado por $M = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\tau_{P_1} = 3 < \tau_{P_2} = 4 < \tau_{P_3} = 6 < \tau_{P_4} = 7$, co que se deduce que σ é a identidade. Obténse tamén que o vector de custos é $c^P = (18, 2, 28, 30)$. Aplicando a regra de reparto de custos promedio chégase a que:

$$\begin{aligned} \mu_1^P &= \text{mín}\{18, 10, 16, 19.5\} = 10 \text{ e } h_1^P = 2, \\ \mu_2^P &= \text{mín}\{28, 29\} = 28 \text{ e } h_2^P = 3, \\ \mu_3^P &= 30 \text{ e } h_3^P = 4, \end{aligned}$$

e polo tanto, $\xi(M, c^P) = (10, 10, 28, 30)$.

2. Repártese o custo asignado a cada unión, según a regra de Aadland e Kolpin entre os axentes que forman parte desa unión. Para isto, imos a ter en conta os custos dos xogadores de dita unión se se unen con outras unións. Fixamos deste xeito unha unión $P_l \in P$ tal que $P_l = \{k_1, ..., k_{pl}\}$ onde $k_1 < ... < k_{p_l}$. Ademáis, dado $k \in P_l$, denotaremos por P^k ó sistema de unións de maneira que:

$$P^k = \{P^k_1, ..., P^k_m\} = \{P_1, ..., P_{l-1}, \{k\}, P_{l+1}, ..., P_m\}.$$

Supoñamos, pois, que o axente k é o único membro da unión a que pertence que vai a negociar co resto das unións. Neste caso, pasamos a ter un novo problema de custos no que se renomean, tomando $\sigma^k \in \Pi(M)$, as unións de xeito que $\tau_{P^k_{\sigma^k(1)}} < ... < \tau_{P^k_{\sigma^k(m)}}$. Polo tanto, obtemos un novo problema de custos (M, c^{P^k}) ó que aplicamos a regra de reparto de custos promedio, obtendo $\xi_{\sigma^{-1}(k)}(M, c^{P^k})$ para o xogador k. Considerando, pois, que as cantidades obtidas son custos correspondentes ós xogadores da unión tense que o problema de custos dentro da unión, que se resolvería usando novamente a regra de Aadland e Kolpin, ven dado pola tupla (P_l, c^{P_l}), onde $c^{P_l} = (c_k^{P_l})_{k\in P_l}$ con:

$$c_K^{P_l} = \begin{cases} \xi_{\sigma^{-1}(k)}(M, c^{P^k}) & se \quad k = k_1 \\ \xi_{\sigma^{-1}(k)}(M, c^{P^k}) - \xi_{\sigma^{-1}(k-1)}(M, c^{P^{k-1}}) & se \quad k \neq k_1. \end{cases}$$

Ó igual que sucedía no caso dos problemas sen unións a priori, pódese comprobar que a regra de Aadland e Kolpin coalicional coincide coa solución igualitaria dun xogo TU con unións a priori, é dicir, dado un problema de custos (N, c, P) temos que $\xi(N, c, P) = I(N, v, P)$[1]. A construción desta ***solución igualitaria con unións a priori***, dado un xogo TU con unións a priori (N, v, P) sería como segue a continuación.

Primeira etapa. Considérase o xogo cociente (M, v^P), onde:

$$v^P(L) = v\left(\cup_{l\in L} P_l\right) \forall L \subseteq M.$$

Segunda etapa. Para cada unión a priori P_l considérase o xogo (P_l, v^{P_l}), onde $\forall S \subseteq P_l$,

$$v^{P_l}(S) = \begin{cases} I(M, v^P) & se \quad S = P_l, \\ I(M, v^{P^S}) & se \quad S \subseteq P_l, \end{cases}$$

tendo en conta que o xogo (M, v^{P^S}) se constrúe de maneira análoga ó xogo cociente tomando $P^S = \{P_1, ..., P_{l-1}, S, P_{l+1}, ..., P_m\}$. Finalmente, dada unha unión P_l e un xogador i en P_l, temos que $I_i(N, v, P) = I_i(P_l, v^{P_l})$.

Retomando o exemplo anterior e tendo en conta a construcción da regra na segunda etapa, obtéñense os datos que aparecen na seguinte táboa.

Axente (k)	Custo en P^k	$\xi_{\sigma^{-1}(k)}(M, c^{P^k})$	Custo en P_l	valor da regra
1	5	5	5	5
3	18	10	5	5
2	9	9	9	5
4	2	10	1	5
5	20	14	14	14
7	30	30	16	16
6	28	28	28	28

[1]A solución Igualitaria está definida en Dutta and Ray (1989).

4.4. Aplicación a un problema real

O problema de elaboración dun sistema "xusto" de tarifas, que nun determinado aeroporto deberían de pagar os avións que toman terra no mesmo, e de xeito que ditas tarifas, ó cabo dun número de anos previamente establecido, permitan cubrir o custo de construcción de ditas pistas, é ó igual que o problema de reparto dos custos de mantenemento dunha gabia (e que motivou a definición da regra de Aadland e Kolpin) un caso particular dos denominados *Problemas de asignación de custos.* O establecemento de tarifas pola utilización de bens públicos como redes de comunicación, ou a amortización dos custos entre os usuarios dunha central telefónica serían outros exemplos cunha estrutura similar.

Como xa dixemos anteriormente, podemos distinguir dous tipos de gastos nun aeroporto. O primeiro tipo que podemos denominar como custos variables, son consecuencia do uso e mantemento da pista, e dependen do número de aterraxes e despegues que se producen na mesma así como do tamaño dos avións. Un segundo tipo son os fixos e correspondense ao custo de construcción da pista.

As tarifas que pagan as distintas compañías polo uso da pista deben cubrir estos custos. Neste traballo propoñemos un sistema de tarifas encamiñadas a amortizar, o cabo dun certo período de tempo, os gastos fixos ou de construcción, que fan uso da regra de Aadland e Kolpin con unións a priori.

En xeral, o custo de construcción da pista dun aeroporto depende básicamente do avión que necesita unha maior lonxitude de pista para aterrar ou despegar. Os avións que operan nun aeroporto pódense dividir en "T" tipos. O custo da pista necesaria para que aterre ou despegue un avión do tipo i, con $i = 1, ..., T$ denotarémolo por c_i. Sen pérdida de xeralidade pódense ordear os avións según o custo da pista necesaria para que ralicen un movemento, isto é,

$$c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_T.$$

Se "n" é o número total de movementos que se realizan nun período dado, debemos de ter en conta que cada movemento correspóndese a un determinado tipo de avión. Así, o custo que debe asumir un aeroporto para que poida efectuarse un subconxunto de movementos S coincidirá co custo necesario para permitir o movemento de S que precisa unha maior lonxitude de pista. Se a estas consideracións engadimos a condición de que a contribución total iguale o custo de construcción da pista, teremos expresado formalmente o problema que queremos plantexar. Por outro lado, os movementos que se realizan nun aeroporto agrúpanse de xeito natural en "m" compañías diferentes, o cal da lugar a unha estrutura de "m" unións a priori sobre o conxunto total de movementos que se realicen no aeroporto.

A continuación consideramos a situación de Labacolla, o aeroporto de Santiago de Compostela, nos tres primeiros meses de 1993, a cal foi xa considerada por Vázquez-Brage e outros (1997). No Cadro 4.1 presentamos os diferentes tipos de avións que foron usados en Labacolla no período considerado, o número de movementos de cada tipo, así como o seu custo. Tamén proporcionamos a asignación de custos por movemento, para cada tipo, usando a regra de Aadland e Kolpin e o valor de Shapley, no caso no que os movementos son tratados por separado e non como parte dunha compañía. Tódolos custos están expresados en euros.

No período considerado, había 23 compañías que utilizaban Labacolla. Aparecen listadas na primeira columna do Cadro 4.2, na cal ademáis se especifica o número de movementos realizados por cada tipo de avión para cada compañía aérea. Na penúltima columna recolle o valor de Owen para movementos distinguindo por tipo e compañía e na última columna, recóllense os resultados correspondentes á regra de Aadland e Kolpin coalicional.

Ó calcular as tasas totais que debe de pagar unha compañía, facendo uso da regra de Aadland e Kolpin coalicional, só se tivo en conta o tipo de avións que se utilizan no aeroporto e non o número de movementos, procedéndose de igual xeito a repartir a tasa total de cada compañía dentro dos distintos tipos de avións que ten. Recordemos que no problema que estamos considerando, tense en conta nada máis que os custos fixos de construcción da pista. O custo variable de mantemento, asociado cos

Tipo	t	Número de movementos	Custo	Shapley	Aadland e Kolpin
CESSNA	1	10	48720	38.7	4285.68
LEARJET-25	2	6	90804	72.42	7142.82
B-757	3	78	194976	156.3	549.42
DC-9	4	464	205590	165.42	92.34
B-737	5	232	236964	210.24	184.74
B-727	6	438	269100	278.94	97.86
DC-10	7	30	300000	1308.9	1428.54

Cadro 4.1: Asignación de custos para os distintos tipos de avións.

movementos, constituirá outra parte da tasa co cal, a tasa total resultará máis alta para as compañías que fan máis movementos no aeroporto.

A regra de Aadland e Kolpin ten a peculiaridade de que minimiza as diferencias entre as tasas máis baixas e a máis alta, das distintas compañías, de entre tódalas regras, entre as que se atopa o valor de Owen, que verifican monotonía, orde e liberdade de subsidios para as compañías. En consecuencia, se comparamos as dúas propostas de tasas vemos que a correspondente á regra de Aadland e Kolpin favorece, polo xeral, a aquelas compañías que requiren un tramo grande de pista, mentres que perxudica ás que usan tramos pequenos.

Tres das compañías que usaban Labacolla no período de tempo considerado, Aviaco, Iberia e Viasa, formaban parte do denominado grupo Iberia. Supoñamos que o grupo Iberia decide negociar as tasas para as tres compañías como se tratara dunha única compañía. Entón tense unha situación con soamente 21 compañías, na cal a regra de Aadland e Kolpin coalicional asigna ó grupo Iberia 63036 euros. Nótese que esta cantidade é menor que a suma das tasas asignadas ás tres compañías, cando estas negocian por separado, que é

$$12 \times 940.32 + 452 \times 23.82 + 438 \times 47.34 + 30 \times 1050.6 = 74303.4.$$

Este exemplo pon de manifesto que a unión de compañías poden disminuir a súa tasa total se ésta se calcula facendo uso da regra coalicional de Aadland e Kolpin.

4.5. Conclusións finais

Para concluír o traballo sinalamos que este Traballo Fin de Máster é esencialmente unha revisión bibliográfica, que inclúe contidos teóricos xunto coa súa aplicación a problemas reais, apuntando así mesmo liñas abertas neste campo. Comezamos revisando e ampliando algúns conceptos de xogos cooperativos con utilidade transferible, que son introducidos en diferentes materias do Máster en Técnica Estadísticas como son, sobre todo, Introdución á Teoria de Xogos e Xogos Cooperativos.

Centrámonos despóis na súa aplicación a problemas de reparto de custos, concretamente, nos de construcción e mantemento dun aeroporto, dunha autoestrada e das canles de rego usadas por unha comunidade agrícola.

Distinguimos entre o caso dun grupo simple de axentes ou o caso dun grupo de axentes que forman grupos (unións a priori) que deben de ser tidos en conta para o reparto final.

Entre outros aspectos a destacar, sinalamos que se estudian as propiedades das regras consideradas, ofrécense algunhas caracterizacións de interés das mesmas (aínda que non tódalas existentes para non alargar excesivamente o traballo), mostranse os resultados que conducen ó relativamente complexo algorítmo de cálculo do nucleolus para problemas da autoestrada. Tamén usamos datos reais do aeroporto de Santiago de Compostela para comparar algunhas das solucións presentadas, impleméntase en R algunha das regras e apuntanse algúns problemas abertos neste campo: cabe mencionar o estudio do nucleolus con unións a priori, a implementación en R doutras regras e a caracterización axiomática da regra de Aadland e Kolpin con unións a priori.

Liña aérea	Número de movementos	Tipo de avión	Owen	Aadland e Kolpin
Air Europa	36	B-757	48.66	156.72
	172	B-737	67.08	32.82
Aviaco	12	DC-9	906.54	940.32
Britannia	6	B-737	2215.34	1880.64
British airways	2	B-757	5060.28	5641.98
Condor Flugdienst	2	B-757	5060.28	5641.98
Caledonian Airways	2	B-757	5060.28	5641.98
Eurobelgian Airlines	2	B-737	6646.02	5641.98
Futura	32	B-737	415.38	352.62
Gestair Executive Set	2	CESSNA	1059.12	5641.98
Iberia	452	DC-9	12.24	23.82
	438	B-727	54.42	47.34
Air Charter	2	B-737	6646.02	5641.98
Corse Air	4	B-737	3323.04	2820.96
Air UK Leisure	2	B-737	6646.02	5641.98
Ibertrans	2	CESSNA	1059.12	5641.98
LTE	36	B-757	281.1	313.44
Mac Aviation	6	LEARJET 25	722.22	1880.64
Monarch Airlines Ltd.	2	B-737	6646.02	5641.98
Sobelair	6	B-737	2215.32	1880.64
Trabajos Aéreos	2	CESSNA	1059.12	5641.98
Tea Basel LTD	2	B-737	6646.02	5641.98
Oleohidráulica Balear SA	4	CESSNA	529.56	2820.96
Viasa	30	DC-10	2008.68	1050.6
Spanair	2	B-737	6646.02	5641.98

Cadro 4.2: Asignación de custos para os distintos tipos de avións dentro das diferentes compañías.

Bibliografía

[1] Aadland, D. and Kolpin, V., 1998. *Shared irrigation costs: An empirical and axiomatic analysis.* Mathematical Social Sciences 35, 203-218.

[2] Alonso Meijide, J.M., Casas Méndez, B. and Lorenzo Freire, S., 2003.*Una extensión de la regla de Aadland y Kolpin.* Actas do VI Congreso Galego de Estadística e Investigación de Operacións.

[3] Arín, J. and Iñarra, E., 1998. *A characterization of the nucleolus for convex games.* Games and Economic Behavior 23, 12-24.

[4] Baker, J. and Associates, 1965. *Runway Cost Impact Study.* Report presented to the Association of Local Transport Airlines. Jackson, MI.

[5] Casas-Méndez, B., García Jurado, I., van den Nouweland, A. and Vázquez-Brage, M. 2003. *An extension of the τ-value to games with coalition structures.* European Journal of Operational Research 148, 494-513.

[6] Driessen, T.S.H., 1988. *Cooperative Games, Solutions and Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[7] Driessen, T.S.H. and Tijs, S.H., 1992. *The core and the τ-value for cooperative games with coalition structures.* In: Dutta, B., Mookherjee, D., Parthasarathy, T., Raghavan, T.E.S., Ray, D. and Tijs, S.H. (Eds.), Game Theory and Economic Applications. Springer-Verlag, Berlin, pp. 146-169.

[8] Dubey, P., 1982. *The Shapley value as aircraft landing fees-revisited.* Management Science 28, 869-874.

[9] Dutta, B. and Ray, D., 1989. *A concept of egalitarianism under participation constraints.* Econometrica 57, 615-635.

[10] González Díaz, J., Garcia Jurado, I. and Fiestras Janeiro, M.G., 2010.*An introductory course on mathematical game theory.* Graduate Studies in Mathematics. Volume 115. American Mathematical Society. Real sociedad Matemática Española.

[11] Fiestras-Janeiro, G.M. and Mosquera, M.A., 2009 *Sharing costs in airport and highway problems.* Boletín de Estadistica e Investigación Operativa, Vol. 25, No. 2, pp. 97-108

[12] Hart, S. and Kurz, M., 1983. *Endogenous formation of coalitions.* Econometrica 51, 1047-1064.

[13] Ichiishi, T., 1981. *Super-modularity: Applications to convex games and to the greedy algorithm for LP.* Journal of Public Economic Theory, 25, 283-286.

[14] Kuipers, J. , Mosquera, M.A. and Zarzuelo, J.M., 2013. *Sharing costs in highways: A game theoretic approach.* European Journal of Operational Research 228, 158-168.

[15] Littlechild, S., 1974. *A simple expression for the nucleolus in a special Case.* International Journal of Game Theory 3, 21-29.

[16] Littlechild, S. and Owen, G., 1973. *A simple expression for the Shapley value in a special case.* Management Science 20, 370-372.

[17] Littlechild, S. and Owen, G., 1976. *A further note on the nucleolus of the "Airport Game".* International Journal of Game Theory 5, 91-95.

[18] Littlechild, S. and Thompson, G., 1977. *Aircraft landing fees: A game theory approach.* The Bell Journal of Economics 8, 186-204.

[19] Mosquera Rodríguez, M.A., 2007.*Essays on Operations Research Games and Cautious Behavior.* Tésis Doctoral. Universidade de Santiago de Compostela.

[20] Owen, G., 1977. *Values of games with a priori unions.* In: Henn, R. and Moeschlin, O. (Eds.), Mathematical Economics and Game Theory. Springer Verlag, Berlin, pp. 76-88.

[21] Shapley, L.S., 1953. *A value for n-person games.* In: Tucker, A.W. and Kuhn, H. (Eds.), Contributions to the Theory of Games II. Princeton University Press, Princeton, pp. 307-317.

[22] Schmeidler D. 1969. *The nucleolus of a characteristic function game.* SIAM Journal of Applied Mathematics, 17, 1163-1170.

[23] Shapley, L., 1971. *Cores of convex games.* International Journal of Game Theory 1, 11-26.

[24] Thompson, G., 1971. *Airport Costs and Pricing.* Unpublished PhD Dissertation, University of Birmingham.

[25] Tijs, S. and Driessen, T., 1986. *Game theory and cost allocation problems.* Management Science 8, 1015-1028.

[26] Tijs, S.H., 1981. *Bounds for the core and the τ-value.* In: Moeschlin, O. and Pallaschke, D. (Eds.), Game Theory and Mathematical Economics. North-Holland, Amsterdam, pp. 123-132.

[27] Vázquez-Brage, M., García-Jurado, I. and Carreras, F., 1996. *The Owen value applied to games with graph-restricted communication.* Games and Economic Behavior 12, 45-53.

[28] Vázquez-Brage, M., van den Nouweland, A. and García-Jurado, I., 1997. *Owen's coalitional value and aircraft landing fees.* Mathematical Social Sciences 34, 273-286.

[29] Winter, E., 1992. *The consistency and potential for values of games with coalition structure.* Games and Economic Behavior 4, 132-144.