Trabajo Fin de Máster

Aplicaciones de los juegos cooperativos en modelos de inventario centralizados

Alejandro Saavedra Nieves

2013-2014

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN TÉCNICAS ESTADÍSTICAS

Trabajo Fin de Máster

Aplicaciones de los juegos cooperativos en modelos de inventario centralizados

Alejandro Saavedra Nieves

2013-2014

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

El presente documento recoge el Trabajo Fin de Máster para el Máster en Técnicas Estadísticas realizado por D. Alejandro Saavedra Nieves bajo el título "Aplicaciones de los juegos cooperativos en modelos de inventario centralizados".

Ha sido realizado bajo la dirección de Dña. María Gloria Fiestras Janeiro y D. Ignacio García Jurado, que lo consideran terminado y dan su conformidad para su presentación y defensa.

Santiago de Compostela, 1 de julio de 2014

Fdo: María Gloria Fiestras Janeiro

Fdo: Ignacio García Jurado

Fdo: Alejandro Saavedra Nieves

Índice general

Resumen vii

Introducción ix

1. Preliminares 1
- 1.1. Teoría de inventario . . . 1
  - 1.1.1. El problema de inventario . . . 2
  - 1.1.2. Los problemas de inventario centralizados . . . 2
- 1.2. Teoría de juegos . . . 3
  - 1.2.1. Los juegos de utilidad transferible . . . 4
  - 1.2.2. El núcleo de los juegos TU . . . 5
  - 1.2.3. El valor de Shapley en los juegos TU . . . 7

2. Modelos EOQ y EPQ 11
- 2.1. Introducción . . . 11
- 2.2. Cantidad Económica de Pedido. Modelo EOQ . . . 12
  - 2.2.1. La cooperación en el modelo EOQ . . . 13
- 2.3. Lote Económico de Producción. Modelo EPQ con faltantes . . . 15
  - 2.3.1. La cooperación en el modelo EPQ con faltantes . . . 16
- 2.4. Juegos de coste de inventario en EOQ y EPQ . . . 17
  - 2.4.1. El reparto de costes de pedido: la regla SOC . . . 18
  - 2.4.2. Caracterizaciones de la asignación de la regla SOC . . . 19

3. Sistemas de inventario y transporte 27
- 3.1. Introducción . . . 27
- 3.2. Sistemas de inventario y transporte . . . 28
  - 3.2.1. La cooperación en el modelo . . . 28
- 3.3. Juegos de inventario y transporte . . . 29
  - 3.3.1. El reparto de costes del transporte de inventario. . . . 30
  - 3.3.2. La regla de la línea . . . 32

4. Modelos EOQ sin costes de almacenamiento y con capacidad limitada 35
- 4.1. Introducción . . . 35
- 4.2. El modelo básico . . . 36

4.3. El modelo con costes de transporte 38
4.3.1. La regla de las dos líneas 41
4.4. El modelo con déficit 44
4.4.1. La política individual óptima 45
4.4.2. La política coalicional óptima 46
4.4.3. La asignación de los costes de la gran coalición 47
4.4.4. Aplicación a las explotaciones ganaderas 50

5. Un nuevo modelo EOQ sin costes de almacenamiento 53
5.1. Introducción 53
5.2. El modelo con déficit y precios diferentes 54
5.2.1. La política individual óptima 55
5.2.2. La política coalicional óptima 57
5.2.3. La asignación de los costes de la gran coalición 63
5.3. Caso particular: todos tienen déficit 68

Conclusiones 73

A. Inventorymodel Package 75

Bibliografía 99

Resumen

Este Trabajo Fin de Máster consiste en una revisión bibliográfica de los principales modelos de inventario descritos en la literatura. En ellos, un grupo de agentes deben realizan sus pedidos en común con el fin de cubrir sus demandas. En tales modelos se trata, por un lado, de encontrar la política óptima de pedidos y, por otro, de cómo repartir los costes entre los agentes que cooperan desde la perspectiva de la teoría de juegos. Este trabajo se completa con el estudio teórico de un nuevo modelo de inventario, así como el desarrollo del paquete "*Inventorymodel*" en R que calcula soluciones y las asignaciones de costes para los modelos descritos.

Abstract

This Master's thesis contains a review of the main inventory models existing in the literature. A group of agents must place their orders in common in order to satisfy their demands. In such models, it is first necessary to find the optimal ordering policy, and then, allocate costs between cooperating agents from the perspective of game theory. This work was completed with the theoretical study of a new model of inventory as well as with the development of the package "*Inventorymodel*" in R which computes solutions and cost allocations for the models described.

Introducción

En nuestra vida cotidiana son muchas las ocasiones en las que una vez elegido un producto a adquirir, nos advierten desde el propio establecimiento de que no disponen de una unidad del mismo en almacén. Probablemente, dichos negocios no están realizando una buena gestión de su inventario, esto es, del *stock* de mercancía que almacenan para su uso o venta posterior. El hecho de no hacer pedidos para reponer el inventario a tiempo deriva en la escasez de producto. Sin embargo, la utilización de técnicas específicas para su gestión eficiente impediría situaciones como las descritas, reduciendo las pérdidas asociadas a la falta de inventario.

La gestión del inventario de bienes físicos y otros productos o elementos es una parte integral de los sistemas logísticos, comunes a diversos sectores económicos como son por ejemplo la industria, la agricultura o el comercio, e independientemente del volumen de producción asociado. Los fabricantes precisan disponer de la materia prima necesaria para la elaboración sus productos. A su vez, éstos también necesitan inventario de productos totalmente terminados a la espera de su distribución para que lleguen a los lugares de venta al público y otros puntos de distribución. Así, tanto fabricantes, mayoristas y minoristas, como distribuidores, son usuarios potenciales de este tipo de teorías.

En general, la correcta gestión de inventario permite reducir las pérdidas asociadas a la escasez de producto. Sin embargo, implica la aparición de un sobrecoste relativo al almacenamiento del producto, con gran influencia en el coste global del procedimiento. Algunas compañías japonesas fueron pioneras en introducir un sistema de inventario que hace hincapié en la planificación y programación de manera que los materiales necesarios llegan "justo a tiempo" para su utilización, con la consiguiente reducción de costes asociados. En este sentido, fueron otras muchas las alternativas que las empresas han utilizado en modernizar el manejo de sus inventarios. Generalmente, el estudio se plantea para un único producto con características fijas que las empresas necesitan. Sin embargo, han surgido nuevas situaciones en las que un cliente, que no puede encontrar un producto específico con las características deseadas, puede cambiar a otro proveedor para conseguir el mismo o uno con características similares.

Habitualmente, hablamos de la gestión del inventario para una única empresa, con una única decisión que determina la cantidad requerida en función de la demanda o, por ejemplo, el momento en el que se debe realizar ese pedido. Aunque individualmente tales modelos fundamentan los problemas de inventa-

rio, ignoran totalmente las decisiones tomadas por otros agentes en las mismas circunstancias. En ocasiones, con el fin de obtener cierto ahorro en el gasto, cabe plantearse la actuación conjunta de varios individuos que, de manera independiente, se enfrentarían a situaciones de gestión de inventario de un mismo producto como las descritas. En este caso, y una vez que el modelo matemático asociado es planteado, se determinada la política óptima a seguir para, posteriormente, repartir los costes generados en el proceso mediante la utilización de resultados propios de la teoría de juegos.

Así, este trabajo se centra en la descripción de modelos de inventario con demanda determinista, tanto en el caso en el que se considera un único agente, como en el caso en el que se produce la colaboración entre los distintos agentes, mediante grupos, con el objetivo de reducir el coste global del procedimiento. Por tanto, apoyándonos en métodos matemáticos, estudiaremos, a través de los modelos, cuáles son las estrategias a seguir por cada uno de ellos. Una vez que se determina la política óptima y su coste asociado se plantean reglas de cómo repartir los costes generados entre los distintos individuos involucrados.

Después de presentar los resultados necesarios de la teoría de juegos y de describir brevemente los problemas de inventario centralizados en el Capítulo 1, veremos su aplicación a diversas situaciones. En el Capítulo 2 se describen los modelos más básicos existentes en la literatura: los modelos EOQ (*Economic Order Quantity*) y EPQ (*Economic Production Quantity*). Para ellos, se presenta la regla SOC (*Share the Ordering Costs rule*) como la mejor a la hora de repartir los costes de este tipo de situaciones. Los sistemas de inventario y transporte, descritos en el Capítulo 3, constituyen una extensión del modelo EOQ, considerando la influencia del coste asociado al transporte del producto. En el Capítulo 4 se presentan tres modelos donde los costes relativos al almacenamiento del producto son considerados irrelevantes: un primer modelo donde no se permite la escasez de producto, su extensión al caso en el que se consideran los costes asociados al transporte del producto, y por último, la situación en la que se penaliza la posibilidad de faltantes, siendo estas unidades de producto adquiridas a igual coste que las destinadas al almacenaje. El Capítulo 5 incluye el la descripción y el análisis de una nueva situación, en las hipótesis de la anteriormente mencionada, en la que se considera la posibilidad de cubrir el déficit en el que se incurra con productos de calidad más baja y obtenidos a un coste menor que el inicialmente considerado. En todos ellos, y una vez que los correspondientes modelos han sido planteados, se describen los juegos de coste asociados. Además, para ellos, se definen reglas de reparto de los costes, estableciendo su relación con conceptos solución propios de la teoría de juegos, como son el núcleo y el valor de Shapley. Finalmente, el Apéndice A recoge el manual del Paquete "*Inventorymodel*" implementado en código R con funciones que permiten, respectivamente, la determinación de la política óptima y los repartos de los costes propuestos para cada uno de los modelos mencionados.

Capítulo 1

Preliminares

En este trabajo se utilizarán conceptos propios de la teoría de inventario y de la teoría de juegos. En primer lugar, se realizará una revisión de los mismos. Una vez presentados los problemas de inventario centralizados, se describirá una clase de juegos útiles para el reparto de los costes asociados entre los agentes que intervienen. Concretamente, los juegos de coste con utilidad transferible jugarán un papel fundamental. Sus propiedades serán revisadas de forma detallada.

El resto del capítulo se organiza como sigue. En la Sección 1.1 se presenta el problema de inventario. En particular, se introducirá el grupo de los problemas de inventario centralizados. Finalmente, los juegos de utilidad transferible se describen en la Sección 1.2. La exposición de los conceptos de solución de núcleo y valor de Shapley, y su aplicación práctica, cierran este capítulo.

1.1. Teoría de inventario

La teoría de inventario constituye un importante campo de la Investigación de Operaciones centrado en el diseño, estudio y optimización de los sistemas de producción con el fin de minimizar sus costes. La determinación de dicha gestión de inventario óptimo se realiza a través de los siguientes pasos:

1. La formulación de un modelo matemático que describe el comportamiento del problema de inventario.

2. La búsqueda de una política óptima de inventario bajo dicho modelo.

Algunas de sus aplicaciones pasan por el estudio de las decisiones a las que se enfrentan, por ejemplo, varios agentes o empresas en relación con la fabricación, el almacenamiento, las cadenas de suministro, la distribución de piezas de repuesto u otros pasos intermedios. Dicha teoría se presenta como la base matemática para la logística empresarial actual.

1.1.1. El problema de inventario

Los inventarios pueden definirse como la cantidad de mercancías y otros recursos económicos que son almacenados o se encuentran inactivos en un instante de tiempo dado. El inventario supone a la empresa una inversión de capital por el producto en *stock* estacionado así como costes asociados al mantenimiento, seguridad, o por ejemplo, la posibilidad de daños en el material. Cada empresa debe poseer el nivel de inventario adecuado para satisfacer las necesidades de sus clientes y para eso, debe ser capaz de manejarlo de manera óptima.

Una empresa o agente busca su política óptima de inventario, determinada por un modelo matemático definido por los siguientes elementos que conforman un problema de inventario:

- Una empresa (agente) que desea organizar su inventario.
- La demanda de un producto que es el número de unidades que se retirará del inventario para su uso en un período de tiempo concreto.
- El agente cubre su demanda de producto a través de un proveedor.
- El tamaño del pedido a realizar en cada momento para satisfacer su demanda debe ser decidida por la empresa.

Los modelos de inventario tienen como objetivo la determinación de la cantidad de pedido óptima a realizar así como el momento de su solicitud. Por tanto, el equilibrio entre cantidad y número de pedidos debe ser determinado. Pedir mucha cantidad o hacerlo frecuentemente, deriva en un incremento del coste del proceso.

Los modelos de inventario pueden clasificarse de la siguiente manera:

- Según la naturaleza de sus demandas. Mientras la demanda puede determinarse de antemano en los modelos deterministas, en los probabilistas, la demanda puede describirse en términos probabilistas.
- Según la revisión del inventario. En este caso, distinguiremos la revisión continua y la revisión periódica. En los modelos de revisión continua, un pedido se realiza cuando el *stock* alcanza un cierto nivel, el punto de reorden. Sin embargo, en los modelos de revisión periódica, el nivel de inventario es comprobado en intervalos discretos, momentos en los que se decide la realización de un nuevo pedido.

Una vez que el problema de inventario ha sido introducido, se presenta la clase de problemas de inventario centralizados que fundamentan el contenido de este trabajo.

1.1.2. Los problemas de inventario centralizados

En un problema de inventario centralizado, varios agentes que se enfrentan a problemas de inventario individuales deben alcanzar un acuerdo para coordinar sus pedidos con el objetivo de reducir costes. La determinación del nivel de inventario óptimo en un problema de inventario centralizado sigue los siguientes pasos:

- La formulación del modelo matemático que describe el comportamiento en sistemas de inventario.
- La identificación de la política óptima de inventario para el grupo de agentes en la cooperación bajo dicho modelo.
- El reparto de los costes asociados entre los distintos agentes.

La teoría de juegos cooperativos desempeña un papel decisivo en el análisis de problemas de inventario centralizado. En particular, los juegos de coste descritos en la Sección 1.2 son utilizados para determinar las asignaciones de los costes a cada uno de los agentes. El buen comportamiento de su aplicación en este contexto, ha favorecido el desarrollo de gran variedad de modelos y aplicaciones.

1.2. Teoría de juegos

La teoría de juegos es una disciplina matemática que se ocupa del estudio de situaciones conflictivas en las que la toma de las decisiones adecuadas constituye la solución del problema. La toma de decisiones en los conflictos se realiza de una manera interactiva adaptándose al ámbito en el que se aplica. Dichos problemas quedan caracterizados por los siguientes aspectos:

- Existe un grupo de agentes que toman decisiones.
- Los resultados obtenidos quedan determinados por las decisiones tomadas por todos los distintos agentes.
- Cada agente tiene sus propias preferencias en la toma de decisiones dentro del conjunto de las posibles a tomar.

La terminología empleada para los distintos elementos involucrados en este tipo de situaciones es tomada de los primeros problemas de esta clase: los juegos de estrategia. Un juego es un problema de decisión interactivo en el que participan unos determinados agentes (jugadores) y en las que ciertas decisiones (estrategias) pueden ser tomadas. La teoría clásica de juegos es considerada como un mero ideal, explicando como un jugador racional debe actuar. La racionalidad se traduce en que los agentes saben lo que quieren, actúan para conseguirlo y saben cómo proceder para lograrlo.

En este trabajo nos centraremos en la revisión de los juegos cooperativos, siguiendo lo expuesto al respecto en González-Díaz et al. (2010) y Casas-Méndez et al. (2012). En ellos se supone la cooperación de los agentes, actuando de un modo socialmente óptimo, con el fin de estudiar el reparto de los beneficios de la cooperación entre los distintos jugadores. En particular, trataremos los juegos cooperativos con utilidad transferible, en los que dicho reparto se hace libremente entre ellos. Aunque habitualmente la caracterización de esta clase de juegos se realiza en términos de los beneficios asociados a la cooperación, en adelante se definirán los juegos de utilidad en términos de los costes asociados a la misma. Además, los conceptos de solución de núcleo y el valor de Shapley serán analizados brevemente.

1.2.1. Los juegos de utilidad transferible

Los juegos de utilidad transferible o juegos TU constituyen una de las clases más importantes de los juegos cooperativos. Frente a los modelos no cooperativos, en los que se buscan las mejores estrategias de cada jugadores teniendo en cuenta que las demás también buscarán sus mejores estrategias, en los modelos cooperativos, los participantes podrán comportarse de una determinada manera para obtener lo que ellos consideran como óptimo social. Una vez alcanzado, repartirán los beneficios resultantes de la cooperación entre los agentes. La existencia de distintos subgrupos de jugadores (coaliciones) y de un conjunto de posibles resultados a obtener por cada uno de tales subgrupos independientemente de lo que hagan los miembros fuera de los mismos es una de sus principales características. Por tanto, el concepto coalición fundamenta los juegos cooperativos.

En lo que sigue, $N := \{1, ..., n\}$ denota el conjunto de jugadores. Entonces, una coalición es definida como cualquier subconjunto $S \subseteq N$ con $|S|$ elementos. La coalición N formada por n jugadores recibe el nombre de gran coalición.

Los juegos de coste de utilidad transferible o TU son introducidos en la Definición 1.1.

Definición 1.1. Un juego de coste TU es un par (N, c), donde N denota el conjunto de jugadores y $c : 2^N \to \mathbb{R}$ es una función cumpliendo que $c(\emptyset) := 0$.

La función c se denomina la función característica del juego de coste. Para cada una de las posibles coaliciones $S \subseteq N$, $c(S)$ denota los costes asociados a la formación de la coalición S, independientemente de cómo actúe el resto de agentes. Se denotará por CG^N la clase de los juegos de coste de n jugadores.

A continuación, se presenta una situación que puede ser modelada mediante un juego de coste.

Ejemplo 1.2. *(Casas-Méndez et al., 2012) Uno de los ejemplos más empleados en la definición de juegos de coste es el conocido como el problema del profesor visitante. Tres grupos de investigación vinculados a las universidades de Ámsterdam, Tilburg y Santiago de Compostela, en adelante grupos 1, 2 y 3, respectivamente, planean la organización de un curso de teoría de juegos impartido por un profesor estadounidense. Los grupos quieren planificar el viaje de dicho profesor, con el fin de que visite las tres ciudades en un mismo viaje y repartir el coste del mismo. Las estimaciones del coste del viaje (en euros) correspondiente a las posibles coaliciones de los grupos de investigación son:* $c(1) = 1500$, $c(2) = 1600$, $c(3) = 1900$, $c(12) = 1600$, $c(13) = 2900$, $c(23) = 3000$ *y* $c(N) = 3000$. *Considerando* $N = \{1, 2, 3\}$, *obtenemos el juego de coste* (N, c) *en el sentido de que para cada* $S \subseteq N$, *los costes asociados a esa coalición quedan determinados por los valores* $c(S)$ *indicados.*

A continuación, se introduce una nueva clase de juegos que constituye una base del espacio vectorial de los juegos TU con conjunto de jugadores N: los juegos de unanimidad.

Definición 1.3. Sea $N := \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de agentes. El juego de unanimidad (N, u_T) se define, para cada coalición $S \subseteq N$, por

$$u_T(S) := \begin{cases} 1, & \text{si } T \subset S; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Una vez introducidos, se presentan algunas propiedades de los juegos de coste de utilidad transferible en la Definición 1.4.

Definición 1.4. Sea $(N, c) \in CG^N$.

- El juego (N, c) es subaditivo si para cada $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, se cumple que $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T)$.
- El juego (N, c) es aditivo si para cada $i \in N$ y cada coalición $S \subseteq N \backslash \{i\}$, cumple que $c(S) + c(i) = c(S \cup \{i\})$.
- El juego (N, c) es monótono si dados S, $T \subseteq N$ con $S \subset T$, se tiene que $c(S) \leq c(T)$.
- El juego (N, c) es cóncavo si para todo $i \in N$ y para todo $S \subset T \subseteq N \setminus \{i\}$ tenemos que $c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(T \cup \{i\}) - c(T)$.

Observación 1.5. Un juego de coste (N, c) es subaditivo cuando la cooperación entre los jugadores es beneficiosa. Es más, la unión de coaliciones disjuntas nunca provocará un aumento del total de los costes. Bajo concavidad, los jugadores tendrán más incentivos a unirse a la coalición a la que menor coste aporten.

La teoría de los juegos TU se centra en la definición de soluciones (reglas de asignación) y la selección de conjuntos de posibles asignaciones que permitan repartir los costes y que puedan ser admitidas por todos los jugadores. Para el alcance de dicho objetivo, pueden considerarse distintos enfoques. Una primera perspectiva queda determinada por la idea de estabilidad: se buscan asignaciones estables en el sentido de que el acuerdo resultante sea un elemento de dicho conjunto. A ésta responden, por ejemplo, soluciones en el núcleo, los conjuntos estables y el conjunto de negociación. Otro enfoque diferente es el de la ecuanimidad. La búsqueda de reglas que permitan repartir las asignaciones de una manera ecuánime entre los distintos jugadores involucrados en la coalición es su principal objetivo. El valor de Shapley, el nucleolus y el τ- valor son conceptos en los que la equidad está ligada a los repartos de costes que proponen. Los dos más importantes, el núcleo y el valor de Shapley, serán descritos en las Secciones 1.2.2 y 1.2.3, respectivamente.

1.2.2. El núcleo de los juegos TU

El núcleo de un juego de utilidad transferible es el concepto que enfatiza en la estabilidad, ver Gillies (1953). Dado un juego $(N, c) \in CG^N$, el núcleo queda determinado por un subconjunto del conjunto de imputaciones. Para su cálculo basta obtener del conjunto de las asignaciones eficientes de la forma más

estable posible a las coaliciones. De acuerdo con González-Díaz et al. (2010), si N denota el conjunto de jugadores, una asignación eficiente es el reparto de costes $x \in \mathbb{R}^N$ que verifica que $\sum_{i\in N} x_i = c(N)$. En el caso de un juego de coste, la eficiencia equivale al reparto real de los costes entre todos los jugadores que intervienen. Se dice que estas asignaciones son estables, en el sentido de que ninguna coalición tendría incentivos para desviarse y obtener un reparto mejor (en sentido estricto) que lo que le asegura una asignación en el núcleo. Parece lógico pensar que, bajo cooperación, el coste asociado a los jugadores sea menor que el coste que se pueda obtener si dichos agentes actúan de manera independiente. Esta propiedad es la denominada racionalidad individual y se traduce en que para cada jugador $i \in N$, $x_i \leq c(i)$.

El concepto de imputación para una coalición es introducido en la Definición 1.6. A partir de él, el núcleo será definido en la Definición 1.7.

Definición 1.6. Una imputación de un juego (N, c) es un vector de costes $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que satisfacen la racionalidad grupal, $\sum_{i\in S} x_i = c(N)$, y la racionalidad individual, $x_i \leq c(i)$, $\forall i \in N$.

Dado un juego $(N, c) \in CG^N$, se denota por $I(c)$ el conjunto de imputaciones de dicho juego. El conjunto $I(c)$, distinto del vacío si el juego es subaditivo, incluye a todas las asignaciones eficientes e individualmente racionales. El núcleo queda determinado por el conjunto de las imputaciones que además cumplen la racionalidad coalicional, esto es, para cada coalición $S \subset N$, se satisface que $\sum_{i\in S} x_i \leq c(S)$.

Definición 1.7. Sea $(N, c) \in CG^N$. Se define el núcleo $C(c)$ de (N, c) como el conjunto

$$C(c) := \{x \in I(c) : \text{ para cada } S \subset N, \sum_{i\in S} x_i \leq c(S)\}.$$

De acuerdo con lo expuesto, las asignaciones del núcleo se caracterizan por lo siguiente. Los elementos de $C(c)$ asignan a cada coalición unos costes menores o iguales que los garantizados a cada coalición por sí misma. Así, dichos repartos se consideran estables, en el sentido de que no dejan insatisfecha a ninguna coalición. Además, en caso de no formarse la coalición total, los agentes pagarán más si actúan por separado que si lo hacen unidos.

A continuación se presentan resultados que establecen relación entre el núcleo y el criterio de estabilidad descrito.

La dominación en las asignaciones

En este punto, se describe la relación de dominancia entre dos imputaciones. Dicha propiedad, presentada en la Definición 1.8, se conoce como la dominación.

Definición 1.8. Sea $(N, c) \in CG^N$ y sean $x, y \in I(c)$. Se dice que y domina x si existe $S \subset N$ tal que, para cada $i \in S$, $y_i < x_i$ y $\sum_{i\in S} y_i \geq c(S)$. En particular, si y domina x, la primera asignación será preferible sobre la segunda para los agentes de S.

Una asignación x se dice estable si no es posible dominarla. En caso de no serlo, existirá una asignación y que dominaría a x y los jugadores preferirían y bloqueando la asignación x. De esta forma, se buscan asignaciones x no dominadas por las propiedades de estabilidad que aportan. El siguiente resultado relaciona el núcleo con las asignaciones no dominadas, ver González-Díaz et al. (2010).

Proposición 1.9 (González-Díaz et al., 2010)**.** *Sea $(N, c) \in CG^N$. Entonces, se verifica:*

1. *Los elementos de $C(c)$ son no dominados.*
2. *Si (N, c) es subaditivo entonces $C(c) := \{x \in I(c) : x \text{ es no dominada}\}$.*

Condiciones para la estabilidad

Existen resultados que nos permiten encontrar, de manera sencilla, las condiciones que los juegos deben satisfacer para garantizar su estabilidad. En la Definición 1.10 se introducen conceptos que deben ser tenidos en cuenta, ver González-Díaz et al. (2010).

Definición 1.10. Sea $(N, c) \in CG^N$. Entonces,

1. Una familia de coaliciones $\mathfrak{F} \subset 2^N \setminus \{\emptyset\}$ se dice equilibrada si existen números reales positivos $\{\alpha_S : S \in \mathfrak{F}\}$, denominados coeficientes de equilibrio, que cumplen $\sum_{S \in \mathfrak{F}, i \in S} \alpha_S = 1$ para todo $i \in N$.

2. El juego (N, c) es equilibrado si para cada familia equilibrada $\mathfrak{F}$ con sus coeficientes de equilibrio $\{\alpha_S : S \in \mathfrak{F}\}$ se cumple $\sum_{S \in \mathfrak{F}} \alpha_S c(S) \geq c(N)$.

3. El juego (N, c) es totalmente equilibrado, si para cada $S \subset N$, el juego (S, c_S), restricción de c a S, es equilibrado.

Dado que cada partición de N es una familia de coaliciones equilibrada con coeficientes iguales a 1, una condición necesaria para que un juego c sea equilibrado es que $\sum_{i \in N} c(i) \geq c(N)$.

El Teorema 1.11 de Bondareva-Shapley relaciona la estabilidad con el equilibrio de un juego, estableciendo las condiciones que garantizan que el núcleo de un juego TU sea no vacío.

Teorema 1.11. *Sea $(N, c) \in CG^N$. Entonces, $C(c) \neq \emptyset$ si y sólo si (N, c) es equilibrado.*

1.2.3. El valor de Shapley en los juegos TU

En esta sección se estudia una de las reglas de reparto de costes más importantes para juegos TU: el valor de Shapley (Shapley, 1953). Antes de introducirlo detalladamente en la Definición 1.13, el concepto de regla de asignación será presentado en la Definición 1.12.

Definición 1.12. Sea $(N, c) \in CG^N$. Una regla de asignación de costes es una aplicación $\varphi : CG^N \to \mathbb{R}^N$ que asocia a cada juego (N, c) un vector $\varphi(N, c) := (\varphi_i(N, c))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$. Para cada jugador $i \in N$, $\varphi_i(N, c)$ es la asignación que φ propone para el agente i en (N, c).

Un ejemplo de regla de asignación queda determinado por el valor de Shapley, que presentamos a continuación.

Definición 1.13. Sea $(N, c) \in CG^N$. El valor de Shapley Φ asigna a cada jugador $i \in N$ del juego de coste (N, c),

$$\Phi_i(c) := \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!}(c(S \cup \{i\}) - c(S)).$$

En realidad, Shapley (1953) introdujo esta regla de asignación como la única que verificaba un conjunto de propiedades "razonables". Antes de introducir dichas propiedades, se definen dos tipos de jugadores especiales.

Definición 1.14. Sea $(N, c) \in CG^N$.

- Un jugador $i \in N$ es considerado un jugador nulo si para cada $S \subset N$, $c(S \cup \{i\}) - c(S) = 0$.
- Dos jugadores i e j de N son simétricos si para cada coalición $S \subset N \setminus \{i, j\}$, $c(S \cup \{i\}) = c(S \cup \{j\})$.

A partir de los conceptos de jugador nulo y de simetría, se presentan ciertas propiedades que pueden ser impuestas sobre cualquier regla de asignación de costes φ.

- **Eficiencia (EFF).** Para cada juego de coste $(N, c) \in CG^N$, se cumple que $\sum_{i \in N} \varphi_i(c) = c(N)$. De este modo, se garantiza el reparto del coste de la gran coalición entre todos los jugadores.
- **Jugador nulo (NPP).** Para cada $(N, c) \in CG^N$ y cada jugador nulo $i \in N$ se cumple $\varphi_i(c) = 0$. Por tanto, el jugador que no produce costes tampoco pagará nada.
- **Simetría (SYM).** Para cada $(N, c) \in CG^N$ y cada par $i, j \in N$ de jugadores simétricos se cumple que $\varphi_i(c) = \varphi_j(c)$. En consecuencia, los jugadores que son simétricos recibirán el mismo trato.
- **Aditividad (ADD).** Para cada par de juegos (N, c_1), $(N, c_2) \in CG^N$ se cumple que $\varphi(c_1 + c_2) = \varphi(c_1) + \varphi(c_2)$ donde $(N, c_1 + c_2)$ es el juego definido para todo $S \subset N$ como $(c_1 + c_2)(S) = c_1(S) + c_2(S)$.

El valor de Shapley verifica las cuatro propiedades EFF, NPP, SYM y ADD introducidas, ver Teorema 1.15.

Teorema 1.15 (Shapley, 1953)**.** *El valor de Shapley es la única regla de asignación en CG^N que satisface las propiedades: EFF, NPP, SYM y ADD.*

El valor de Shapley puede ser definido formalmente como la regla de reparto que asigna a cada jugador una suma ponderada de las contribuciones que produce con las distintas coaliciones, ver Definición 1.13. Sin embargo, existe otra definición alternativa del valor de Shapley. Para ello, es necesaria la definición del concepto de vector de contribución marginal, ver Definición 1.16.

Definición 1.16. Sea $(N, c) \in CG^N$. Sea $\Pi(N)$ el conjunto de permutaciones en N y $\sigma \in \Pi(N)$ de modo que si $\sigma(i) = j$ entonces i ocupa la j-ésima posición determinada por σ (para $i,\ j \in N$). Sea $P_i^\sigma := \{j \in N : \sigma(j) < \sigma(i)\}$ el conjunto de predecesores de i respecto a la permutación σ. El vector marginal asociado a σ queda determinado por

$$m^\sigma(N, c) := (m_i^\sigma(N, c))_{i \in N}$$

donde $m_i^\sigma(N, c) = c(P_i^\sigma \cup i) - c(P_i^\sigma)$ para cada $i \in N$.

Observación 1.17. Dado que se cumple que $\sum_{i \in N} m_i^\sigma(N, c) = c(N)$, cada vector marginal m^σ constituye un reparto de $c(N)$ que asigna a cada jugador su contribución a los predecesores de acuerdo con el orden σ.

No es complicado probar que el valor de Shapley asigna como coste a cada jugador su valor esperado si se supone que los jugadores han llegado a un punto de negociación y a cada uno de ellos se le reclama su coste a la coalición de jugadores que llega antes que él. Además, se asume que el orden de llegada es aleatorio y todos los órdenes son igualmente probables. Por tanto, el valor de Shapley puede ser definido también como:

$$\Phi_i(c) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} m_i^\sigma(N, c).$$

A continuación se establecen ciertas condiciones que establecen la relación entre la asignación propuesta por el valor de Shapley y el núcleo de un juego de coste $(N, c) \in CG^N$. Existen ejemplos de juegos en los que su valor de Shapley no está contenido en $C(c)$. Sin embargo, si el juego de coste es cóncavo, el valor de Shapley está en el núcleo del mismo.

Teorema 1.18. *Sea $(N, c) \in CG^N$ un juego de coste cóncavo. Entonces, $\Phi(c) \in C(c)$.*

Para ilustrar algunos de los conceptos relativos a juegos de coste expuestos a lo largo de este capítulo, se considera el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.19. *Sea $(N, c) \in CG^N$ el juego de coste definido por*

$$c(\emptyset) = 0,\ c(\{1\}) = c(\{2\}) = c(\{3\}) = 3,\ c(\{1, 2\}) = c(\{1, 3\}) = c(\{2, 3\}) = 2 \text{ y } c(N) = 1.$$

Según la Definición 1.7, el núcleo del juego de coste (N, c) es el conjunto

$$C(c) := \{x \in I(c) :\ \text{para cada } S \subset N, \sum_{i \in S} x_i \leq c(S)\}.$$

Las asignaciones del núcleo deben cumplir la racionalidad coalicional y la eficiencia. Entonces, cualquier elemento $x \in C(c)$ satisface las siguientes condiciones:

$$x_1,\, x_2,\, x_3 \leq 3$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_3 \leq 2$$
$$x_2 + x_3 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Equivalentemente, los hiperplanos que delimitan $I(c)$ *y* $C(c)$ *son* $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $-1 \leq x_1 \leq 3$, $-1 \leq x_2 \leq 3$ *y* $-1 \leq x_3 \leq 3$. *Por tanto, el núcleo del juego de coste planteado queda determinado por*

$$C(c) = conv\{(-1, 3, -1), (3, -1, -1), (-1, -1, 3)\},$$

esto es, la envoltura convexa de los puntos indicados.

A continuación, estudiaremos el valor de Shapley. Dado que el juego es cóncavo, el Teorema 1.18 garantiza que la asignación de coste propuesta por Shapley es, además de eficiente, un elemento de su núcleo. Para su determinación, se considera su formulación en términos de sus vectores marginales.

σ	$m_1^\sigma(N,c)$	$m_2^\sigma(N,c)$	$m_3^\sigma(N,c)$
1 2 3	3	-1	-1
1 3 2	3	-1	-1
2 1 3	-1	3	-1
2 3 1	-1	3	-1
3 1 2	-1	-1	3
3 2 1	-1	-1	3
$\Phi_i(c)$	1/3	1/3	1/3

Tabla 1.1: Contribuciones marginales y asignación del valor de Shapley.

La Tabla 1.1 muestra, para cada posible permutación $\sigma \in \Pi(N)$, *la contribución marginal de cada jugador a los predecesores de acuerdo con* σ. *Por tanto, la asignación propuesta por el valor de Shapley para nuestro juego de coste* (N, c) *es:*

$$\Phi(c) = (1/3, 1/3, 1/3) = (0.33, 0.33, 0.33).$$

Capítulo 2

Modelos EOQ y EPQ

2.1. Introducción

En el mundo empresarial, son muchas las decisiones que determinan el rendimiento de las operaciones que se realizan. Ante un escenario completamente globalizado, cada día más empresas recurren a la Investigación de Operaciones para aumentar su competitividad frente a sus principales rivales. La gestión de la cadena de suministro, relacionada con la coordinación de materiales, productos y flujos de información entre proveedores, fabricantes, distribuidores y clientes que participan en la producción y la entrega de un servicio final, es un aspecto clave. Por tanto, se trabaja en la centralización de la gestión de inventario y la coordinación de acciones, para reducir costes y mejorar el servicio.

En este capítulo se exponen los modelos de inventario para situaciones deterministas descritos en Meca et al. (2004), así como los resultados más relevantes al respecto. Éstos permiten la determinación de la política óptima de las entidades con el fin de que sus respectivas demandas, en general fijas, sean cubiertas con el mínimo coste medio por unidad de tiempo. En el proceso, intervienen los costes por la realización de un pedido, así como el gasto derivado del almacenamiento del mismo una vez adquirido. Aparecen, entonces, dos esquemas fundamentales: los modelos EOQ (*Economic Order Quantity*) y EPQ (*Economic Production Quantity*). Se abordará la generalización de dichos modelos al caso multi-agente con n individuos, $n > 1$. Además, se estudiará la influencia de la cooperación en el reparto de costes asociados entre los participantes. Todos ellos son ampliamente analizados en Meca et al. (2003), Meca et al. (2004), Muckstadt y Sapra (2010) y Fiestras-Janeiro et al. (2011).

De acuerdo con la introducción a los juegos de coste realizada en el Capítulo 1, en particular para los juegos de coste asociados a los modelos EOQ y EPQ mencionados, se presentan las reglas definidas y sus propiedades. Por tanto, nuestro objetivo se reduce al estudio del reparto de los gastos asociados a la realización de los pedidos. Así, la regla SOC (*Share the Ordering Costs rule*) y sus caracterizaciones serán tratadas siguiendo lo descrito en Meca et al. (2003)

y Mosquera et al. (2008).

El resto del capítulo se organiza como sigue. En la Sección 2.2, el modelo EOQ será descrito en profundidad. Primero, estudiaremos la política óptima individual. Después, el modelo es extendido al caso multi-agente. El modelo EPQ será presentado en la Sección 2.3. En primer lugar, trataremos el caso individual y después, el caso bajo cooperación. En la Sección 2.4, se plantean los juegos de coste TU asociados a dichas situaciones, así como reglas de reparto aplicables.

2.2. Cantidad Económica de Pedido. Modelo EOQ

La Cantidad Económica de Pedido (*Economic Order Quantity*, EOQ) explica la política que debe seguir un agente i para satisfacer su demanda de un cierto producto que necesita (cf. Hadley y Whitin, 1963). Su descripción se sigue fundamentalmente de las referencias Meca et al. (2003) y Meca et al. (2004).

El objetivo del problema en minimizar el coste promedio por unidad de tiempo al que dicho agente i debe enfrentarse individualmente por la realización del pedido. Con ello, implícitamente, queda determinado el patrón óptimo de pedido: cuándo debe realizar el pedido y cuánto debe solicitar dicha empresa.

Para su planteamiento, se consideran ciertas suposiciones sobre el modelo. La cantidad requerida debe ser entregada al instante, existiendo un coste de almacenamiento de dicho *stock*. En este caso, la capacidad del almacén se supone ilimitada y el producto será adquirido de un único proveedor. La demanda a cubrir se asume conocida, constante e igual a $d_i > 0$ unidades por unidad de tiempo. La empresa se ve obligada a no quedarse sin *stock*; el tiempo entre pedido y entrega del mismo (*leadtime*) se supone determinista, constante y, sin pérdida de generalidad, igual a cero.

En dicho modelo, se distinguen dos tipos de costes.

- **Coste de preparación de pedido.** Este valor no depende de la cantidad requerida. Al solicitarse un nuevo pedido, se paga un coste fijo por pedido igual a $a > 0$. En él se incluyen costes derivados de la solicitud: costes laborales derivados, gastos de envío, llamadas telefónicas,...
- **Coste de almacenamiento.** El coste de almacenamiento de una unidad de producto por unidad de tiempo $h_i > 0$ se supone constante. Incluye costes de seguro, renta de almacén, electricidad, mantenimiento,...

Se denota por Q_i la cantidad de pedido adquirida con el fin de cubrir la demanda d_i del agente en cuestión. De esta manera, se conoce como ciclo el intervalo de tiempo entre dos pedidos consecutivos, esto es, un periodo de Q_i/d_i unidades. Además, la cantidad $m_i := \frac{d_i}{Q_i}$ denota el número de pedidos por unidad de tiempo. Así, el coste medio asociado a la preparación de los mismos es igual a ad_i/Q_i. Por otra parte, dado que el tamaño medio de inventario es $Q_i/2$, si h_i es el coste de almacenamiento por unidad de producto, el coste medio asociado a su almacenamiento es $h_iQ_i/2$.

Entonces, el coste medio por unidad de tiempo es la suma del coste asociado a la realización de preparación de los pedidos y el coste promedio por almacenamiento de los mismos.

$$C(Q_i) := a\frac{d_i}{Q_i} + h_i\frac{Q_i}{2}. \tag{2.1}$$

Mediante la utilización de las técnicas de diferenciación habituales, el tamaño óptimo de pedido que hace mínimo los costes de inventario definidos en (2.1) es

$$\hat{Q}_i := \sqrt{\frac{2ad_i}{h_i}}.$$

Por tanto, la longitud de ciclo óptima queda determinada por

$$\frac{\hat{Q}_i}{d_i} := \sqrt{\frac{2a}{d_i h_i}},$$

siendo el número medio óptimo de pedidos por unidad de tiempo $\hat{m}_i := \frac{d_i}{\hat{Q}_i} = \sqrt{\frac{d_i h_i}{2a}}$. Con los cálculos oportunos, por la coincidencia de los costes de almacenamiento y de pedido, el coste mínimo medio por unidad de tiempo es

$$C(\hat{Q}_i) := \sqrt{2ad_i h_i} = 2a\hat{m}_i.$$

2.2.1. La cooperación en el modelo EOQ

Una vez que el modelo EOQ para un único agente ha sido planteado, se describe una nueva situación en la que un conjunto de agentes, $N := \{1, \ldots, n\}$, se enfrentan a un problema de inventario multi-agente para satisfacer sus demandas, véase Meca et al. (2003) y Meca et al. (2004).

Para cada agente $i \in N$, se denota su demanda, su coste de mantenimiento y su tamaño de pedido por las cantidades $d_i > 0$, $h_i > 0$ y $Q_i > 0$, respectivamente. Como en el modelo básico, existe un único bien necesario para cada una de las empresas, que disponen de espacio propio para su almacenamiento. Con la cooperación, se persigue la minimización del coste total de las solicitudes de pedido realizadas por todas las empresas involucradas en el proceso. En lugar de realizar varias pedidos independientes (modelos EOQ independientes), se realiza un único pedido conjunto. Éste es el motivo por el que todas las empresas realizan sus pedidos en el mismo instante, de forma que las longitudes de sus ciclo deben ser iguales para todas ellas.

La cooperación de los agentes en la gran coalición N deriva en lo siguiente. Si la longitud de ciclo para un agente $i \in N$ es Q_i/d_i, debe ocurrir que $Q_i/d_i = Q_j/d_j$ para cualesquiera $i,\ j \in N$. Tomando $j = 1$, para todo $i \in N$, podemos expresar Q_i como función de Q_1.

$$Q_i := \frac{d_i}{d_1}Q_1 \tag{2.2}$$

Dicha condición, también la cumplen Q_i^* y Q_j^*, es decir, los tamaños óptimos de pedido para i y j si los agentes i, $j \in N$ cooperan.

El coste medio por unidad de tiempo para los agentes en N se obtiene, al igual que en el modelo EOQ, como la suma de los costes de preparación de pedido y los costes de almacenamiento. Al realizar un pedido, el coste medio asociado por unidad de tiempo es ad_1/Q_1. En lo relativo al almacenamiento, al almacenar cada empresa sus productos tras la compra, serán éstas las que asuman el coste asociado. Así, el coste de almacenamiento medio será la suma de los costes medios de almacenamiento individuales, que, junto al coste medio por la realización de pedido, permite definir la siguiente función de coste:

$$C(Q_1, \ldots, Q_n) := a\frac{d_1}{Q_1} + \sum_{i \in N} h_i \frac{Q_i}{2}.$$

Según (2.2), podemos reescribir la función de coste a minimizar $C(Q_1, \ldots, Q_n)$ como

$$C(Q_1) := a\frac{d_1}{Q_1} + \frac{Q_1}{2d_1} \sum_{i \in N} h_i d_i. \tag{2.3}$$

Puede probarse que (2.3) alcanza su mínimo para un pedido de tamaño

$$Q_1^* := \sqrt{\frac{2ad_1^2}{\sum_{i \in N} h_i d_i}}.$$

De acuerdo con (2.2), la cantidad óptima de pedido para el agente $i \in N$, Q_i^*, queda determinado por

$$Q_i^* := \sqrt{\frac{2ad_i^2}{\sum_{j \in N} h_j d_j}}.$$

Así, la longitud de ciclo, para cualquier agente i, es igual a

$$\frac{Q_i^*}{d_i} := \sqrt{\frac{2a}{\sum_{j \in N} h_j d_j}}.$$

Además, el número óptimo de pedidos que la coalición N debe realizar, $\hat{m}_N$, es

$$\hat{m}_N := \frac{d_i}{Q_i^*} = \sqrt{\frac{\sum_{j \in N} h_j d_j}{2a}} = \sqrt{\sum_{j \in N} \hat{m}_j^2},$$

donde $\hat{m}_i := d_i/\hat{Q}_i = \sqrt{d_i h_i/(2a)}$ denota el número medio de pedidos óptimo del agente i al considerarla individualmente (modelo EOQ). Por tanto, la cantidad

$$a\frac{d_1}{Q_1^*} + \sum_{i \in N} h_i \frac{Q_i^*}{2},$$

denota el valor mínimo de los costes medios de inventario por unidad de tiempo. Como $Q_i^* := \sqrt{\frac{2ad_i^2}{\sum_{j \in N} h_j d_j}}$, para todo $i \in N$, dicho coste puede reescribirse como

$$2a\sqrt{\sum_{j \in N} \hat{m}_j^2} = 2a\hat{m}_N.$$

Al igual que en el caso individual, los costes de preparación de pedido y costes de almacenamiento coinciden en el óptimo, $a\hat{m}_N$. Dicho importe solo depende de los valores a y $\hat{m}_N$, determinado por $m := (\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_n)$. Éstos bastan para conocer el coste mínimo de inventario, sin necesidad de que las empresas se sientan obligadas a desvelar sus políticas internas, en términos de demandas y costes de almacenamiento (d_i y h_i, respectivamente).

2.3. Lote Económico de Producción. Modelo EPQ con faltantes

En esta sección, se trata una nueva situación de inventario en las que varios agentes deben adquirir un cierto bien, permitiendo no satisfacer sus demandas a tiempo. Este modelo, conocido como el Lote Económico de Producción (*Economic Production Quantity*) con faltantes, está ampliamente tratado en las referencias Meca et al. (2003), Meca et al. (2004) y Fiestras-Janeiro et al. (2011).

Sea $N := \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de agentes involucrados. Cada agente $i \in N$ necesita cubrir su demanda fija de $d_i > 0$ unidades de producto por unidad de tiempo con un coste de almacenamiento por unidad de tiempo asociado de $h_i > 0$. Además, al solicitar un nuevo pedido, debe abonarse conjuntamente una cantidad fija de $a > 0$ unidades.

Las consideraciones anteriores coinciden con las establecidas para el modelo EOQ. Sin embargo, Meca et al. (2004) introducen las siguientes:

- Para cada agente $i \in N$ se contempla la posibilidad de no cubrir toda la demanda a tiempo, permitiendo un déficit de M_i unidades de producto, con un coste $s_i > 0$ asociado a cada unidad faltante por unidad de tiempo.
- Realizado el pedido, tras un tiempo de entrega constante y determinista (cero, sin pérdida de generalidad), el agente i lo recibe gradualmente. Exactamente, por unidad de tiempo se reciben r_i unidades de producto por unidad de tiempo, esto es, la tasa de reposición de producto para el agente i. Dicha cantidad, cabe suponer que cumple $r_i > d_i$ (en otro caso, no tendría sentido).

El modelo EOQ, descrito en la Sección 2.2, se reduce al modelo EPQ con tasas de reposición de producto, r_i, y coste por faltante, s_i, infinitos.

El objetivo del problema consiste en la determinación de la cantidad óptima de pedido $\hat{Q}_i$ y la cantidad máxima de faltantes permitidos $\hat{M}_i$, para todos los agentes $i \in N$, con el fin de minimizar el coste medio de inventario por unidad de tiempo,

$$C(Q_i, M_i) := a\frac{d_i}{Q_i} + h_i\frac{(Q_i(1-\frac{d_i}{r_i}) - M_i)^2}{2Q_i(1-\frac{d_i}{r_i})} + s_i\frac{M_i^2}{2Q_i(1-\frac{d_i}{r_i})}. \tag{2.4}$$

Entonces, el tamaño óptimo de pedido queda determinado por

$$\hat{Q}_i := \sqrt{\frac{2ad_i}{h_i(1-\frac{d_i}{r_i})}\frac{h_i+s_i}{s_i}},$$

y el máximo número de faltantes permitidos por

$$\hat{M}_i := \sqrt{\frac{2ad_ih_i}{s_i(h_i+s_i)}(1-\frac{d_i}{r_i})}.$$

Como antes, el número óptimo de pedidos que el agente $i \in N$ debe hacer por unidad de tiempo por $\hat{m}_i = d_i/\hat{Q}_i$. Así, el coste asociado al pedido y los faltantes óptimos puede escribirse como

$$C(\hat{Q}_i, \hat{M}_i) := \sqrt{2ad_ih_i\frac{s_i}{h_i+s_i}(1-\frac{d_i}{r_i})} = 2a\hat{m}_i.$$

2.3.1. La cooperación en el modelo EPQ con faltantes

En esta sección, se considera el caso en el que los agentes, con un esquema individual basado en el modelo EPQ descrito, forman una cierta coalición $S \subseteq N$ para realizar un pedido conjunto con el fin de reducir los costes previstos.

Según Meca et al. (2004), la minimización de los costes medios de inventario por unidad de tiempo, conlleva la coordinación de los pedidos de los agentes. De igual manera que en el modelo EOQ, debe cumplirse que $Q_i^*/d_i = Q_j^*/d_j$ para cualquier i, $j \in N$, donde Q_i^* y Q_j^* son los tamaños óptimos de pedido para i y j si cooperan formando la coalición S, ver Sección 2.2.1. Entonces, el coste medio total por unidad de tiempo queda determinado por:

$$C(Q_i,(M_j)_{j\in S}) := a\frac{d_i}{Q_i} + \sum_{j\in S} h_j\frac{(Q_j(1-\frac{d_j}{r_j})-M_j)^2}{2Q_j(1-\frac{d_j}{r_j})} + \sum_{j\in S} s_j\frac{M_j^2}{2Q_j(1-\frac{d_j}{r_j})} =$$

$$= a\frac{d_i}{Q_i} + \frac{1}{2}\sum_{j\in S} h_j\left(\frac{d_j}{d_i}Q_i(1-\frac{d_j}{r_j}) - 2M_j + \frac{d_iM_j^2}{d_iQ_i(1-\frac{d_j}{r_j})}\right) + \frac{1}{2}\sum_{j\in S} s_j\frac{d_iM_j^2}{d_iQ_i(1-\frac{d_j}{r_j})}.$$

Dicha expresión puede reescribirse como:

$$C(Q_i,(M_j)_{j\in S}) := a\frac{d_i}{Q_i} + \frac{1}{2}\sum_{j\in S} h_j\left(\frac{d_j}{d_i}Q_i(1-\frac{d_j}{r_j}) - 2M_j\right) + \frac{1}{2}\sum_{j\in S}(h_j+s_j)\frac{d_iM_j^2}{d_iQ_i(1-\frac{d_j}{r_j})}.$$

Empleando técnicas de análisis diferencial, es fácil obtener los valores $(Q_i^*)_{i\in S}$ y $(M_i^*)_{i\in S}$ que minimizan la función de coste anterior. Para cada $i \in S$,

$$Q_i^* := \sqrt{\frac{2ad_i^2}{\sum_{j\in S} d_jh_j\frac{s_j}{h_j+s_j}(1-\frac{d_j}{r_j})}} \text{ y } M_i^* := Q_i^*\frac{h_i(1-\frac{d_i}{r_i})}{h_i+s_i},$$

Para dichos valores, su coste mínimo está determinado por

$$C(Q_i^*, (M_j^*)_{j\in S}) := 2a\sqrt{\sum_{j\in S} \hat{m}_j^2}.$$

Dado que $\hat{m}_N := \sqrt{\sum_{j\in N} \hat{m}_j^2} \geq \hat{m}_i$ para todo $i \in N$, se asegura una reducción de costes por la realización del pedido de manera conjunta, en comparación con la suma de costes individuales cuando los agentes no cooperan. Además, como $Q_i^* := d_i/\hat{m}_N$, se produce una reducción del tamaño óptimo de pedido frente al valor individual $\hat{Q}_i := d_i/\hat{m}_i$.

De nuevo, los agentes no necesitan desvelar sus demandas, sus tasas de reposición, los costes de almacenamiento y sus faltantes permitidos. Únicamente hace falta que el vector $\hat{m}$ sea conocido por todos ellos. Además, al suponer que el producto es suministrado por un único proveedor, cabe pensar en tasas de reposición r_i comunes para todo i.

2.4. Juegos de coste de inventario en EOQ y EPQ

Un juego de coste de inventario es el juego de coste que surge a partir del problema de asignación de costes en una situación de inventario como las definidas. El objetivo, además de la determinación de las políticas óptimas asociadas a los distintos agentes, consiste en estudiar el reparto de los costes asociados.

Definición 2.1. Una situación de costes de inventario se denota por (N, a, m), donde $N := \{1, \ldots, n\}$ determina el conjunto de agentes que intervienen, a el coste por la realización de un pedido y $m := (\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_n)$ el vector cuya componente $\hat{m}_i \geq 0$ expresa el número óptimo de pedidos por unidad de tiempo si cada agente i actúa individualmente.

En estas situaciones, un conjunto de n agentes en N debe ponerse de acuerdo para la realización del pedido de un cierto bien que necesitan. Ellos desembolsarán por un único pedido un coste fijado $a > 0$, en lugar de pagar n veces a (correspondiente a n pedidos individuales).

Fijada una situación (N, a, m), se define el juego de coste asociado, denominado por juego de inventario, ver Definición 1.1.

Definición 2.2. El juego de inventario asociado a la situación de costes de inventario (N, a, m) es (N, c) con c la función de coste que a cada coalición $S \subseteq N$ asigna $c(S) := 2a\sqrt{\sum_{i\in S} \hat{m}_i^2}$. Esta cantidad denota el coste medio de inventario por unidad de tiempo para los agentes en S si llegan a acuerdo.

En adelante, se denota por I^N la clase de juegos de inventario con conjunto de agentes N.

Observación 2.3. Para cada $S \subseteq N$, su función característica cumple que $c^2(S) := \sum_{i\in S} c^2(i)$.

La Proposición 2.4 prueba las propiedades de monotonía y la concavidad del juego de coste asociado, detalladas en la Definición 1.4.

Proposición 2.4. *Sea (N, a, m) una situación de coste de inventario y sea (N, c) el correspondiente juego de coste asociado. Entonces, (N, c) es cóncavo y monótono.*

Demostración. Sea (N, c) el correspondiente juego de coste. Dado que $\sum_{i\in S} \hat{m}_i^2$ es creciente en el número de elementos en S y como $\sqrt{x}$ es una función monótonamente creciente y cóncava, el juego (N, c) es monótono y cóncavo. □

Además, se verifica que un múltiplo no negativo de un juego de coste (N, c) es otro juego de inventario. Si λ es un número no negativo, $(N, \lambda c)$ es un nuevo juego con su función característica definida, para cada coalición $S \subseteq N$, por $\lambda c(S) := 2a\sqrt{\sum_{i\in S}(\lambda \hat{m}_i)^2}$ que corresponde con la situación de costes de pedido $(N, a, \lambda m)$.

El Teorema 1.11 asocia el carácter equilibrado de un juego con la cardinalidad de su núcleo. Dado que el cumplimiento de la concavidad ha sido probado, el Teorema 1.18 garantiza que el juego es equilibrado. Como se ha visto, las propiedades asociadas a los repartos de costes en el núcleo del juego, justifican la búsqueda de asignaciones pertenecientes a dicho conjunto.

Definición 2.5. Una regla de asignación para sistemas de inventario es una aplicación ϕ que asigna a cada juego de inventario $(N, c) \in I^N$ un reparto del coste total, esto es, $\phi(c) := (\phi_i(c))_{i\in N}$ tal que $\sum_{i\in N} \phi_i(c) = c(N)$.

A continuación, se presenta una regla de reparto para esta clase de juegos cuyas asignaciones siempre están en su núcleo. Su definición y sus caracterizaciones pueden encontrarse en Meca et al. (2003), Meca et al. (2004) y Fiestras-Janeiro et al. (2011).

2.4.1. El reparto de costes de pedido: la regla SOC

La Regla de Reparto de Costes de Pedido (*Share the Ordering Costs rule*), introducida en Meca et al. (2003), propone repartos proporcionales en situaciones como las detalladas en este capítulo.

Sea (N, a, m) una situación de costes de inventario, y $(N, c) \in I^N$ el correspondiente juego de coste asociado. La regla SOC, denotada por σ, propone el pago al agente i bajo los siguientes criterios:

- Debe incluir parte del coste fijo de pedido, proporcional al parámetro $\hat{m}_i^2$.
- Debe considerar el coste de almacenamiento, así como el relativo a los faltantes.

Por tanto, dicha regla asigna al agente i el coste:

$$\sigma_i(c) := a\frac{d_i}{Q_i^*}\frac{\hat{m}_i^2}{\sum_{j\in N}\hat{m}_j^2} + h_i\frac{(Q_i^*(1-\frac{d_i}{r_i}) - M_i^*)^2}{2Q_i^*(1-\frac{d_i}{r_i})} + s_i\frac{M_i^{*2}}{2Q_i^*(1-\frac{d_i}{r_i})},$$

siempre que $\hat{m}_j \neq 0$ para todo $j \in N$. En caso contrario, la regla de asignación σ asigna a cada agente $i \in N$, $\sigma_i(c) = 0$.

Tras ciertas operaciones, se obtiene

$$\sigma_i(c) := \frac{2a\hat{m}_i^2}{\sqrt{\sum_{j\in N}\hat{m}_j^2}}, \text{ o equivalentemente } \sigma_i(c) := \frac{\hat{m}_i^2}{\sum_{j\in N}\hat{m}_j^2}c(N).$$

Como $c(S) := 2a\hat{m}_S = 2a\sqrt{\sum_{j\in S}\hat{m}_j^2}$ y $c^2(S) := \sum_{i\in S}c(i)^2$ para todo $S \subseteq N$, se presenta una reformulación alternativa, en función de los costes coalicionales.

$$\sigma_i(c) := \frac{\hat{m}_i^2}{\sum_{j\in N}\hat{m}_j^2}\ c(N) = \frac{(2a)^2\hat{m}_i^2}{(2a)^2\sum_{j\in N}\hat{m}_j^2}\ c(N) = \frac{c^2(i)}{\sum_{j\in N}c^2(j)}\ c(N) = \frac{c^2(i)}{c(N)}.$$

2.4.2. Caracterizaciones de la asignación de la regla SOC

Interesantes propiedades de la regla SOC han sido estudiadas en la literatura (véase Meca et al. (2003), Meca et al. (2004), Mosquera et al. (2008) y Fiestras-Janeiro et al. (2011) para más detalles).

Proposición 2.6 (Meca et al., 2003)**.** *Sea (N, a, m) una situación de costes de inventario y sea (N, c) el correspondiente juego de inventario asociado. La regla SOC proporciona una asignación del núcleo de dicho juego.*

Demostración. Sea el juego de coste de pedido (N, c), la regla SOC propone para el agente i, el pago determinado por

$$\sigma_i(c) := \frac{2a\hat{m}_i^2}{\sqrt{\sum_{j\in N}\hat{m}_j^2}}.$$

Es fácil comprobar que la regla cumple la propiedad de eficiencia, esto es, $\sum_{i\in N}\sigma_i(c) = c(N)$. Además, para toda coalición no vacía $S \subset N$,

$$\sum_{i\in S}\sigma_i(c) = \sum_{i\in S}\frac{2a\hat{m}_i^2}{\sqrt{\sum_{j\in N}\hat{m}_j^2}} \leq \sum_{i\in S}\frac{2a\hat{m}_i^2}{\sqrt{\sum_{j\in S}\hat{m}_j^2}} = 2a\sqrt{\sum_{j\in S}\hat{m}_j^2} = c(S).$$

La desigualdad anterior permite asegurar la pertenencia de la asignación de la regla SOC al núcleo de (N, c). □

A continuación se presentan caracterizaciones para la regla SOC inspiradas en caracterizaciones análogas para el valor de Shapley en juegos TU. La regla SOC cumple una aditividad especial, basada en una suma cuadrática (ver Meca et al., 2003).

Definición 2.7. Sean (N, c), $(N, c') \in I^N$ dos juegos de inventario. La suma cuadrática de c y c', denotada por $c \oplus c'$, es el juego TU sobre N determinado por la función característica

$$(c \oplus c')(S) := \sqrt{c^2(S) + c'^2(S)}$$

para todo $S \subseteq N$. Además, $c \oplus c' \in I^N$.

Si (N, c) y (N, c') son los juegos de coste asociados con (N, a, m) y (N, a', m') respectivamente, es fácil comprobar que el juego $(N, c \oplus c')$ es el juego asociado a la situación $(N, 1, \bar{m})$, donde $\bar{m}_i := \sqrt{a^2 \hat{m}_i^2 + a'^2 \hat{m}_i'^2}$, para todo $i \in N$.

A continuación, probamos un resultado, de utilidad más adelante, apoyándonos en los juegos de unanimidad descritos en la Definición 1.3. Esta clase de juegos no pertenece a I^N siempre que la coalición T considerada en su definición verifique que $|T| > 1$.

Proposición 2.8. *Para cada $(N, c) \in I^N$, existen una única colección de escalares no negativos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $c := \oplus_{i \in N} \alpha_i u_i$.*

Demostración. Para probar la existencia, tomamos $\alpha_i = c(i) \geq 0$ para todo $i \in N$. Entonces, para cada $S \subseteq N$,

$$(\oplus_{i \in N} \alpha_i u_i)(S) := \sqrt{\sum_{i \in N} (c(i) u_i(S))^2} = \sqrt{\sum_{i \in S} c^2(i)} = 2a \sqrt{\sum_{i \in S} \hat{m}_i^2} = c(S).$$

Para la prueba de la unicidad, suponemos que existen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ con $c = \oplus_{i \in N} \beta_i u_i$. Entonces, para cada $S \subseteq N$, se tiene

$$c(S) := \sqrt{\sum_{i \in S} \beta_i^2} = \sqrt{\sum_{i \in S} c^2(i)}.$$

De lo anterior, tomando $S = \{i\}$ para cada $i \in N$, se obtiene la unicidad. □

En analogía a las propiedades definidas para reglas de asignación de beneficios, se presentan las relativas a la asignación de costes, así como otras aún no mencionadas. Sea $\pi : I^N \to \mathbb{R}^N$ una regla de asignación de costes para juegos de inventario. Algunas propiedades que puede satisfacer π son las siguientes.

- **Eficiencia (EFF).** La regla de asignación π satisface eficiencia si, para todo juego de coste $(N, c) \in I^N$, tenemos que $\sum_{i \in N} \pi_i(c) = c(N)$.
- **Jugador nulo (NPP).** La regla de asignación π satisface la propiedad de jugador nulo si, para todo $(N, c) \in I^N$ y para todo $i \in N$ con $c(i) = 0$, se tiene que $\pi_i(c) = 0$.
- **Monotonía (MON).** La regla de asignación π cumple la propiedad de monotonía si para cada par de juegos de inventario (N, c) y (N, c') e $i \in N$ tenemos que $c(N)\pi_i(c) \geq c'(N)\pi_i(c')$ cuando $c(i) \geq c'(i)$.
- **Simetría (SYM).** La regla de asignación π satisface simetría si $\pi_i(c) = \pi_j(c)$ para todos los agentes simétricos i y $j \in N$ en el juego (N, c). Dos agentes i, $j \in N$ son simétricos en el juego de coste (N, c) si $c(S \cup i) = c(S \cup j)$ para todo $S \subset N \setminus \{i, j\}$.
- **Transferencia (TP).** La regla de asignación π verifica la propiedad de transferencia si, para todo (N, c), $(N, c') \in I^N$, y para todo $i \in N$, se tiene $(c \oplus c')(N)\pi_i(c \oplus c') = c(N)\pi_i(c) + c'(N)\pi_i(c')$.

La regla SOC cumple EFF, SYM, MON, NPP y TP.

Teorema 2.9 (Meca et al., 2004)**.** *La regla SOC σ es la única regla de asignación para juegos de inventario que satisface las propiedades de eficiencia (EFF), simetría (SYM) y monotonía (MON).*

Demostración. Probemos que la regla SOC cumple dichas propiedades utilizando las expresiones del pago que asigna al agente i, $\sigma_i(c) := \frac{c^2(i)}{c(N)}$.

Eficiencia (EFF). Dada la regla SOC σ se tiene que

$$\sum_{i\in N}\sigma_i(c) = \sum_{i\in N}\frac{c^2(i)}{c(N)} = \frac{\sum_{i\in N}c^2(i)}{c(N)} = \frac{c^2(N)}{c(N)} = c(N),$$

cumpliéndose, por tanto, dicha propiedad.

Simetría (SYM). Consideremos $(N,a,m)\in I^N$ y sea (N,c) el juego de inventario asociado e i y $j\in N$ agentes simétricos. Por tanto, para cualquier coalición $S\subseteq N\setminus\{i,j\}$,

$$c(S\cup i) = c(S\cup j) \Leftrightarrow 2a\sqrt{\sum_{k\in S\cup i}\hat{m}_k^2} = 2a\sqrt{\sum_{l\in S\cup j}\hat{m}_l^2} \Leftrightarrow \sum_{k\in S\cup i}\hat{m}_k^2 = \sum_{l\in S\cup j}\hat{m}_l^2.$$

Así, tenemos que

$$\hat{m}_1^2+\cdots+\hat{m}_{|S|}^2+\hat{m}_i^2 = \hat{m}_1^2+\cdots+\hat{m}_{|S|}^2+\hat{m}_j^2 \Leftrightarrow \hat{m}_i^2 = \hat{m}_j^2.$$

En consecuencia, $c(i)=c(j)$ y $\sigma_i(c)=\sigma_j(c)$.

Monotonía (MON). Sea un par de juegos de inventario (N,c) y (N,c') e $i\in N$ cumpliendo que $c(i)\geq c'(i)$. Por tanto,

$$\frac{c(N)\sigma_i(c)}{c'(N)\sigma_i(c')} = \frac{c(N)\frac{c(i)^2}{c(N)}}{c'(N)\frac{c'(i)^2}{c'(N)}} = \frac{c^2(i)}{c'^2(i)} = \left(\frac{c(i)}{c'(i)}\right)^2 \geq 1,$$

quedando demostrado lo que queríamos.

Para la unicidad, tomamos una regla de asignación de costes f que satisface eficiencia (EFF), simetría (SYM) y monotonía (MON). La propiedad de monotonía de f implica que para los juegos de inventario (N,c') y (N,c'') se tiene que $c'(i)=c''(i)\Rightarrow c'(N)f_i(c')=c''(N)f_i(c'')$.

Definimos el juego de inventario (N,c^0) siendo $c^0(S)=0$ para todo $S\subset N$. Por la eficiencia y simetría se sigue que $f_i(c^0)=0$ para todo $i\in N$. Consideremos el juego de coste (N,c_0). Si para algún $i\in N$ tenemos que $c_0(i)=0$, se cumple que $c_0(i)=c^0(i)$. Cuando $c_0(N)=0$, se tiene $c_0=c^0$, por la propiedad de monotonía de los juegos de inventario, y por tanto $f_i(c_0)=0$. Sin embargo, cuando $c_0(N)>0$ obtenemos que $c_0(N)f_i(c_0)=c^0(N)f_i(c^0)=0$, cumpliéndose que $f_i(c_0)=0$. Por tanto, si $c_0(i)=0$ se tiene $f_i(c_0)=0$.

Definimos el número $I(c_0)$ como el número de jugadores $i\in N$ con $c_0(i)>0$. Probamos que $f_i(c_0)=\sigma_i(c_0)$ para todo $i\in N$ por inducción en $I(c_0)$. En efecto, si $I(c_0)=0$, como $c_0(i)=0$ para todo $i\in N$, se tiene $f_i(c_0)=0=\sigma_i(c_0)$. Si

$I(c_0) = 1$ existe un único jugador $k \in N$ con $c_0(k) > 0$. Para todo $i \in N \setminus k$, $c_0(i) = 0$ y por tanto $f_i(c_0) = 0 = \sigma_i(c_0)$. De la eficiencia, se sigue que

$$f_k(c_0) = c_0(N) - \sum_{i \neq k} f_i(c_0) = c_0(N) - \sum_{i \neq k} \sigma_i(c_0) = \sigma_k(c_0).$$

Suponemos ahora que $f(c_0) = \sigma(c_0)$ para todos los juegos de inventario (N, c_0) con $I(c_0) \leq I$, $I \leq n-1$. Consideremos un juego de inventario $(N, \bar{c}_0)$ correspondiente a la situación $(N, \bar{a}, \bar{m})$ con $I(\bar{c}_0) = I + 1$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $c_0(i) > 0$ para los jugadores $i = 1, \ldots, I+1$. Definimos el juego (N, c_0) correspondiente a (N, a, m), donde $a = \bar{a}$, $\hat{m}_j = \hat{\bar{m}}_j$ para todo $j \in N \setminus \{I+1\}$ y $\hat{m}_{I+1} = 0$. Entonces, $I(c_0) = I$ y $f(c_0) = \sigma(c_0)$. Como $c_0(k) = \hat{c}_0(k) > 0$ para todo $k = 1, \ldots, I$, tenemos que $\bar{c}_0(N) f_k(\bar{c}_0) = c_0(N) f_k(c_0) = c_0(N)\sigma_k(c_0)$. Por la definición de σ y usando inducción

$$\bar{c}_0(N) f_k(\bar{c}_0) = c_0(N)\sigma_k(c_0) = c_0(N)\frac{c_0^2(k)}{c_0(N)} = c_0^2(k) = \bar{c}_0^2(k),$$

para todo $k = 1, \ldots, I$.

Entonces, $f_k(\bar{c}_0) = \bar{c}_0^2(k)/\bar{c}_0(N) = \sigma_k(\bar{c}_0)$. Además, $c_0(j) = \bar{c}_0(j) = 0$ para todo $j = I+2, \ldots, n-1, n$, tenemos que $f_j(c_0) = 0 = \sigma_j(c_0)$. Por último, por la propiedad de eficiencia

$$f_{I+1}(\bar{c}_0) = \bar{c}_0(N) - \sum_{k \neq I+1} f_k(\bar{c}_0) = \bar{c}_0(N) - \sum_{k \neq I+1} \sigma_k(\bar{c}_0) = \sigma_{I+1}(\bar{c}_0),$$

concluyendo la demostración. □

Teorema 2.10 (Meca et al., 2003)**.** *La regla SOC σ es la única regla de asignación para juegos de inventario que satisface las propiedades de eficiencia (EFF), jugador nulo (NPP) y transferencia (TP).*

Demostración. Probada la eficiencia de la regla SOC basta demostrar las dos propiedades restantes.

- *Jugador nulo (NPP):* Sea $(N, a, m) \in I^N$ y (N, c) el juego de inventario asociado. Si $c(N) = 0$, por la definición de σ, se verifica que $\sigma_i(c) = 0$ para todo $i \in N$. Supongamos que $c(N) > 0$ y existe un jugador $i \in N$ con $c(i) = 0$. Entonces, $\sigma_i(c) = \frac{c^2(i)}{c(N)} = 0$.

- *Transferencia (TP).* Sean (N, a, m) y $(N, a', m') \in I^N$ y sus juegos de coste asociados (N, c) y (N, c') definidos por

$$c(S) = 2a\sqrt{\sum_{i \in S} \hat{m}_i^2} \text{ y } c'(S) = 2a'\sqrt{\sum_{i \in S} \hat{m}_i'^2},$$

para todo $S \subseteq N$. Entonces, para todo $i \in N$,

$$(c \oplus c')(N)\sigma_i(c \oplus c') = (c \oplus c')(N)\frac{((c \oplus c')(i))^2}{(c \oplus c')(N)} =$$
$$= c^2(i) + c'^2(i) = c(N)\sigma_i(c) + c'(N)\sigma_i(c').$$

A continuación probamos la unicidad. Tomemos π una regla de asignación de costes y sea (N, c) un juego de coste de inventario. Por la Proposición 2.8, $c = \oplus_{i \in N} c(i)u_{\{i\}}$. Tomemos $j \in N$. Como π cumple *(TP)*, tenemos

$$c(N)\pi_j(c) = \sum_{i \in N} c(i)\pi_j(c(i)u_{\{i\}}).$$

Además, por el cumplimiento de *(EFF)* y *(NPP)*,

$$\pi_j(c(i)u_{\{i\}}) := \begin{cases} c(j), & \text{si } \ i = j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, $c(N)\pi_j(c) = c^2(j)$ y por tanto $\pi_j(c) = \sigma_j(c)$. □

La inmunidad a la manipulación coalicional de la regla SOC

A continuación, se comprueba el buen comportamiento de la regla SOC desde el punto de vista de la inmunidad a la manipulación coalicional. Para su estudio, se siguen las referencias Mosquera et al. (2008) y Fiestras-Janeiro et al. (2011).

Intuitivamente, un grupo de agentes puede unirse artificialmente para actuar como un único agente o un solo agente puede separarse artificialmente y presentarse como varios agentes. La inmunidad a estas manipulaciones es importante en la práctica. En muchas situaciones de inventario, es factible que los agentes se fundan, formando una única unidad centralizada, o se dividan, mediante la presentación de las diferentes secciones de una firma única que gestionan su inventario de forma individual como si fueran agentes independientes.

Definición 2.11. Sean $(N, a, m) \in I^N$, $(M, a, m') \in I^M$ y (N, c) y (M, d) los juegos de coste asociados, respectivamente. Dada la coalición $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, diremos que (M, d) es la S-manipulación de (N, c) si

- $M := (N \setminus S) \cup \{i_S\}$.
- $d(T) := c(T)$ para todo $T \subset M$ si $i_S \notin T$.
- $d(T) := c((T \setminus \{i_s\}) \cup S)$ para todo $T \subset M$ si $i_S \in T$.

Definición 2.12. Sea N un conjunto finito y $(N, c) \in I^N$. Sea $S \subset N$, $M := (N \setminus S) \cup \{i_S\}$ y $(M, d) \in I^M$ una S-manipulación de (N, c). Un regla de asignación de costes se dice inmune a la manipulación coalicional si

$$\phi_{i_S}(d) := \sum_{i \in S} \phi_i(c).$$

La regla SOC es la única que satisface la inmunidad coalicional para la clase de juegos de inventario.

Teorema 2.13 (Mosquera et al., 2008)**.** *La única regla de asignación eficiente para juegos de inventario que satisface la inmunidad a la manipulación coalicional es la regla SOC.*

Demostración. En primer lugar, se comprueba que la regla SOC σ satisface la inmunidad a la manipulación coalicional. Sean (N, c), (M, d) y S en las condiciones de la Definición 2.11. Entonces,

$$\sigma_{i_S}(d) = \frac{d^2(i_s)}{d(M)} = \frac{c^2(S)}{c(N)} = \sum_{i\in S} \frac{c^2(i)}{c(N)} = \sum_{i\in S} \sigma_i(c).$$

Para probar su unicidad, consideremos ϕ una regla de asignación que cumple la citada propiedad. Para cada $(N, c) \in I^N$ y un cierto $j \in N$, $\phi_j(c)$ solo depende de $c^2(N)$ y $c^2(j)$. Esto es obvio si $|N| \leq 2$. En otro caso, tomamos $\bar{d}$, la $N \setminus j$-manipulación de c. Dado que $\bar{d}$ es un juego de dos jugadores, $\phi_j(\bar{d})$ solo depende de $\bar{d}^2(M)$ y $\bar{d}^2(j)$. Nótese que $\bar{d}(M) = c(N)$, $\bar{d}(j) = c(j)$ y, dado que ϕ satisface la inmunidad a la manipulación coalicional,

$$\phi_j(c) = c(N) - \sum_{k\in N\setminus j} \phi_k(c) = \bar{d}(M) - \phi_{i_{N\setminus j}}(\bar{d}) = \phi_j(\bar{d}).$$

Como $\phi_j(c)$ solo depende de $c^2(N)$ y $c^2(j)$, podemos expresar $\phi_j(c) = f(c^2(N), c^2(j))$ para todo $(N, c) \in I^N$ y todo $j \in N$.

Probamos que f es lineal en la segunda componente. Consideremos la familia de funciones $\{f(\alpha, \cdot)|\alpha \in (0, +\infty)\}$, cumpliendo que $f(\alpha, \cdot) : (0, \alpha] \to [0, \alpha]$, para todo $\alpha \in (0, +\infty)$. Sean α, x e $y \in (0, \infty)$ con $x + y \leq \alpha$. Entonces, existe $(N, \hat{c}) \in I^N$ tal que $\alpha = \hat{c}^2(N)$, $x = \hat{c}^2(1)$, $y = \hat{c}^2(2)$. Tomando $S = \{1, 2\}$, denotamos por $\hat{d}$ la S-manipulación de $(N, \hat{c})$. Entonces,

$$f(\alpha, x + y) = f(\hat{c}^2(N), \sum_{k\in S} \hat{c}^2(k)) = f(\hat{c}^2(N), \hat{c}^2(S)) = f(\hat{d}^2(M), \hat{d}^2(i_S)) =$$

$$= \phi_{i_S}(\hat{d}) = \sum_{k\in S} \phi_k(\hat{c}) = \sum_{k\in S} f(\hat{c}^2(N), \hat{c}^2(k)) = f(\alpha, x) + f(\alpha, y).$$

Para cada $\alpha \in (0, +\infty)$, $f(\alpha, \cdot)$ es aditiva. Además, al ser no negativa, se tiene que es creciente. La aditividad y la no negatividad aseguran su linealidad.

Utilizando la linealidad de f en su segunda componente obtenemos que $\phi_j(c) = g(c^2(N))c^2(j)$ para todo $(N, c) \in I^N$ y todo $j \in N$. Entonces,

$$c(N) = \sum_{k\in N} \phi_k(c) = g(c^2(N)) \sum_{k\in N} c(k)^2 = g(c^2(N))c^2(N),$$

y así, $g(c^2(N)) = \frac{1}{c(N)}$. Entonces, $\phi_j(c) = \frac{c^2(j)}{c(N)} = \sigma_j(c)$, quedando demostrado el resultado propuesto. □

Para ilustrar los modelos y conceptos de este capítulo, se estudia el ejemplo para el modelo EOQ en Meca et al. (2004). Partiendo de éste, se presenta una nueva situación bajo las suposiciones del modelo EPQ.

Ejemplo 2.14. *Consideremos el caso de tres compañías aéreas que operan en un mismo país, ver Meca et al. (2004). Sus aviones pueden sufrir pequeñas averías que deben ser subsanadas en el menor tiempo posible para evitar cancelaciones. Con este fin, cada compañía dispone de un taller propio con todo lo necesario para las reparaciones. En particular, precisan de bombillas traseras de las aeronaves. Sea* $N = \{1, 2, 3\}$ *el conjunto formado por las tres aerolíneas. Éstas, pagando* $a = 600$ *euros por la realización de un pedido, tienen por demandas* d_i *(en unidades de producto por año) y costes de almacenamiento del producto* h_i *(en unidades monetarias por unidad de producto y año) los detallados en la Tabla 2.1.*

i	1	2	3
d_i	500	300	400
h_i	9.6	11	10

Tabla 2.1: Demanda y coste por almacenamiento asociado a cada agente.

En la Tabla 2.2, para cada $S \subseteq N$*, se recogen los tamaños óptimos de pedido cuando los agentes se unen para realizar sus pedidos bajo el modelo EOQ. Además, se detalla el coste asociado y el reparto que la regla SOC propone para cada posible coalición al considerar los subjuegos asociados con* S *como gran coalición.*

	Política óptima				*Regla SOC*		
S	Q_1^*	Q_2^*	Q_2^*	$C(Q_i^*)_{i\in S}$	$\sigma_1(c)$	$\sigma_2(c)$	$\sigma_3(c)$
$\emptyset$	-	-	-	0	-	-	-
$\{1\}$	250	-	-	2400	2400	-	-
$\{2\}$	-	180.91	-	1989.98	-	1989.98	-
$\{3\}$	-	-	219.09	2190.89	-	-	2190.89
$\{1,2\}$	192.45	115.47	-	3117.69	1847.52	1270.17	-
$\{1,3\}$	184.64	-	147.71	3249.66	1772.58	-	1477.10
$\{2,3\}$	-	121.63	162.18	2959.73	-	1337.96	1621.77
$\{1,2,3\}$	157.46	94.48	125.98	3810.51	1511.61	1039.23	1259.67

Tabla 2.2: Política óptima para cada agente bajo el modelo EOQ.

La Tabla 2.3 recoge la política óptima en el caso en que las compañías aéreas permitan la posibilidad de faltantes. En este caso, bajo el modelo EPQ, se supone que la tasa de reposición de producto es $r_i = 600$ *unidades al año para todo* $i \in N$*, con un coste por faltante igual a* 100*,* 150 *y* 200 *euros por unidad de*

tiempo para los jugadores 1, 2 y 3, respectivamente. Los valores recogidos se corresponden con el tamaño óptimo de pedido (en unidades de producto), su coste asociado (en euros) y los faltantes óptimos permitidos (en unidades de producto).

	Tamaño óptimo			*Coste asociado*	*Faltantes óptimos*		
S	Q_1^*	Q_2^*	Q_2^*	$C(Q_i^*, M_i^*)_{i\in S}$	M_1^*	M_2^*	M_3^*
$\emptyset$	-	-	-	0	-	-	-
$\{1\}$	641.09	-	-	935.90	9.36	-	-
$\{2\}$	-	265.06	-	1358.21	-	9.06	-
$\{3\}$	-	-	388.84	1234.43	-	-	6.17
$\{1,2\}$	363.76	218.27	-	1649.43	5.31	7.46	-
$\{1,3\}$	387.32	-	309.87	1549.10	5.65	-	4.92
$\{2,3\}$	-	196.15	261.53	1835.36	-	6.70	4.15
$\{1,2,3\}$	291.23	174.74	232.98	2060.21	4.25	5.97	3.70

Tabla 2.3: Política óptima para cada agente bajo el modelo EPQ.

Por último, a partir del juego de coste (N, c) obtenido, se detallan las asignaciones que la regla SOC propone a cada uno de los jugadores que intervienen. Se muestran los repartos de coste para cada una de las coaliciones posibles $S \subseteq N$, al considerar los subjuegos asociados que tienen a S como coalición total, ver Tabla 2.4.

	Regla SOC		
S	$\sigma_1(c)$	$\sigma_2(c)$	$\sigma_3(c)$
$\emptyset$	-	-	-
$\{1\}$	935.90	-	-
$\{2\}$	-	1358.21	-
$\{3\}$	-	-	1234.43
$\{1,2\}$	531.04	1118.40	-
$\{1,3\}$	565.43	-	983.67
$\{2,3\}$	-	1005.10	830.25
$\{1,2,3\}$	425.16	895.41	739.64

Tabla 2.4: Asignaciones propuestas por la regla SOC en el modelo EPQ.

Capítulo 3

Sistemas de inventario y transporte

3.1. Introducción

En las políticas económicas actuales, aparecen nuevas formas de expansión empresarial que exigen el desarrollo de nuevos modelos que los expliquen. Es el caso, por ejemplo, de las franquicias, en el que una marca suministra y permite la venta de sus productos o servicios a terceros con un gran margen de beneficios. Por tanto, esta estrategia económica se convierte en una manera eficiente y sin riesgo para el crecimiento de la firma.

En este capítulo, estudiaremos un modelo centralizado de inventario siguiendo Dror y Hartman (2007) y Fiestras-Janeiro et al. (2012). Consideramos un grupo de agentes que necesitan un cierto producto de un proveedor y que realizarán sus pedidos a través de un modelo EOQ descrito en el Capítulo 2. Bajo este nuevo planteamiento, estos agentes deben hacer frente a dos tipos de costes: una parte fija, relativa a la realización del pedido, y otra, correspondiente al transporte del producto. En estos costes fijos influyen los gastos relativos al transporte del producto, dando lugar a la aparición de un nuevo esquema: los sistemas de inventario y transporte. Ahora, el coste fijo por pedido quedará determinado por una parte común a todos los agentes, y una segunda parte dependiente de la distancia entre el agente y el proveedor. De acuerdo con Meca et al. (2003), Meca et al. (2004) y Fiestras-Janeiro et al. (2011) la cooperación entre los agentes era beneficiosa en los modelos EOQ y EPQ. Como cabe esperar, en algunos casos la cooperación en este nuevo modelo también garantiza una reducción de los costes fijos. Para el desarrollo del modelo, será de utilidad la suposición de que todos los agentes están colocados bajo una misma ruta.

Una vez planteado el modelo, estudiaremos el juego de coste asociado a esta nueva situación, así como algunas de sus propiedades siguiendo Fiestras-Janeiro et al. (2012). Además de estudiar su núcleo, definiremos una regla de asignación para esta clase de problemas, así como las propiedades que caracterizan a la

misma.

El resto del capítulo se organiza como sigue. En la Sección 3.2 se describen los sistemas de inventario y transporte en el caso individual y en el caso en el que los agentes cooperen. Los juegos derivados de estas situaciones son estudiados en la Sección 3.3. Finalmente, un ejemplo de sistemas de inventario y transporte es desarrollado como cierre a este capítulo.

3.2. Sistemas de inventario y transporte

Un sistema de inventario y transporte es una situación de múltiples agentes donde cada agente se enfrenta a un problema básico EOQ (ver Sección 2.2). El coste de pedido para cada uno de los agentes es la suma de una primera componente, común a todos los agentes, y una segunda, proporcional a la distancia del agente al proveedor. Considerando $N := \{1, \ldots, n\}$, el conjunto finito de agentes que intervienen, definimos los parámetros asociados a cada $i \in N$ en este tipo de sistemas:

- $a > 0$: la parte del coste fijo por pedido común a todos los agentes.
- $a_i > 0$: la parte del coste fijo por pedido correspondiente a la distancia del agente i al proveedor.
- $d_i > 0$: la demanda determinista por unidad de tiempo.
- $h_i > 0$: coste por el almacenamiento de un producto por unidad de tiempo.

Con la notación anterior, se denota una situación de inventario y transporte por $(N, \mathcal{I}) := (N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N})$. En ellas, cada agente $i \in N$ debe satisfacer su correspondiente demanda a tiempo y para ello, tiene la opción de acumular *stock* mediante la realización de pedidos de tamaño $Q_i > 0$. Para cada $i \in N$, el tamaño óptimo de pedido en este modelo, Q_i^*, y su coste asociado, $C^i(Q_i^*)$ queda determinado por los valores óptimos correspondientes al modelo EOQ cuando consideramos como coste asociado a la preparación de pedido la cantidad $a + a_i$. Así,

$$Q_i^* := \sqrt{\frac{2(a + a_i)d_i}{h_i}} \text{ y } C^i(Q_i^*) := \sqrt{2(a + a_i)d_i h_i}.$$

3.2.1. La cooperación en el modelo

Frente a las acciones individuales de cada uno de los agentes, éstos pueden cooperar formando una coalición $S \subseteq N$ para realizar pedidos conjuntos y reducir costes. En este contexto hacemos las dos suposiciones siguientes (cf. Fiestras-Janeiro et al., 2012).

- Todos los agentes están situados en la misma ruta. Si un grupo de agentes S realiza un pedido conjunto, el coste fijo asociado se corresponde a la suma de una primera componente, a, y una segunda, igual a la distancia maximal de los agentes en S al proveedor. Se denotará por a_S, siendo $a_S := \max\{a_i : \ i \in S\}$.

- El proveedor del producto acepta, e incluso favorece la formación de coaliciones de pedido. Formada la coalición $S \subseteq N$, el coste fijo asociado a los pedidos de esa coalición es $a + a_S$, aunque en algún pedido concreto algún agente en S no compre producto.

Planteadas estas hipótesis, cabe preguntarse cuándo deben realizarse pedidos coalicionales en los que intervengan todos los agentes en N y cómo repartir el correspondiente coste total entre todos sus miembros.

Sea la situación de inventario $(N, \mathcal{I}) = (N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N})$ y consideremos el caso en el que se forma la coalición $S \subseteq N$. Como consecuencia de la segunda de las suposiciones expuestas, todos los miembros deben coordinar sus ciclos. Como vimos en modelos anteriores, esto equivale a que $\frac{Q_i}{d_i} = \frac{Q_j}{d_j}$ para todo i, $j \in S$. El coste medio total por unidad de tiempo para S y el tamaño de pedido Q_i queda determinado por

$$C(S, Q_i) := (a + a_S)\frac{d_i}{Q_i} + \sum_{j \in S} h_j \frac{Q_j}{2} = (a + a_S)\frac{d_i}{Q_i} + \frac{Q_i}{2d_i} \sum_{j \in S} d_j h_j.$$

La coalición S está interesada en determinar el tamaño de pedido que minimiza la función de coste $C(S, Q_i)$. Es fácil comprobar que, si la coalición S se forma, el tamaño óptimo de pedido que el agente $i \in S$ debe realizar es

$$\hat{Q}_i := \sqrt{\frac{2(a + a_S)d_i^2}{\sum_{j \in S} d_j h_j}},$$

con un número óptimo de pedidos por unidad de tiempo igual a

$$\hat{m}_S := \frac{d_i}{\hat{Q}_i} = \sqrt{\frac{\sum_{j \in S} d_j h_j}{2(a + a_S)}}.$$

Para dicho tamaño de pedido, el coste medio asociado por unidad de tiempo es

$$C(S, \hat{Q}_i) := \sqrt{2(a + a_S) \sum_{j \in S} d_j h_j} = 2(a + a_S)\hat{m}_S.$$

3.3. Juegos de inventario y transporte

Un juego de inventario y transporte es un juego de coste planteado a partir de una situación de inventario y transporte.

Sea el sistema de inventario y transporte $(N, \mathcal{I}) = (N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N})$, entonces, el juego de coste (N, c) asociado asigna a cada $S \subseteq N$,

$$c(S) := C(S, \hat{Q}_i) = \sqrt{2(a + a_S) \sum_{j \in S} d_j h_j} = 2(a + a_S)\hat{m}_S.$$

Entonces, un juego de coste (N, c) se denomina un juego de inventario y transporte si existe un sistema de inventario y transporte $(N, \mathcal{I})$ que tenga por juego asociado a (N, c) (ver Fiestras-Janeiro et al., 2012).

Es fácil comprobar que los juegos de inventario y transporte no pertenecen a la clase de los juegos de inventario (su función característica no cumple la caracterización descrita en la Observación 2.3 para dicha clase), ver Meca et al., (2003), Meca et al. (2004) y Mosquera et al. (2008).

La subaditividad en un juego de coste se traduce en que la división de una coalición no es beneficiosa, en el sentido de que el coste de la coalición es menor o igual a la suma de los costes de las subcoaliciones que forman cualquier partición, ver Definición 1.4. A continuación, incluimos un resultado que da una condición necesaria y suficiente para la subaditividad de los juegos de inventario y transporte. Según este resultado, la cooperación es beneficiosa siempre que el número óptimo de pedidos de los clientes más lejanos sea no demasiado pequeño en comparación con las cantidades de otros agentes.

Teorema 3.1 (Fiestras-Janeiro et al., 2012)**.** *Sea (N,c) el juego de inventario y transporte asociado al sistema de inventario y transporte $(N,\mathcal{I}) = (N,a,\{a_i,d_i,h_i\}_{i\in N})$. El juego (N,c) es subaditivo si y solo si*

$$\hat{m}_T \geq \frac{1}{2}\frac{a_T - a_S}{a + a_T}\hat{m}_S$$

para todo S, $T \subseteq N$ tal que $S \cap T = \emptyset$ y $a_S \leq a_T$.

Demostración. " $\Leftarrow$ " Sea S, $T \subseteq N$ tal que $S \cap T = \emptyset$ y $a_S \leq a_T$. Debemos probar que $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T)$ si y sólo si $\hat{m}_T \geq \frac{1}{2}\frac{a_T - a_S}{a+a_T}\hat{m}_S$. Dado que $c(S) \geq 0$,

$$c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) \Leftrightarrow c(S)^2 + c(T)^2 + 2c(S)c(T) \geq c(S \cup T)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2c(S)c(T) \geq c(S \cup T)^2 - c(S)^2 - c(T)^2.$$

En cambio,

$$c(S \cup T)^2 - c(S)^2 - c(T)^2 =$$

$$= 2(a + a_{S\cup T}) \sum_{i\in S\cup T} h_i d_i - 2(a + a_S) \sum_{i\in S} h_i d_i - 2(a + a_T) \sum_{i\in T} h_i d_i =$$

$$= 2(a + a_T) \sum_{i\in T} h_i d_i - 2(a + a_S) \sum_{i\in S} h_i d_i = 2(a_T - a_S) \sum_{i\in S} h_i d_i.$$

" $\Rightarrow$ " La demostración es obvia a partir de que

$$4(a + a_S)(a + a_T)\hat{m}_S\hat{m}_T \geq 2(a_T - a_S)(a + a_S)\hat{m}_S^2 \Leftrightarrow \hat{m}_T \geq \frac{1}{2}\frac{a_T - a_S}{a + a_T}\hat{m}_S.$$

□

3.3.1. El reparto de costes del transporte de inventario.

Realizado el pedido por parte de todos los agentes, debemos estudiar cómo repartir el coste asociado en la situación de inventario y transporte entre ellos. Una primera posibilidad la constituye el conjunto de asignaciones del núcleo del juego asociado.

A continuación, probamos un resultado que garantiza, bajo ciertas condiciones, que el núcleo del juego de inventario y transporte es no vacío. Antes, se introduce la notación y los conceptos necesarios para realizar su demostración, ver Fiestras-Janeiro et al. (2012).

Definición 3.2. Sea (N, c) el juego de coste subaditivo asociado al sistema de inventario y transporte $(N, \mathcal{I}) = (N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i\in N})$. Diremos que $i \in N$ es un agente extremo en $(N, \mathcal{I})$ si la distancia de i al proveedor es mayor o igual que la distancia de cualquier otro agente al proveedor, es decir, $a_i = a_N$.

En adelante, $E_{(N,\mathcal{I})}$ denota el conjunto de los agentes extremos de $(N, \mathcal{I})$. A continuación, se prueba la caracterización del núcleo de un juego de inventario y transporte.

Teorema 3.3 (Fiestras-Janeiro et al., 2012)**.** *Sea el juego de inventario y transporte subaditivo (N, c). Entonces, $C(c)$ es no vacío.*

Demostración. Consideremos el juego de inventario y transporte subaditivo (N, c) asociado a $(N, \mathcal{I}) = (N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i\in N})$, el sistema de inventario y transporte. Tomando un vector marginal $m^\sigma(N, c)$ con σ cumpliendo que $\sigma^{-1}(1)$ es un agente extremo de $(N, \mathcal{I})$, esta demostración consiste en probar que $m^\sigma(N, c)$ pertenece al núcleo de (N, c). Para ello, es suficiente ver que para $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, se cumple que $\sum_{i\in S} m_i^\sigma(N, c) \leq c(S)$. Se distinguen dos casos.

- S contiene el agente extremo $\sigma^{-1}(1)$. Entonces,

$$\sum_{i\in S} m_i^\sigma(N, c) = c(\sigma^{-1}(1)) + \sum_{j\in S\setminus\{\sigma^{-1}(1)\}} (c(P_j^\sigma \cup j) - c(P_j^\sigma)) =$$

$$= c(\sigma^{-1}(1)) + \sum_{j\in S\setminus\{\sigma^{-1}(1)\}} \left(\sqrt{2(a + a_N) \sum_{i\in P_j^\sigma \cup j} h_i d_i} - \sqrt{2(a + a_N) \sum_{i\in P_j^\sigma} h_i d_i} \right) =$$

$$= \sum_{j\in S} \sqrt{2(a + a_N)} \left(\sqrt{\sum_{i\in P_j^\sigma \cup j} h_i d_i} - \sqrt{\sum_{i\in P_j^\sigma} h_i d_i} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j\in S} \sqrt{2(a + a_N)} \left(\sqrt{\sum_{i\in (P_j^\sigma \cup j)\cap S} h_i d_i} - \sqrt{\sum_{i\in P_j^\sigma \cap S} h_i d_i} \right) = c(S),$$

  donde la desigualdad se deriva de que la función $\sqrt{x + y} - \sqrt{x}$ es decreciente en x para todo $y \in [0, \infty)$.

- S no contiene el agente extremo $\sigma^{-1}(1)$. En este caso, denotamos $\bar{S} = S \cup \{\sigma^{-1}(1)\}$. Con la misma prueba, obtenemos que

$$\sum_{i\in \bar{S}} m_i^\sigma(N, c) \leq c(\bar{S}).$$

  Dado que $m^\sigma_{\sigma^{-1}(1)}(N, c) = c(\sigma^{-1}(1))$ y por la subaditividad de c,

$$c(\sigma^{-1}(1)) + \sum_{i\in S} m_i^\sigma(N, c) = \sum_{i\in \bar{S}} m_i^\sigma(N, c) \leq c(\bar{S}) \leq c(\sigma^{-1}(1)) + c(S),$$

  lo que implica que $\sum_{i\in S} m_i^\sigma(N, c) \leq c(S)$.

□

Con este resultado, cabe plantearse la definición de una regla de reparto para el juego subaditivo (N, c) asociado a $(N, \mathcal{I})$ que siempre proponga repartos en el núcleo. Propondrá asignaciones del coste asociado a la formación de la coalición total entre sus miembros, a través de un vector $\phi(N, \mathcal{I}) := (\phi_i(N, \mathcal{I}))_{i \in N}$, cumpliendo, por hipótesis, que $\sum_{i \in N} \phi_i(N, \mathcal{I}) = c(N)$.

3.3.2. La regla de la línea

En esta sección se presenta una regla de asignación para esta clase de juegos, con interesantes propiedades bajo la subaditividad de los mismos. Su definición y la caracterización de esta nueva propuesta de reparto pueden verse en Fiestras-Janeiro et al. (2012).

Dado un sistema de transporte $(N, \mathcal{I})$ consideremos todas las ordenaciones $\sigma \in \Pi(N)$ que invierten el orden dado por las distancias de los agentes al proveedor. Esto es, si $\sigma \in \Pi(N)$, cumpliendo que $\sigma(i) \leq \sigma(j)$, implica que la distancia de i al proveedor, a_i, es mayor o igual que la distancia de j al proveedor, a_j. Denotaremos por $\Pi(N, \mathcal{I})$ al conjunto de tales ordenaciones. Formalmente,

$$\Pi(N, \mathcal{I}) := \{\sigma \in \Pi(N) : \sigma(i) \leq \sigma(j) \Rightarrow a_i \geq a_j\}.$$

La regla de asignación que se define para el sistema de inventario y transporte $(N, \mathcal{I})$, la regla de la línea, propone que cada agente $i \in N$ tiene que pagar el promedio de los vectores marginales asociados a los ordenaciones de $\Pi(N, \mathcal{I})$.

Definición 3.4. La regla de la línea propone, para cada agente $i \in N$ del juego de coste (N, c) asociado a la situación de inventario y transporte $(N, \mathcal{I})$, la asignación $L(N, \mathcal{I}) := (L_i(N, \mathcal{I}))_{i \in N}$ definida por

$$L_i(N, \mathcal{I}) := \frac{1}{|\Pi(N, \mathcal{I})|} \sum_{\sigma \in \Pi(N, \mathcal{I})} m_i^{\sigma}(N, c).$$

Dada una ordenación $\sigma \in \Pi(N, \mathcal{I})$, $\sigma^{-1}(1)$ es un agente extremo de $(N, \mathcal{I})$ y $m^{\sigma}(N, c) \in C(c)$ cuando (N, c) es un juego subaditivo. Por tanto, debido a la convexidad del núcleo, $L(N, \mathcal{I}) \in C(c)$ cuando (N, c) es subaditivo.

Teorema 3.5 (Fiestras-Janeiro et al., 2012)**.** *Sea el sistema de inventario y transporte $(N, \mathcal{I})$ con el juego de coste asociado (N, c) subaditivo. Entonces, $L(N, \mathcal{I}) \in C(c)$.*

La nueva regla propuesta mantiene la esencia del valor de Shapley para juegos de coste. La regla de la línea, computacionalmente, requiere un menor coste, además de proporcionar asignaciones del núcleo del juego de coste (N, c).

A continuación, se describen dos propiedades para reglas de asignación ϕ en sistemas de inventario y transporte, relacionadas con la distancia del agente al proveedor.

Tratamiento equilibrado para agentes a igual distancia (BT). Una regla de asignación ϕ para sistemas de inventario y transporte satisface esta propiedad si para cualquier par de agentes a igual distancia del proveedor, el

trato recibido con la asignación es "equilibrado". Formalmente, la propiedad se enunciará del siguiente modo. Dado el sistema de inventario y transporte $(N, \mathcal{I}) = (N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N})$ consideremos j, $k \in N$ con $a_j = a_k$. Denotando por $(N \setminus l, \mathcal{I})$ al sistema de inventario y transporte $(N \setminus l, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N \setminus l})$ para cada $l \in N$, debe cumplirse que

$$\phi_j(N, \mathcal{I}) - \phi_j(N \setminus k, \mathcal{I}) = \phi_k(N, \mathcal{I}) - \phi_k(N \setminus j, \mathcal{I}).$$

Libre participación de agentes menos costosos (FP). Una regla de asignación ϕ para sistemas de inventario y transporte satisface esta propiedad si la unión de agentes a un grupo ya formado no afecta a la asignación de cada miembro inicial del grupo, cuando cada uno de los nuevos agentes está situado más cerca del proveedor que todos los miembros del grupo. Formalmente, esta propiedad se enuncia de la siguiente manera. Tomemos un sistema de inventario y transporte $(N \cup N', \mathcal{I}_{N \cup N'}) = (N \cup N', a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N \cup N'})$ con $N \cap N' = \emptyset$ y $a_{N'} < a_i$ para todo $i \in N$. Sea $(N, \mathcal{I})$ el sistema de inventario y transporte correspondiente a $(N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N})$. Tenemos, para todo $j \in N$, que

$$\phi_j(N \cup N', \mathcal{I}_{N \cup N'}) = \phi_j(N, \mathcal{I})$$

Observación 3.6. Esta propiedad (FP) se fundamenta en la suposición de que los agentes se sitúan sobre una ruta identificando cada uno de ellos con una ciudad. Las fusiones entre ellas están permitidas, favoreciendo a las más cercanas al proveedor y resultando aquellas más alejadas indiferentes.

Estas propiedades caracterizan a la regla de la línea, tal y como se prueba en el siguiente resultado. Su demostración está recogida en Fiestras-Janeiro et al. (2012).

Teorema 3.7 (Fiestras-Janeiro et al., 2012)**.** *La regla de la línea es la única regla para sistemas de inventario y transporte satisfaciendo BT y FP.*

Ejemplo 3.8. *Consideremos el siguiente ejemplo, desarrollado en Fiestras-Janeiro et al. (2012), para los sistemas de inventario y transporte* $(N, \mathcal{I})$*. Sea* $N = \{1, 2, 3\}$ *el conjunto de los tres agentes que participan, siendo* $a = 200$ *euros la parte de coste fijo común a todos los individuos. Las distancias de cada uno de ellos al proveedor, sus demanda y sus costes de almacenamiento aparecen reflejados en la Tabla 3.1.*

i	1	2	3
a_i	300	300	900
d_i	90	80	20
h_i	0.06	0.06	0.1

Tabla 3.1: Distancias al proveedor, demanda y costes de almacenaje individuales.

La Tabla 3.2 recoge la función característica del juego de inventario y transporte (N, c) asociado al sistema $(N, \mathcal{I})$ definido. La propiedad de la subaditividad se comprueba fácilmente. Además, para cada una de las coaliciones $S \subseteq N$, se indica la cantidad óptima de pedido que a cada agente en S le corresponde.

S	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	N
$c(S)$	0	73.49	69.28	66.33	101.00	127.59	122.31	163.83
Ag. 1	-	1224.75	-	-	891.13	1551.81	-	1208.58
Ag. 2	-	-	1154.70	-	792.12	-	1438.95	1074.29
Ag. 3	-	-	-	663.33	-	344.85	359.74	268.57

Tabla 3.2: Juego de coste asociado y tamaños óptimos de pedido asociados para los distintos agentes.

Además, el conjunto de agentes extremos es $E_{(N,\mathcal{I})} = \{3\}$ *y* $\Pi(N, \mathcal{I}) = \{(312), (321)\}$. *Por tanto,*

$$\{m^\sigma(N, \mathcal{I}) | \sigma \in \Pi(N, \mathcal{I})\} = \{(61.26, 36.24, 66.33), (41.52, 55.98, 66.33)\}.$$

La asignación propuesta por la regla de la línea, obtenida como promedio de los vectores marginales anteriormente hallados, se refleja en la Tabla 3.3. A su vez, se presenta el valor de Shapley del juego de coste (N, c) planteado, cuyo reparto no pertenece a su núcleo.

Agente	1	2	3
$L(N, \mathcal{I})$	51.39	46.11	66.33
$\Phi(c)$	53.83	49.09	60.91

Tabla 3.3: Asignaciones propuestas por la regla de la línea y el valor de Shapley para el juego (N, c) definido.

Capítulo 4

Modelos EOQ sin costes de almacenamiento y con capacidad limitada

4.1. Introducción

La disposición de un lugar donde guardar sus pedidos, marca la política económica de muchas empresas. Son muchas las que poseen un almacén propio para conservar, tras la adquisición, los productos comprados sin obligación de pagar por su acopio. En general, se trata de negocios de un tamaño industrial reducido con pedidos de un tamaño menor que el que pueden realizar, por ejemplo, grandes factorías de su mismo sector.

Tres modelos donde los costes de almacenamiento son fijos e independientes del pedido realizado son descritos en este capítulo. Esto favorece a las empresas ya que, en lugar de comprar únicamente la cantidad de producto que satisfaga su demanda, pueden solicitar un pedido de mayor tamaño, incluyendo la capacidad del almacén sin sufrir penalizaciones en los costes. Bajo esta suposición, los dos primeros modelos expuestos, descritos en Fiestras-Janeiro et al. (2013a), se basan en el estudio de las políticas de inventario para explotaciones ganaderas en el noroeste de España. El primero de los modelos considerados se corresponde al caso EOQ con costes fijos de pedido, demanda determinista, con capacidad de almacenamiento limitada y sin posibilidad de faltantes. El segundo de ellos, además de las características anteriores, incluye costes correspondientes al transporte de los productos que dependerán de la distancia al proveedor. El último de los modelos descritos, también bajo este supuesto, describe una situación multi-agente sin costes asociados al transporte, permitiendo además la posibilidad de faltantes (cf. Fiestras-Janeiro et al., 2013b).

Tratados estos modelos, plantearemos los juegos de coste asociados y algunas de sus propiedades, ver Fiestras-Janeiro et al. (2013a) y Fiestras-Janeiro et al.

(2013b). Al igual que en los modelos descritos en los capítulos anteriores y debido a su importancia, estudiaremos el núcleo del juego y su relación con las asignaciones propuestas por las reglas que definiremos para el reparto de costes asociados.

Este capítulo se organiza como sigue. En la Sección 4.2, se presenta el modelo con costes fijos de pedido. El modelo con costes de transporte es descrito en la Sección 4.3. El último de los considerados, el modelo con costes de producto fijos, se desarrolla en la Sección 4.4. Para cada uno de ellos, se estudian los juegos de coste asociados, reglas de reparto para los mismos y sus propiedades. Cada sección se cierra con un ejemplo que ilustra el modelo planteado.

4.2. El modelo básico

Un sistema EOQ básico sin costes de almacenamiento y con capacidad limitada para el almacén es una situación multi-agente donde cada uno de los agentes se enfrenta a un problema de revisión continua con costes fijos de pedido, demanda determinista y lineal, sin costes asociados al almacenamiento de producto y sin posibilidad de faltantes, cf. Fiestras-Janeiro et al. (2013a). Considerando $N := \{1, \ldots, n\}$ como el conjunto finito de agentes que intervienen, para cada $i \in N$ se definen los siguientes parámetros asociados.

- $a > 0$, el coste fijo por pedido.
- $d_i > 0$, la demanda determinista por unidad de tiempo.
- $K_i > 0$, la capacidad de almacenamiento del agente i.

Denotaremos este modelo por la tupla $(N, a, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$. En él, el proveedor asocia un coste a cada vez que un pedido es realizado. La política óptima de un agente individual en este modelo es muy sencilla. Como los costes por almacenar producto son nulos, el agente i realizará pedidos de tamaño máximo, K_i, cada vez que el *stock* es cero. El tamaño de cada ciclo para el agente i es K_i/d_i, esto es, el tiempo entre dos pedidos consecutivos. Así, para el agente i el coste óptimo por unidad de tiempo es

$$C_i := \frac{\text{coste de un ciclo}}{\text{longitud de ciclo}} = \frac{a}{K_i/d_i} = a\frac{d_i}{K_i}.$$

Al no permitirse la posibilidad de faltantes, la cooperación de los agentes en N obliga a la coordinación de sus pedidos conjuntamente, ajustando los ciclos de cada uno de ellos al ciclo óptimo más corto. Por tanto, para cada posible coalición $S \subseteq N$, el coste óptimo por unidad de tiempo queda determinado por

$$C_S := \frac{\text{coste de un ciclo}}{\text{longitud de ciclo}} = \frac{a}{\min_{i\in S} K_i/d_i} = a \max_{i\in S} \frac{d_i}{K_i}.$$

Planteado el modelo y determinada su política óptima se debe abordar cómo repartir los costes conjuntos entre los distintos agentes. Para ello, necesitamos definir su juego de coste asociado.

Definición 4.1. A cada sistema EOQ básico sin costes de almacenamiento y con capacidad limitada para el almacén $(N, a, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$ podemos asociar el juego de coste (N, c) definido por

$$c(S) := a \max_{i\in S} \frac{d_i}{K_i}$$

para cada coalición no vacía $S \subseteq N$. $c(S)$ se corresponde con C_S, el coste óptimo por unidad de tiempo si los agentes en S cooperan.

Los juegos asociados a los sistemas EOQ básicos sin costes de almacenamiento y con capacidad limitada para el almacén pertenecen a la clase de juegos de coste introducidos por Littlechild y Owen (1973): los juegos de aeropuerto.

Definición 4.2. Un juego del aeropuerto es un juego de coste (N, c) es aquel que cumple

- $c(i) > 0$ para cada $i \in N$.
- $c(S) := \max\{c(i) : \ i \in S\}$ para cada coalición no vacía $S \subseteq N$.

Planteado el juego, con la definición de su función característica, cabe pensar en el reparto del coste total $c(N)$ entre los distintos jugadores. En general, debido a sus interesantes propiedades, buscamos asignaciones en el núcleo del juego planteado. El valor de Shapley es, para los juegos de aeropuerto, una excelente regla de asignación que, además, selecciona imputaciones en el núcleo. El siguiente teorema caracteriza las asignaciones propuestas por el valor de Shapley.

Teorema 4.3 (Littlechild y Owen, 1973)**.** *Sea (N, c) un juego del aeropuerto y sea $\Phi(c)$ su valor de Shapley. Entonces,*

- $\Phi(c) \in C(c)$.
- *Suponemos, sin pérdida de generalidad, que los agentes en N están organizados en orden no decreciente de d_i/K_i, esto es, que $d_1/K_1 \leq \cdots \leq d_n/K_n$ con n el número de elementos de N. Entonces,*

$$\Phi_i(c) := \frac{c(1)}{n} + \sum_{j=2}^{i} \frac{c(j) - c(j-1)}{n - j + 1}.$$

A la vista de lo tratado en esta sección, el valor de Shapley constituye una buena elección para el reparto de costes en este modelo.

Ejemplo 4.4. *Consideremos el caso de cinco granjas lecheras con* 40*,* 140*,* 120*,* 130 *y* 120 *vacas, respectivamente, situadas en el noroeste de España. Cada una de ellas, contractualmente, tiene garantizada la recogida de toda la cantidad de leche que produzcan sus vacas. Para mantener la producción y la calidad de leche acordada con la empresa láctea, dichas granjas necesitan de alimento rico en determinados nutrientes para alimentar a sus animales. Éste es adquirido directamente de un proveedor, con un coste fijo $a = 200$ euros (más un coste variable que depende linealmente de la cantidad adquirida).*

Denotando por $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *el conjunto de las cinco granjas lecheras, sus demandas, medidas en toneladas por día, y la capacidad de sus almacenajes, en toneladas, se detallan en la Tabla 4.1.*

i	1	2	3	4	5
d_i	0.4	1.4	1.2	1.3	1.2
K_i	4	10	8	8	6
d_i/K_i	0.1	0.14	0.15	0.1625	0.2
C_i	20	28	30	32.5	40

Tabla 4.1: Demanda y capacidad de los almacenajes de cada granja, en toneladas por día y toneladas respectivamente, así como sus costes individuales

La cooperación de un grupo de los agentes de N *obliga a la coordinación de sus ciclos, ajustándolo al tamaño del ciclo óptimo más pequeño. Por tanto, para cualquier coalición no vacía* $S \subseteq N$*, el coste óptimo por unidad de tiempo asociado a la cooperación de sus agentes está determinado por*

$$C_S = \frac{\textit{coste de un ciclo}}{\textit{longitud de ciclo}} = \frac{a}{\min_{i \in S} K_i/d_i} = a \max_{i \in S} \frac{d_i}{K_i}.$$

Considerando el coste óptimo por unidad de tiempo para N*,*

$$C_N = a \max_{i \in N} \frac{d_i}{K_i} = 200 \times 0.2 = 40,$$

se observa una reducción significativa al comparar este valor con la suma de los correspondientes costes óptimos individuales,

$$20 + 28 + 30 + 32.5 + 40 = 150.5.$$

Por la caracterización del valor de Shapley descrita en el Teorema 4.3 para el juego de coste asociado (N, c)*, haciendo* $c(i)$ *igual a* C_i*, se obtiene su propuesta de reparto.*

$$\Phi(c) = (4, 6, 6.667, 7.917, 15.417).$$

4.3. El modelo con costes de transporte

Un sistema EOQ básico sin costes de almacenamiento, con capacidad limitada de su almacén y con costes de transporte es una situación multi-agente donde cada uno de los agentes se enfrenta a un problema de revisión continua con un coste variable de pedido, con demanda determinista y lineal, sin costes asociados al almacenamiento de producto, con capacidad limitada del almacenamiento y

sin posibilidad de faltantes. El coste variable de pedido de cada agente tiene dos componentes: una parte fija y una variable (costes asociados al transporte) que depende de su distancia al proveedor. Considerando $N := \{1, \ldots, n\}$ como el conjunto de agentes que intervienen, se definen, para cada $i \in N$, los siguientes parámetros asociados.

- $a > 0$, el coste fijo por pedido.
- $a_i > 0$, el coste de transporte por pedido.
- $d_i > 0$, la demanda determinista por unidad de tiempo.
- $K_i > 0$, la capacidad de almacenamiento del agente i.

Este modelo será denotado por la tupla $(N, a, \{a_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$. En él, se consideran las mismas suposiciones que las descritas en el caso cooperativo de los sistemas de inventario y transporte (ver Sección 3.2.1):

- Todos los agentes están localizados bajo la misma ruta: si un grupo $S \subseteq N$ de agentes realiza un pedido conjunto, el coste fijo es la suma de una componente a y otra igual a la distancia maximal de los agentes en S al proveedor.
- Si se forma una coalición de pedidos S, el proveedor asigna al realizarse cada pedido un coste igual a $a + \text{máx}_{i\in S}\, a_i$.

Este modelo está inspirado en los sistemas de inventario y transporte tratados en el Capítulo 3, cf. Fiestras-Janeiro et al. (2012). Los costes por almacenamiento ahora son nulos, y las capacidades de almacenaje limitadas, imponiendo un coste fijo y un coste por transporte al solicitar un nuevo pedido.

La política óptima individual de este modelo se obtiene de manera análoga al caso del esquema con costes fijos. Al ser nulos los costes de almacenamiento, el agente i solicitará la cantidad máxima permitida de producto, K_i, cuando el *stock* llegue cero. El tamaño de cada ciclo para el agente i es K_i/d_i con un coste óptimo por unidad de tiempo para i igual a

$$C_i := \frac{\text{coste de un ciclo}}{\text{longitud de ciclo}} = \frac{a + a_i}{K_i/d_i} = (a + a_i)\frac{d_i}{K_i}.$$

Analicemos el caso cooperativo del modelo. Como en los modelos anteriores, la cooperación implica la coordinación en los pedidos, de forma que las longitudes de ciclo individuales deben coincidir con la longitud de ciclo conjunta. Entonces, bajo el cumplimiento de las suposiciones impuestas para el modelo, para cada coalición no vacía $S \subseteq N$, el coste óptimo por unidad de tiempo si sus miembros acuerdan un pedido conjunto es

$$C_S := \frac{\text{coste de un ciclo}}{\text{longitud de ciclo}} = \frac{\text{máx}_{i\in S}\{a + a_i\}}{\text{mín}_{j\in S}\{K_j/d_j\}} =$$

$$= \max_{i\in S}\{(a + a_i)\} \max_{j\in S}\{\frac{d_j}{K_j}\} = \max_{i\in S} \max_{j\in S}\{(a + a_i)\frac{d_j}{K_j}\}.$$

Así, como en Fiestras-Janeiro et al. (2012), a cada sistema EOQ sin costes de almacenamiento, con capacidad limitada de su almacén y con costes de transporte podemos asociar un juego de coste, ver Definición 4.5.

Definición 4.5. A cada sistema EOQ básico $(N, a, \{a_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$ sin costes de almacenamiento, con capacidad limitada de su almacén y con costes de transporte se asocia el juego de coste (N, c) definido, para cada coalición no vacía $S \subseteq N$, por

$$c(S) := \max_{i\in S} \max_{j\in S} \left\{ (a + a_i)\frac{d_j}{K_j} \right\}.$$

$c(S)$ se corresponde con C_S, el coste óptimo por unidad de tiempo cuando los agentes en S cooperan.

La unión en una coalición $S \subseteq N$ será ventajosa cuando los costes conjuntos sean menores o, al menos, no sean mayores que la suma de los costes individuales de los agentes en S. Dicha propiedad se conoce como la subaditividad de un juego de coste.

A continuación, estudiaremos las condiciones de un sistema EOQ sin costes de almacenamiento, con capacidad limitada de su almacén y con costes de transporte bajo las cuales el juego de coste asociado es subaditivo.

Teorema 4.6 (Fiestras-Janeiro et al., 2013a)**.** *Sea el sistema EOQ sin costes de almacenamiento, con capacidad limitada de su almacén y con costes de transporte* $(N, a, \{a_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$*. Si* (N, c) *es su juego asociado, éste es subaditivo si y sólo si, para las coaliciones no vacías* $S, T \subseteq N$ *con* $S \cap T = \emptyset$ *y* $\max_{i\in S} a_i \leq \max_{i\in T} a_i$*, al menos una de las dos condiciones siguientes se cumple:*

1. $\max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\} \leq \max_{i\in T}\{\frac{d_i}{K_i}\}$.

2. $\max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\} > \max_{i\in T}\{\frac{d_i}{K_i}\}$ *y* $\frac{\max_{i\in T} a_i - \max_{i\in S} a_i}{a+\max_{i\in T} a_i} \leq \frac{\max_{i\in T} \frac{d_i}{K_i}}{\max_{i\in S} \frac{d_i}{K_i}}$.

Demostración. " $\Rightarrow$ " Consideremos (N, c) subaditivo y tomemos las coaliciones no vacías $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$ y $\max_{i\in S} a_i \leq \max_{i\in T} a_i$. Por tanto,

$$c(S \cup T) = \max_{i\in S\cup T}\{a + a_i\} \max_{i\in S\cup T}\{\frac{d_i}{K_i}\} = \max_{i\in T}\{a + a_i\} \max_{i\in S\cup T}\{\frac{d_i}{K_i}\}.$$

Por la subaditividad del juego tenemos que

$$\max_{i\in T}\{a + a_i\}\left(\max_{i\in S\cup T}\{\frac{d_i}{K_i}\} - \max_{i\in T}\{\frac{d_i}{K_i}\}\right) \leq \max_{i\in S}\{a + a_i\} \max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\}.$$

Si $\max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\} > \max_{i\in T}\{\frac{d_i}{K_i}\}$, entonces $\max_{i\in S\cup T}\{\frac{d_i}{K_i}\} = \max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\}$. Dividiendo la desigualdad anterior por $\max_{i\in T}\{a + a_i\} \max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\}$, se obtiene

$$1 - \frac{\max_{i\in T}\{\frac{d_i}{K_i}\}}{\max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\}} \leq \frac{\max_{i\in S}\{a + a_i\}}{\max_{i\in T}\{a + a_i\}} \Leftrightarrow \frac{\max_{i\in T}\{a_i\} - \max_{i\in S}\{a_i\}}{a + \max_{i\in T}\{a_i\}} \leq \frac{\max_{i\in T}\{\frac{d_i}{K_i}\}}{\max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\}},$$

como queríamos ver.

" $\Leftarrow$ " Dadas las coaliciones S, $T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$ y $\max_{i\in S}\{a_i\} \leq \max_{i\in T}\{a_i\}$. Si se cumple la Condición 1,

$$c(S\cup T) = \max_{i\in S\cup T}\{a+a_i\}\max_{i\in S\cup T}\{\frac{d_i}{K_i}\} = \max_{i\in T}\{a+a_i\}\max_{i\in T}\{\frac{d_i}{K_i}\} = c(T) \leq c(S)+c(T).$$

El cumplimiento de la segunda condición asegura que

$$(\max_{i\in T}\{a_i\} - \max_{i\in S}\{a_i\})\max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\} \leq \max_{i\in T}\{a+a_i\}\max_{i\in T}\{\frac{d_i}{K_i}\}.$$

Por tanto,

$$c(S)+c(T) = \max_{i\in S}\{a+a_i\}\max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\} + \max_{i\in T}\{a+a_i\}\max_{i\in T}\{\frac{d_i}{K_i}\} \geq$$

$$\geq \max_{i\in S}\{a+a_i\}\max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\} + (\max_{i\in T}\{a_i\} - \max_{i\in S}\{a_i\})\max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\} =$$

$$= \max_{i\in T}\{a+a_i\}\max_{i\in S}\{\frac{d_i}{K_i}\} = \max_{i\in S\cup T}\{a+a_i\}\max_{i\in S\cup T}\{\frac{d_i}{K_i}\} = c(S\cup T).$$

□

Conocidas las políticas óptimas de este modelo y las condiciones para las cuales es beneficiosa la cooperación, debemos estudiar cómo repartir los costes del pedido conjunto entre los agentes que intervienen.

El Teorema 4.7 garantiza la existencia de elementos en el núcleo de (N,c). En su prueba, es necesaria la notación para los vectores marginales asociados a una permutación $\sigma \in \Pi(N)$ descrita en la Definición 1.16, ver Capítulo 1.

Teorema 4.7 (Fiestras-Janeiro et al., 2013a)**.** *Sea el sistema EOQ sin costes de almacenamiento, con capacidad limitada de su almacén y con costes de transporte* $(N, a, \{a_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$ *y sea* (N,c) *su juego asociado, que suponemos que es subaditivo. Entonces el núcleo* $C(c)$ *es no vacío.*

Demostración. Esta demostración es similar a la prueba del Teorema 3.3 para el núcleo de los juegos de coste asociados a los sistemas de inventario y transporte. Basta tener en cuenta que, bajo este modelo, para cada $j \in S \setminus \{\sigma^{-1}\}$,

$$c(P_j^\sigma \cup j) - c(P_j^\sigma) = ((a+\max_{i\in N}\{a_i\})\max_{i\in P_j^\sigma\cup\{j\}}\{\frac{d_i}{K_i}\} - (a+\max_{i\in N}\{a_i\})\max_{i\in P_j^\sigma}\{\frac{d_i}{K_i}\}).$$

□

4.3.1. La regla de las dos líneas

En esta sección, se presenta una regla de asignación que garantiza repartos en el núcleo del juego asociado a nuestro problema. Sea (N,c) el juego de coste asociado al sistema EOQ básico sin costes de almacenamiento, con capacidad limitada de su almacén y con costes de transporte $(N, a, \{a_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$. Consideremos los siguientes dos conjuntos de permutaciones:

- $\Pi_1(N,c) := \{\sigma \in \Pi(N) : \ a_i \geq a_j \Rightarrow \sigma(i) \leq \sigma(j), \text{ para todo } i, \ j \in N\}$. El conjunto está formado por las permutaciones que revierten el orden dado por los costes de transporte.
- $\Pi_2(N,c) := \{\sigma \in \Pi(N) : \ \frac{d_i}{K_i} \geq \frac{d_j}{K_j} \Rightarrow \sigma(i) \leq \sigma(j), \text{ para todo } i, \ j \in N\}$. El conjunto lo conforman las permutaciones que revierten el orden dado por las *ratios* demanda/capacidad.

La regla de asignación que describiremos, la regla de las dos líneas propondrá a cada uno de los agentes del sistema $(N, a, \{a_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$ la media de los promedios de los vectores marginales asociados a $\Pi_1(N,c)$ y de los promedios de los vectores marginales asociados a $\Pi_2(N,c)$. Es una generalización de la regla de la línea descrita en Fiestras-Janeiro et al. (2012).

Definición 4.8. La regla de las dos líneas asigna, al juego de coste (N,c) asociado a cada sistema $(N, a, \{a_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$, la asignación de costes $TL(N,c) := (TL(N,c))_{i\in N}$ definida, para cada $i \in N$, por

$$TL_i(N,c) := \frac{1}{2|\Pi_1(N,c)|} \sum_{\sigma\in\Pi_1(N,c)} m_i^\sigma(N,c) + \frac{1}{2|\Pi_2(N,c)|} \sum_{\sigma\in\Pi_2(N,c)} m_i^\sigma(N,c).$$

Para toda permutación $\sigma \in \Pi_1(N,c)$, $\sigma^{-1}(1)$ denota el agente cuya distancia al proveedor es máxima y $m^\sigma(N,c) \in C(c)$ cuando (N,c) es un juego subaditivo. Con un razonamiento análogo para las permutaciones en $\Pi_2(N,c)$ y por la convexidad del núcleo, es fácil la prueba del siguiente resultado. Éste establece las condiciones del juego bajo las cuales los repartos de la regla de las dos líneas están en su núcleo.

Teorema 4.9 (Fiestras-Janeiro et al., 2013a)**.** *Sea el sistema EOQ básico sin costes de almacenamiento, con capacidad limitada de su almacén y con costes de transporte determinado por la tupla* $(N, a, \{a_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$*, y sea* (N,c) *su juego asociado. Si éste es subaditivo, entonces* $TL(N,c) \in C(c)$.

El siguiente ejemplo ilustra los resultados sobre el modelo expuesto.

Ejemplo 4.10. *El caso detallado, descrito en Fiestras-Janeiro et al. (2013a), describe un sistema EOQ básico sin costes de almacenamiento, con capacidad limitada de su almacén y con costes de transporte para tres granjas.*

i	d_i	K_i	a_i	d_i/K_i
1	2	9	300	0.222
2	2	8	500	0.250
3	5	7	200	0.714

Tabla 4.2: Demanda, capacidad de los almacenajes de cada granja y el coste variable por pedido, en toneladas por día, toneladas y euros respectivamente.

Se denota por $N = \{1, 2, 3\}$ *el conjunto de las tres granjas involucradas en el modelo de inventario, surgido por la necesidad de satisfacer las demandas de alimento para sus animales. Al igual que en el modelo anterior, este alimento, utilizado para garantizar la calidad y la cantidad de leche deseada, es suministrado por un único proveedor. A su vez, el coste fijo por un nuevo pedido es* $a = 400$ *euros.*

La Tabla 4.2 recoge, para cada una de las granjas que intervienen, su correspondiente demanda (en toneladas/día), la capacidad de sus almacenes (en toneladas) y el coste variable por pedido (en euros). A partir de la determinación de sus características, estudiaremos cuáles son los costes asociados a la cooperación de los distintos agentes. Además, calcularemos dos posibles repartos de los costes vinculados a la formación de la gran coalición.

El valor de su función característica, para cada $S \subseteq N$*, se detalla en la Tabla 4.3.*

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	0	155.556	225	428.571	225	500	642.857	642.857

Tabla 4.3: Juego de coste (N, c) asociado.

El Teorema 4.6 nos garantiza la subaditividad del juego de coste planteado. De acuerdo con el Teorema 4.7, su núcleo es no vacío, existiendo repartos estables de los costes. Frente a la asignación propuesta por la regla de las dos líneas que, como se ha probado, es uno de sus elementos, presentamos el valor de Shapley de (N, c)*. La propuesta del valor de Shapley no está en el núcleo del juego de coste* (N, c) *definido. Considerando las asignaciones para los jugadores 1 y 2 (ver Tabla 4.4), como*

$$\Phi_1(c) + \Phi_2(c) = 63.757 + 169.907 = 233.664 > 225 = c(\{1, 2\}),$$

se justifica que $\Phi(c) \notin C(c)$*.*

Jugador	1	2	3
$\Phi(c)$	63.757	169.907	409.193
$TL(N, c)$	0	219.643	423.214

Tabla 4.4: Asignaciones propuestas por el valor de Shapley y la regla de las dos líneas para el juego (N, c) definido.

4.4. El modelo con déficit

Los sistemas EOQ sin costes de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit son descritos en esta sección, ver Fiestras-Janeiro et al. (2013b). Se trata de situaciones multi-agente, donde cada uno de ellos se enfrenta a un problema de revisión continua con costes fijos de pedido, demanda determinista y lineal, sin costes asociados al almacenamiento de producto, con capacidad limitada para el mismo y con posibilidad de faltantes. Sea $N := \{1, \ldots, n\}$ el conjunto finito de agentes que intervienen. Para cada $i \in N$ consideramos los siguientes parámetros asociados.

- $a > 0$, el coste fijo por pedido.
- $b_i > 0$, el coste por unidad faltante y por unidad de tiempo.
- $d_i > 0$, la demanda determinista por unidad de tiempo.
- $K_i > 0$, la capacidad de almacenamiento del agente i.

Denotaremos este modelo por la tupla $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$. Dicho modelo generaliza el descrito en la Sección 4.2. Presenta una importante diferencia: cada agente $i \in N$ debe tener en cuenta el nivel máximo de faltantes que ahora son permitidos, β_i. Cuando este nivel se alcanza, i debe realizar un pedido de tamaño $K_i + \beta_i$ para completar, además de su almacén, las unidades faltantes. En adelante, supondremos que todos los productos, tanto los almacenados como los faltantes, son adquiridos a un mismo coste[1]. Así, el coste medio por ciclo para el agente i es

$$a + b_i \frac{\max\{\beta_i, 0\}}{2} \frac{\max\{\beta_i, 0\}}{d_i}.$$

Además, el coste medio por unidad de tiempo para el agente i es

$$C^i(\beta_i) := \frac{a + b_i \frac{\max^2\{\beta_i,0\}}{2d_i}}{\frac{K_i+\beta_i}{d_i}} = \frac{ad_i}{K_i + \beta_i} + \frac{b_i \max^2\{\beta_i, 0\}}{2(K_i + \beta_i)},$$

donde $\beta_i > -K_i$ permite garantizar longitudes de ciclo positivas.

Considerando como variable el número de pedidos por unidad de tiempo, $x_i := \frac{d_i}{K_i+\beta_i}$, los costes anteriores pueden reescribirse como

$$C^i(x_i) := \begin{cases} ax_i, & \text{si } \ x_i \geq \frac{d_i}{K_i}; \\ ax_i + \frac{b_i(d_i - K_i x_i)^2}{2x_i d_i}, & \text{si } \ 0 < x_i \leq \frac{d_i}{K_i}, \end{cases}$$

Nótese la importancia de la *ratio* demanda/capacidad (d_i/K_i) en la función de coste.

[1] La igualdad de precios en la compra de los productos, permite no considerar en la función de coste sumandos asociados a su adquisición. En términos de la optimización de la función de coste, es fácil comprobar su nula influencia en los resultados obtenidos.

A continuación, estudiaremos el caso de cooperación entre los distintos agentes. Al igual que en los modelos anteriores, la formación de la coalición $S \subseteq N$ implica que sus miembros realizan los pedidos de manera conjunta. Esto se traduce en que las longitudes de ciclo deben coincidir para cualesquiera $i,\ j \in S$. Esto es,

$$\frac{1}{x_i} = \frac{K_i + \beta_i}{d_i} = \frac{K_j + \beta_j}{d_j} = \frac{1}{x_j},\ \forall i,\ j \in S.$$

Por tanto, el coste medio por ciclo que se asocia a la coalición S viene dado por

$$a + \sum_{i \in S} b_i \frac{\text{máx}\{\beta_i, 0\}}{2} \frac{\text{máx}\{\beta_i, 0\}}{d_i},$$

y el coste medio por unidad de tiempo

$$\frac{a + \sum_{i \in S} b_i \frac{\text{máx}^2\{\beta_i, 0\}}{2d_i}}{\frac{K_j + \beta_j}{d_j}} = \frac{ad_j}{K_j + \beta_j} + \frac{d_j}{K_j + \beta_j} \sum_{i \in S} b_i \frac{\text{máx}^2\{\beta_i, 0\}}{2d_i}.$$

Como $\beta_i := -K_i + \frac{d_i}{x}$ para todo $i \in S$, tenemos que, para cada $x > 0$,

$$C^S(x) := ax + x \sum_{i \in S} \frac{b_i}{2d_i} \text{máx}^2\{-K_i + \frac{d_i}{x}, 0\} = ax + \frac{1}{x} \sum_{i \in S} \frac{b_i}{2d_i} \text{máx}^2\{-K_i x + d_i, 0\}.$$

4.4.1. La política individual óptima

La política óptima para un agente i cuando éste actúa individualmente será tratada en este apartado. Para más detalles, ver Fiestras-Janeiro et al. (2013b). La función de coste C^i, definida anteriormente, es una función continua para cada $x_i > 0$. Además, es estrictamente creciente para cada valor $x_i \geq \frac{d_i}{K_i}$. Entonces,

$$\text{mín}\{C^i(x_i) : x_i \geq \frac{d_i}{K_i}\} = \frac{ad_i}{K_i}.$$

Si $0 < x_i < \frac{d_i}{K_i}$, podemos reescribir $C^i(x_i)$ como

$$C^i(x_i) := (2a + b_i \frac{K_i^2}{d_i}) \frac{x_i}{2} + \frac{b_i d_i}{2} \frac{1}{x_i} - b_i K_i.$$

Al tratarse de una función diferenciable, sus extremos coinciden con los puntos que anulan su primera derivada. Así, los pedidos óptimos por unidad de tiempo son

$$x_i^* := \sqrt{\frac{b_i d_i}{2a + b_i \frac{K_i^2}{d_i}}}.$$

Puede comprobarse que $x_i^* < \frac{d_i}{K_i}$. Además, como la segunda derivada de C^i es positiva para $0 < x_i^* < \frac{d_i}{K_i}$, es estrictamente convexa, garantizando la unicidad de x_i^*. Para el pedido individual óptimo, el coste medio mínimo por unidad de tiempo de cada agente i queda determinado por

$$C^i(x_i^*) := \sqrt{b_i d_i (2a + b_i \frac{K_i^2}{d_i})} - b_i K_i.$$

Denotando por $\beta_i^* := d_i\sqrt{\frac{2a+b_i\frac{K_i^2}{d_i}}{b_i d_i}} - K_i = \frac{d_i}{x_i^*} - K_i$ el número óptimo máximo de faltantes permitidos para el agente i, el coste medio mínimo por unidad de tiempo de cada agente i, $C^i(x_i^*)$, puede reescribirse mediante la siguiente expresión:

$$C^i(x_i^*) := b_i\beta_i^*.$$

4.4.2. La política coalicional óptima

En esta sección, se determinará la política óptima cuando una coalición no vacía $S \subseteq N$ decide solicitar un pedido conjuntamente. Para cada $S \subseteq N$ y cada $x \in (0, +\infty)$ se denota S_x como el conjunto $\{i \in S : x < \frac{d_i}{K_i}\}$. Entonces, C^S se puede reescribir como

$$C^S(x) := ax + \frac{1}{x}\sum_{i\in S_x}\frac{b_i}{2d_i}(-K_i x + d_i)^2.$$

Si A_S denota el conjunto $\{\frac{d_i}{K_i} : i \in S\}$ podemos probar la unicidad del mínimo de la función de coste C^S. Dicha función es diferenciable en cada $x \in (0,\infty) \setminus A_S$. Además, como sus derivadas laterales coinciden para todo $x \in A_S$, C^S es diferenciable para todo $x \in (0,\infty)$. Así,

$$\frac{\partial C^S}{\partial x}(x) = a + \sum_{i\in S_x}\frac{b_i}{2}\frac{K_i^2}{d_i} - \frac{1}{x^2}\sum_{i\in S_x}\frac{b_i d_i}{2}.$$

Dado que la función $C^S(x)$ es diferenciable y el signo de la primera derivada es positivo en $x \in (0,\infty) \setminus A_S$, es obvio su crecimiento en el conjunto. Además, es estrictamente creciente en $(0, \text{máx}_{i\in S}\frac{d_i}{K_i}) \setminus A_S$. Por su continuidad, se explica el carácter creciente para $x \in (0,\infty)$ y su crecimiento estricto en $(0, \text{máx}_{i\in S}\frac{d_i}{K_i})$. Así, se verifican la convexidad de C^S en $x \in (0,\infty)$ y su convexidad estricta en $(0, \text{máx}_{i\in S}\frac{d_i}{K_i})$. Además, como $\lim_{x\to 0} C^S(x) = \lim_{x\to\infty} C^S(x) = \infty$ y C^S es estrictamente creciente en $(\text{máx}_{i\in S}\frac{d_i}{K_i}, \infty)$, C^S tiene un único extremo en $(0,\infty)$: un mínimo. Éste se obtiene, por la continuidad y diferenciabilidad de la función, como el valor x_S^* que anula la primera derivada. Denotando $i(S) := S_{x_S^*}$, este valor es

$$x_S^* := \sqrt{\frac{\sum_{i\in i(S)} b_i d_i}{2a + \sum_{i\in i(S)} b_i\frac{K_i^2}{d_i}}},$$

con un coste asociado $C^S(x_S^*)$ igual a

$$C^S(x_S^*) := (2a + \sum_{i\in i(S)} b_i\frac{K_i^2}{d_i})\frac{x_S^*}{2} + \sum_{i\in i(S)}\frac{b_i d_i}{2}\frac{1}{x_S^*} - \sum_{i\in i(S)} b_i K_i =$$

$$= \sum_{i\in i(S)} b_i d_i\sqrt{\frac{2a + \sum_{i\in i(S)} b_i\frac{K_i^2}{d_i}}{\sum_{i\in i(S)} b_i d_i}} - \sum_{i\in i(S)} b_i K_i. \tag{4.1}$$

Podemos expresar dicho coste, como en el caso anterior, en función de los niveles máximos de faltantes permitidos a los agentes de S, β_i^{*S}. Así,

$$C^S(x_S^*) := \sum_{i\in i(S)} b_i d_i \frac{1}{x_S^*} - \sum_{i\in i(S)} b_i K_i = \sum_{i\in i(S)} b_i (\frac{d_i}{x_S^*} - K_i) = \sum_{i\in i(S)} b_i \beta_i^{*S}.$$

A continuación, describimos un algoritmo que permite, para una coalición no vacía $S \subseteq N$, el cálculo de x_S^* e $i(S)$ en un número finito de pasos (menos que s). En adelante, consideraremos $s := |S|$.

Algoritmo 4.11 (Fiestras-Janeiro et al., 2013b)**.** *Los pasos del algoritmo para calcular x_S^* e $i(S)$ son:*

1. *Sea $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$ los agentes en S en orden creciente de las ratios demanda/capacidad, esto es, $\frac{d_{i_1}}{K_{i_1}} \leq \cdots \leq \frac{d_{i_s}}{K_{i_s}}$.*
2. *Se inicializa $k = s + 1$, $T = \emptyset$, $x_T = 0$ y $S_{x_T} = S$.*
3. *Mientras $S_{x_T} \neq T$:*
   Tomar $k = k - 1$, $T = T \cup \{i_k\}$ y calcular
   $$x_T = \sqrt{\frac{\sum_{i_l\in T} b_{i_l} d_{i_l}}{2a + \sum_{i_l\in T} b_{i_l} \frac{K_{i_l}^2}{d_{i_l}}}} \text{ y } S_{x_T} = \{i \in S : x_T < \frac{d_{i_l}}{K_{i_l}}\}.$$
4. *Hacer $i(S) = T$ y $x_S^* = x_T$. Parar el algoritmo.*

El siguiente resultado prueba la monotonía en el número de pedidos de una coalición no vacía. Su demostración se sigue de Fiestras-Janeiro et al. (2013b).

Teorema 4.12 (Fiestras-Janeiro et al., 2013b)**.** *Sea (N, a, b, d, K) un sistema EOQ sin costes de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit y sean P, $S \subseteq N$ un par de coaliciones no vacías tal que $P \subset S$. Entonces, $x_P^* \leq x_S^*$.*

4.4.3. La asignación de los costes de la gran coalición

A cada sistema (N, a, b, d, K) se asocia un juego de coste (N, c). Su función característica asigna a cada coalición $S \subseteq N$ el coste $C^S(x_S^*)$ detallado en (4.1).

Definición 4.13. A cada sistema EOQ sin costes de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit determinado por $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$ se asocia el juego de coste (N, c) definido, para cada coalición no vacía $S \subseteq N$, por

$$c(S) := \sum_{i\in i(S)} b_i d_i \sqrt{\frac{2a + \sum_{i\in i(S)} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}{\sum_{i\in i(S)} b_i d_i}} - \sum_{i\in i(S)} b_i K_i.$$

En particular, al considerar la coalición total, el coste asociado $c(N)$ es

$$c(N) := \sum_{i\in i(N)} b_i d_i \sqrt{\frac{2a + \sum_{i\in i(N)} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}{\sum_{i\in i(N)} b_i d_i}} - \sum_{i\in i(N)} b_i K_i.$$

Nuestro propósito consiste en comprobar las condiciones necesarias para que la formación de la coalición total sea beneficiosa. La subaditividad y la concavidad del juego de coste asociado son las propiedades que nos garantizan alcanzar dicho objetivo.

Teorema 4.14 (Fiestras-Janeiro et al., 2013b)**.** *Sea el sistema EOQ sin costes de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit determinado por* $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$ *y* (N, c) *su juego de coste asociado. Entonces* (N, c) *es un juego cóncavo.*

Bajo concavidad de los juegos, tenemos aseguradas reglas de asignación que proporcionan elementos de sus núcleos. Algunos de estos repartos de costes son los proporcionados por el valor de Shapley y el nucleolus, cuyo cálculo se endurece a medida que aumentan los agentes, ver González-Díaz et al. (2010).

Una regla de asignación para sistemas EOQ sin costes de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit es propuesta en Fiestras-Janeiro et al. (2013b). Además de proporcionar asignaciones del núcleo, lo hace en tiempo razonable (complejidad polinomial).

Definición 4.15. La regla R propone asignar a cada sistema EOQ sin costes de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$ con juego de coste asociado (N, c) el vector de asignaciones $R(c) \in \mathbb{R}^N$ dado por

$$R_i(c) := \begin{cases} b_i d_i \sqrt{\frac{2a+\sum_{i\in i(N)} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}{\sum_{i\in i(N)} b_i d_i}} - b_i K_i, & \text{si } \ i \in i(N); \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El Teorema 4.16 prueba la pertenencia de las asignaciones propuestas por la regla R al núcleo del juego de coste asociado (N, c).

Teorema 4.16 (Fiestras-Janeiro et al., 2013b)**.** *Sea el sistema EOQ sin costes de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit* $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N})$ *con juego de coste asociado* (N, c)*. Entonces, para cada* $S \subseteq N$*,*

$$\sum_{i\in S} R_i(c) \leq c(S).$$

Demostración. Se cumple que $\sum_{i\in N} R_i(c) = c(N)$. Tomemos $S \subset N$. Si $S \cap i(N) = \emptyset$, tenemos que $\sum_{i\in S} R_i(c) \leq c(S)$. En caso contrario, el Teorema 4.12 implica que

$$\sqrt{\frac{2a + \sum_{i\in i(S)} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}{\sum_{i\in i(S)} b_i d_i}} \geq \sqrt{\frac{2a + \sum_{i\in i(N)} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}{\sum_{i\in i(N)} b_i d_i}}.$$

Además, se tiene que $i(S) \cap i(N) \subset S \cap i(N)$. El Algoritmo 4.11 garantiza que $S \cap i(N) \subset i(S) \cap i(N)$. Por las definiciones de x_S^* y de $i(S)$ y la desigualdad anterior, tenemos que

$$\sum_{i\in S} R_i(c) - c(S) = \sum_{i\in S\cap i(N)} R_i(c) + \sum_{i\in i(S)} b_iK_i - \sum_{i\in i(S)} b_id_i\sqrt{\frac{2a+\sum_{i\in i(S)} b_i\frac{K_i^2}{d_i}}{\sum_{i\in i(S)} b_id_i}} =$$

$$= \sum_{i\in i(S)\setminus i(N)} \left[b_id_i\frac{K_i}{d_i} - b_id_i\sqrt{\frac{2a+\sum_{i\in i(S)} b_i\frac{K_i^2}{d_i}}{\sum_{i\in i(S)} b_id_i}} \right] +$$

$$+ \sum_{i\in i(S)\cap i(N)} b_id_i \left[\sqrt{\frac{2a+\sum_{i\in i(N)} b_i\frac{K_i^2}{d_i}}{\sum_{i\in i(N)} b_id_i}} - \sqrt{\frac{2a+\sum_{i\in i(S)} b_i\frac{K_i^2}{d_i}}{\sum_{i\in i(S)} b_id_i}} \right] \leq 0.$$

Por tanto, $\sum_{i\in S} R_i(c) \leq c(S)$. □

Algunas consideraciones sobre la regla R

A continuación, se exponen ciertos comentarios que permitirán explicar la discriminación a los agentes de las asignaciones propuestas por la regla R:

- Sólo los agentes con una *ratio* demanda/capacidad mayor que el número óptimo de pedidos por unidad de tiempo contribuirán al pago de costes de pedido asociados.
- Cada agente con un valor elevado de la *ratio* pagará su propio coste por desabastecimiento y una parte del coste fijo dependiente de su *ratio*. A continuación, detallamos el valor de cada una de estas partes.

  El coste por faltantes por unidad de tiempo del agente i cuando el número de pedidos por unidad de tiempo es x_N^* e $i \in i(N)$ está dado por

  $$\frac{1}{x_N^*}\frac{b_i}{2d_i}(-K_ix_N^* + d_i)^2 = \frac{1}{x_N^*}\frac{b_i}{2d_i}(d_i^2 + K_i^2x_N^2) - b_iK_i.$$

  Dado que el agente i paga su propio coste por faltantes, la parte de coste fijo por unidad de tiempo que paga de acuerdo con la regla R es

  $$b_id_i\frac{1}{x_N^*} - b_iK_i - \frac{1}{x_N^*}\frac{b_i}{2d_i}(d_i^2 + K_i^2x_N^2) + b_iK_i = \frac{1}{x_N^*}(\frac{b_id_i}{2} - \frac{b_iK_i^2}{2d_i}x_N^*).$$

  Así, la parte del coste fijo a que $i \in i(N)$ paga al realizar un pedido se puede reescribir como

  $$\frac{2a+\sum_{l\in i(N)} b_l\frac{K_l^2}{d_l}}{\sum_{l\in i(N)} b_ld_l}\frac{b_id_i}{2} - \frac{b_iK_i^2}{2d_i} = (a + \sum_{l\in i(N)} b_l\frac{K_l^2}{2d_l})\frac{b_id_i}{\sum_{l\in i(N)} b_ld_l} - \frac{b_iK_i^2}{2d_i} =$$

  $$= \frac{b_id_i}{\sum_{l\in i(N)} b_ld_l}a + \frac{b_id_i}{\sum_{l\in i(N)} b_ld_l}\sum_{l\in i(N)} b_l\frac{K_l^2}{2d_l} - \frac{b_iK_i^2}{2d_i}.$$

  La regla R no divide a proporcionalmente entre los agentes en $i(N)$. Al primer sumando, un reparto proporcional de a, debemos sumar el segundo, correspondiente a la división proporcional del coste promedio por ciclo cuando el déficit de cada agente es igual a la capacidad de su almacén. El tercer sumando se corresponde al coste medio por ciclo cuando el déficit del agente i iguala a su capacidad de almacenaje.

- Los agentes con *ratios* demanda/capacidad elevadas deberían redimensionar el espacio de sus almacenes. Este hecho justifica, en cierto modo, que sean estos agentes los que se hagan cargo de los costes de pedido.

4.4.4. Aplicación a las explotaciones ganaderas

Consideremos el ejemplo propuesto para este modelo en Fiestras-Janeiro et al. (2013b). Éste describe el caso de una cooperativa agraria española y la política óptima de inventario a seguir, permitiendo la posibilidad de faltantes.

Ejemplo 4.17. *En este ejemplo, se considera la situación planteada para cuatro explotaciones ganaderas del noroeste de España que desean satisfacer las demandas de alimento de sus animales. En general, estas granjas poseen entre* 40 *y* 150 *vacas lecheras. Su alimentación es variada y la ración de alimento que reciben debe garantizar la producción de una cantidad de leche prefijada (entre* 25 *y* 35 *litros). A su vez, el alimento se puede considerar dividido en dos partes: una primera, correspondiente a la cantidad almacenado en los silos (alimento seco), y una segunda, a la comida que no puede ser almacenada por falta de espacio. Los gastos correspondientes al acopio de comida se suponen constantes, incluso puede suponerse nulos. Todo este alimento es comprado a un agente externo, de forma que cada vez que se realiza un pedido, se incurre en un gasto fijo de a euros. Cuando existe un faltante de alimento seco, la ración de alimento debe cambiar para mantener la cantidad de leche, aunque su calidad sea menor. En este caso, el alimento es obtenido al mismo precio de partida, aunque se considera el impacto de la merma de calidad en el coste (b euros por tonelada y día).*

i	1	2	3	4
d_i	0.45	0.95	1.05	1.20
b_i	15	15	10	12
K_i	5	7.5	8	9
d_i/K_i	0.090	0.127	0.131	0.133

Tabla 4.5: Demanda, coste por faltantes y capacidad de los almacenes de cada granja, en toneladas por día, en euros por tonelada y día, y toneladas, respectivamente.

Denotemos por $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *el conjunto de las cuatro granjas consideradas que poseen 45, 95, 105 y 120 vacas, respectivamente. Para satisfacer sus necesidades, deben realizar pedidos con un coste fijo asociado igual a* $a = 180$ *euros. Sus demandas (en toneladas por día), los costes por faltantes (en euros*

por toneladas y día) y la capacidad de sus almacenes (en toneladas) para cada una de las explotaciones quedan reflejadas en la Tabla 4.5.

Para cada coalición $S \subseteq N$, utilizando el Algoritmo 4.11 descrito para el cálculo de x_S^*, obtenemos su valor y su coste asociado. Además, la determinación de $i(S)$ permite el cálculo de las asignaciones que la regla R propone para los correspondientes jugadores involucrados.

En la Tabla 4.6 se detalla el número óptimo de pedidos cuando los agentes se unen para formar cada una de las coaliciones $S \subseteq N$ posibles. Además, se recogen los repartos propuestos por la regla R a los jugadores en dichas coaliciones al considerar los subjuegos asociados con S como coalición total. Dichos cálculos incluyen la determinación de los agentes en $i(S)$.

	Política óptima			*Regla R*			
S	x_S^*	$C^S(x_S^*)$	$i(S)$	$R_1(c)$	$R_2(c)$	$R_3(c)$	$R_4(c)$
$\emptyset$	0	0	$\emptyset$	-	-	-	-
$\{1\}$	0.08	14.75	$\{1\}$	14.75	-	-	-
$\{2\}$	0.11	20.87	$\{2\}$	-	20.87	-	-
$\{3\}$	0.10	20.90	$\{3\}$	-	-	20.90	-
$\{4\}$	0.11	21.80	$\{4\}$	-	-	-	21.80
$\{1,2\}$	0.11	20.87	$\{2\}$	-	20.87	-	-
$\{1,3\}$	0.10	20.90	$\{3\}$	-	-	20.90	-
$\{1,4\}$	0.11	21.80	$\{4\}$	-	-	-	21.80
$\{2,3\}$	0.12	21.92	$\{2,3\}$	-	10.96	10.97	-
$\{2,4\}$	0.12	22.33	$\{2,4\}$	-	8.28	-	14.05
$\{3,4\}$	0.12	22.50	$\{3,4\}$	-	-	8.77	13.74
$\{1,2,3\}$	0.12	21.92	$\{2,3\}$	-	10.96	10.97	-
$\{1,2,4\}$	0.12	22.33	$\{2,4\}$	-	8.28	-	14.05
$\{1,3,4\}$	0.12	22.50	$\{3,4\}$	-	-	8.77	13.74
$\{2,3,4\}$	0.12	22.61	$\{2,3,4\}$	-	5.13	6.67	10.87
N	0.12	22.67	$\{2,3,4\}$	-	5.13	6.67	10.87

Tabla 4.6: Número óptimo de pedidos por unidad de tiempo y coste asociado. Asignaciones propuestas para cada uno de los agentes por la regla R.

Capítulo 5

Un nuevo modelo EOQ sin costes de almacenamiento

5.1. Introducción

En Fiestras-Janeiro et al. (2013b) se describe el modelo EOQ sin costes de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit. Para su presentación, consideramos el ejemplo de una cooperativa agrícola en el Noroeste de España compuesta por un conjunto de granjas dedicadas a la producción de leche que recurren a un proveedor externo para satisfacer la demanda de comida para sus animales. Cada una de ellas dispone de un almacén propio (silo), con capacidad limitada, donde guardar el alimento que sus vacas necesitan. Los únicos costes asociados al almacenamiento son los relativos a la construcción del silo ya que los correspondientes al almacenamiento de producto pueden suponerse fijos, e incluso nulos. Cuando el tipo de alimento almacenado se agota en una granja, su propietario se ve obligado a producir en la explotación otro tipo de alimento, sin coste adicional asociado y considerando únicamente el precio de una unidad del mismo. La obtención de este alimento alternativo es menos costosa, pero la leche obtenida es de peor calidad, lo que conlleva una disminución de las ganancias del ganadero. Esta disminución de las ganancias la identificamos como un coste asociado al déficit de alimento de alta calidad.

En este capítulo se analiza esta nueva situación tanto desde el punto de vista individual como desde el punto de vista en que consideramos que varios agentes realizan pedidos conjuntos. Como en Fiestras-Janeiro et al. (2013b) se considera que cada agente dispone de almacén propio con capacidad limitada y se enfrenta a un modelo EOQ con los costes de almacenaje irrelevantes, e incluso nulos, y permitiendo incurrir en déficit, entendiendo por unidad faltante aquella obtenida para satisfacer la demanda de producto una vez que el *stock* se agota. En primer lugar, se describe el caso para un único agente, para estudiar a continuación el caso multi-agente con n decisores. Al igual que en otros modelos, se estudia el

posible ahorro de costes derivado de la colaboración en la realización de pedidos, a través de la determinación de su política óptima. Además, se presenta una regla de asignación para repartir los costes asociados a la colaboración.

El resto del capítulo se organiza como sigue. En la Sección 5.2 se describe el modelo con costes de almacenamiento fijos, con la capacidad de los almacenes individuales limitadas y en el que se permite déficit con distintos precios de adquisición del producto. Los juegos derivados de estas situaciones, así como posibles repartos de los costes asociados, son estudiados en la Sección 5.2.3. Finalmente, se estudia el caso en el que todos los agentes deben recurrir a la producción propia de alimento en la Sección 5.3.

5.2. El modelo con déficit y precios diferentes

El modelo con costes de almacenamiento fijos, con las capacidades de los almacenes limitadas y en el que se permite déficit con distintos precios de adquisición del producto describe una situación multi-agente en la que cada uno de los individuos se enfrenta a una situación de inventario con demanda determinista, sin considerar los costes de almacenamiento asociados, con un almacén de capacidad finita y admitiendo la posibilidad de faltantes. Sea $N := \{1, \ldots, n\}$ el conjunto finito de agentes que intervienen. A cada individuo $i \in N$ se asocian los siguientes parámetros.

- $a > 0$, el coste fijo por pedido.
- $b_i > 0$, el coste unitario asociado al faltante y por unidad de tiempo.
- $d_i > 0$, la demanda determinista por unidad de tiempo.
- $K_i > 0$, la capacidad máxima del almacén del agente.
- $c_1 > 0$, el coste por unidad de producto adquirida y destinada al almacenamiento.
- $c_2 > 0$, el coste por unidad de producto adquirida para cubrir la necesidad surgida cuando el producto en el almacén se agota.

En adelante, las situaciones de inventario modeladas bajo un sistema con costes de almacenamientos fijos, con las capacidades de los almacenes limitadas y en las que se permite déficit con distintos precios de adquisición del producto serán denotadas por la tupla $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$. En este caso, los costes asociados a la adquisición de una unidad de producto cumplen $c_1 > c_2$.

Bajo este esquema, al igual que en el modelo EOQ sin costes de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit, los costes asociados al almacenamiento son considerados fijos e incluso pueden suponerse nulos ya que no influyen en la optimización de la función de coste. Sin iniciar un nuevo pedido, cuando se consume la cantidad K_i guardada en los almacenes para todo $i \in N$, adquirida a un coste $c_1 > 0$ por unidad de producto, se satisfacen las necesidades de producto a un nuevo coste $c_2 > 0$ por

unidad, con $c_2 < c_1$. En general, este nueva clase posee una calidad más baja que la destinada al almacenamiento, de forma que las propiedades del producto final, así como los beneficios generados de su uso, se ven reducidos. Por este razón, el objetivo consiste en cubrir la demanda de producto a través del primer proveedor, recurriendo a la adquisición de productos de más baja calidad sólo cuando sea estrictamente necesario para evitar pérdidas.

Por tanto, la principal diferencia con el modelo descrito en la Sección 4.4 reside en que este nuevo planteamiento permite modelar situaciones donde los agentes, una vez agotado el *stock*, satisfacen la demanda de producto existente mediante la producción propia del mismo. En lo que sigue, mediante una reinterpretación del concepto de déficit con respecto a los modelos anteriormente tratados, se entiende por unidad deficitaria la obtenida mediante la fabricación propia para cubrir la necesidad de producto surgida cuando todo el almacenado es consumido. Los costes de adquisición en las dos etapas mencionadas son diferentes, verificando $c_2 < c_1$. A continuación, se estudia la política óptima a seguir por los individuos involucrados en el procedimiento, así como la determinación y el estudio de las propiedades del juego de coste asociado.

5.2.1. La política individual óptima

En esta sección, se estudia la política óptima a seguir cuando un único agente $i \in N$ se enfrenta a una situación de inventario como la planteada de manera individual. Su demanda de producto puede no ser cubierta, necesitando elaborar producto para su aprovisionamiento con un coste por unidad inferior. El esquema es el siguiente: cuando el nivel de faltantes β_i es alcanzado, el agente i solicita un nuevo pedido. Por tanto, el coste individual asociado a un ciclo para el agente i queda determinado por

$$[a + c_1(K_i + \min\{\beta_i, 0\})] + b_i \frac{\max\{\beta_i, 0\}}{2} \frac{\max\{\beta_i, 0\}}{d_i} + c_2 \max\{\beta_i, 0\}.$$

Así, el coste del agente i por unidad de tiempo queda determinado por

$$C^i(\beta_i) := \frac{a + c_1(K_i + \min\{\beta_i, 0\}) + b_i \frac{\max^2\{\beta_i, 0\}}{2d_i} + c_2 \max\{\beta_i, 0\}}{\frac{K_i + \beta_i}{d_i}} =$$

$$= \frac{d_i}{K_i + \beta_i} [a + c_1(K_i + \min\{\beta_i, 0\})] + \frac{d_i}{K_i + \beta_i} b_i \frac{\max^2\{\beta_i, 0\}}{2d_i} + \frac{d_i}{K_i + \beta_i} c_2 \max\{\beta_i, 0\},$$

donde $\beta_i > -K_i$ garantizando que la longitud de ciclo sea positiva.

La función de coste del agente i puede ser reescrita como sigue.

$$C^i(\beta_i) := \begin{cases} \frac{a d_i}{K_i + \beta_i} + c_1 d_i & \text{si } -K_i < \beta_i \leq 0 \\ \frac{d_i}{K_i + \beta_i}(a + c_1 K_i) + \frac{b_i \beta_i^2}{2(K_i + \beta_i)} + \frac{c_2 d_i \beta_i}{K_i + \beta_i} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En adelante, se considera la función de coste en términos del número de pedidos por unidad de tiempo

$$x_i := \frac{d_i}{K_i + \beta_i}.$$

Por tanto, la función de coste para el agente i queda determinada por

$$C^i(x_i) := \begin{cases} x_i a + c_1 d_i, & \text{si } x_i \geq \frac{d_i}{K_i} \\ x_i[a + c_1 K_i] + \frac{b_i d_i (d_i - K_i x_i)^2}{2 x_i d_i^2} + c_2(d_i - K_i x_i), & \text{si } 0 < x_i < \frac{d_i}{K_i}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Una vez descrito el planteamiento de este modelo para el caso en el que un agente $i \in N$ actúe de manera individual, cabe determinar su política óptima. El estudio se centra en la determinación del número óptimo de pedidos minimizando el coste asociado para los agentes involucrados.

Es fácil comprobar la continuidad de la función de coste definida en (5.1) para cualquier valor $x_i > 0$ considerado, aunque ésta no es diferenciable en todo su dominio. Dicha propiedad se incumple en los valores $x_i = d_i/K_i$ para todo $i \in N$.

Para el estudio del valor que minimiza la función de coste para el agente $i \in N$, se debe tener en cuenta el crecimiento de la función $C^i(x_i)$ si $x_i \geq \frac{d_i}{K_i}$. Por tanto, se tiene que

$$\text{mín}\left\{ C^i(x_i) : \ x_i \geq \frac{d_i}{K_i} \right\} = \frac{a d_i}{K_i} + c_1 d_i. \tag{5.2}$$

Sin embargo, cuando $0 < x_i < \frac{d_i}{K_i}$, el coste $C^i(x_i)$ es expresado como

$$\left(2a + 2(c_1 - c_2)K_i + b_i d_i \frac{K_i^2}{d_i^2} \right) \frac{x_i}{2} + \frac{b_i d_i}{2} \frac{1}{x_i} - b_i K_i + c_2 d_i. \tag{5.3}$$

Para el cálculo del valor mínimo en el intervalo $(0, d_i/K_i)$, comenzamos por determinar el punto x_i que anula la siguiente expresión, correspondiente a la primera derivada de la función de coste.

$$\frac{2a + 2(c_1 - c_2)K_i + b_i d_i \frac{K_i^2}{d_i^2}}{2} - \frac{b_i d_i}{2x_i^2} = 0$$

Con las operaciones oportunas, el único valor admisible es x_i^*,

$$x_i^* := \sqrt{\frac{b_i d_i}{2a + 2(c_1 - c_2)K_i + b_i d_i \frac{K_i^2}{d_i^2}}},$$

verificando que $x_i^* < \frac{d_i}{K_i}$. Esta desigualdad se cumple ya que

$$\frac{b_i d_i}{2a + 2(c_1 - c_2)K_i + b_i d_i \frac{K_i^2}{d_i^2}} < \frac{d_i^2}{K_i^2} \quad \text{si y sólo si} \quad b_i d_i < \frac{d_i^2}{K_i^2} 2a + 2(c_1 - c_2) K_i \frac{d_i^2}{K_i^2} + b_i d_i, \tag{5.4}$$

dándose la última desigualdad en (5.4) por las suposiciones impuestas en la definición de los parámetros del modelo planteado.

Además, dado que para $0 < x_i < \frac{d_i}{K_i}$ la segunda derivada de la función $C^i(x_i)$ está determinada por

$$\frac{b_i d_i}{x_i^3},$$

tenemos garantizada la existencia de un mínimo, al ser positiva en dicho intervalo. Entonces, el punto x_i^* determina un mínimo local de la función $C^i(x_i)$ en el intervalo $0 < x_i < \frac{d_i}{K_i}$. Con las consideraciones realizadas para el intervalo $x_i \geq \frac{d_i}{K_i}$, así como en el estudio de su continuidad en su dominio, dicho punto es, además de un mínimo local, un mínimo global de la función de coste. Así, sustituyendo en (5.3), el coste mínimo a pagar por el individuo $i \in N$, $C^i(x_i^*)$, queda determinado por

$$C^i(x_i^*) := b_i d_i \sqrt{\frac{2a + 2(c_1 - c_2)K_i + b_i d_i \frac{K_i^2}{d_i^2}}{b_i d_i}} - b_i K_i + c_2 d_i$$
$$= \sqrt{b_i d_i (2a + 2(c_1 - c_2)K_i + b_i d_i \frac{K_i^2}{d_i^2})} - b_i K_i + c_2 d_i.$$

Denotando por β_i^* el número óptimo de faltantes permitidos para el agente i, se tiene que

$$\beta_i^* := -K_i + \frac{d_i}{x_i^*} = -K_i + d_i \sqrt{\frac{2a + 2(c_1 - c_2)K_i + b_i d_i \frac{K_i^2}{d_i^2}}{b_i d_i}}$$

En tal caso, es fácil comprobar que

$$C^i(x_i^*) := b_i \beta_i^* + c_2 d_i.$$

5.2.2. La política coalicional óptima

Una vez que la política individual óptima ha sido determinada, se plantea el caso en el que un grupo de agentes $N := \{1, \ldots, n\}$ decide cooperar conjuntamente para la realización de pedidos de un cierto producto que necesitan. Esto es, se considera el caso en el que un conjunto de individuos forman la coalición S, con $S \subseteq N$.

De manera análoga a lo descrito en la literatura para otros modelos de inventario, la formación de la coalición $S \subseteq N$ implica que sus miembros deben coordinarse en la realización de sus pedidos de manera conjunta. Esta idea se traduce en que los pedidos se solicitan en el mismo instante de tiempo, de forma que las longitudes de ciclo deben coincidir para cualesquiera i, $j \in S$. Esto es,

$$\frac{1}{x_i} = \frac{K_i + \beta_i}{d_i} = \frac{K_j + \beta_j}{d_j} = \frac{1}{x_j} \tag{5.5}$$

para $i, j \in S$, o equivalentemente $x_i = x_j$, para cada $i, j \in S$. Así, el coste por ciclo que los agentes en S deben pagar es

$$\left[a + c_1 \sum_{i \in S} (K_i + \text{mín}\{\beta_i, 0\})\right] + \sum_{i \in S} \left[b_i \frac{\text{máx}^2\{\beta_i, 0\}}{2d_i} + c_2 \,\text{máx}\{\beta_i, 0\}\right].$$

Por tanto, el coste por unidad de tiempo queda determinado por

$$\frac{[a + c_1 \sum_{i \in S} (K_i + \text{mín}\{\beta_i, 0\})] + \sum_{i \in S} [b_i \frac{\text{máx}^2\{\beta_i, 0\}}{2d_i} + c_2 \,\text{máx}\{\beta_i, 0\}]}{\frac{K_j + \beta_j}{d_j}} =$$

$$= \frac{d_j}{K_j+\beta_j}[a+c_1\sum_{i\in S}(K_i+\min\{\beta_i,0\})]+\frac{d_j}{K_j+\beta_j}\sum_{i\in S}[b_i\frac{\max^2\{\beta_i,0\}}{2d_i}+c_2\max\{\beta_i,0\}].$$

De nuevo, la función de coste es reescrita en términos de x, donde $x = x_i$ $\forall i \in S$ denota el número de pedidos por unidad de tiempo a realizar.

$$C^S(x) := x\left[a+c_1\sum_{i\in S}\left(K_i+\min\{-K_i+\frac{d_i}{x},0\}\right)\right]+ \\ +\frac{1}{x}\sum_{i\in S}\frac{b_i}{2d_i}\max^2\{-K_ix+d_i,0\}+\sum_{i\in S}c_2\max\{d_i-K_ix,0\}. \quad (5.6)$$

Para cada coalición $S \subseteq N$ y cada valor $x \in (0,\infty)$, se denota por S_x el conjunto de agentes $\{i \in S : x < \frac{d_i}{K_i}\}$. En términos de S_x, la función de coste anterior puede escribirse como

$$C^S(x) := x\left[a+c_1\sum_{i\in S\setminus S_x}\frac{d_i}{x}+\sum_{i\in S_x}c_1K_i\right]+\frac{1}{x}\sum_{i\in S_x}\frac{b_i}{2d_i}(-K_ix+d_i)^2+\sum_{i\in S_x}c_2(d_i-K_ix). \quad (5.7)$$

Para la obtención de los valores óptimos en situaciones que responden al modelo planteado, comprobaremos la continuidad y derivabilidad de la función de coste asociada. Además, se estudia el posible cumplimiento de propiedades como su convexidad que resultarían de utilidad de cara a la determinación de la política óptima en el modelo.

Con este objetivo, se emplea la notación introducida por Fiestras-Janeiro et al. (2013b). En este nuevo modelo, es fácil comprobar la continuidad de la función de coste asociada. Si se denota por A_S el conjunto de puntos $\{\frac{d_i}{K_i} : i \in S\}$, la función C^S es claramente diferenciable en cada $x \in (0,\infty)\setminus A_S$. Sin embargo, dado que las derivadas laterales de la función C^S no coinciden para los puntos $x \in A_S$, no se tiene garantizado el cumplimiento de la derivabilidad de la misma globalmente en su dominio.

Nótese que, para cada $x \in (0,\infty)$,

$$C^S(x) := x[a+(c_1-c_2)\sum_{i\in S_x}K_i]+c_1\sum_{i\in S\setminus S_x}d_i+c_2\sum_{i\in S_x}d_i+\frac{1}{x}\sum_{i\in S_x}\frac{b_i}{2d_i}(K_i^2x^2+d_i^2-2d_iK_ix) \\ = x[a+(c_1-c_2)\sum_{i\in S_x}K_i]+x\sum_{i\in S_x}\frac{b_iK_i^2}{2d_i}+\frac{1}{x}\sum_{i\in S_x}\frac{b_id_i}{2}+\sum_{i\in S\setminus S_x}c_1d_i+\sum_{i\in S_x}(c_2d_i-b_iK_i) \quad (5.8)$$

Por tanto, es claro que

$$\lim_{x\to 0}C^S(x) = \lim_{x\to+\infty}C^S(x) = +\infty$$

y que la función es estrictamente creciente en el intervalo $[\max_{i\in S}\frac{d_i}{K_i},\infty)$, el estudio de los mínimos de nuestra función de coste se centra en un intervalo compacto $[\varepsilon,\max_{i\in S}\frac{d_i}{K_i}]$, con $\varepsilon > 0$ tan pequeño como sea necesario, en el que la continuidad de la función de coste justifica la existencia de un mínimo global.

Sin embargo, la desigualdad de las derivadas laterales en los puntos $x \in A_S$ explica el incumplimiento de otra propiedad interesante en nuestro estudio: la convexidad de la función de coste. Por esta razón pueden existir mínimos locales de la función C^S que no son necesariamente mínimos globales, aumentando éstos en número a medida que aumenta el número de agentes involucrados en el proceso. Además, dado que la derivada lateral por la izquierda es mayor que la correspondiente por la derecha en los puntos del conjunto A_S, se asegura que el mínimo global de la función C^S está en la familia de intervalos $(0, +\infty) \setminus A_S$ surgida. De no ser así, dado que existen las derivadas laterales en d_i/K_i a pesar de que la función no es derivable en dichos puntos, se cumpliría que

$$\frac{\partial C^S}{\partial x^-}|_{\frac{d_i}{K_i}} < 0 < \frac{\partial C^S}{\partial x^+}|_{\frac{d_i}{K_i}}. \tag{5.9}$$

Sin embargo, en vista de (5.8),

$$\frac{\partial C^S}{\partial x^+}|_{\frac{d_i}{K_i}} = [a + (c_1 - c_2) \sum_{j \in S_{\frac{d_i}{K_i}}} K_j] + \sum_{j \in S_{\frac{d_i}{K_i}}} \frac{b_j K_j^2}{2d_j} - \frac{K_i^2}{d_i^2} \sum_{j \in S_{\frac{d_i}{K_i}}} \frac{b_j d_j}{2}.$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial C^S}{\partial x^-}|_{\frac{d_i}{K_i}} &= [a + (c_1 - c_2) \sum_{j \in \{S_{\frac{d_i}{K_i}} \cup i\}} K_j] + \sum_{j \in \{S_{\frac{d_i}{K_i}} \cup i\}} \frac{b_j K_j^2}{2d_j} - \frac{K_i^2}{d_i^2} \sum_{j \in \{S_{\frac{d_i}{K_i}} \cup i\}} \frac{b_j d_j}{2} \\ &= [a + (c_1 - c_2) \sum_{j \in \{S_{\frac{d_i}{K_i}} \cup i\}} K_j] + \sum_{j \in S_{\frac{d_i}{K_i}}} \frac{b_j K_j^2}{2d_j} - \frac{K_i^2}{d_i^2} \sum_{j \in S_{\frac{d_i}{K_i}}} \frac{b_j d_j}{2}.\end{aligned}$$

Dado que $c_1 > c_2$, resulta que

$$\frac{\partial C^S}{\partial x^-}|_{\frac{d_i}{K_i}} > \frac{\partial C^S}{\partial x^+}|_{\frac{d_i}{K_i}},$$

contradiciendo la condición descrita en (5.9).

En el estudio de sus mínimos deben incluirse como candidatos a mínimo global los puntos que anulan la primera derivada de la función de coste en cada uno de los intervalos en los que queda dividido su dominio. La primera derivada queda determinada, para cada $x \in (0, \infty) \setminus A_S$, por

$$\frac{\partial C^S}{\partial x}(x) = [a + (c_1 - c_2) \sum_{i \in S_x} K_i] + \sum_{i \in S_x} \frac{b_i K_i^2}{2d_i} - \frac{1}{x^2} \sum_{i \in S_x} \frac{b_i d_i}{2}.$$

Por tanto, C^S alcanza su mínimo en un punto x_S^* del conjunto de valores que anula la correspondiente derivada. El valor óptimo es expresado por

$$x_S^* := \sqrt{\frac{\sum_{i \in S_{x_S^*}} b_i d_i}{2a + 2(c_1 - c_2) \sum_{i \in S_{x_S^*}} K_i + \sum_{i \in S_{x_S^*}} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}}.$$

Si denotamos $i(S) := S_{x^*_S}$, en vista de (5.8), el coste óptimo asociado es

$$C^S(x^*_S) := \sum_{i\in i(S)} b_i d_i \sqrt{\frac{2a + 2(c_1 - c_2)\sum\limits_{i\in i(S)} K_i + \sum\limits_{i\in i(S)} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}{\sum\limits_{i\in i(S)} b_i d_i}} + \sum_{i\in S\setminus i(S)} c_1 d_i + \sum_{i\in i(S)} (c_2 d_i - b_i K_i). \tag{5.10}$$

Determinada la política óptima del modelo con costes de almacenamiento fijos, con las capacidades de los almacenes limitadas y en el que se permite déficit con distintos precios de adquisición del producto, cabe plantearse cómo obtener los valores relativos al número óptimo de pedidos y su coste asociado, x^*_S y $C(x^*_S)$, respectivamente. Para este fin, se plantea un algoritmo iterativo que permite el cómputo de x^*_S estudiando el punto que anula la primera derivada de la función de coste en cada uno de los elementos de la familia de intervalos $(0, \frac{d_{i_1}}{K_{i_1}}) \cup \{(\frac{d_{i_l}}{K_{i_l}}, \frac{d_{i_{l+1}}}{K_{i_{l+1}}})\}_{l=1}^{s-1}$ en los que queda dividido el dominio de la función C^S por los puntos del conjunto A_S. En adelante, se denota $s := |S|$.

Algoritmo 5.1. *Los pasos del algoritmo para calcular x^*_S, $C^S(x^*_S)$ e $i(S)$ son:*

1. *Sea $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$ los agentes en S en orden creciente de las ratios demanda/capacidad, esto es, $\frac{d_{i_1}}{K_{i_1}} \leq \cdots \leq \frac{d_{i_s}}{K_{i_s}}$.*
2. *Inicializar $T = \emptyset$, $x_T = 0$, $S_{x_T} = S$, coste $= \infty$, coste$^0 = \infty$ y pedido $= 0$.*
3. *Para cada $k = s, \ldots, 1$, hacer $T = T \cup \{i_k\}$, y calcular*

$$x_T = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i_l\in T} b_{i_l} d_{i_l}}{2a + 2(c_1 - c_2)\sum\limits_{i_l\in T} K_{i_l} + \sum\limits_{i_l\in T} b_{i_l}\frac{K_{i_l}^2}{d_{i_l}}}},$$

$$S_{x_T} = \{i_l \in S : x_T < \frac{d_{i_l}}{K_{i_l}}\} \text{ y coste}^0 = C^S(x_T).$$

Entonces, si $S_{x_T} = T$ y coste^0 < coste,

$$\text{pedido} = x_T \text{ y coste} = \text{coste}^0.$$

4. *Hacer $x^*_S = $ pedido, $C^S(x^*_S) = $ coste e $i(S) = S_{x^*_S}$.*

Cabe destacar que el algoritmo presentado acaba en un número finito de pasos, concretamente, en s iteraciones.

Dado que este nuevo planteamiento puede considerarse como una generalización del modelo EOQ sin costes de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit definido en Fiestras-Janeiro et al. (2013b), estudiaremos si se verifican algunas de las propiedades tratadas para este último. Destaca que, en estas nuevas situaciones no se tiene garantizado el cumplimiento de un tipo especial de monotonía coalicional con respecto al

número óptimo de pedidos. Ésta se verifica si, para cualquier par de coaliciones P, $S \subseteq N$ consideradas, con $P \subset S$, se cumple que $x_P^* \leq x_S^*$.

Para ilustrar esto se presenta un ejemplo en la línea del expuesto en Fiestras-Janeiro et al. (2013b), considerando la posibilidad de faltantes en el sentido definido y en el que existen dos costes de adquisición de producto distintos. Mediante la aplicación del Algoritmo 5.1, se obtienen los valores relativos al número óptimo de pedidos y su coste $C^S(x_S^*)$ asociados para cada coalición $S \subseteq N$.

Ejemplo 5.2. *Consideremos la situación planteada para tres explotaciones ganaderas del noroeste de España que desean satisfacer las demandas de alimento de sus animales.*

i	1	2	3
d_i	30	50	60
b_i	5	2	20
K_i	15	10	5
d_i/K_i	2	5	12

Tabla 5.1: Demanda, coste por faltantes y capacidad de los almacenes de cada granja .

En general, estas granjas poseen entre 40 *y* 150 *vacas lecheras. Su alimentación es variada y la ración de alimento que reciben debe garantizar la producción de una cantidad de leche prefijada (entre* 25 *y* 35 *litros) de determinada calidad. A su vez, se considera la existencia de un primer proveedor de alimento, cuyos productos son almacenados en los silos (alimento seco), con propiedades que garantizan los objetivos fijados para la leche y que son adquiridos a un coste inicial de* c_1 *por unidad de alimento. Agotadas las unidades en stock, los granjeros cubren las necesidades de alimento de las granjas a través de su fabricación en la propia granja antes de iniciar un nuevo pedido. Una unidad de esta nueva clase de producto tiene un coste asociado* c_2*, menor que* c_1*. En contraposición a lo descrito para el modelo EOQ sin costes de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit, el alimento producido en la explotación, de menor coste que el inicialmente utilizado como alimento, permite mantener la producción de leche prevista a pesar de que su calidad se reduzca. Dado que se considera su impacto en la merma de las calidades de la leche final, así como el incremento del coste en b euros por cada unidad de esta clase, sólo se recurrirá a esta vía cuando sea estrictamente necesario. Además, los gastos asociados al acopio de comida se suponen de nuevo constantes e incluso nulos. Sin embargo, cada vez que se inicia la preparación de un pedido con la consideración de las dos etapas descritas, se incurre en un gasto fijo de a euros.*

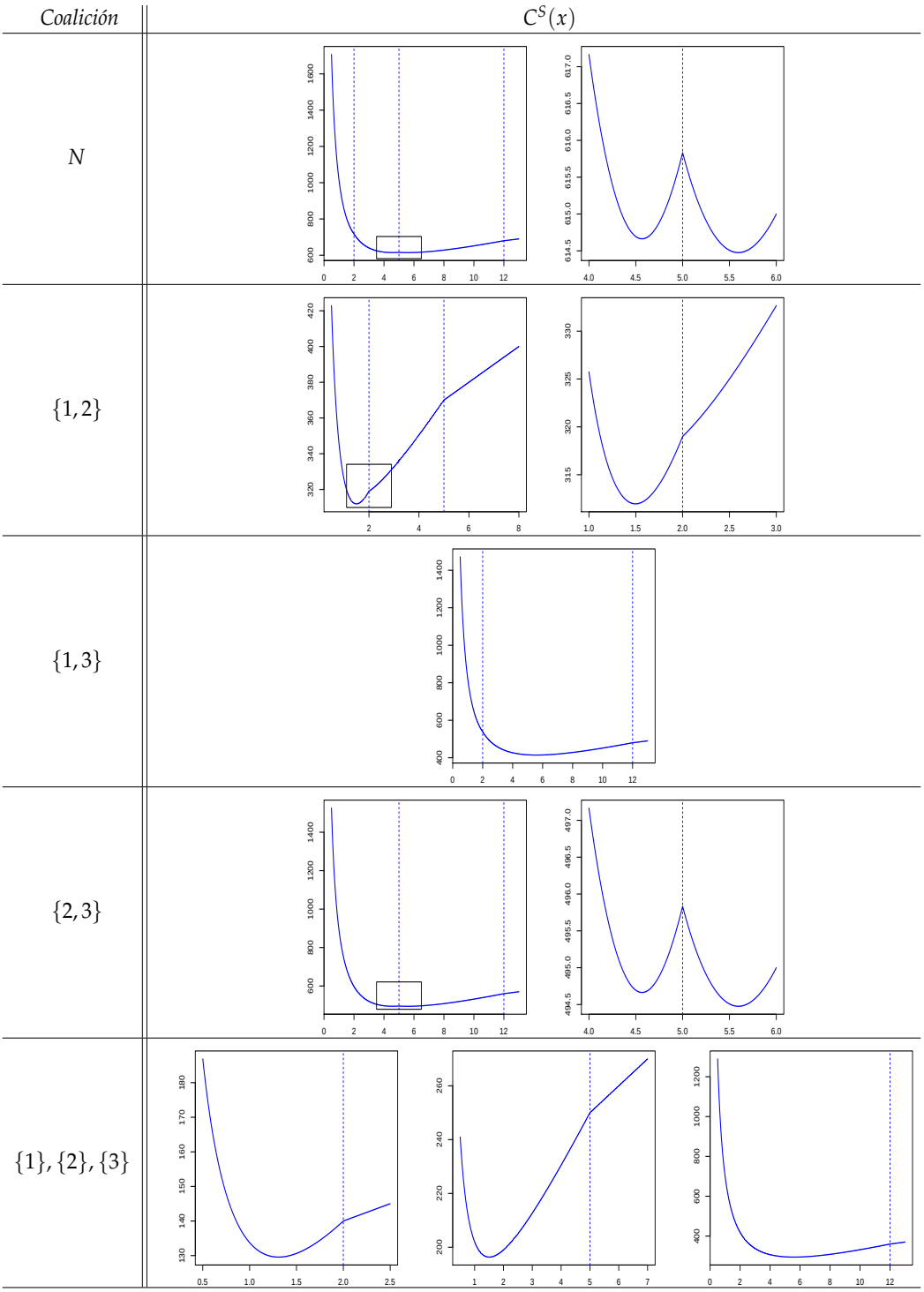

Figura 5.1: Funciones de coste $C^S(x)$ asociadas a cada coalición $S \subseteq N$ en la situación de inventario $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ definida.

Denotemos por $N = \{1, 2, 3\}$ el conjunto de las tres granjas consideradas que poseen 45, 95, 105 vacas, respectivamente. La realización de pedidos para satisfacer sus necesidades tiene un coste inicial fijo de $a = 10$ euros. Sus demandas (en toneladas por día), los costes por faltantes (en euros por toneladas y día) y la capacidad de sus almacenes (en toneladas) para cada una de las explotaciones involucradas quedan reflejadas en la Tabla 5.1. Los costes asociados a la compra de una unidad de producto procedente del primer proveedor es $c_1 = 4$ euros. Sin embargo, el coste por unidad de producto fabricada en la propia granja, una vez agotado el alimento en stock, es $c_2 = 3$ euros, ya que con esta clase de silo se alcanza la producción requerida, a costa de obtener leche de peor calidad.

Las funciones de coste $C^S(x)$ asociadas a cada coalición $S \subseteq N$ se representan en la Figura 5.1. Se comprueba que siendo continua, la función de coste no es diferenciable. Con el apoyo de los resultados gráficos, podemos observar que las funciones de coste $C^S(x)$ tampoco son convexas para la mayor parte de coaliciones S consideradas. En virtud del Algoritmo 5.1, en la Tabla 5.2 se recogen, para cada una de las coaliciones $S \subseteq N$, el número óptimo de pedidos x_S^*, su coste $C^S(x_S^*)$ y el conjunto de jugadores $i(S)$ asociados.

S	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	N
$C^S(x_S^*)$	0	129.56	196.33	294.48	311.96	414.48	494.48	614.48
x_S^*	0	1.31	1.51	5.60	1.50	5.60	5.60	5.60
$i(S)$	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{3}	{3}	{3}

Tabla 5.2: Política óptima para cada una de las coaliciones en el sistema de inventario $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ e $i(S)$.

Determinados los valores del número óptimo de pedidos x_S^* mediante el procedimiento descrito para cada posible coalición, es fácil comprobar que no se verifica la monotonía en las coaliciones mencionada anteriormente. De cumplirse, para cada $S \subseteq N$, el número óptimo de pedidos de todas sus subcoaliciones deben ser menores que x_S^*. Sin embargo, tomando las coaliciones $S = \{2\}$ y $T = \{1, 2\}$ respectivamente, con $S \subset T$, se observa que $x_S^* \geq x_T^*$.

5.2.3. La asignación de los costes de la gran coalición

En esta sección se plantea cómo repartir los costes asociados a este tipo de situaciones apoyándonos en los resultados y los procedimientos descritos para la determinación de la política óptima asociada a cada sistema de inventario $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$. Para ello, se define un juego de costes (N, c) cuya función característica asigna a cada $S \subseteq N$ el coste $C^S(x_S^*)$.

Definición 5.3. A cada sistema $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ se asocia el juego de coste (N, c) definido, para cada coalición no vacía $S \subseteq N$, por

$$c(S) := \sum_{i\in i(S)} b_i d_i \sqrt{\frac{2a + 2(c_1 - c_2)\sum\limits_{i\in i(S)} K_i + \sum\limits_{i\in i(S)} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}{\sum\limits_{i\in i(S)} b_i d_i}} + \sum_{i\in S\setminus i(S)} c_1 d_i + \sum_{i\in i(S)} (c_2 d_i - b_i K_i).$$

En particular, al considerar la coalición total, el coste asociado $c(N)$ es

$$c(N) := \sum_{i\in i(N)} b_i d_i \sqrt{\frac{2a + 2(c_1 - c_2)\sum\limits_{i\in i(N)} K_i + \sum\limits_{i\in i(N)} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}{\sum\limits_{i\in i(N)} b_{i_k} d_{i_k}}} + \sum_{i\in N\setminus i(N)} c_1 d_i + \sum_{i\in i(N)} (c_2 d_i - b_i K_i).$$

En adelante, se denota por (N, c) el juego de coste asociado a la situación de inventario $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$.

Obtenido el juego de coste, se comprueba si éste cumple ciertas propiedades de interés (ver Definición 1.4). Entre ellas, la subaditividad se traduce en estudiar si la formación de la gran coalición de los agentes es beneficiosa. Otro aspecto deseable es su concavidad. Si ésta se cumple, la contribución marginal de un agente decrece a medida que la coalición aumenta su tamaño.

El juego de coste asociado resultante de la situación de inventario definida en el Ejemplo 5.2 permite proponer éste como contraejemplo al cumplimiento de las propiedades de subaditividad y concavidad mencionadas.

Ejemplo 5.4. *De acuerdo con la Definición 5.3, los valores de la función característica del juego de costes asociado a la situación de inventario definida por la tupla* $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ *del Ejemplo 5.2 quedan determinados por el coste* $C^S(x_S^*)$ *del número óptimo de pedidos* x_S^* *para cada coalición* $S \subseteq N$. *Dichos costes son los detallados en la Tabla 5.3.*

S	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	N
$c(S)$	0	129.56	196.33	294.48	311.96	414.48	494.48	614.48
$i(S)$	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{3}	{3}	{3}

Tabla 5.3: Sistema de inventario $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$: juego de coste asociado (N, c) e $i(S)$.

La subaditividad y la concavidad son dos propiedades interesantes a cumplir por un juego de coste. En este ejemplo, basta tomar las coaliciones $S = \{2\}$ *y* $T = \{3\}$ *para comprobar el incumplimiento de la subaditividad, ya que*

$$196.33 + 294.48 = c(\{2\}) + c(\{3\}) < c(\{2, 3\}) = 494.48.$$

Además, dado que el juego no es subaditivo, éste tampoco es cóncavo.

Una vez establecida la política óptima a seguir, cabe plantearse cómo se deben repartir los costes asociados a la cooperación. El coste promedio óptimo por unidad de tiempo queda determinado por la expresión de la Definición 5.3.

Una regla de asignación para sistemas con costes de almacenamiento fijos, con las capacidades de los almacenes limitadas y en los que se permite déficit con distintos precios de adquisición del producto es una función ϕ que asigna, a cada sistema de inventario $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ con juego de coste asociado (N, c), el vector de asignaciones $\phi(c) \in \mathbb{R}^N$.

Es deseable que toda regla de asignación considerada verifique buenas propiedades. Entre ellas, las siguientes.

1. Los repartos propuestos deben ser obtenidos en un tiempo computacionalmente razonable, incluso con un número elevado de agentes.
2. Es conveniente que las asignaciones propuestas por la regla de repartos pertenezcan al núcleo del juego de coste (N, c) asociado. Esto es,

$$\sum_{i\in S}\phi_i(c) \leq c(S), \text{ para todo } S \subset N.$$

   Esta condición se traduce en que ningún grupo S formado se siente decepcionado con el reparto, ya que el coste que se asigna no supera al coste derivado de la formación de una coalición de los agentes involucrados.
3. El reparto de costes debe ser aceptado por todos los agentes, de forma que ninguno de ellos se sienta discriminado.

A continuación se presenta una regla de asignación para los modelos con costes de almacenamiento fijos, con las capacidades de los almacenes limitadas y en los que se permite déficit con distintos precios de adquisición del producto que supone una extensión de la regla R de reparto de costes presentada en Fiestras-Janeiro et al. (2013b) para los modelos EOQ sin coste de almacenamiento, con las capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit. Cabe recordar que en estas nuevas situaciones, propiedades como la subaditividad o la concavidad del juego de coste asociado no están garantizadas.

Definición 5.5. La regla GR propone, a cada sistema con costes de almacenamiento fijos, con las capacidades de los almacenes limitadas y en el que se permite déficit con distintos precios de adquisición de producto determinado por $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$, con juego de coste asociado (N, c), el vector de asignaciones $GR(c) \in \mathbb{R}^N$ dado por

$$GR_i(c) := \begin{cases} b_i d_i \sqrt{\dfrac{2a+2(c_1-c_2)\sum\limits_{i\in i(N)} K_i + \sum\limits_{i\in i(N)} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}{\sum\limits_{i\in i(N)} b_{i_k} d_{i_k}}} + c_2 d_i - b_i K_i, & \text{si } i \in i(N), \\ c_1 d_i, & \text{si } i \in N \setminus i(N). \end{cases}$$

Un sistema $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ con costes c_1 y c_2 nulos puede ser visto como un modelo EOQ sin costes de almacenamiento, con las

capacidades de los almacenes limitadas y con posibilidad de déficit (ver Sección 4.4). Por tanto, los repartos de las reglas GR y R coinciden bajo estas hipótesis.

A continuación, se describen ciertos aspectos para la nueva regla de reparto.

- Los repartos obtenidos por esta regla presentada son fácilmente obtenidos. Su complejidad crece polinomialmente con el número de agentes.
- Frente al carácter estable de las asignaciones proporcionadas por la regla R, no se tienen garantías de que los repartos de coste proporcionados por esta regla pertenezcan al núcleo del juego de coste (N, c).
- Los repartos proporcionados por la regla pueden ser considerados injustos. En ocasiones, aquellos agentes que no incurren en faltantes deben abonar una mayor parte del coste (ver Ejemplo 5.6).
  - Todos los agentes abonarán una parte del coste del pedido óptimo.
  - Los agentes con una *ratio* demanda/capacidad elevada deben abonar una parte del coste asociado a la adquisición de producto a través del primer proveedor y otra parte del correspondiente a su fabricación en la propia granja. Una *ratio* elevada es aquella que es mayor que el número óptimo de pedidos por unidad de tiempo.
  - Los agentes con *ratios* bajas contribuyen con un pago igual al coste asociado a cubrir toda su demanda a través del primer proveedor considerado. Se entiende por *ratio* baja aquella que es menor que el número óptimo de pedidos por unidad de tiempo.

Esta sección se completa con el Ejemplo 5.6 que ilustra lo anteriormente descrito para la regla GR en sistemas de inventario como el tratado.

Ejemplo 5.6. *Consideremos el modelo con costes de almacenamiento fijos, con las capacidades de los almacenes limitadas y en el que se permite déficit con distintos precios de adquisición del producto definido en el Ejemplo 5.2 y su correspondiente juego asociado. La Tabla 5.4 recoge del número óptimo de pedidos determinado por el Algoritmo 5.1 para cada una de las coaliciones $S \subseteq N$ posibles. Además, se presentan las asignaciones propuestas por la regla GR para los subjuegos asociados que tienen a S como coalición total. Dichos cálculos incluyen la determinación de los agentes en $i(S)$.*

Al considerar el caso de la formación de la gran coalición N, es fácil comprobar que las asignaciones de coste propuestas por la regla GR pueden no contentar a todos los individuos $i \in N$. Dado que $GR_2(c) = 200$, se tiene que

$$200 = GR_2(c) \geq c(\{2\}),$$

de forma que dicho vector de costes no es un elemento del núcleo del juego asociado. Tomando los repartos que la regla GR propone para los costes de la coalición total, se obtienen las mismas conclusiones al considerar, por ejemplo, la coalición $S = \{1, 2\}$ ya que

$$120 + 200 = GR_1(c) + GR_2(c) \geq c(\{1, 2\}) = 311.96.$$

	Política óptima			*Regla GR*		
S	x_S^*	$C^S(x_S^*)$	$i(S)$	$GR_1(c)$	$GR_2(c)$	$GR_3(c)$
$\emptyset$	0	0	$\emptyset$	-	-	-
$\{1\}$	1.31	129.56	$\{1\}$	129.56	-	-
$\{2\}$	1.51	196.33	$\{2\}$	-	196.33	-
$\{3\}$	5.60	294.48	$\{3\}$	-	-	294.48
$\{1,2\}$	1.50	311.96	$\{1,2\}$	115.18	196.78	-
$\{1,3\}$	5.60	414.48	$\{3\}$	120.00	-	294.48
$\{2,3\}$	5.60	494.48	$\{3\}$	-	200.00	294.48
N	5.60	614.48	$\{3\}$	120.00	200.00	294.48

Tabla 5.4: Número óptimo de pedidos por unidad de tiempo y coste asociado. Asignaciones propuestas para cada uno de los agentes por la regla GR.

Se completa el ejemplo con la comparación de las asignaciones propuestas para la gran coalición por la regla GR con dos conceptos solución ampliamente tratados en la teoría de juegos como son el valor de Shapley y el nucleolus. Los repartos propuestos quedan determinados en la Tabla 5.5. En este ejemplo, las asignaciones de coste propuestas no difieren en exceso con las asignaciones de la regla GR.

	Agente 1	*Agente 2*	*Agente 3*
$GR(c)$	120.00	200.00	294.48
$\Phi(c)$	122.46	195.84	296.17
$\eta(c)$	123.67	196.33	294.48

Tabla 5.5: Asignaciones de coste propuestas, a cada uno de los agentes, por la regla GR, el valor de Shapley y el nucleolus para el juego (N, c).

5.3. Caso particular: todos tienen déficit

En esta sección se plantea un caso particular para el modelo con costes de almacenamiento fijos, con capacidad de los almacenes limitadas y en el que se permite déficit en el sentido definido con distintos precios de adquisición de

producto. En él, se considera el hecho de que todos los agentes involucrados en el problema de inventario surgido recurren a la producción propia de productos para satisfacer sus demandas una vez que su *stock* es consumido. En este caso se verifica $i(S) = S$. Además, se establecen las condiciones que justifican la cooperación entre los distintos individuos, así como la definición y el estudio de otras propiedades interesantes. Entre ellas, están la regla GR y la estabilidad de las asignaciones de costes que proporciona.

Según lo expuesto, la función característica del juego de coste (N, c) asociado a esta clase de situaciones puede obtenerse fácilmente de la Definición 5.7.

Definición 5.7. A cada sistema $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ en el que, una vez determinada su política óptima, se cumple que $i(S) = S$, se asocia el juego de coste (N, c) definido, para cada coalición no vacía $S \subseteq N$, por

$$c(S) := \sum_{i\in S} b_i d_i \sqrt{\frac{2a + 2(c_1 - c_2)\sum\limits_{i\in S} K_i + \sum\limits_{i\in S} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}{\sum\limits_{i\in S} b_i d_i}} + \sum_{i\in S}(c_2 d_i - b_i K_i).$$

A continuación se estudia la caracterización de las propiedades de subaditividad y concavidad de esta clase de juegos. El Teorema 5.8 establece la caracterización para la subaditividad del juego de coste bajo las hipótesis mencionadas.

Teorema 5.8. *Sea $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ una situación de inventario tal que, una vez determinada su política óptima, $i(S') = S'$ para cualquier coalición $S' \subseteq N$. Entonces, el juego de coste (N, c) es subaditivo si y sólo si, para cada par de coaliciones $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, se cumple*

$$\frac{1}{x_S^*}\sum_{i\in S} b_i d_i \left(x_{S\cup T}^* - x_S^*\right) \geq \frac{1}{x_T^*}\sum_{i\in T} b_i d_i \left(x_T^* - x_{S\cup T}^*\right).$$

Demostración. Consideremos el juego de coste (N, c) asociado a la situación de inventario $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ bajo las hipótesis impuestas. Dado que se cumple que $i(S') = S'$ para cualquier coalición $S' \subseteq N$ considerada, el número óptimo de pedidos para S' es menor que $\frac{d_i}{K_i}$ para todo $i \in S'$.

Según la Definición 1.4, es fácil comprobar que (N, c) es subaditivo si y solamente si

$$\sum_{i\in S} b_i d_i \frac{1}{x_S^*} + \sum_{i\in T} b_i d_i \frac{1}{x_T^*} \geq \sum_{i\in S\cup T} b_i d_i \frac{1}{x_{S\cup T}^*},$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{i\in S} b_i d_i \left(\frac{1}{x_S^*} - \frac{1}{x_{S\cup T}^*}\right) + \sum_{i\in T} b_i d_i \left(\frac{1}{x_T^*} - \frac{1}{x_{S\cup T}^*}\right) \geq 0.$$

Esto último se verifica si y sólo si

$$\sum_{i\in S} b_i d_i \left(\frac{1}{x_S^*} - \frac{1}{x_{S\cup T}^*}\right) \geq \sum_{i\in T} b_i d_i \left(\frac{1}{x_{S\cup T}^*} - \frac{1}{x_T^*}\right)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{x_S^*}\sum_{i\in S} b_i d_i \left(x_{S\cup T}^* - x_S^*\right) \geq \frac{1}{x_T^*}\sum_{i\in T} b_i d_i \left(x_T^* - x_{S\cup T}^*\right),$$

como se quería ver. □

El siguiente resultado relaciona la subaditividad del juego de coste (N, c) con el cumplimiento de la monotonía coalicional en el número óptimo de pedidos.

Corolario 5.9. *Sea $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ una situación de inventario. Determinada su política óptima asociada, si se cumple que $i(S') = S'$ para toda coalición $S' \subseteq N$ y se verifica la monotonía coalicional en el número óptimo de pedidos, el juego de coste (N, c) asociado es subaditivo.*

Demostración. En las hipótesis del Teorema 5.8, el juego de coste (N, c) asociado a la situación de inventario $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ es subaditivo si se cumple

$$\frac{1}{x_S^*}\sum_{i\in S} b_i d_i \left(x_{S\cup T}^* - x_S^*\right) \geq \frac{1}{x_T^*}\sum_{i\in T} b_i d_i \left(x_T^* - x_{S\cup T}^*\right).$$

En particular, si se verifica la monotonía coalicional en el número de pedidos, es decir, $x_{S'}^* \leq x_{T'}^*$ para cualesquiera $S' \subset T' \subseteq N$, se tiene

$$\frac{1}{x_S^*}\sum_{i\in S} b_i d_i \left(x_{S\cup T}^* - x_S^*\right) \geq 0 \geq \frac{1}{x_T^*}\sum_{i\in T} b_i d_i \left(x_T^* - x_{S\cup T}^*\right),$$

garantizando el cumplimiento de la propiedad buscada. □

Otra propiedad deseable en una situación de costes es la concavidad del juego de coste. El Teorema 5.10 establece la condición necesaria y suficiente para el cumplimiento de la concavidad.

Teorema 5.10. *Sea $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ una situación de inventario. Determinada la política óptima asociada, si se verifica que $i(S') = S'$ para cualquier coalición, el juego de coste (N, c) es cóncavo si y sólo si, para cada par de coaliciones S, $T \subset N$, con $S \subset T \subseteq N \setminus \{i\}$,*

$$\sum_{j\in S} b_j d_j \left(\frac{1}{x_{S\cup i}^*} - \frac{1}{x_S^*}\right) + b_i d_i \left(\frac{1}{x_{S\cup i}^*} - \frac{1}{x_{T\cup i}^*}\right) \geq \sum_{j\in T} b_j d_j \left(\frac{1}{x_{T\cup i}^*} - \frac{1}{x_T^*}\right).$$

Demostración. Determinado el coste del número óptimo de pedidos (5.10) debemos comprobar que, para cualesquiera $S \subset T \subseteq N \setminus \{i\}$ con $i \in N$,

$$c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(T \cup \{i\}) - c(T).$$

Esto es equivalente a que

$$\sum_{j\in S\cup i} b_j d_j \frac{1}{x_{S\cup i}^*} - \sum_{j\in S} b_j d_j \frac{1}{x_S^*} + (c_2 d_i - b_i K_i) \geq \sum_{j\in T\cup i} b_j d_j \frac{1}{x_{T\cup i}^*} - \sum_{j\in T} b_j d_j \frac{1}{x_T^*} + (c_2 d_i - b_i K_i).$$

Entonces, es cóncavo si y sólo si

$$\sum_{j\in S\cup i} b_j d_j \frac{1}{x_{S\cup i}^*} - \sum_{j\in S} b_j d_j \frac{1}{x_S^*} \geq \sum_{j\in T\cup i} b_j d_j \frac{1}{x_{T\cup i}^*} - \sum_{j\in T} b_j d_j \frac{1}{x_T^*} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j\in S} b_j d_j \left(\frac{1}{x^*_{S\cup i}} - \frac{1}{x^*_S}\right) + b_i d_i \left(\frac{1}{x^*_{S\cup i}} - \frac{1}{x^*_{T\cup i}}\right) \geq \sum_{j\in T} b_j d_j \left(\frac{1}{x^*_{T\cup i}} - \frac{1}{x^*_T}\right),$$

tal y como queríamos ver. □

El Ejemplo 5.11 ilustra los resultados expuestos para los modelos con costes de almacenamiento fijos, con las capacidades de los almacenes limitadas y en los que se permite déficit con distintos precios de adquisición del producto en los que además, para cada coalición $S \subseteq N$ considerada, $i(S) = S$.

Ejemplo 5.11. *Para la ilustración de este tipo de situaciones se plantea el caso de tres explotaciones ganaderas del noroeste de España que desean satisfacer las demandas de alimento de sus animales. Las granjas citadas están bajo las suposiciones mencionadas en el Ejemplo 5.2 descrito. Sea la situación* $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ *bajo las hipótesis mencionadas que queda determinada por los valores de* $a = 100$ *euros por el inicio del pedido realizado, y* $c_1 = 9$ *y* $c_2 = 8$ *los costes por unidad de producto adquiridos al primer proveedor y el asociado a su elaboración en la propia granja, respectivamente. El resto de los valores son los recogidos en la Tabla 5.6.*

i	1	2	3
d_i	30	45	35
b_i	6	2	10
K_i	11	15	10
d_i/K_i	2.73	3	3.5

Tabla 5.6: Demanda, coste por faltantes y capacidad de los almacenes de cada granja, en toneladas por día, en euros por tonelada y día, y toneladas.

De nuevo, mediante la aplicación del Algoritmo 5.1, obtenemos los valores relativos al número óptimo de pedidos, así como su coste asociado (ver Tabla 5.7).

S	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	N
x^*_S	0	0.86	0.61	1.19	0.97	1.34	1.23	1.36
$c(S)$	0	384.51	476.97	474.96	781.98	749.26	866.33	1139.59
$i(S)$	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	N

Tabla 5.7: Sistema de inventario $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$: política de pedidos óptima, juego de coste asociado (N, c) e $i(S)$.

Establecido el juego de costes, es fácil comprobar el cumplimiento de la subaditividad del mismo, así como su concavidad, a partir de los Teoremas 5.8 y 5.10 respectivamente.

A continuación se define la regla GR para las situaciones de inventario bajo las hipótesis mencionadas en esta sección: todos los agentes tienen déficit, obteniendo, a través de la fabricación propia, productos de menor calidad que los adquiridos a través del primer proveedor una vez que agotan su *stock*.

Definición 5.12. La regla GR propone para el modelo con déficit y precios diferentes determinado por $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$ con juego de coste asociado (N, c) y cumpliendo que $i(S) = S$ para toda coalición $S \subseteq N$, el vector de asignaciones $GR(c) \in \mathbb{R}^N$ dado por

$$GR_i(c) := b_i d_i \sqrt{\frac{2a + 2(c_1 - c_2)\sum\limits_{i\in N} K_i + \sum\limits_{i\in N} b_i \frac{K_i^2}{d_i}}{\sum\limits_{i\in N} b_i d_i}} + (c_2 d_i - b_i K_i),$$

para todo $i \in N$.

El siguiente resultado establece la condición bajo la cual las asignaciones propuestas por la regla GR pertenecen al núcleo del juego de coste (N, c) asociado a este tipo de situaciones de inventario. De esta manera, con dichos vectores de costes, se garantiza que ninguna coalición tiene incentivos para desviarse y obtener un reparto mejor.

Teorema 5.13. *Sea el sistema con costes de almacenamiento fijos, con capacidades de los almacenes limitadas y en el que se permite déficit con distintos precios de adquisición del producto $(N, a, \{b_i\}_{i\in N}, \{d_i\}_{i\in N}, \{K_i\}_{i\in N}, c_1, c_2)$, con juego de coste asociado (N, c). Entonces, para toda coalición $S \subseteq N$ considerada, si se verifica $i(S) = S$,*

$$\sum_{i\in i(S)} GR_i(c) \leq c(S) \text{ si y sólo si } x_S^* \leq x_N^*.$$

Demostración. Por la definición de la regla GR, es fácil comprobar la eficiencia del reparto de costes, ya que $\sum\limits_{i\in N} GR_i(c) = c(N)$. Tomando $S \subseteq N$, se tiene

$$\sum_{i\in i(S)} GR_i(c) - c(S) = \sum_{i\in i(S)} b_i d_i \frac{1}{x_N^*} + \sum_{i\in i(S)} (c_2 d_i - b_i K_i) - \left(\sum_{i\in i(S)} b_i d_i \frac{1}{x_S^*} + \sum_{i\in i(S)} (c_2 d_i - b_i K_i) \right).$$

Por hipótesis, dado que $i(S) = S$, la condición

$$\sum_{i\in S} b_i d_i \frac{1}{x_N^*} + \sum_{i\in S} (c_2 d_i - b_i K_i) - \left(\sum_{i\in S} b_i d_i \frac{1}{x_S^*} + \sum_{i\in S} (c_2 d_i - b_i K_i) \right) = \sum_{i\in S} b_i d_i \left(\frac{1}{x_N^*} - \frac{1}{x_S^*} \right) \leq 0$$

es equivalente a que

$$\left(\frac{1}{x_N^*} - \frac{1}{x_S^*} \right) \leq 0 \Leftrightarrow x_S^* \leq x_N^*,$$

tal y como se quería probar. □

El Teorema 5.13 asegura que, bajo la monotonía coalicional en el número óptimo de los pedidos, las asignaciones propuestas por la regla GR pertenecen al núcleo de su juego asociado.

Ejemplo 5.14. *Consideremos el modelo con costes de almacenamiento fijos, con capacidades de los almacenes limitadas y en el que se permite déficit en el sentido definido con distintos precios de adquisición de producto descrito en el Ejemplo 5.11.*

	Política óptima			*Regla GR*		
S	x_S^*	$C^S(x_S^*)$	$i(S)$	$GR_1(c)$	$GR_2(c)$	$GR_3(c)$
$\{1\}$	0.86	384.51	$\{1\}$	384.51	-	-
$\{2\}$	0.61	476.97	$\{2\}$	-	476.97	-
$\{3\}$	1.19	474.96	$\{3\}$	-	-	474.96
$\{1,2\}$	0.97	781.98	$\{1,2\}$	359.32	422.66	-
$\{1,3\}$	1.34	749.26	$\{1,3\}$	308.24	-	441.02
$\{2,3\}$	1.23	866.33	$\{2,3\}$	-	402.89	463.44
N	1.36	1139.59	N	306.27	396.13	437.19

Tabla 5.8: Número óptimo de pedidos por unidad de tiempo y coste asociado. Asignaciones propuestas para cada uno de los agentes por la regla GR.

Planteado su juego de coste asociado, la Tabla 5.8 recoge el número óptimo de pedidos, su coste asociado y los repartos de coste propuestos por la regla GR para cada una de las coaliciones posibles $S \subseteq N$, al considerar los subjuegos asociados que tienen a S como coalición total. Dichos cálculos incluyen la determinación de los agentes en $i(S)$. Dado que $x_S^* \leq x_N^*$ para toda coalición $S \subseteq N$ considerada, el Teorema 5.13 permite asegurar que las asignaciones propuestas por la regla GR están en el núcleo del juego de coste (N, c) asociado.

Conclusiones

En este trabajo se establecen tres objetivos fundamentales. En primer lugar, se realiza una revisión de los modelos de inventario centralizados que hemos considerado más destacados en el contexto de los problemas deterministas de revisión continua, estudiando el caso individual y el caso multi-agente. Además, se ha introducido y analizado, desde el punto de vista de la optimización y la teoría de juegos, un nuevo modelo de inventario para problemas deterministas de revisión continua en los que los costes de almacenamiento son irrelevantes, las capacidades de almacenamiento limitadas y en el que se permite déficit con precios de producto diferenciado, siendo el precio por unidad menor para las unidades faltantes. Por último, hemos creado un paquete en R que permite realizar los cálculos necesarios en la determinación de la política óptima de los modelos tratados.

Una vez que los conceptos básicos han sido introducidos en el Capítulo 1, los modelos EOQ y EPQ con faltantes han sido presentados en el Capítulo 2. El modelo EOQ describe situaciones de inventario con demanda determinista donde únicamente se tienen en cuenta el coste asociado a la realización de pedido y el coste asociado al almacenamiento del nivel de inventario medio. El modelo EPQ con faltantes en el que, además de las consideraciones anteriores, se contempla la posibilidad de incurrir en faltantes y se reciben los pedidos gradualmente, es descrito a continuación. Cierra el capítulo el estudio de la regla SOC para este tipo de situaciones. Además de su definición y caracterizaciones, se presentan resultados que garantizan la estabilidad de los repartos de coste propuestos.

En el Capítulo 3 se describen los sistemas de inventario y transporte. Se trata de situaciones de inventario en las que los agentes involucrados se enfrentan a un problema básico EOQ donde el coste de pedido incluye, para cada uno de los agentes, una parte proporcional a su distancia al proveedor. Se define para este tipo de situaciones la regla de la línea, una regla de asignación de costes que, bajo ciertas condiciones del juego asociado, proporciona asignaciones en su núcleo. En el Capítulo 4, se cierra la revisión tratando tres situaciones en las que los agentes se enfrentan a un modelo EOQ sin costes de almacenamiento y con capacidad de almacenamiento limitada. En primer lugar, se trata el modelo básico donde se tiene en cuenta el número medio de pedidos a realizar y cuyo juego asociado puede ser tratado como un juego del aeropuerto. Después, se presenta el modelo con costes de transporte, en los que de nuevo, la distancia de los agentes al proveedor jugará un papel fundamental. Para él, se presenta

la regla de dos líneas cuyos repartos están en el núcleo siempre que el juego de coste sea subaditivo. Finalmente, se describe un nuevo planteamiento para modelar situaciones en las que además se permite déficit y se estudia una regla de reparto con interesantes propiedades que proporciona repartos dentro del núcleo del juego asociado.

El Capítulo 5 contiene la descripción y el análisis de un nuevo modelo de inventario para problemas deterministas de revisión continua en los que los costes de almacenamiento son irrelevantes, las capacidades de almacenamiento son limitadas y se permiten déficits con precios de producto diferenciados. Esta última consideración hace referencia a que el precio por unidad asociado a un faltante se ve reducido. Este modelo puede entenderse como una generalización del modelo EOQ sin costes de almacenamiento, con capacidad de almacenamiento limitada y en el que se permite déficit descrito en el Capítulo 4. Definida la función de coste que describe esta clase de situaciones se determina su política de inventario óptima, para el caso individual y el caso multi-agente. Además, se plantea una nueva regla de asignación de costes para este modelo y se estudian sus propiedades. Por último, se estudia el caso en el que todos los agentes incurren en faltantes. Cabe destacar que el contenido de este capítulo es completamente original.

Para concluir, la memoria contiene el manual del Paquete *"Inventorymodel"* en código R que incluye funciones implementadas para la determinación de la política óptima en cada uno de los modelos tratados. Además de las funciones relativas a situaciones de inventario, contiene otras que permiten el tratamiento de conceptos propios de la teoría de juegos, como son, por ejemplo, las asignaciones propuestas por el valor de Shapley. Este paquete fue empleado en la obtención de los resultados presentados en los ejemplos expuestos a lo largo de este trabajo.

Apéndice A

Inventorymodel Package

Inventorymodel Package es el resultado de la implementación de los modelos descritos a lo largo de este trabajo. En los últimos años, el entorno R ha constituido una poderosa herramienta con una gran variedad de técnicas y procedimientos estadísticos al servicio de sus usuarios. Su flexibilidad y su amplia aceptación en el ámbito científico, justifican su elección para el desarrollo de esta librería de funciones.

Title Inventorymodel

Version 1.0.2

Date 2014-06-10

Author Alejandro Saavedra Nieves

Maintainer Alejandro Saavedra Nieves <alejandro.saavedra.nieves@gmail.com>

Depends R($\geq$ 2.15.0), e1071

Description This package describes the associated cost games to inventory situations.

License GPL–2

R topics documented:

Inventorymodel-package 76
characteristicfunction 78
coalitions 79
EOQ 80
EOQcoo 81
EPQ 82
EPQcoo 83
inventorygames 84

Inventorymodel 85
linerule 86
linerulecoalitional 87
mct 88
mfoc 89
mwhc 90
mwhc2c 91
shapley_mfoc 92
SOC 93
STI 94
STIcoo 95
twolines 96
vShapley 97

`Inventorymodel-package`

Inventory model

Description

InventoryModel Package allows the determination of the optimal policy in terms of the number of orders to apply in the most common inventory problems. Moreover, the allocations proposed in the literature can be obtained from the determination of the cost associated games.

Details

Package:	Inventorymodel
Type:	Package
Version:	1.0
Date:	2014-06-10
License:	–

This package incorporates the functions `EOQ` and `EOQcoo` which compute the optimal policy in a EOQ model. For studying the optimal orders and costs in a EPQ model, functions `EPQ` and `EPQcoo` can be used. The package includes

the function `SOC` for the SOC allocation rule. For inventory transportation system (STI), the functions `STI`, `STIcoo` and `linerulecoalitional` implement the associated games to these situations and their allocation rule (line rule). The function `mfoc` calculates the optimal order and its associated cost to model with fixed order cost (MFOC). Shapley value can be obtained for these class of games with the function `shapley_mfoc`. The basic EOQ system without holding costs and with transportation cost (MCT) can be studied with the functions `mct` and `twolines` (allocation rule). This package includes the function `mwhc` for models without holding costs (MWHC) and the function `mwhc2c` when two suppliers are considered with differents costs of the product.

Author(s)

Saavedra-Nieves, Alejandro

Maintainer: Alejandro Saavedra-Nieves <alejandro.saavedra.nieves@gmail.com>

References

M.G. Fiestras-Janeiro, I. García–Jurado, A. Meca, M. A. Mosquera (2011). Cooperative game theory and inventory management. *European Journal of Operational Research*, **210**(3), 459–466.

M.G. Fiestras-Janeiro, I. García-Jurado, A. Meca, M. A. Mosquera (2012). Cost allocation in inventory transportation systems. *Top*, **20**(2), 397–410.

M.G. Fiestras-Janeiro, I. García-Jurado, A. Meca, M. A. Mosquera (2013a). Centralized inventory in a farming community. *Journal of Business Economics*, 1–15.

M.G. Fiestras-Janeiro, I. García-Jurado, A. Meca, M.A. Mosquera (2013b). Cooperation on capacitated inventory situations with fixed holding costs. *Pendiente de publicación.*

A. Meca (2007). A core-allocation family for generalized holding cost games. *Mathematical Methods of Operation Research*, **65**, 499–517.

A. Meca, I. García-Jurado, P. Borm (2003). Cooperation and competition in inventory games. *Mathematical Methods of Operations Research*, **57**(3), 481–493.

A. Meca, J. Timmer, I. García-Jurado, P. Borm (1999). Inventory games. Discussion paper, 9953, Tilburg University.

A. Meca, J. Timmer, I. García-Jurado, P. Borm (2004). Inventory games. *European Journal of Operational Research*, **156**(1), 127–139.

M.A. Mosquera, I. García-Jurado, M.G. Fiestras-Janeiro (2008). A note on coalitional manipulation and centralized inventory management. *Annals of Operations Research*, **158**(1). 183–188.

`characteristicfunction`
Characteristicfunction

Description

Characteristic function of a game.

Usage

```
characteristicfunction(n, game)
```

Arguments

`n`	Number of players
`game`	Matrix of two columns. The first column contains the coalitions. The second one, the values for each coalition.

Value

This function gives a matrix. The first n columns indicate a binary representation of the coalitions in a binary mode. The second one, the usual way. The last column gives the characteristic function.

Examples

```
characteristicfunction(3,game=cbind(c(1,2,3,12,13,23,123),c(1,1,1,1,2,1,2)))

#  1 2 3 Coalition Cost
#  0 0 0         0    0
#  1 0 0         1    1
#  0 1 0         2    1
#  0 0 1         3    1
#  1 1 0        12    1
#  1 0 1        13    2
#  0 1 1        23    1
#  1 1 1       123    2
```

`coalitions` *Coalitions*

Description

Possible coalitions with n players.

Usage

```
coalitions(n)
```

Arguments

`n`	Number of players

Value

This function gives the coalitions in a binary mode and usual way.

Examples

```
coalitions(3)
#$Binary
#    P1 P2 P3
#0    0  0  0
#1    1  0  0
#2    0  1  0
#3    0  0  1
#12   1  1  0
#13   1  0  1
#23   0  1  1
#123  1  1  1
#
#$Classic
#[1]   0   1   2   3  12  13  23 123
```

`EOQ` *EOQ*

Description

This function obtains the optimal number of orders and the associated cost in an EOQ model.

Usage

```
EOQ(n = NA, a = NA, d = NA, h = NA, m = NA)
```

Arguments

n	Number of agents in the inventory model.
a	The fixed cost per order.
d	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
h	Vector. Holding costs to each agent.
m	Vector. Number of orders to each agent (optional).

Value

This function calculates two vectors. The first shows the optimal order for each agent. The second vector indicates the associated cost to these orders.

Examples

```
EOQ(n=3,a=600,d=c(500,300,400),h=c(9.6,11,10))

#$"Optimal order"
#[1] 250.0000 180.9068 219.0890
#
#$"Order costs"
#[1] 2400.000 1989.975 2190.890
```

EOQcoo *EOQcoo*

Description

This function calculates the optimal number of orders and the associated cost when agents are cooperating in the EOQ model.

Usage

```
EOQcoo(n = NA, a = NA, d = NA, h = NA, m = NA)
```

Arguments

n	Number of agents in the inventory model.
a	The fixed cost per order.
d	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
h	Vector. Holding costs to each agent.
m	Vector. Number of orders to each agent (optional).

Value

A list with the following components:

- `Optimal order` A matrix with all possible coalitions in the first column. The next n columns contain the associated cost to each agent in the coalition. Last column indicates the global cost of the optimal order.

Examples

```
EOQcoo(n=3,a=600,d=c(500,300,400),h=c(9.6,11,10))

#[1] "Optimal order"
#  Coalition        1        2        3 Coalitional costs
#          0   0.0000   0.0000   0.0000             0.000
#          1 250.0000   0.0000   0.0000          2400.000
#          2   0.0000 180.9068   0.0000          1989.975
#          3   0.0000   0.0000 219.0890          2190.890
#         12 192.4501 115.4701   0.0000          3117.691
#         13 184.6372   0.0000 147.7098          3249.615
#         23   0.0000 121.6327 162.1770          2959.730
#        123 157.4592  94.4755 125.9673          3810.512
```

`EPQ` *EPQ*

Description

This function obtains the optimal number of orders and the associated cost in the EPQ model.

Usage

```
EPQ(n = NA, a = NA, d = NA, h = NA, m = NA, r = NA, s = NA)
```

Arguments

`n`	Number of agents in the inventory model.
`a`	The fixed cost per order.
`d`	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
`h`	Vector. Holding costs to each agent.
`m`	Vector. Number of orders to each agent (optional).
`r`	Vector. Replacement rate to each agent. In general, r>d.
`s`	Vector. Cost of a shortage to each agent.

Value

This function calculates two vector. The first one shows the optimal order for each agent. The second vector indicates the associated cost to these orders.

Examples

```
EPQ(n=3,a=600,d=c(500,300,400),h=c(9.6,11,10),m=NA,r=rep(600,3),
s=c(100,150,200))

#$"Optimal order"
#[1] 641.0928 265.0557 388.8444
#
#$"Optimal shortages"
#[1] 9.359019 9.054699 6.172134
#
#$"Order costs"
#[1]  935.9019 1358.2049 1234.4268
```

EPQcoo *EPQcoo*

Description

This function calculates the optimal number of orders and the associated cost when agents are cooperating in the EPQ model.

Usage

```
EPQcoo(n = NA, a = NA, d = NA, h = NA, m = NA, r = NA, s = NA)
```

Arguments

n	Number of agents in the inventory model.
a	The fixed cost per order.
d	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
h	Vector. Holding costs to each agent.
m	Vector. Number of orders to each agent (optional).
r	Vector. Replacement rate to each agent. In general, r>d.
s	Vector. Cost of a shortage to each agent.

Value

A list with the following components:

- `Optimal order` A matrix with all possible coalitions in the first column. The next n columns contain the associated cost to each agent in the coalition. Last column indicates the global cost of the optimal order.
- `Optimal shortages` A matrix, for each coalition (row), contains in the column i the allowed optimal shortages.

Examples

```
EPQcoo(n=3,a=600,d=c(500,300,400),h=c(9.6,11,10),r=rep(600,3),s=c(100,150,200))

#$"Optimal order"
#        1        2        3     Costs
#   0.0000   0.0000   0.0000    0.0000
# 641.0928   0.0000   0.0000  935.9019
#   0.0000 265.0557   0.0000 1358.2049
#   0.0000   0.0000 388.8444 1234.4268
# 363.7611 218.2567   0.0000 1649.4341
# 387.3208   0.0000 309.8566 1549.1036
#   0.0000 196.1473 261.5297 1835.3556
# 291.2332 174.7399 232.9866 2060.2045
#
#$"Optimal shortages"
#        1        2        3
# 0.000000 0.000000 0.000000
# 9.359019 0.000000 0.000000
# 0.000000 9.054699 0.000000
# 0.000000 0.000000 6.172134
# 5.310381 7.455973 0.000000
# 5.654318 0.000000 4.918359
# 0.000000 6.700683 4.151265
# 4.251580 5.969377 3.698200
```

`inventorygames` *Inventorygames*

Description

Generic function to show the associated cost game to a EOQ or EPQ model.

Usage

```
inventorygames(n = NA, a = NA, d = NA, h = NA, m = NA, r = NA,
s = NA, model = c("EOQ", "EPQ"))
```

Arguments

`n`	Number of agents in the inventory model.
`a`	The fixed cost per order.
`d`	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
`h`	Vector. Holding costs to each agent.
`m`	Vector. Number of orders to each agent (optional).
`r`	Vector. Replacement rate to each agent. In general, r>d.
`s`	Vector. Cost of a shortage to each agent.
`model`	Model to select. `EOQ` and `EPQ` models can be considered.

Value

The characteristic function of the assoaciated cost game is calculated to model `EOQ` or `EPQ`.

Examples

```
inventorygames(n=3,a=600,d=c(500,300,400),h=c(9.6,11,10),model="EOQ")

#    1 2 3 Coalition Order cost
#    0 0 0         0      0.000
#    1 0 0         1   2400.000
#    0 1 0         2   1989.975
#    0 0 1         3   2190.890
#    1 1 0        12   3117.691
#    1 0 1        13   3249.615
#    0 1 1        23   2959.730
#    1 1 1       123   3810.512
```

`Inventorymodel` *Inventorymodel*

Description

General function in Inventorymodel-package for obtaining the optimal policy by selecting any model and its corresponding parameters.

Usage

```
Inventorymodel(model=c("EOQ","EPQ","STI","FOC","MCT","MWHC","MWHC2"),
n=NA,a=NA,av=NA,d=NA,h=NA,m=NA,r=NA,s=NA,K=NA,b=NA,c1=NA,c2=NA,
cooperation=c(0,1),allocation=c(0,1))
```

Arguments

`model`	Model to select. `EOQ`, `EPQ`, `STI`, `FOC`, `MCT`, `MWHC` models can be considered.
`n`	Number of agents in the inventory model.
`a`	The fixed cost per order.
`av`	Vector. Transportation costs to each agent.
`d`	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
`h`	Vector. Holding costs to each agent.
`m`	Vector. Number of orders to each agent(optional).
`r`	Vector. Replacement rate to each agent. In general, r>d.
`s`	Vector. Cost of a shortage to each agent.
`K`	Vector. Warehouse capacity to each agent.
`b`	Vector. Shortage cost to each agent.
`c1`	Value. Cost of a product from the first supplier.
`c2`	Value. Cost of a product from the second supplier.
`cooperation`	Option to indicate cooperation. If it exists `cooperation=1` else `cooperation=0`.
`allocation`	Option to indicate the allocation. If it is required `allocation=1` else `allocation=0`.

See Also

`EOQ`, `EOQcoo`, `EPQ`, `EPQcoo`, `STI`, `STIcoo`, `mct`, `mfoc`, `mwhc`, `mwhc2c`.

Examples

```
Inventorymodel(model="MCT",n=3,a=400,av=c(300,500,200),
d=c(2,2,5),K=c(9,8,7),cooperation=1,allocation=1)

#[1] "MCT"
#[1] "Two-lines rule"
#$Optimal solution
#  1 2 3 Coalition     Cost
#  0 0 0         0   0.0000
#  1 0 0         1 155.5556
#  0 1 0         2 225.0000
#  0 0 1         3 428.5714
#  1 1 0        12 225.0000
#  1 0 1        13 500.0000
#  0 1 1        23 642.8571
#  1 1 1       123 642.8571
#
#$Allocation two-lines rule
#[1]   0.0000 219.6429 423.2143
```

`linerule` *Line rule*

Description

Line rule for an inventory transportation system when coalition N is formed.

Usage

```
linerule(n=NA,a=NA,av=NA,d=NA,h=NA,m=NA)
```

Arguments

`n`	Agents in the inventory situation.
`a`	The fixed cost per order.
`av`	Vector. The transportations cost per order to each agent.
`d`	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
`h`	Vector. Holding cost per time unit to each agent.
`m`	Vector. Number of orders to each agent (optional).

Value

Allocation for each agent if N was formed.

Examples

```
linerule(n=3,a=200,av=c(300,300,900),d=c(90,80,20),h=c(0.06,0.06,0.1),m=NA)

#[1] 51.38935 46.10733 66.33250
```

`linerulecoalitional` *Line rule (coalitional)*

Description

Line rule for an inventory transportation system for each possible coalition.

Usage

```
linerulecoalitional(n = NA, a = NA, av = NA, d = NA, h = NA, m = NA)
```

Arguments

`n`	Agents in the inventory situation.
`a`	The fixed cost per order.
`av`	Vector. The transportations cost per order to each agent.
`d`	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
`h`	Vector. Holding cost per time unit to each agent.
`m`	Vector. Number of orders to each agent (optional).

Value

Matrix with allocations proposed by Line rule to agents (columns) in each possible coalition S (row).

Examples

```
linerulecoalitional(n=3,a=200,av=c(300,300,900),d=c(90,80,20),
h=c(0.06,0.06,0.1),m=NA)

#         1        2       3 Coalitional cost
#   0.00000  0.00000  0.0000          0.00000
#  73.48469  0.00000  0.0000         73.48469
#   0.00000 69.28203  0.0000         69.28203
#   0.00000  0.00000 66.3325         66.33250
#  52.59885 48.39619  0.0000        100.99505
#  61.26061  0.00000 66.3325        127.59310
#   0.00000 55.97858 66.3325        122.31108
#  51.38935 46.10733 66.3325        163.82918
```

`mct` *MCT*

Description

This function obtains the associated costs in a basic EOQ system without holding costs and with transportation cost.

Usage

```
mct(n = NA, a = NA, av = NA, d = NA, K = NA, cooperation = c(0, 1))
```

Arguments

`n`	Agents in the inventory situation.
`a`	The fixed cost per order.
`av`	Vector. The transportations cost per order to each agent.
`d`	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
`K`	Vector. Warehouse's capacity to each agent.
`cooperation`	Option to indicate cooperation. If it exists `cooperation=1` else `cooperation=0`.

Value

A vector with the individual cost to each agent in a `MCT`.

Examples

```
mct(n=3,a=400,av=c(300,500,200),d=c(2,2,5),K=c(9,8,7),cooperation=0)

#[1] "Individual cost"
#[1] 155.5556 225.0000 428.5714
```

`mfoc` *MFOC*

Description

This function obtains the associated costs in a fixed order cost model.

Usage

```
mfoc(n = NA, a = NA, d = NA, K = NA, cooperation = c(0, 1))
```

Arguments

`n`	Agents in the inventory situation.
`a`	The fixed cost per order.
`d`	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
`K`	Vector. Warehouse's capacity to each agent.
`cooperation`	Option to indicate cooperation. If it exists `cooperation=1` else `cooperation=0`.

Value

A vector with the individual cost to each agent in a `MFOC`.

Examples

```
mfoc(n=3,a=200,d=c(1.2,1.4,1.2),K=c(6,10,8),cooperation=0)

#[1] "Individual cost"
#[1] 40 28 30
```

`mwhc` *MWHC*

Description

This function obtains the associated costs in a model without holding costs. Demands and capacities must be introduced in the order indicated by the ratios `d/K`. In other case, agents change their position.

Usage

```
mwhc(n = NA, a = NA, b = NA, d = NA, K = NA, cooperation = c(0, 1),
allocation = c(0, 1))
```

Arguments

`n`	Agents in the inventory situation.
`a`	The fixed cost per order.
`b`	Vector. Shortage cost per unit to each agent.
`d`	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
`K`	Vector. Warehouse's capacity to each agent.
`cooperation`	Option to indicate cooperation. If it exists `cooperation=1` else `cooperation=0`.
`allocation`	Option to indicate the allocation. If it is required `allocation=1` else `allocation=0`.

Value

A list with the following components:

- `Optimal policies` A matrix with all possible coalitions in the first column. The second column contains the optimal order to each coalition. Last column indicates the global cost of this optimal order.
- `R-rule` A matrix, for each coalition (row), contains the coalition *i(S)* and allocations proposed by R-rule.

Examples

```
mwhc(n=4,a=180,b=c(15,15,10,12),d=c(0.45,0.95,1.05,1.2),K=c(5,7.5,8,9),
cooperation=1,allocation=1)

#"Optimal policies"
#  Coalitions Optimal orders    Costs
#           0     0.00000000  0.00000
#           1     0.07520921 14.74965
#           2     0.10684954 20.86510
#           3     0.10406757 20.89599
#           4     0.11094004 21.79985
#          12     0.10684954 20.86510
#          ..
#
#$"R-rule"
#  Coalition_SxT        1         2         3        4
#              0  0.00000  0.000000  0.000000  0.00000
#              1 14.74965  0.000000  0.000000  0.00000
#              2  0.00000 20.865100  0.000000  0.00000
#              3  0.00000  0.000000 20.895986  0.00000
#              4  0.00000  0.000000  0.000000 21.79985
#              2  0.00000 20.865100  0.000000  0.00000
#              3  0.00000  0.000000 20.895986  0.00000
#             ..
```

`mwhc2c` *MWHC2C*

Description

This function obtains the associated costs in a model without holding costs and with two differents cost of product. Demands and capacities must be introduced in the order indicated by the ratios `d/K`. In other case, agents change their position.

Usage

```
mwhc2c(n=NA,a=NA,b=NA,d=NA,K=NA,c1=NA,c2=NA,cooperation=c(0,1),
allocation=c(0,1))
```

Arguments

`n`	Agents in the inventory situation.
`a`	The fixed cost per order.
`b`	Vector. Shortage cost per unit to each agent.

`d`	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
`K`	Vector. Warehouse's capacity to each agent.
`c1`	Value. Cost per unit of product from the first vendor.
`c2`	Value. Cost per unit of product from the second vendor.
`cooperation`	Option to indicate cooperation. If it exists `cooperation=1` else `cooperation=0`.
`allocation`	Option to indicate the allocation. If it is required `allocation=1` else `allocation=0`.

Value

A list with the following components:

- `Optimal policies` A matrix with all possible coalitions in the first column. The second column contains the optimal order to each coalition. Last column indicates the global cost of this optimal order.
- `GR-rule` A matrix, for each coalition (row), contains the coalition *i(S)* and allocations proposed by GR-rule.

Examples

```
mwhc2c(n=3,a=1,b=c(10,10,10),d=c(30,45,46),K=c(30,45,46),c1=3.5,c2=3,
cooperation=1,allocation=1)
#$`Optimal policies`
#  Coalitions Optimal orders    Costs
#           0      0.0000000   0.0000
#           1      0.9505864 105.5947
#           2      0.9515422 157.9165
#           3      0.9515838 161.4046
#          12      0.9523090 262.5595
#          13      0.9523241 266.0476
#          23      0.9525115 318.3690
#         123      0.9527470 423.0118
#
#$`GR-rule`
#  Coalition_SxT        1        2        3
#              0   0.0000   0.0000   0.0000
#              1 105.5947   0.0000   0.0000
#              2   0.0000 157.9165   0.0000
#              3   0.0000   0.0000 161.4046
#             12 105.0238 157.5357   0.0000
#             13 105.0188   0.0000 161.0288
#             23   0.0000 157.4352 160.9338
#            123 104.8790 157.3184 160.8144
```

shapley_mfoc *SMFOC*

Description

Function to calculate the Shapley value for the associated game to a fixed order cost model.

Usage

```
shapley_mfoc(n = NA, a = NA, d = NA, K = NA)
```

Arguments

n	Agents in the inventory situation.
a	The fixed cost per order.
d	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
K	Vector. Warehouse's capacity to each agent.

Value

Shapley value for the associated game to the fixed order cost model.

Examples

```
shapley_mfoc(n=5,a=200,d=c(1.2,1.4,1.2,1.3,0.4),K=c(6,10,8,8,4))

#[1] "Individual cost"
#[1] "Shapley value"
#[1]  4.000000  6.000000  6.666667  7.916667 15.416667
```

SOC *SOC*

Description

Generic function for showing the allocations proposed by SOC rule under a EOQ or EPQ model.

Usage

```
SOC(n = NA, a = NA, d = NA, h = NA, m = NA, r = NA, s = NA,
model = c("EOQ", "EPQ"), cooperation = c(0, 1))
```

Arguments

`n`	Number of agents in the inventory model.
`a`	The fixed cost per order.
`d`	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
`h`	Vector. Holding costs to each agent.
`m`	Vector. Number of orders to each agent(optional).
`r`	Vector. Replacement rate to each agent. In general, r>d.
`s`	Vector. Cost of a shortage to each agent.
`model`	Model to select. `EOQ` and `EPQ` models can be considered.
`cooperation`	Option to indicate cooperation. If it exists `cooperation=1` else `cooperation=0`.

Value

Matrix with number of rows equal to the number of coalitions and n columns. For each coalition or row, the output shows the cost that SOC rule allocates to each player or column.

Examples

```
SOC(n=3,a=600,d=c(500,300,400),h=c(9.6,11,10),m=NA,r=NA,s=NA,model="EOQ",
cooperation=0)

#$"Share the ordering costs rule (individually)"
#[1] 2400.000 1989.975 2190.890

SOC(n=3,a=600,d=c(500,300,400),h=c(9.6,11,10),m=NA,r=NA,s=NA,model="EOQ",
cooperation=1)

#$"Share the ordering costs rule (individually)"
#         1        2        3
#     0.000    0.000    0.000
#  2400.000    0.000    0.000
#     0.000 1989.975    0.000
#     0.000    0.000 2190.890
#  1847.521 1270.171    0.000
#  1772.517    0.000 1477.098
#     0.000 1337.960 1621.770
#  1511.608 1039.230 1259.673
```

STI *STI*

Description

This function obtains the optimal number of orders and the associated cost in the inventory transportation system.

Usage

```
STI(n = NA, a = NA, av = NA, d = NA, h = NA, m = NA)
```

Arguments

n	Agents in the inventory situation.
a	The fixed cost per order.
av	Vector. The transportations cost per order to each agent.
d	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
h	Vector. Holding cost per time unit to each agent.
m	Vector. Number of orders to each agent (optional).

Value

This function calculates two vectors. The first one shows the optimal order for each agent. The second vector indicates the associated cost to these orders.

Examples

```
STI(n=3,a=200,av=c(300,300,900),d=c(90,80,20),h=c(0.06,0.06,0.1),m=NA)

#$"Optimal order"
#[1] 1224.745 1154.701  663.325
#
#$"Order cost"
#[1] 73.48469 69.28203 66.33250
```

`STIcoo` *STIcoo*

Description

This function calculates the optimal number of orders and the associated cost in the inventory transportation system when agents are cooperating.

Usage

```
STIcoo(n = NA, a = NA, av = NA, d = NA, h = NA, m = NA)
```

Arguments

`n`	Agents in the inventory situation.
`a`	The fixed cost per order.
`av`	Vector. The transportations cost per order to each agent.
`d`	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
`h`	Vector. Holding cost per time unit to each agent.
`m`	Vector. Number of orders to each agent (optional).

Value

A list with the following components:

- `Optimal order` A matrix with all possible coalitions in the first column. The next n columns contain the associated cost to each agent in the coalition. Last column indicates the global cost of the optimal order.

Examples

```
STIcoo(n=3,a=200,av=c(300,300,900),d=c(90,80,20),h=c(0.06,0.06,0.1),m=NA)

#$"Optimal order"
#          1        2        3 Coalition Order cost
#     0.0000    0.000   0.0000         0    0.00000
#  1224.7449    0.000   0.0000         1   73.48469
#     0.0000 1154.701   0.0000         2   69.28203
#     0.0000    0.000 663.3250         3   66.33250
#   891.1328  792.118   0.0000        12  100.99505
#  1551.8080    0.000 344.8462        13  127.59310
#     0.0000 1438.954 359.7385        23  122.31108
#  1208.5759 1074.290 268.5724       123  163.82918
```

twolines *Two-lines rule*

Description

Two-lines rule for a basic EOQ system without holding costs and with transportation cost.

Usage

```
twolines(n = NA, a = NA, av = NA, d = NA, K = NA)
```

Arguments

n	Agents in the inventory situation.
a	The fixed cost per order.
av	Vector. The transportations cost per order to each agent.
d	Vector. Deterministic demands per time unit to each agent.
K	Vector. Capacities of agents' warehouse to each agent.

Value

The output is a vector that contains the allocation to each player.

Examples

```
twolines(n=3,a=400,av=c(300,500,200),d=c(2,2,5),K=c(9,8,7))

#"Two-lines rule"
#0.0000 219.6429 423.2143
```

vShapley *vShapley*

Description

Shapley value for a TU game.

Usage

```
vShapley(n, game)
```

Arguments

`n`	Number of players
`game`	Matrix of two columns. The first column contains the coalitions. The second one, the values for each coalition.

Value

A vector that contains, in each component i, the allocation proposed by Shapley value.

References

L.S. Shapley (1953) A value por n-person, en H.Khun y A. Tucker (eds), *Contributions to the theory of games II*, Vol. 28 of Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton.

Examples

```
vShapley(3,cbind(c(1,2,3,12,13,23,123),c(1,1,1,1,2,1,2)))

#[1] 0.8333333 0.3333333 0.8333333
```

Bibliografía

[1] B. Casas-Méndez, M.G. Fiestras-Janeiro, I. García-Jurado, J. González-Díaz (2012). *Introducción a la Teoría de Juegos*. Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Santiago de Compostela.

[2] M. Dror, B.C. Hartman (2007). Shipment consolidation: Who pays for it and how much? *Management Science*, **53**(1), 78–87.

[3] M.G. Fiestras-Janeiro, I. García-Jurado, A. Meca, M.A. Mosquera (2011). Cooperative game theory and inventory management. *European Journal of Operational Research*, **210**(3), 459–466.

[4] M.G. Fiestras-Janeiro, I. García-Jurado, A. Meca, M.A. Mosquera (2012). Cost allocation in inventory transportation systems. *Top*, **20**(2), 397–410.

[5] M.G. Fiestras-Janeiro, I. García-Jurado, A. Meca, M.A. Mosquera (2013a). Centralized inventory in a farming community. *Journal of Business Economics*, 1–15.

[6] M.G. Fiestras-Janeiro, I. García-Jurado, A. Meca, M.A. Mosquera (2013b). Cooperation on capacitated inventory situations with fixed holding costs. *Pendiente de publicación*.

[7] D.B. Gillies (1953). *Some theorems on n-person games*. PhD thesis, Princeton University.

[8] J. González-Díaz, I. García-Jurado, M.G. Fiestras-Janeiro (2010). *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, Vol. 115, *Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society and RSME.

[9] G. Hadley, T.M. Whitin (1963). *Analysis of Inventory Systems*. Prentice-Hall.

[10] S.C. Littlechild, G. Owen (1973). A simple expression for the Shapley value in a special case. *Management Science*, **20**(3), 370–372.

[11] A. Meca, I. García-Jurado, P. Borm (2003). Cooperation and competition in inventory games. *Mathematical Methods of Operations Research*, **57**(3), 481–493.

[12] A. Meca, J. Timmer, I. García-Jurado, P. Borm (2004). Inventory games. *European Journal of Operational Research*, **156**(1), 127–139.

[13] M.A. Mosquera, I. García-Jurado, M. G. Fiestras-Janeiro (2008). A note on coalitional manipulation and centralized inventory management. *Annals of Operations Research*, **158**(1), 183–188.

[14] J.A. Muckstadt, A. Sapra (2010). Principles of Inventory Management: When You Are Down to Four. *Order More*, 1–15.

[15] L.S. Shapley (1953). A value por n-person games. In H. Kuhn y A. Tucker (eds), *Contributions to the theory of games II*, Vol. 28, *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press.