UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Nuevos Equilibrios Estables ante Tendencias al Error en Juegos no Cooperativos

IGNACIO GARCIA JURADO

D.L.: C -1197-1989 ISBN: 84-600-7224-X

Imprenta Universitaria - Pabellón de Servicios
Universidad de Santiago de Compostela

Realizado el acto público de la Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el día 20 de Mayo de 1989, en la Universidad de Santiago de Compostela, ante el tribunal formado por:

Presidente: Dr. D. José Antonio Cristóbal Cristóbal

Vocales: Dr. D. Julio Grafe Arias

Dr. D. Marco A. López Cerdá

Dr. D. Ezio Marchi

Secretario: Dr. D. Federico Valenciano Llovera

obtuvo la máxima calificación de APTO CUM LAUDE.

INDICE

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento al Profesor Dr. D. José Manuel Prada Sánchez, que propuso y dirigió este trabajo, al Profesor Eric van Damme, por sus interesantes sugerencias durante mi estancia con él en la Universidad de Bonn, y a todos mis compañeros del Departamento de Estadística e Investigación Operativa.

INTRODUCCION

La teoría de juegos estudia situaciones de tipo conflictivo en las que participan varios agentes que han de tomar decisiones que darán lugar a un resultado, dependiendo éste de las decisiones de todos. Normalmente se llama juego a una situación de este tipo y jugadores a los agentes que intervienen. Cuando los jugadores no son capaces de renunciar a sus intereses particulares en busca del bien común porque no pueden tomar acuerdos vinculantes, diremos que nos hallamos ante un juego no cooperativo.

En el contexto no cooperativo el concepto de solución más importante es el equilibrio de Nash introducido por éste en 1951. Básicamente un equilibrio de Nash consiste en un vector que asigna una estrategia a cada jugador, de modo que ninguno de ellos ganaría más si se desviase unilateralmente de la estrategia asignada. La propiedad más importante del concepto de Nash es el hecho de que nos proporciona combinaciones de estrategias que se autoimponen, en el sentido de que ningún jugador tendría motivos racionales para separarse de ellas en caso de que los demás no lo hicieran. Esta es la propiedad que convierte la condición de equilibrio de Nash en algo a exigir a cualquier punto que aspire a ser considerado solución válida en el contexto no cooperativo.

Sin embargo, en 1975 Selten observó que algunos equilibrios de Nash perdían esa capacidad de autoimponerse en contextos en los que los jugadores podían cometer errores aunque fuera con una probabilidad ínfima. En consecuencia introdujo el equilibrio perfecto que nos proporciona equilibrios de Nash que son estables, en el sentido de que no dejan de autoimponerse, ante al menos una tendencia al error por parte de los jugadores.

En 1978 Myerson fue más lejos y pensó que, ya que los jugadores actúan racionalmente, también debe haber una cierta racionalidad en sus errores. En este sentido coincidió con Selten en considerar aceptables sólo aquellos equilibrios de Nash que fueran estables ante alguna tendencia al error por parte de los jugadores, pero además exigió que esa tendencia al error fuera de algún modo razonable. ¿Qué entendió Myerson por errores razonables o racionales? Aquellos que reflejan el hecho de que cada jugador debe tender a equivocarse más hacia lo que le cuesta menos.

A fijar un campo de acción, los juegos n-personales finitos no cooperativos en forma normal, e introducir formalmente todos estos conceptos y los resultados más importantes relativos a ellos dedicamos los tres primeros capítulos de esta memoria.

En el capítulo cuarto matizamos el sentido de racionalidad de Myerson y consideramos no sólo que los jugadores deben tender a equivocarse más hacia lo que les cuesta menos sino que además deben tender a equivocarse con la misma probabilidad hacia lo que les cuesta igual. En base a esta idea proponemos dos conceptos diferentes para los cuales, además de dar ejemplos que justifican intuitivamente su introducción, demostramos, entre otras cosas, que son refinamientos estrictos del concepto de Myerson y que existen en cualquier juego n-personal finito no cooperativo en forma normal.

En el capítulo quinto completamos la racionalidad según Myerson desde otro punto de vista y consideramos no sólo que los jugadores tienden a equivocarse más hacia lo que les cuesta menos sino que además deben tender a equivocarse más aquellos jugadores a los que les cuesta menos. Introducimos entonces dos nuevos conceptos, de modo que uno compara pagos normalizados y el otro los compara sin normalizar, que discriminan aquellos equilibrios de Nash que son no-estables ante cualquier tendencia racional al error por parte de los jugadores, entendiendo la racionalidad en el último sentido mencionado. También probamos su existencia y el hecho de que constituyen refinamientos estrictos del concepto de Myerson y comentamos su conveniencia en base a algunos ejemplos.

En el capítulo sexto conciliamos los dos puntos de vista diferentes adoptados en los capítulos cuatro y cinco y vamos un poco más allá considerando que, para que un equilibrio de Nash sea aceptable, debe ser estable ante alguna tendencia racional al error por parte de los jugadores, entendiendo por racionales aquellas tendencias en las que:

- *Cada jugador tiende a equivocarse más hacia lo que le cuesta menos*
- *Cada jugador tiende a equivocarse con la misma probabilidad hacia todos los errores que le resulten indiferentes*
- *En general tienden a equivocarse más aquellos jugadores a los que les cuesta menos equivocarse*
- *En general, si ciertos jugadores sufren idénticas consecuencias al cometer ciertos errores, tenderán a cometerlos con la misma probabilidad*

En base a todo esto introducimos dos nuevos conceptos, uno que compara pagos normalizados y el otro que los compara sin normalizar, para los cuales probamos la existencia y otras propiedades. En este capítulo también se incluye una clasificación de los equilibrios estables ante tendencias al error.

En el capítulo siete estudiamos las relaciones de todos estos nuevos conceptos con el equilibrio estrictamente propio introducido por van Damme en 1983 y en el ocho hacemos lo mismo con el equilibrio persistente introducido por Kalai y Samet en 1984.

CAPITULO 1 PRELIMINARES

Trabajaremos en el contexto de juegos n-personales finitos no cooperativos en forma normal. Diremos que Γ es uno de tales juegos si

$$\Gamma = (\Phi_1,\ldots,\Phi_n,H_1,\ldots,H_n)$$

donde cada Φ_i es el conjunto finito no vacío de estrategias puras del jugador i y cada H_i es la función de pago al jugador i definida

$$H_i : \Phi=\Phi_1\times\ldots\times\Phi_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Llamaremos combinación de estrategias puras a cualquier $\phi\in\Phi$, es decir, a cualquier $\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_n)$ tal que $\phi_i\in \Phi_i$ $\forall$i.

Para cada i, el conjunto S_i de estrategias mixtas del jugador i será

$$S_i=\left\{s_i\in \mathbb{R}^{\Phi_i} / \sum_{\phi_i\in \Phi_i} s_i(\phi_i)= 1,\ s_i(\phi_i)\geq 0 \quad \forall\phi_i\in \Phi_i\right\}$$

Llamaremos combinación de estrategias mixtas (o simplemente combinación de estrategias) a cualquier $s=(s_1,\ldots,s_n)$ perteneciente a $S=S_1\mathrm{x}\ldots\mathrm{x}S_n$.

Para cada jugador i se puede extender H_i a S del siguiente modo:

$$H_i(s)=\sum_{(\phi_1,...,\phi_n)\in \Phi} H_i(\phi_1,...,\phi_n)\cdot\prod_{j=1}^{n} s_j(\phi_j)$$

Si $s=(s_1,...,s_n)\in S$ y $s_i^*\in S_i$ denotaremos:

$$s\backslash s_i^*=(s_1,...,s_{i-1},s_i^*,s_{i+1},...,s_n)$$

En estos momentos ya estamos en condiciones de dar el concepto más importante de la teoría de juegos no cooperativos. Es, claro está, el concepto de punto de equilibrio de Nash introducido por éste en 1951.

<u>DEFINICION</u> <u>1.1</u>

Diremos que $s\in S$ es un equilibrio de Nash de Γ si y sólo si $H_i(s)\geqslant H_i(s\backslash s_i^*)$ $\forall s_i^*\in S_i$, $\forall i\in\{1,...,n\}$.

Nash no sólo introdujo el concepto sino que además probó que todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal posee al menos un equilibrio de Nash.

A continuación enunciaremos algunos resultados generales de sencilla demostración que pueden resultar de interés más adelante. En primer lugar reunimos en forma de teorema algunas caracterizaciones del concepto de Nash.

<u>TEOREMA</u> <u>1.2.</u>

Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

(1) s es un equilibrio de Nash.

(2) $H_i(s) \geq H_i(s\backslash\phi_i^*)$ $\forall \phi_i^* \in \Phi_i$, $\forall i \in \{1,...,n\}$.

(3) s es tal que, $\forall \phi_i, \phi'_i \in \Phi_i$ y $\forall i \in \{1,...,n\}$, se verifica que

$$H_i(s\backslash\phi_i) < H_i(s\backslash\phi'_i) \Rightarrow s_i(\phi_i)=0.$$

Fijado $s \in S$ definamos los siguientes conjuntos:

$* \; B_i(s)=\{\phi_i \in \Phi_i \,/\, H_i(s\backslash\phi_i) \geq H_i(s\backslash\phi'_i) \;\; \forall \phi'_i \in \Phi_i\}$

$* \; B(s)= \prod_{i=1}^{n} B_i(s)$

Si $\phi_i \in B_i(s)$ diremos que ϕ_i es una respuesta óptima pura del jugador i a s. Si $\bar{s}_i \in S_i$ es tal que

$$H_i(s\backslash\bar{s}_i) \geq H_i(s\backslash s_i^*) \;\; \forall s_i^* \in S_i$$

entonces se dirá que $\bar{s}_i$ es una respuesta óptima del jugador i a s. Por último $\bar{s}$ es una respuesta óptima a s si $\bar{s}_i$ es una respuesta óptima del jugador i a s $\forall i \in \{1,...,n\}$.

Enunciemos también el siguiente resultado de gran utilidad:

<u>TEOREMA</u> <u>1.3</u>

En un juego n-personal finito en forma normal Γ, $\bar{s}_i \in S_i$ es una respuesta óptima a $s \in S$ si y sólo si, $\forall \phi_i, \phi'_i \in \Phi_i$, se verifica

$$H_i(s\backslash\phi_i) < H_i(s\backslash\phi'_i) \Rightarrow \bar{s}_i(\phi_i)=0.$$

Sea ahora $s_i \in S_i$. La carrera de s_i será el conjunto $C(s_i)=\{ \phi_i \in \Phi_i \,/\, s_i(\phi_i) > 0 \}$. Análogamente, fijado $s \in S$, la carrera de s será $C(s)=\left\{\phi\in\Phi / s(\phi)=\prod_{i=1}^{n} s_i(\phi_i)>0\right\}$.

Introducidos estos conceptos podemos completar el teorema 1.2. con el siguiente

<u>TEOREMA 1.4</u>

Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

(1) s es un equilibrio de Nash.

(4) s es una respuesta óptima a sí mismo.

(5) $C(s)\subset B(s)$.

A la vista de la definición del concepto de equilibrio de Nash se aprecia que éste último nos proporciona combinaciones de estrategias que se autoimponen en el sentido de que, una vez acordadas[1], ningún jugador tiene motivos racionales para separarse de ellas. Esta es la propiedad esencial del concepto de Nash, la propiedad que lo convierte en solución válida en el contexto no cooperativo en el que los jugadores no son capaces de renunciar a sus intereses particulares en busca del bien común. Sin embargo, a mediados de los años 70 se observó que, en contextos en los que los jugadores pueden cometer errores aunque sea con una probabilidad ínfima, algunos equilibrios de Nash podían

---

[1] Cuando escribamos "los jugadores acuerdan jugar segun un cierto s", en realidad querremos decir "el consejo del teorico de juegos es que los jugadores deben jugar segun s". Por simplicidad usaremos la primera expresion a pesar de que quiza es menos adecuada.

perder esa capacidad de autoimponerse. En consecuencia había que dar un nuevo concepto de equilibrio que refinara el de Nash y nos proporcionara combinaciones que no dejasen de autoimponerse ante perturbaciones de las estrategias (tendencias al error) arbitrariamente pequeñas. Todas estas ideas vamos a comentarlas y desarrollarlas en el capítulo siguiente.

CAPITULO 2 EL EQUILIBRIO PERFECTO DE SELTEN

Consideremos el juego Γ_1 en el que en la casilla correspondiente a la combinación (α_i,β_j) figura el pago al jugador 1 en la parte superior izquierda y el pago al jugador 2 en la inferior derecha. Las α_i son las estrategias puras de 1 y las β_j las de 2.

	β_1	β_2
α_1	1 / 1	0 / 0
α_2	0 / 0	0 / 0

Γ_1

En Γ_1 (α_1,β_1) y (α_2,β_2) son equilibrios de Nash. Quedémonos con el segundo. ¿Es cierto que se autoimpone? Obsérvese que J1 (el jugador 1) no pierde nada por jugar α_1 en vez de α_2 e incluso podría llegar a ganar si por cualquier circunstancia J2 jugase β_1 en vez de β_2. Un razonamiento análogo podría hacerse para J2; en consecuencia, aún en el caso de que los jugadores hubieran acordado jugar (α_2,β_2), probablemente acabarían haciéndolo según (α_1,β_1) y eso es debido a que (α_2,β_2) de algún modo no posee la propiedad de autoimponerse. Para paliar, entre otras, esta imperfección del concepto de Nash, Selten introdujo en un artículo publicado en 1975 un nuevo concepto de solución en el contexto no cooperativo al que llamó equilibrio perfecto. Este concepto refina el de Nash discriminando aquellos equilibrios que son no-estables (que dejan de autoimponerse) ante cualquier tendencia al error por parte de los jugadores. Al llegar a este punto, nos parece de interés hacer un comentario sobre la naturaleza de estos errores. En realidad Selten introdujo su concepto en juegos en forma extensiva. En dicho contexto quería evitar aquellos equilibrios de Nash que se basaran en conductas irracionales en algún conjunto de información inalcanzable. Para ello exigió a sus equilibrios perfectos que se pudieran obtener como límite de soluciones de juegos perturbados en los que todos los conjuntos de información del juego fuesen alcanzables (porque todos los jugadores eligen con probabilidad positiva todas sus estrategias puras, es decir, se equivocan). Por eso algunos autores tienden a considerar que los errores sobre los que escribe Selten sólo son una forma de hablar con vistas a dotar de interpretación intuitiva al concepto, el cual trata de dar forma matemática a la racionalidad total y por tanto, según tales autores, nunca podría aceptar la posibilidad real de que los jugadores se equivocasen. Esta no es sin embargo la idea que subyacía en el artículo de Selten como se deduce del siguiente fragmento del mismo: "A satisfactory interpretation of equilibrium points in extensive games seems to require that the possibility of mistakes is not completely excluded". A nosotros este planteamiento nos parece perfectamente acertado puesto que en realidad se basa en considerar que la conducta completamente racional sólo se obtiene como límite de conductas parcialmente irracionales, consideración que se acopla perfectamente a la idea que von Neuman y Morgenstern expresaban en su libro pionero de que "the rules of rational behavior must definitely provide for the possibility of irrational conduct on the part of the others". Por todo lo dicho, nosotros, a lo largo de este trabajo, asumiremos estos planteamientos, al igual que autores tan ilustres como por ejemplo R. Myerson o A. Okada. Hecha esta observación veamos con detalle el concepto de Selten, no sin antes comentar que las demostraciones de todos los resultados que aparecen en este capítulo pueden encontrarse por ejemplo en van Damme (1983).

Sea $\Gamma=(\Phi_1,...,\Phi_n,H_1,...,H_n)$ un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal. Para cada $i\in\{1,...,n\}$ sean η_i y $S_i(\eta_i)$ dados por:

* $\eta_i\in \mathbb{R}^{\Phi_i}$ y es tal que $\eta_i(\phi_i)>0$ $\forall\phi_i\in \Phi_i$, $\sum_{\phi_i\in \Phi_i}\eta_i(\phi_i)<1$

* $S_i(\eta_i)=\{s_i\in S_i / s_i(\phi_i)\geqslant \eta_i(\phi_i)\ \forall\phi_i\in \Phi_i\}$

En general denotaremos $\eta=(\eta_1,...,\eta_n)$, $S(\eta)=\prod_{i=1}^{n} S_i(\eta_i)$ y diremos que η es una perturbación de Γ.

Dados Γ y η en las condiciones anteriores, el juego perturbado (Γ,η) es el juego infinito en forma normal $(S_1(\eta_1),...,S_n(\eta_n),H_1,...,H_n)$.

Aunque el concepto de equilibrio de Nash lo hemos introducido en el contexto de juegos finitos puede extenderse de modo obvio a juegos cuyos jugadores tienen infinitas estrategias puras. Dicho esto enunciemos los resultados siguientes.

TEOREMA 2.1

Todo juego perturbado (Γ,η) posee al menos un punto de equilibrio de Nash.

TEOREMA 2.2

Una combinación de estrategias $s \in S(\eta)$ es un equilibrio de Nash de (Γ,η) si y sólo si verifica que

$$H_i(s\backslash\phi_i) < H_i(s\backslash\phi'_i) \Rightarrow s_i(\phi_i)=\eta_i(\phi_i) \qquad \forall\phi_i,\phi'_i \in \Phi_i \quad \forall i\in\{1,...,n\}$$

Teniendo en cuenta todo esto introduzcamos el concepto de Selten:

DEFINICION 2.3

Dado Γ un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal, diremos que $s \in S$ es un equilibrio perfecto de Γ si existen sucesiones $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ con $s^k=(s_1^k,\ldots,s_n^k) \in S$ $\forall k$ y $\{\eta^k\}_{k=1}^{\infty}$, siendo $\eta^k=(\eta_1^k,\ldots,\eta_n^k)$ una perturbación de Γ $\forall k$, de modo que:

a) s^k sea un equilibrio de Nash en (Γ,η^k) $\forall k$.

b) $\lim\limits_{k \to \infty} s_i^k(\phi_i)=s_i(\phi_i)$ $\forall \phi_i \in \Phi_i$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

c) $\lim\limits_{k \to \infty} \eta_i^k(\phi_i)=0$ $\forall \phi_i \in \Phi_i$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

De la misma definición y el teorema 2.2 se obtiene que todo equilibrio perfecto también es de Nash. Sin embargo el recíproco no es cierto lo cual se deduce, por ejemplo, de comprobar que (α_2,β_2) no es perfecto en Γ_1. Por otro lado, teniendo en cuenta el teorema 2.1, es inmediato el siguiente resultado de existencia.

TEOREMA 2.4

Todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal posee al menos un equilibrio perfecto.

Myerson y Selten nos proporcionan las siguientes caracterizaciones del equilibrio perfecto:

DEFINICION 2.5

Diremos que $s \in S$ es una combinación de estrategias de Γ completamente mixta si y sólo si $C(s)=\Phi$.

DEFINICION 2.6

Dado $\varepsilon>0$, diremos que $s\in S$ es un equilibrio ε-perfecto de Γ si s es completamente mixta y verifica que

$$H_i(s\backslash\phi_i) < H_i(s\backslash\phi'_i) \Rightarrow s_i(\phi_i) \leqslant \varepsilon \qquad \forall\phi_i,\phi'_i \in \Phi_i \quad \forall i\in\{1,...,n\}$$

TEOREMA 2.7

Sea $\Gamma=(\Phi_1,...,\Phi_n,H_1,...H_n)$ un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal y sea $s\in S$. Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

(1) s es un equilibrio perfecto de Γ

(2) Existe un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,...,s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que:

* $\varepsilon_k>0$ $\forall k$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k=0$.
* s^k es ε_k-perfecto $\forall k$.
* $\lim_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)=s_i(\phi_i)$ $\forall\phi_i\in \Phi_i, \forall i\in\{1,...,n\}$.

(3) Existe una sucesión $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,...,s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ de combinaciones de estrategias completamente mixtas tal que:

* s es una respuesta óptima a s^k $\forall k$
* $\lim_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)=s_i(\phi_i)$ $\forall\phi_i\in \Phi_i, \forall i\in\{1,...,n\}$

La caracterización dada por (2) nos será de gran utilidad en lo sucesivo. La caracterización (3) se usa para probar el teorema 2.9. que enunciaremos más adelante.

DEFINICION 2.8

En un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ decimos que la estrategia $\hat{s}_i$ del jugador i está dominada por s'_i si

$$H_i(s\backslash\hat{s}_i) \leqslant H_i(s\backslash s'_i) \quad \forall s\in S \qquad (2.1)$$

$$H_i(\bar{s}\backslash\hat{s}_i) < H_i(\bar{s}\backslash s'_i) \text{ para algún } \bar{s}\in S \qquad (2.2)$$

Para que (2.1) sea cierto es necesario y suficiente que lo sea para cualquier $\phi\in\Phi$. Para que (2.2) sea cierto es necesario y suficiente que lo sea para algún $\bar{\phi}\in\Phi$. Si todas las desigualdades (2.1) son estrictas diremos que $\hat{s}_i$ está estrictamente dominada por s'_i. Diremos que $\hat{s}_i\in S_i$ es no dominada si no existe ningún elemento de S_i que la domine. Por último, $\hat{s}\in S$ es no dominada si todas sus componentes $\hat{s}_i$ son no dominadas.

Como ya habíamos indicado, a consecuencia del teorema 2.7(3) se obtiene el siguiente resultado cuyo recíproco en general no es cierto.

<u>TEOREMA</u> <u>2.9</u>

Todo equilibrio perfecto es no dominado.

Obsérvese que para que un cierto $s\in S$ sea un equilibrio perfecto de Γ basta que exista <u>una</u> sucesión de juegos perturbados tales que cuando la perturbación es próxima a cero tienen un equilibrio de Nash próximo a s, es decir, basta que s sea estable (se siga autoimponiendo) frente a <u>una</u> tendencia al error por parte de los jugadores, con lo que los equilibrios de Nash discriminados por el concepto de Selten son francamente inestables.

En 1978 Myerson fue más lejos y pensó que ya que los jugadores actúan racionalmente también debe haber una cierta racionalidad en sus errores. En este sentido coincidió con Selten en considerar aceptables sólo aquellos equilibrios de Nash que fueran estables ante al menos una tendencia al error por parte de los jugadores pero exigió además que esa tendencia al error fuera racional. ¿Qué entendió Myerson por racional en este contexto? Muy sencillo, los jugadores debían tender a equivocarse más hacia lo que menos les costase. La justificación intuitiva de esta suposición es clara. Los jugadores, que son inteligentes, pueden cometer errores pero son conscientes de ello. Por eso seguramente pondrán los medios para evitarlos y, lógicamente, tratarán de evitar con más ahínco los errores que les resulten más costosos por lo que, aún cuando la probabilidad de tender a cometer cualquier error sea positiva, tenderán a cometer los errores más costosos con menor probabilidad. Obsérvese que detrás de este planteamiento se esconde la filosofía de Selten de los errores posibles, filosofía que nosotros compartimos, como ya hemos comentado.

Estas consideraciones indujeron a Myerson a introducir un refinamiento del concepto de Selten (y por tanto del de Nash) que comentaremos en el capítulo siguiente.

CAPITULO 3   EL EQUILIBRIO PROPIO DE MYERSON

Para ilustrar las ideas de Myerson consideremos el siguiente juego:

	β_1	β_2	β_3
α_1	1, 1	0, 0	-1, -2
α_2	0, 0	0, 0	0, -2
α_3	-2, -1	-2, 0	-2, -2

Γ_2

Es inmediato comprobar que en Γ_2 (α_2,β_2) es un equilibrio perfecto. Ello se debe a que, aunque J1 no perdería nada por jugar α_1 en vez de α_2 e incluso podría llegar a ganar si J2 se equivoca hacia β_1, también podría llegar a perder si J2 se equivoca hacia β_3. Un razonamiento análogo sería válido para J2. En consecuencia (α_2,β_2) es estable frente a cualquier tendencia de los jugadores al error que considere para J2 más probable el error β_3 que el

β_1 y para J1 más probable el equivocarse hacia α_3 que hacia α_1, pero sólo ante este tipo de tendencias que son poco intuitivas: ¿por qué va a tender J2 hacia el error β_3 con más fuerza que hacia el β_1 si éste último es mucho menos costoso para J2 que aquél?

Todo esto da pie a Myerson (1978) para introducir el concepto de equilibrio propio, que desecha los equilibrios de Nash que son no-estables (que dejan de autoimponerse) ante cualquier tendencia racional al error por parte de los jugadores, entendiendo por racionales aquellas tendencias que consideran más probables los errores menos costosos.

Veamos en qué consiste exactamente dicho refinamiento.

DEFINICION 3.1

Dado $\varepsilon>0$, diremos que $s\in S$ es un equilibrio ε-propio de Γ si s es completamente mixta y verifica que:

$$H_i(s\backslash\phi_i) < H_i(s\backslash\phi'_i) \Rightarrow s_i(\phi_i) \leqslant \varepsilon\cdot s_i(\phi'_i) \quad \forall\phi_i,\phi'_i\in\Phi_i \quad \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

DEFINICION 3.2

Diremos que $s\in S$ es un equilibrio propio de Γ si existe un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,\dots,s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que:

* $\varepsilon_k>0$ $\forall k$, $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$
* s^k es ε_k-propio $\forall k$.

$* \lim_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)=s_i(\phi_i) \ \forall\phi_i \in \Phi_i, \forall i\in\{1,...,n\}$

Es inmediato que si s es un equilibrio ε-propio también es ε-perfecto de donde todo equilibrio propio es perfecto (luego de Nash). El recíproco no es cierto como se puede comprobar, por ejemplo, viendo que en Γ_2 (α_2,β_2) es perfecto pero no es propio. Myerson además de introducir el concepto probó el siguiente teorema de existencia:

<u>TEOREMA</u> <u>3.3</u>

Todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal posee al menos un equilibrio propio.

De la demostración del teorema 2.7 se obtiene también el siguiente resultado que será de utilidad más adelante:

<u>TEOREMA</u> <u>3.4</u>

Sea s un equilibrio propio de Γ y sean $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ un par de sucesiones en las condiciones de la definición 3.2. Entonces $\exists$ $N\in\mathbb{N}$ tal que s es una respuesta óptima a s^k $\forall k\geq N$.

Hagamos alguna observación a este concepto de Myerson:

En primer lugar digamos que la hipótesis de racionalidad en los errores nos parece absolutamente válida en la mayoría de los casos aunque probablemente habrá situaciones en las que no lo sea. En esas situaciones un equilibrio propio en principio no será más estable que uno que sólo sea perfecto aunque tampoco menos. De cualquier manera el concepto de Myerson nos parece totalmente válido porque refina el concepto de Selten en base a supuestos muy intuitivos que serán aceptables en la mayoría de los casos, lo cual supone un paso adelante en la búsqueda de equilibrios más estables cuya existencia tengamos garantizada en cualquier juego n-personal finito no cooperativo en forma normal.

En segundo lugar indiquemos que el concepto de Myerson es mucho más fuerte de lo que en principio podría parecer puesto que para aceptar como racional el error reflejado por la sucesión de ε-equilibrios que converge al punto propio utiliza esa misma sucesión, con lo que posee una cierta recurrencia por definición, una especie de llamada a los teoremas de punto fijo para cualquier razonamiento que se quiera hacer con el concepto. Esa simplicidad aparente del equilibrio propio lleva por ejemplo a Okada a afirmar en el artículo en el que introduce su equilibrio estrictamente perfecto (que básicamente es el que es estable ante cualquier tendencia al error por parte de los jugadores) que todo punto estrictamente perfecto es propio. Aunque intuitivamente esto debería ser cierto no está comprobado que lo sea y parece que será difícil de comprobar y ello porque, insistimos, el concepto de Myerson es mucho más complejo de lo que parece. Quizá todo lo que estamos comentando quede más patente a la vista de la siguiente caracterización que hemos obtenido para el equilibrio propio.

TEOREMA 3.5

Dado Γ un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal, $s \in S$ es un equilibrio propio si y sólo si existen sucesiones $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$, con $s^k=(s_1^k,\dots,s_n^k)\in S$, y $\{\eta^k\}_{k=1}^{\infty}$, siendo $\eta^k=(\eta_1^k,\dots,\eta_n^k)$ una perturbación de Γ $\forall k$, de modo que:

a) s^k sea un equilibrio de Nash en (Γ,η^k) $\forall k$.

b) $H_i(s^k\backslash\phi_i)<H_i(s^k\backslash\phi'_i) \Rightarrow$

$\eta_i^k(\phi_i)\leq \max\left\{\eta_i^k(\hat{\phi}_i)/\hat{\phi}_i\in \Phi_i, i\in\{1,\dots,n\}\right\}\cdot\eta_i^k(\phi'_i)$

$\forall\phi_i,\phi'_i\in \Phi_i$, $\forall i\in\left\{1,\dots,n\right\}$, $\forall k$

c) $\lim\limits_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)= s_i(\phi_i)$ $\forall\phi_i\in \Phi_i$, $\forall i\in\left\{1,\dots,n\right\}$

d) $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_i^k(\phi_i)= 0$ $\forall\phi_i\in \Phi_i$, $\forall i\in\left\{1,\dots,n\right\}$

DEMOSTRACION

" $\Rightarrow$ " (necesidad)

Estamos suponiendo que $s\in S$ es propio, con lo que existen $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ en las condiciones de la definición 3.2.

$$\text{Tomemos } \eta_i^k(\phi_i)=\begin{cases} s_i^k(\phi_i) & \text{si } \phi_i\notin C(s_i) \\ (\varepsilon_k)^{1/2} & \text{en otro caso}\end{cases}$$

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall\phi_i\in \Phi_i$, $\forall i\in\left\{1,\dots,n\right\}$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)= 0$ para cualquier $\phi_i\notin C(s_i)$ y para cualquier $i\in\left\{1,\dots,n\right\}$ y como $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k= 0$ podemos afirmar que $\exists\ N_1$ tal que η^k es una perturbación de Γ $\forall k\geq N_1$ y $\{\eta^k\}_{k\geq N_1}$ verifica d).

Comprobemos ahora que $\exists\ N_2$ tal que $\{s^k\}_{k\geqslant N_2}$ verifica a).

Efectivamente, sea $k\geqslant N_1$

- si $\phi_i\notin C(s_i)$, $s_i^k(\phi_i)=\eta_i^k(\phi_i)\quad\forall i$

  si $\phi_i\in C(s_i)$, como $\lim_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)= s_i(\phi_i)> 0$ y $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$,

  $\exists\ \overline{N}_i^{\phi_i}$ tal que $\forall k\geqslant \overline{N}_i^{\phi_i}$ $s_i^k(\phi_i)\geqslant \varepsilon_k^{1/2}=\eta_i^k(\phi_i)$ $\forall i$

- El teorema 3.4 nos asegura que $\exists\ \overline{N}_2$ tal que s es una respuesta óptima a s^k $\forall k\geqslant \overline{N}_2$. Sea $k\geqslant \overline{N}_2$. Entonces $,\forall\phi_i,\phi'_i$ y $\forall i$, $H_i(s^k\backslash\phi_i)< H_i(s^k\backslash\phi'_i)\Rightarrow \phi_i\notin C(s_i)$ con lo que $s_i^k(\phi_i)=\eta_i^k(\phi_i)$

Teniendo en cuenta lo anterior y el teorema 2.2 y tomando $N_2=\max\left\{\overline{N}_i^{\phi_i}/\phi_i\in C(s_i), i\in\{1,...,n\}\right\}\cup\left\{N_1,\overline{N}_2\right\}$ queda comprobado lo que queríamos.

Como $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ está en las condiciones de la definición 3.2 verifica c).

Comprobemos por último que $\exists\ N_3$ tal que $\forall k\geqslant N_3$ s^k verifica b). En efecto, sea $\overline{N}_3$ tal que $\forall k\geqslant \overline{N}_3$ $\varepsilon_k< 1$. Sea $N_3=\max\left\{N_2,\overline{N}_3\right\}$. Entonces $H_i(s^k\backslash\phi_i)< H_i(s^k\backslash\phi'_i)\Rightarrow s_i^k(\phi_i)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_i^k(\phi'_i)$ pues $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ están en las condiciones de la definición 3.2. Pero como ya sabemos que $\forall k\geqslant N_2$ s^k es un equilibrio de Nash en (Γ,η^k), por verificarse $H_i(s^k\backslash\phi_i)< H_i(s^k\backslash\phi'_i)$ ha de ocurrir que $s_i^k(\phi_i)=\eta_i^k(\phi_i)$, con lo que $\eta_i^k(\phi_i)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_i^k(\phi'_i)$. Pero ahora

$$\varepsilon_k\cdot s_i^k(\phi'_i)=[\eta_i^k(\phi'_i)]^2\cdot s_i^k(\phi'_i)\leqslant$$
$$\eta_i^k(\phi'_i)\cdot\max\left\{\eta_i^k(\hat{\phi}_i)/\hat{\phi}_i\in\Phi_i, i\in\{1,...,n\}\right\}$$

si $\phi'_i\in C(s_i)$

$$\varepsilon_k\cdot s_i^k(\phi'_i)=\varepsilon_k\cdot\eta_i^k(\phi'_i)\leqslant \varepsilon_k^{1/2}\cdot\eta_i^k(\phi'_i)\leqslant$$

$$\max\left\{\eta_i^k(\hat{\phi}_i)/\hat{\phi}_i\in\Phi_i, i\in\{1,\dots,n\}\right\}\cdot\eta_i^k(\phi'_i)$$

$$\text{si } \phi'_i\notin C(s_i)$$

con lo que, en cualquier caso, si $H_i(s^k\backslash\phi_i)< H_i(s^k\backslash\phi'_i)$ entonces $\eta_i^k(\phi_i)\leqslant \max\left\{\eta_i^k(\hat{\phi}_i)/\hat{\phi}_i\in\Phi_i, i\in\{1,\dots,n\}\right\}\cdot\eta_i^k(\phi'_i)$ y esto $\forall\phi_i,\phi'_i\in \Phi_i$, $\forall i\in\left\{1,\dots,n\right\}$.

En resumen $\{s^k\}_{k\geqslant N_3}$, $\{\eta^k\}_{k\geqslant N_3}$ es el par de sucesiones que buscábamos.

" $\Leftarrow$ " (suficiencia)

Sean $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\eta^k\}_{k=1}^{\infty}$ verificando a), b), c) y d). Definimos $\forall k\in \mathbb{N}$ $\varepsilon_k= \max\left\{\eta_i^k(\hat{\phi}_i)/\hat{\phi}_i\in \Phi_i, i\in\{1,\dots,n\}\right\}$. Entonces tenemos un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ verificando que:

* $\varepsilon_k> 0$ $\forall k$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k= 0$ (pues $\{\eta^k\}_{k=1}^{\infty}$ verifica d))
* $\lim\limits_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)= s_i(\phi_i)$ $\forall\phi_i\in \Phi_i$, $\forall i\in\left\{1,\dots,n\right\}$ (véase c))
* Para un i arbitrario supongamos que

  $H_i(s^k\backslash\phi_i)< H_i(s^k\backslash\phi'_i)$

  en tal caso b) nos asegura que

  $\eta_i^k(\phi_i)\leqslant \max\left\{\eta_i^k(\hat{\phi}_i)/\hat{\phi}_i\in \Phi_i, i\in\{1,\dots,n\}\right\}\cdot\eta_i^k(\phi'_i)$.

  Además $s_i^k(\phi_i)= \eta_i^k(\phi_i)$ por ser s^k equilibrio de Nash de (Γ,η^k). En consecuencia

  $s_i^k(\phi_i)= \eta_i^k(\phi_i)\leqslant \varepsilon_k\cdot\eta_i^k(\phi'_i)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_i^k(\phi'_i)$

luego $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ son un par de sucesiones en las condiciones de la definición 3.2, con lo que queda probado el teorema.

□

A la vista de esta caracterización del concepto de

Myerson queda patente su complejidad. Para que un $s \in S$ sea un equilibrio propio ha de existir una sucesión de juegos perturbados racionalmente de modo que cuando la perturbación es próxima a cero tienen equilibrios de Nash próximos a s. El problema es que la racionalidad o no de la sucesión de perturbaciones se decide en base a los equilibrios de los juegos perturbados que se van obteniendo.

Para terminar el capítulo hagamos la siguiente observación. El concepto de Myerson sólo considera aceptables aquellos equilibrios de Nash que son estables ante alguna tendencia racional al error por parte de los jugadores. El problema es cómo definir dicha racionalidad. Myerson entendió por tendencias racionales al error aquellas que consideran que cada jugador se equivoca más hacia lo que le cuesta menos, pero ¿por qué no dar un concepto más matizado de racionalidad? A hacerlo nos dedicamos en los capítulos siguientes.

CAPITULO 4 EL EQUILIBRIO FUERTEMENTE PROPIO

La idea que motivará la introducción de este concepto es la siguiente: aceptamos que los jugadores racionales deben tender a equivocarse con más probabilidad hacia lo que les cueste menos, pero en tal caso también parece lógico suponer que deben tender a equivocarse con la misma probabilidad hacia lo que les cueste igual. Esto es totalmente coherente con los planteamientos que nos hemos hecho hasta el momento; si un jugador racional sabe que hay ciertos errores que son igualmente costosos para él pondrá el mismo empeño en evitarlos con lo que, a la larga, tenderá a "elegir" el mismo número de veces cada uno de esos errores idénticamente costosos, es decir, tenderá a caer en ellos con la misma probabilidad.

La idea es razonable, pero ¿por qué nos parece necesario tenerla en cuenta? Consideremos los tres ejemplos siguientes:

	β_1	β_2	β_3
α_1	2, 2	1, 1	1, 1
α_2	2, 2	0, 1	2, 1
α_3	1, 2	1, 300	1, 2
α_4	1, 2	1, 1	1, 3

Γ_3

	β_1	β_2	β_3
α_1	2, 2	300, 0	0, 0
α_2	2, 2	0, 0	1, 0

Γ_4

	β_1	β_2
α_1	6, 3	0, 0
α_2	6, 0	0, 2
α_3	5, 5	5, 5

Γ_5

Obsérvese que si buscamos equilibrios de Nash que sean estables frente a algún error racional de los jugadores, nos interesa un concepto que no considere estable a (α_2,β_1) en Γ_3 puesto que a J2 le va a costar menos equivocarse hacia β_2 que hacia β_3 (con lo que (α_1,β_1) sería preferible a (α_2,β_1) y éste dejaría de autoimponerse) a no ser que J1 tenga claros motivos para tender a equivocarse más hacia α_4 que hacia α_3 cosa que es evidente que no ocurre sin más que observar los pagos del juego. Sin embargo, según vamos a comprobar, (α_2,β_1) es un equilibrio propio de Γ_3.

Por otro lado, en Γ_4, (α_1,β_1) y (α_2,β_1) son equilibrios de Nash. Ahora bien, como para J2 es indiferente cometer el error β_2 o el β_3, en buena lógica J1 siempre preferiría jugar α_1 que jugar α_2. Sin embargo, según comprobaremos, (α_2,β_1) es propio en Γ_4.

Por último, en Γ_5, (α_3,β_2) y (α_1,β_1) son equilibrios de Nash. Consideremos el primero. Obsérvese que si los jugadores han sido aconsejados para que jueguen según él, J2 podría pensar: "ya que para J1 es indiferente equivocarse hacia α_1 o α_2, en realidad yo debería jugar β_1"; y entonces J1, que puede pensar que J2 pensará lo anterior, jugaría α_1. Sin embargo, (α_3,β_2) es propio en Γ_5.

A consecuencia de todo esto, se hace necesario introducir un refinamiento del concepto de Myerson que permita evitar problemas como los de los ejemplos.

En seguida daremos el nuevo concepto (al que llamaremos equilibrio fuertemente propio) pero antes comprobemos que (α_2,β_1) es propio en Γ_3 y Γ_4 y (α_3,β_2) lo es en Γ_5. Efectivamente, para Γ_3, consideremos $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ siendo $\varepsilon_k=$ $1/(k+2)$ $\forall k$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,s_2^k)\}_{k=1}^{\infty}$ con $s_1^k(\alpha_1)=$ $1/(k+2)^2$, $s_1^k(\alpha_2)=$ $1-[300(k+2)+151]/[300(k+2)^3]$, $s_1^k(\alpha_3)=$ $1/[300(k+2)^3]$, $s_1^k(\alpha_4)=$ $1/[2(k+2)^3]$, $s_2^k(\beta_1)=$ $1-[1+2(k+2)]/[2(k+2)^3]$, $s_2^k(\beta_2)=$

$1/[2(k+2)]^3$, $s_2^k(\beta_3)= 1/(k+2)^2$ para cualquier $k\in\mathbb{N}$. Es evidente que $s^k\in S$ $\forall k$ y que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k=0$, $\lim_{k\to\infty} s^k= (\alpha_2,\beta_1)$ (en el sentido de que $\lim_{k\to\infty} s_1^k(\alpha_1)= \lim_{k\to\infty} s_1^k(\alpha_3)= \lim_{k\to\infty} s_1^k(\alpha_4)= \lim_{k\to\infty} s_2^k(\beta_2)= \lim_{k\to\infty} s_2^k(\beta_3)=0$, $\lim_{k\to\infty} s_1^k(\alpha_2)= \lim_{k\to\infty} s_2^k(\beta_1)=1$). Por otro lado, s^k es una combinación de estrategias completamente mixta $\forall k$. Teniendo en cuenta esto último, acabemos de comprobar que s^k es ε_k-propio $\forall k$. Sea $k\in\mathbb{N}$ arbitrario

$$H_1(s^k\backslash\alpha_1)= 2\cdot\left(1 - \frac{1 + 2(k+2)}{2(k+2)^3} \right) + 1\cdot\frac{1}{2(k+2)^3} + 1\cdot\frac{1}{(k+2)^2}$$

$$H_1(s^k\backslash\alpha_2)= 2\cdot\left(1 - \frac{1 + 2(k+2)}{2(k+2)^3} \right) + 0\cdot\frac{1}{2(k+2)^3} + 2\cdot\frac{1}{(k+2)^2}$$

$$H_1(s^k\backslash\alpha_3)= H_1(s^k\backslash\alpha_4)= 1$$

Es inmediato que $H_1(s^k\backslash\alpha_3)= H_1(s^k\backslash\alpha_4)< H_1(s^k\backslash\alpha_1)$. Además $H_1(s^k\backslash\alpha_1)< H_1(s^k\backslash\alpha_2)$ puesto que $H_1(s^k\backslash\alpha_2) - H_1(s^k\backslash\alpha_1)= 1/(k+2)^2 - 1/[2(k+2)^3] > 0$. Por todo esto ha de ocurrir que

$$s_1^k(\alpha_3)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_1)$$
$$s_1^k(\alpha_4)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_1)$$
$$s_1^k(\alpha_1)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_2)$$

lo cual es cierto puesto que

$$s_1^k(\alpha_3)= 1/[300(k+2)^3]= \varepsilon_k/[300(k+2)^2]< \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_1)$$
$$s_1^k(\alpha_4)= 1/[2(k+2)^3]= \varepsilon_k/[2(k+2)^2]< \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_1)$$
$$s_1^k(\alpha_1)= 1/(k+2)^2= \varepsilon_k/(k+2)\leqslant \varepsilon_k/3$$
$$s_1^k(\alpha_2)= 1 - [300(k+2)+151]/[300(k+2)^3]\geqslant 7049/8100$$

(téngase en cuenta que estas dos últimas expresiones implican que $s_1^k(\alpha_1)< \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_2)$).

Por otro lado:

$$H_2(s^k\backslash\beta_1)= 2$$

$$H_2(s^k\backslash\beta_2)= 1\cdot[1/(k+2)^2] + 1\cdot\Big(1-[300(k+2)+151]/[300(k+2)^3]\Big)+$$
$$300\cdot\Big(1/[300(k+2)^3]\Big) + 1\cdot\Big(1/[2(k+2)^3]\Big)$$

$$H_2(s^k\backslash\beta_3)= 1\cdot[1/(k+2)^2] + 1\cdot\Big(1-[300(k+2)+151]/[300(k+2)^3]\Big)+$$
$$2\cdot\Big(1/[300(k+2)^3]\Big) + 3\cdot\Big(1/[2(k+2)^3]\Big)$$

Pero entonces $H_2(s^k\backslash\beta_3) - H_2(s^k\backslash\beta_2) = 2 / [300(k+2)^3] > 0$, luego $H_2(s^k\backslash\beta_2) < H_2(s^k\backslash\beta_3)$. Además $H_2(s^k\backslash\beta_3) < H_2(s^k\backslash\beta_1)$. Efectivamente, $H_2(s^k\backslash\beta_3)= 1 + 301/[300(k+2)^3]< 2 = H_2(s^k\backslash\beta_1)$.

A consecuencia de todo esto ha de ocurrir que

$$s_2^k(\beta_2)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_2^k(\beta_3)$$
$$s_2^k(\beta_3)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_2^k(\beta_1)$$

lo cual es cierto puesto que

$$s_2^k(\beta_2)= 1/[2(k+2)^3]= \varepsilon_k/[2(k+2)^2]< \varepsilon_k\cdot s_2^k(\beta_3)$$
$$s_2^k(\beta_3)= 1/(k+2)^2= \varepsilon_k/(k+2)\leqslant \varepsilon_k/3$$
$$s_2^k(\beta_1)= 1 - [1+2(k+2)]/[2(k+2)^3]\geqslant 47/54 > 1/3$$

(téngase en cuenta que de estas dos últimas expresiones se obtiene que $s_2^k(\beta_3)< \varepsilon_k\cdot s_2^k(\beta_1)$).

De todo lo dicho, hemos obtenido que s^k es ε_k-propio $\forall k$, lo cual concluye que (α_2,β_1) es propio en Γ_3.

De modo análogo se probaría que (α_2,β_1) es propio en Γ_4 tomando para ello $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\varepsilon_k= 1/(k+1)$ $\forall k$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ con $s_1^k(\alpha_1)= 1/(k+1)^2$, $s_1^k(\alpha_2)= 1 - 1/(k+1)^2$, $s_2^k(\beta_1)= 1 - 302/[301(k+1)^4]$, $s_2^k(\beta_2)= 1/[301(k+1)^4]$ y $s_2^k(\beta_3)= 1/(k+1)^4$.

Por último, (α_3,β_2) es propio en Γ_5 como se comprueba tomando $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\varepsilon_k= 1/(k+2)$ $\forall k$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ con $s_1^k(\alpha_1)= 1/[2(k+2)^3]$, $s_1^k(\alpha_2)= 1/(k+2)^2$, $s_1^k(\alpha_3)= 1 - 1/[2(k+2)^3] - 1/(k+2)^2$, $s_2^k(\beta_1)= 1/(k+2)^2$, $s_2^k(\beta_2) = 1 - 1/(k+2)^2$.

Por lo tanto, tal como habíamos indicado, se hace preciso introducir el equilibrio fuertemente propio, cosa que vamos a hacer a continuación.

<u>DEFINICION</u> <u>4.1</u>

En un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ diremos que $s_i,s'_i\in S_i$ son equivalentes en pago para el jugador i si $H_i(s^*\backslash s_i)= H_i(s^*\backslash s'_i)$ $\forall$ $s^*\in S$. Para que esta condición sea cierta es necesario y suficiente que se verifique $H_i(\phi^*\backslash s_i)= H_i(\phi^*\backslash s'_i)$ $\forall$ $\phi^*\in \Phi$.

<u>DEFINICION</u> <u>4.2</u>

Dado $\varepsilon>0$ diremos que $s\in S$ es un equilibrio ε-fuertemente propio de Γ si

* s es ε-propio
* Si ϕ_i y ϕ'_i son equivalentes en pago para el jugador i entonces $s_i(\phi_i)= s_i(\phi'_i)$ y esto para cualquier $\phi_i,\phi'_i\in \Phi_i\backslash B_i(s)$ y para cualquier $i\in\{1,...,n\}$.

<u>DEFINICION</u> <u>4.3</u>

Diremos que $s\in S$ es un equilibrio fuertemente propio de

Γ si existe un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,\dots,s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que:

* $\varepsilon_k>0\ \forall k,\ \lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$
* s^k es ε_k-fuertemente propio $\forall k$.
* $\lim\limits_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)=s_i(\phi_i) \quad \forall\phi_i\in\Phi_i, \forall i\in\{1,\dots,n\}$

TEOREMA 4.4

En un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ cualquier equilibrio fuertemente propio es propio. El recíproco en general no se verifica.

DEMOSTRACION

Como todo equilibrio ε-fuertemente propio es ε-propio se obtiene de modo inmediato que todo equilibrio fuertemente propio es propio.

Veamos que el recíproco no se verifica. Consideremos por ejemplo el juego Γ_3. Ya hemos probado que en dicho juego (α_2,β_1) es propio. Sin embargo no es fuertemente propio. Efectivamente, si lo fuera podríamos encontrar un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ en las condiciones de la definición 4.3. En tal caso, como s^k sería completamente mixta, $\alpha_3,\alpha_4\notin B_1(s^k)$ $\forall k$ pues claramente están dominadas por α_1. Entonces, ya que s^k sería ε_k-fuertemente propio $\forall k$ y como α_3,α_4 son equivalentes en pago para J1, habría de ocurrir que $s_1^k(\alpha_3)=\ s_1^k(\alpha_4)$ $\forall k$, en cuyo caso $H_2(s^k\backslash\beta_3)<\ H_2(s^k\backslash\beta_2)$ y entonces tendría que ser $s_2^k(\beta_3)\leqslant\ \varepsilon_k\cdot s_2^k(\beta_2)$ con lo que

$H_1(s^k\backslash\alpha_2) < H_1(s^k\backslash\alpha_1)$ y entonces $s_1^k(\alpha_2) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_1^k(\alpha_1)$ y esto $\forall k$; en consecuencia, sería imposible que $\lim_{k\to\infty} s^k = (\alpha_2,\beta_1)$ lo cual es una contradicción. Con esto queda demostrado el teorema. (Digamos como comentario que, en Γ_4, (α_2,β_1) tampoco es fuertemente propio y que lo mismo ocurre con (α_3,β_2) en Γ_5, lo cual se comprueba de modo análogo al que utilizamos para comprobarlo en Γ_3). □

OBSERVACION 4.5

En Γ_3 (α_1,β_1) es fuertemente propio. Para comprobarlo basta tomar $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\varepsilon_k = 1/(k+6)$ $\forall k$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty} = \{(s_1^k, s_2^k)\}_{k=1}^{\infty}$ con $s_1^k(\alpha_1) = 1 - (k+7)/(k+6)^3$, $s_1^k(\alpha_2) = 1/(k+6)^2$, $s_1^k(\alpha_3) = s_1^k(\alpha_4) = 1/[2(k+6)^3]$, $s_2^k(\beta_1) = 1 - [1+2(k+6)]/[2(k+6)^3]$, $s_2^k(\beta_2) = 1/(k+6)^2$, $s_2^k(\beta_3) = 1/[2(k+6)^3]$. Es evidente que $s^k \in S$ $\forall k$ y que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, $\lim_{k\to\infty} s^k = (\alpha_1,\beta_1)$. ¿Es s^k ε_k-fuertemente propio $\forall k$? Por un lado está claro que s^k es completamente mixta $\forall k$. Además, si fijamos $k\in\mathbb{N}$ cualquiera

$$H_1(s^k\backslash\alpha_1) = 2\left(1-[1+2(k+6)]/[2(k+6)^3]\right) + 1\left((k+6)^{-2}\right) + 1\left(1/[2(k+6)^3]\right)$$
$$H_1(s^k\backslash\alpha_2) = 2\left(1-[1+2(k+6)]/[2(k+6)^3]\right) + 0\left((k+6)^{-2}\right) + 2\left(1/[2(k+6)^3]\right)$$

$$H_1(s^k\backslash\alpha_3) = H_1(s^k\backslash\alpha_4) = 1$$

Obsérvese que $H_1(s^k\backslash\alpha_2) = 2-[2(k+6)]/(k+6)^3 > 1$. En consecuencia $H_1(s^k\backslash\alpha_3) = H_1(s^k\backslash\alpha_4) < H_1(s^k\backslash\alpha_2)$ (de lo que se deduce que $\alpha_3,\alpha_4 \notin B_1(s^k)$). Por otro lado es inmediato que $H_1(s^k\backslash\alpha_2) < H_1(s^k\backslash\alpha_1)$. De todo lo dicho debería ocurrir que

$$s_1^k(\alpha_3)= s_1^k(\alpha_4)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_2)$$
$$s_1^k(\alpha_2)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_1)$$

lo cual ciertamente ocurre puesto que

$$s_1^k(\alpha_3)= s_1^k(\alpha_4)= 1/[2(k+6)^3]= \varepsilon_k/[2(k+6)^2]< \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_2)$$
$$s_1^k(\alpha_2)= 1/(k+6)^2= \varepsilon_k/(k+6)\leqslant \varepsilon_k/7$$
$$s_1^k(\alpha_1)= 1-(k+7)/(k+6)^3\geqslant 335/343$$

(téngase en cuenta que estas dos últimas expresiones implican que $s_1^k(\alpha_2)< \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_1)$).

Por otro lado:

$$H_2(s^k\backslash\beta_1)= 2$$
$$H_2(s^k\backslash\beta_2)= 1[1-(k+7)/(k+6)^3]+1[1/(k+6)^2]+300\left(1/[2(k+6)^3]\right)+ 1\left(1/[2(k+6)^3]\right)$$
$$H_2(s^k\backslash\beta_3)= 1[1-(k+7)/(k+6)^3]+1[1/(k+6)^2]+2\left(1/[2(k+6)^3]\right)+ 3\left(1/[2(k+6)^3]\right)$$

Es inmediato que $H_2(s^k\backslash\beta_3)< H_2(s^k\backslash\beta_2)$. Además $H_2(s^k\backslash\beta_2)= 1+299/[2(k+6)^3]< 2= H_2(s^k\backslash\beta_1)$, con lo que debería ocurrir que

$$s_2^k(\beta_3)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_2^k(\beta_2)$$
$$s_2^k(\beta_2)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_2^k(\beta_1)$$

lo cual es cierto puesto que

$$s_2^k(\beta_3)= 1/[2(k+6)^3]= \varepsilon_k/[2(k+6)^2]< \varepsilon_k\cdot s_2^k(\beta_2)$$
$$s_2^k(\beta_2)= 1/(k+6)^2= \varepsilon_k/(k+6)\leqslant \varepsilon_k/7$$
$$s_2^k(\beta_1)= 1-[1+2(k+6)]/[2(k+6)^3]\geqslant 671/686$$

(de estas dos últimas expresiones se deduce que $s_2^k(\beta_2)<$

$\varepsilon_k \cdot s_2^k(\beta_1))$.

Como consecuencia de todo lo anterior, podemos afirmar que (α_1,β_1) es un equilibrio fuertemente propio de Γ_3. También en Γ_4 (α_1,β_1) es fuertemente propio como se deduce tomando, por ejemplo, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\varepsilon_k = 1/(k+1)$ $\forall k$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,s_2^k)\}_{k=1}^{\infty}$ con $s_1^k(\alpha_1)= 1-1/(k+1)^2$, $s_1^k(\alpha_2)= 1/(k+1)^2$, $s_2^k(\beta_1)= 1-1/(k+1)^2$, $s_2^k(\beta_2)= 1/[2(k+1)^2]$, $s_2^k(\beta_3)= 1/[2(k+1)^2]$. Por útimo, en Γ_5 (α_1,β_1) es asimismo fuertemente propio (tómese por ejemplo $\varepsilon_k= 1/(k+2)$, $s_1^k(\alpha_1)= 1 - 1/(k+2)^2- 1/[2(k+2)^3]$, $s_1^k(\alpha_2)= 1/(k+2)^2$, $s_1^k(\alpha_3)= 1/[2(k+2)^3]$, $s_2^k(\beta_1)= 1- 1/(k+2)^2$, $s_2^k(\beta_2)= 1/(k+2)^2$).

No es una casualidad que en los tres ejemplos anteriores podamos encontrar equilibrios fuertemente propios sino que se puede probar que todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal posee al menos un equilibrio fuertemente propio. La demostración de este resultado la obtendremos como consecuencia de un teorema más general en el capítulo 6.

OBSERVACION 4.6

Según hemos visto, el refinamiento que hemos introducido nos sirve para elegir en Γ_3 y Γ_4 entre (α_1,β_1) y (α_2,β_1), equilibrios que, en ambos casos, conceden el mismo pago a los jugadores. Modificando levemente Γ_5 (véase el juego Γ'_5 que incluimos a continuación), obtenemos un ejemplo en el que el equilibrio fuertemente propio domina en pago (en el sentido de que ofrece un pago mejor o igual para todos los jugadores y estrictamente mejor para al menos uno) al que no lo es.

	β_1	β_2
α_1	6, 13	0, 0
α_2	6, 0	0, 2
α_3	5, 5	5, 5

Γ'_5

En efecto, en Γ'_5, (α_3,β_2) es propio. Para comprobarlo basta tener en cuenta que se puede encontrar una sucesión de equilibrios ε-propios $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ que converja a (α_3,β_2) sin más que cuidar de que $s_1^k(\alpha_1)$ sea suficientemente más pequeño que $s_1^k(\alpha_2)$. Sin embargo no es fuertemente propio. Efectivamente, si lo fuera existiría un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,s_2^k)\}_{k=1}^{\infty}$ en las condiciones de la definición 4.3. Como $H_1(s^k\backslash\alpha_1)= H_1(s^k\backslash\alpha_2)= 6\cdot s_2^k(\beta_1)$, $H_1(s^k\backslash\alpha_3)=5$, $\lim_{k\to\infty} s_2^k(\beta_1)= 0$, habría de existir $M\in\mathbb{N}$ tal que $\alpha_1,\alpha_2\notin B_1(s^k)$ para todo $k \geqslant M$. En consecuencia, por ser α_1 y α_2 equivalentes en pago para el jugador 1, habría de ocurrir que $s_1^k(\alpha_1)= s_1^k(\alpha_2)$ $\forall k\geqslant M$ con lo que $H_2(s^k\backslash\beta_1)> H_2(s^k\backslash\beta_2)$ $\forall k\geqslant M$ y entonces $s_2^k(\beta_2)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_2^k(\beta_1)$ $\forall k\geqslant M$ lo cual es imposible pues $\lim_{k\to\infty} s_2^k(\beta_2)= 1$, con lo que estaríamos ante una contradicción; por lo tanto (α_3,β_2) no es fuertemente propio.

Sin embargo, se puede comprobar que el otro equilibrio en estrategias puras de Γ'_5, (α_1,β_1), es fuertemente propio (y obsérvese que domina en pago a (α_3,β_2)).

Por lo tanto hemos observado con este ejemplo que el concepto de equilibrio fuertemente propio a veces nos ayuda a rechazar equilibrios dominados en pago. En cualquier caso, a pesar de ser algo deseable, no es esa nuestra meta sino la de encontrar puntos de equilibrio que sean cada vez más estables (que se autoimpongan cada vez más) sin importarnos si son o no dominados en pago. Van Damme da el siguiente juego

	β_1	β_2
α_1	1, 1	10, 0
α_2	0, 10	10, 10

Γ_6

en el que (α_1,β_1), que es perfecto, está dominado en pago por (α_2,β_2) que no lo es. Se puede comprobar, además, que (α_1,β_1) y (α_2,β_2) son los únicos equilibrios de Nash de Γ_6 con lo que, teniendo en cuenta el teorema 4.4, que todo equilibrio propio es perfecto, luego de Nash, y que todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal posee al menos un equilibrio fuertemente propio, cosa que probaremos más adelante, se obtiene que (α_1,β_1) ha de ser fuertemente propio y está dominado en pago por (α_2,β_2) que no lo es. Sin embargo éste último es mucho menos estable que aquél; de hecho α_1 domina a α_2 y β_1 a β_2 con lo que, aún habiendo acordado jugar (α_2,β_2), un par de jugadores racionales siempre jugarían (α_1,β_1).

<u>OBSERVACION</u> <u>4.7</u>

Pudimos haber planteado de otro modo el concepto que hemos introducido y haberlo definido como un $s\in S$ que sea límite de una sucesión $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,...,s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ de puntos de S que verifiquen:

* s^k es ε_k-propio $\forall k$ (donde $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos que converge a cero)

* Si ϕ_i y ϕ'_i son equivalentes en pago para el jugador i entonces $s_i(\phi_i)= s_i(\phi'_i)$, y esto para cualquier $\phi_i,\phi'_i \in \Phi_i$ y para cualquier $i \in \{1,...,n\}$.

Diremos que un $s\in S$ en tales condiciones es un equilibrio fuertemente propio modificado, y llamaremos equilibrios ε-fuertemente propios modificados a los s^k de la definición.

Este nuevo concepto constituye un refinamiento estricto de nuestro equilibrio fuertemente propio y además también genera un subconjunto no vacío del conjunto de equilibrios de Nash en cualquier juego n-personal finito no cooperativo en forma normal.

En cuanto a la primera de estas afirmaciones, es evidente que este concepto es más fuerte que el introducido en la definición 4.3. Para comprobar que lo es estrictamente basta considerar el siguiente juego Γ_7

	β_1	β_2
α_1	2 2	0 1
α_2	2 2	0 0

Γ_7

Se obtiene que los equilibrios de Nash de Γ_7 son todas las combinaciones de estrategias del conjunto $\{(s_1,\beta_1)/s_1\in$

$S_1\}$. Es más, es claro que todos estos equilibrios son fuertemente propios (es trivial comprobar que cualquier sucesión $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ de combinaciones de estrategias completamente mixtas convergiendo a uno de estos equilibrios es tal que $\exists\ N \in \mathbb{N}$, $\exists\ \{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, de modo que s^k es ε_k-fuertemente propio $\forall k\geq N$). Sin embargo, como α_1 y α_2 son equivalentes en pago para J1, el único equilibrio fuertemente propio modificado sería (s'_1,β_1) con $s'_1= (1/2,1/2)$.

En cuanto a la segunda de las afirmaciones que hemos hecho de que todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ posee al menos un equilibrio fuertemente propio modificado, la demostración es prácticamente la misma que da Myerson en su artículo para probar la existencia del equilibrio propio.

Veámosla, probaremos primero que $\forall\ \varepsilon_k \in (0,1)$ existe un equilibrio ε_k-fuertemente propio modificado. Consideremos $\varepsilon_k \in (0,1)$. Si denotamos $\max_i |\Phi_i|$ por m, definamos para todo i

$$\nu = (\varepsilon_k)^m/m \quad y \quad S_i(\nu)= \{ s_i \in S_i /\ s_i(\phi_i) \geq \nu \quad \forall \phi_i \in \Phi_i \}$$

Entonces tomemos $S(\nu)= S_1(\nu)x...xS_n(\nu)$ y definamos para todo $s \in S(\nu)$

$$F_i(s)= \{ \sigma_i \in S_i(\nu) \ /\ H_i(s\backslash\phi'_i)< H_i(s\backslash\phi_i) \Rightarrow \sigma_i(\phi'_i)\leq \varepsilon_k\cdot\sigma_i(\phi_i)$$

para cualquier ϕ_i,ϕ'_i de Φ_i; $\sigma_i(\phi_i)= \sigma_i(\phi'_i)$ para cualquier par de estrategias ϕ_i,ϕ'_i equivalentes en pago para i$\}$

$S(\nu)$ es convexo, compacto y no vacío y $F_i(s)$ es convexo y compacto $\forall\ s \in S(\nu)$ y $\forall$ i. Para ver que, para todo $s \in S(\nu)$ y para todo i, $F_i(s)$ es también no vacío definamos, para todo $\phi_i \in \Phi_i$

$$\sigma_i(\phi_i) = (\varepsilon_k)^{A_i(s,\phi_i)} / \sum_{\phi'_i \in \Phi_i} (\varepsilon_k)^{A_i(s,\phi'_i)}$$

siendo $A_i(s,\phi_i) = \left|\left\{\phi'_i \in \Phi_i \,/\, H_i(s\backslash\phi_i) < H_i(s\backslash\phi'_i)\right\}\right|$.

Entonces $\sigma_i \in F_i(s)$ para todo i. Como las F_i son semicontinuas superiormente, $F=(F_1,...,F_n)$ verifica las condiciones del teorema del punto fijo de Kakutani y el punto fijo que, en consecuencia, posee es un equilibrio ε_k-fuertemente propio modificado de Γ. Consideremos ahora una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a cero. Entonces, en vista de todo lo anterior, existe una sucesión $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ de equilibrios ε_k-fuertemente propios modificados que, como S es compacto, contiene una subsucesión convergente a un cierto $s \in S$ que, por lo tanto, es un equilibrio fuertemente propio modificado de Γ. Con esto queda concluida la demostración.

Obsérvese que, así definido, un equilibrio ε-fuertemente propio modificado s verifica que, para cualquier jugador i y cualquier par de estrategias puras ϕ_i^* y $\phi'_i \in \phi_i$,

si $H_i(\phi\backslash\phi_i^*) \leqslant H_i(\phi\backslash\phi'_i)$ $\forall\phi \in \Phi$ entonces $s_i(\phi_i^*) \leqslant s_i(\phi'_i)$

la cual es una condición muy intuitiva. (Y, como un equilibrio fuertemente propio modificado es límite de ε-fuertemente propios modificados, la condición sigue siendo válida si s es fuertemente propio modificado).

A pesar de todo esto, para el desarrollo del capítulo 6 nos hemos quedado con el concepto en la forma débil porque así como nos parece razonable pedir que cada jugador piense de los demás que a la larga tienden a cometer el mismo número de veces los errores que les cuestan igual (idea que reflejamos en la definición 4.3) nos parece que quizá es demasiado fuerte exigir a los jugadores que siempre usen con la misma probabilidad todas sus estrategias equivalentes en pago (que es algo que ciertamente hacemos en el concepto modificado). Además, este último concepto va más allá de proporcionarnos equilibrios estables ante al menos una tendencia racional al error por parte de los jugadores. De hecho, según probaremos en el capítulo 7, no todo equilibrio estrictamente propio es fuertemente propio modificado (véase el capítulo 7 para más detalles sobre el tema). En cualquier caso, las dos versiones del equilibrio fuertemente propio nos parecen de interés y por eso las exponemos aquí y las seguiremos tratando más adelante.

OBSERVACION 4.8

Por último hagamos la siguiente observación. Nuestra idea de tratar a las estrategias equivalentes en pago para un cierto jugador como si fueran de algún modo indiferentes para éste puede presentar ciertas pegas. En efecto, consideremos, por ejemplo, el juego Γ_8

	β_1	β_2
α_1	300, 0	0, 0
α_2	0, 0	1, 0
α_3	2, 2	2, 2

Γ_8

Aunque β_1 y β_2 son estrategias equivalentes en pago para J2, ¿podemos de verdad afirmar que son indiferentes para éste teniendo en cuenta que, en tal caso, el equilibrio (α_3,β_2), que concede pago positivo a J2 y además es propio, quedaría automáticamente excluido y sólo el (α_1,β_1), que le concede pago 0, sería aceptable?. Esta pregunta es ciertamente difícil de contestar. Como ya indicamos en la observación anterior, nos parece un poco fuerte limitar a (1/2,1/2) el conjunto de estrategias razonables para J2, aunque es cierto que sea lo que sea lo que elija J1, en realidad J2 ganará lo mismo juegue lo que juegue.

Obsérvese que este ejemplo sólo afecta al concepto modificado. Sin embargo una observación análoga se podría hacer para el equilibrio fuertemente propio. Consideremos el juego Γ_9 que incluimos en la página siguiente. En él J1 siempre elegirá α_1. Sin embargo la elección de J2 dependerá de la tendencia al error de J1. Si éste tiende a equivocarse hacia α_2 (respectivamente α_3) más que hacia α_3 (respectivamente α_2), J2 preferirá β_2 (respectivamente β_1). Entonces, como α_2 y α_3 son equivalentes en pago para J1, se pueden encontrar sucesiones de equilibrios ε-propios que

	β_1	β_2
α_1	2 , 2	1 , 2
α_2	0 , 0	0 , 100
α_3	0 , 1	0 , 0

Γ_9

converjan a (α_1,β_1) o a (α_1,β_2) sin más que buscarlas entre las que dan más peso a α_3 o a α_2 respectivamente, por lo que (α_1,β_1) y (α_1,β_2) son propios. Sin embargo sólo (α_1,β_2) es fuertemente propio porque α_2 y α_3 son errores equivalentes en pago para J1 con lo que éste ha de tender a ellos con la misma fuerza, a consecuencia de lo cual J2 prefiere β_2. Entonces ¿podemos de verdad afirmar que α_2 y α_3 son errores igualmente costosos para J1? En realidad no podemos pues, aunque lo son si J2 juega según lo inicialmente previsto, el tender a uno u otro con más fuerza puede hacer cambiar el comportamiento de J2 influyendo negativa o positivamente en J1, situación análoga a la que se planteaba en Γ_8. Pero, a pesar de ser análoga, es diferente. Aquí, una vez que los jugadores han acordado el equilibrio (α_1,β_1), J2 se dice, ¿hacia dónde puede tender a equivocarse más J1? Según lo acordado, para él es indiferente uno u otro error. Como yo salgo ganando más de las equivocaciones de J1 si elijo β_2 que si elijo β_1 en caso de que aquellas sean equiprobables, debo jugar β_2 porque ¿por qué va a pensar J1 que, salvo por error, voy a desviarme de lo acordado? En Γ_8 no teníamos esa situación; no es sólo que J1 eligiese α_1 pensando que J2 jugaría (1/2,1/2) aún cuando hubiesen acordado (α_3,β_2), sino además que J2 estaba obligado a jugar (1/2,1/2), quizá en contra de sus intereses (de nuevo, pues, nos parece un poco fuerte el concepto modificado).

Por tanto, en general, cuando aceptemos que cada jugador tiende con la misma probabilidad hacia los errores igualmente costosos no consideraremos la posibilidad de que ese jugador piense, a la hora de decidir el coste de los errores, que los demás pueden separarse, salvo equivocación, de lo inicialmente acordado en función de los errores que él vaya a tender a cometer. Este criterio nos parece el que mejor funciona. (Obsérvese que, en caso de no adoptarlo, en nuestro ejemplo Γ_9 caeríamos en una especie de "círculo vicioso" pues si J2 piensa que J1 puede decidir tender más hacia el error α_3 que hacia el α_2 por no considerarlos igualmente costosos y ,en consecuencia, se siente obligado a jugar β_1 en vez de β_2, inmediatamente α_2 y α_3 vuelven a ser indiferentes para J1 y J2 puede volver a preferir β_2). Por otro lado queremos hacer notar que también Myerson lo utilizó al definir su concepto. En efecto, consideremos el juego Γ_{10}

	β_1	β_2
α_1	2 2	1 2
α_2	1 0	0 100
α_3	0 1	0 0

Γ_{10}

En Γ_{10} (α_1,β_1) no es propio porque, una vez acordado, como α_2 es menos costoso que α_3, J1 tenderá a este error con menos fuerza que a aquel, en cuyo caso J2 jugará β_2 y J1 saldrá perdiendo. En consecuencia, α_2 es menos costoso que α_3 si J2 juega, salvo error, según lo acordado, pero no si consideramos que la tendencia al error de J1 puede venir influenciada por el comportamiento de J2 en función de ella.

CAPITULO 5 EL EQUILIBRIO PERFECTAMENTE PROPIO

En este capítulo seguiremos en la línea de buscar otras formas más matizadas de entender la racionalidad en el error de los jugadores, pero lo haremos en un sentido diferente al del capítulo anterior. En concreto, Myerson suponía que los jugadores racionales deben tender a equivocarse más hacia lo que menos les cuesta. Nosotros iremos más lejos y supondremos no sólo eso sino además que tenderán a equivocarse con más probabilidad aquellos jugadores a los que les cuesta menos. De nuevo esta suposición es coherente con los planteamientos que nos hemos hecho hasta el momento: es lógico que cuanto más pierda un jugador al equivocarse, más empeño ponga en evitar los errores y, en consecuencia, menos tienda a cometerlos. Este nuevo planteamiento nos obliga a hacer, en principio, la suposición de que los pagos a los jugadores son comparables, en el sentido de que vienen dados en las mismas unidades (cómo si no podemos ponderar cuándo un jugador pierde más que otro al cometer un cierto error). Al final del capítulo abordaremos la cuestión de qué ocurre cuando tal suposición sea inaceptable, pero hasta entonces asumiremos su validez.

Consideremos el juego Γ_{11} (en el que $\Phi_i=\{\alpha_1^i,\alpha_2^i\}$ con $i\in\{1,2,3\}$ y en la casilla correspondiente a cada $\alpha\in\Phi$ indicamos de izquierda a derecha y de arriba a abajo el pago a J1, J2 y J3 respectivamente, correspondiente a α)

α_1^3

	α_1^2	α_2^2
α_1^1	1 1 1	0 0 1
α_2^1	0 0 1	0 0 1

α_2^3

	α_1^2	α_2^2
α_1^1	0 0 0	0 0 0
α_2^1	0 0 0	1 1 0

JUEGO Γ_{11}

En Γ_{11}, según comprobaremos a continuación, $(\alpha_2^1,\alpha_2^2,\alpha_1^3)$ es propio aunque para ello necesitamos considerar que el jugador 3 va a tender a equivocarse hacia α_2^3 con más probabilidad que los jugadores 1 y 2 hacia α_1^1 y α_1^2 respectivamente, consideración muy poco intuitiva si observamos las funciones de pago, ya que J3 tiene mucho más que perder que J1 y J2 al cometer su error. En consecuencia, se hace necesario introducir un refinamiento del concepto de Myerson en el sentido que indicábamos al principio de este capítulo. Antes de dar el nuevo refinamiento (al que llamaremos equilibrio perfectamente propio) comprobemos que

$(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_1^3)$ es propio.

Consideremos, por ejemplo, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\varepsilon_k = 1/(k+3)$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty} = \{(s_1^k, s_2^k, s_3^k)\}_{k=1}^{\infty}$ con $s_1^k(\alpha_1^1) = s_2^k(\alpha_1^2) = 1/(k+3)^5$, $s_1^k(\alpha_2^1) = s_2^k(\alpha_2^2) = 1-1/(k+3)^5$, $s_3^k(\alpha_1^3) = 1-1/(k+3)^2$, $s_3^k(\alpha_2^3) = 1/(k+3)^2$. Es evidente que $s^k \in S\ \forall k$ y que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, $\lim_{k\to\infty} s^k = (\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_1^3)$. Por otro lado s^k es una combinación de estrategias completamente mixta $\forall k$. Teniendo en cuenta esto último acabemos de comprobar que s^k es ε_k-propio $\forall k$. Sea $k \in \mathbb{N}$ arbitrario.

$$H_1(s^k \backslash \alpha_1^1) = [1-1/(k+3)^2]/(k+3)^5$$

$$H_1(s^k \backslash \alpha_2^1) = [1-1/(k+3)^5]/(k+3)^2$$

Evidentemente $H_1(s^k \backslash \alpha_1^1) < H_1(s^k \backslash \alpha_2^1)$ con lo que debería ocurrir que $s_1^k(\alpha_1^1) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_1^k(\alpha_2^1)$ lo cual ciertamente ocurre pues $s_1^k(\alpha_1^1) = \varepsilon_k/(k+3)^4$ y $1/(k+3)^4 \leqslant 1/256 < 1023/1024 \leqslant 1-1/(k+3)^5 = s_1^k(\alpha_2^1)$. También se verifica que

$$H_2(s^k \backslash \alpha_1^2) = [1-1/(k+3)^2]/(k+3)^5$$

$$H_2(s^k \backslash \alpha_2^2) = [1-1/(k+3)^5]/(k+3)^2$$

De nuevo evidentemente $H_2(s^k \backslash \alpha_1^2) < H_2(s^k \backslash \alpha_2^2)$ con lo que debería ocurrir que $s_2^k(\alpha_1^2) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_2^k(\alpha_2^2)$ lo cual en verdad ocurre como se comprueba de modo análogo a como hicimos en el caso anterior.

Por último $H_3(s^k \backslash \alpha_1^3) = 1 > H_3(s^k \backslash \alpha_2^3) = 0$ con lo que deberíamos tener que $s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_3^k(\alpha_1^3)$ lo cual es cierto pues $s_3^k(\alpha_2^3) = \varepsilon_k/(k+3)$ y $1/(k+3) \leqslant 1/4 < 15/16 \leqslant 1-1/(k+3)^2 = s_3^k(\alpha_1^3)$.

En consecuencia $(\alpha_2^1,\alpha_2^2,\alpha_1^3)$ es propio en Γ_{11} (obsérvese que como resultado de considerar para J3 una tendencia al error mayor que la asignada a J1 o J2, a pesar de que estos últimos tienen menos que perder). Nótese también que, como en Γ_{11} ningún jugador es tal que sus estrategias puras son equivalentes en pago, $(\alpha_2^1,\alpha_2^2,\alpha_1^3)$ también es fuertemente propio en Γ_{11}.

Demos ahora, tal como habíamos anunciado, el concepto de equilibrio perfectamente propio.

<u>DEFINICION</u> <u>5.1</u>

En un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ, dado $\varepsilon>0$ diremos que $s\in S$ es un equilibrio ε-perfectamente propio si s es completamente mixta y verifica que

si $H_i(s\backslash\phi_i) - H_i(s\backslash\phi'_i) < H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)$ con $\phi_i\in B_i(s)$, $\phi_j\in B_j(s)$ entonces $s_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon\cdot s_i(\phi'_i)$

y esto $\forall\phi'_i\in \Phi_i, \forall\bar{\phi}_j\in \Phi_j, \forall i,j\in\{1,...,n\}$ ⟦

<u>DEFINICION</u> <u>5.2</u>

Diremos que $s\in S$ es un equilibrio perfectamente propio de Γ si existe un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,...,s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que:

* $\varepsilon_k>0$ $\forall k$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$
* s^k es ε_k-perfectamente propio $\forall k$.

* $\lim_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i) = s_i(\phi_i) \quad \forall\phi_i \in \Phi_i, \forall i\in\{1,...,n\}$

Obsérvese que es inmediato que la definición 5.1 es equivalente a la siguiente:

DEFINICION 5.3

Dado $\varepsilon>0$ diremos que $s\in S$ es un equilibrio ε-perfectamente propio de Γ si s es completamente mixta y verifica:

a) s es ε-propio

b) si $H_i(s\backslash\phi_i) - H_i(s\backslash\phi'_i) < H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)$ con $\phi_i\in B_i(s)$, $\phi_j\in B_j(s)$ entonces $s_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon\cdot s_i(\phi'_i)$ y esto $\forall\phi'_i\in \Phi_i, \forall\bar{\phi}_j\in \Phi_j, \forall i,j\in\{1,...,n\}$ con $i\neq j$

con lo que obviamente todo equilibrio perfectamente propio es propio. Sin embargo el recíproco no se verifica. En efecto, ya hemos probado que $(\alpha_2^1,\alpha_2^2,\alpha_1^3)$ es propio en Γ_{11}. Por el contrario no es perfectamente propio. Supongamos que lo fuera. En tal caso existirían $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que:

* $0<\varepsilon_k<1\ \forall k$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$

* s^k es ε_k-perfectamente propio $\forall k$.

* $\lim_{k\to\infty} s_1^k(\alpha_1^1) = 0$, $\lim_{k\to\infty} s_1^k(\alpha_2^1) = 1$ (5.a)

* $\lim_{k\to\infty} s_2^k(\alpha_1^2) = 0$, $\lim_{k\to\infty} s_2^k(\alpha_2^2) = 1$ (5.b)

* $\lim_{k\to\infty} s_3^k(\alpha_1^3) = 1$, $\lim_{k\to\infty} s_3^k(\alpha_2^3) = 0$ (5.c)

En virtud del teorema 3.4, y teniendo en cuenta que si s^k es ε_k-perfectamente propio es ε_k-propio, existiría $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geqslant N_1$ $(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_1^3)$ sería una respuesta óptima a s^k. Por otro lado obsérvese que:

$$H_1(s^k \backslash \alpha_1^1) = s_2^k(\alpha_1^2) \cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$
$$H_1(s^k \backslash \alpha_2^1) = s_2^k(\alpha_2^2) \cdot s_3^k(\alpha_2^3)$$
$$H_2(s^k \backslash \alpha_1^2) = s_1^k(\alpha_1^1) \cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$
$$H_2(s^k \backslash \alpha_2^2) = s_1^k(\alpha_2^1) \cdot s_3^k(\alpha_2^3)$$
$$H_3(s^k \backslash \alpha_1^3) = 1$$
$$H_3(s^k \backslash \alpha_2^3) = 0$$

y que entonces, en virtud de (5.a), (5.b), (5.c)

$$\lim_{k \to \infty} H_1(s^k \backslash \alpha_1^1) = \lim_{k \to \infty} H_1(s^k \backslash \alpha_2^1) = \lim_{k \to \infty} H_2(s^k \backslash \alpha_1^2) = \lim_{k \to \infty} H_2(s^k \backslash \alpha_2^2) =$$
$$\lim_{k \to \infty} H_3(s^k \backslash \alpha_2^3) = 0$$
$$\lim_{k \to \infty} H_3(s^k \backslash \alpha_1^3) = 1$$

y por lo tanto existiría $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geqslant N_2$ tendríamos

$$H_1(s^k \backslash \alpha_2^1) - H_1(s^k \backslash \alpha_1^1) < H_3(s^k \backslash \alpha_1^3) - H_3(s^k \backslash \alpha_2^3) \qquad (5.d)$$
$$H_2(s^k \backslash \alpha_2^2) - H_2(s^k \backslash \alpha_1^2) < H_3(s^k \backslash \alpha_1^3) - H_3(s^k \backslash \alpha_2^3) \qquad (5.e)$$

Tomando $N = \max \{N_1, N_2\}$, para todo $k \geqslant N$ serían ciertas (5.d) y (5.e) y además $\alpha_2^1 \in B_1(s^k)$, $\alpha_2^2 \in B_2(s^k)$, $\alpha_1^3 \in B_3(s^k)$, en cuyo caso, por ser s^k ε_k-perfectamente propio, habría de ser cierto que

$$s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_1^k(\alpha_1^1)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_2^k(\alpha_1^2)$$

y, en consecuencia, que $s_3^k(\alpha_2^3) < s_1^k(\alpha_1^1)$ (y por tanto $s_3^k(\alpha_1^3) >$

$s_1^k(\alpha_2^1))$ y que $s_3^k(\alpha_2^3) < s_2^k(\alpha_1^2)$ (y por tanto $s_3^k(\alpha_1^3) > s_2^k(\alpha_2^2)$).
Pero entonces $\forall k \geqslant N$

$$H_1(s^k \backslash \alpha_2^1) = s_2^k(\alpha_2^2) \cdot s_3^k(\alpha_2^3) < s_2^k(\alpha_2^2) \cdot s_2^k(\alpha_1^2) < s_3^k(\alpha_1^3) \cdot s_2^k(\alpha_1^2) = H_1(s^k \backslash \alpha_1^1)$$

$$H_2(s^k \backslash \alpha_2^2) = s_1^k(\alpha_2^1) \cdot s_3^k(\alpha_2^3) < s_1^k(\alpha_2^1) \cdot s_1^k(\alpha_1^1) < s_3^k(\alpha_1^3) \cdot s_1^k(\alpha_1^1) = H_2(s^k \backslash \alpha_1^2)$$

lo cual contradiría el hecho de que $\alpha_2^1 \in B_1(s^k)$, $\alpha_2^2 \in B_2(s^k)$ $\forall k \geqslant N_1$. En consecuencia $(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_1^3)$ no es perfectamente propio.

Todo esto prueba el siguiente resultado.

TEOREMA 5.4

En un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ, cualquier equilibrio perfectamente propio es propio. El recíproco, en general, no se verifica.

OBSERVACION 5.5

Nótese que teníamos que $(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_1^3)$ además de propio era fuertemente propio en Γ_{11}. Como, sin embargo, no es perfectamente propio podemos concluir que, en general, no todo equilibrio fuertemente propio lo es perfectamente. Recíprocamente no todo equilibrio perfectamente propio lo es fuertemente, como se comprueba, por ejemplo, considerando el juego Γ_4. Las mismas sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ que usamos para probar que (α_2, β_1) era propio nos sirven para probar que lo es perfectamente. Sin embargo ya habíamos comprobado que no era fuertemente propio.

OBSERVACION 5.6

Cabría para el equilibrio perfectamente propio una observación análoga a la 4.6, pero lo dicho en aquella ocasión (que no es nuestra meta buscar equilibrios no dominados en pago, sino equilibrios que se autoimpongan) podemos hacerlo extensible a todo este trabajo.

Podríamos asimismo llevar a cabo una discusión análoga a la planteada en 4.7, pero también el criterio que allí adoptábamos, con las modificaciones adecuadas en cada caso, será el que asumiremos a lo largo de este trabajo.

OBSERVACION 5.7

En Γ_{11} $(\alpha_1^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3)$ es perfectamente propio. Para comprobarlo basta tomar $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\varepsilon_k= 1/(k+3)$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}= \{(s_1^k,s_2^k,s_3^k)\}_{k=1}^{\infty}$ con $s_1^k(\alpha_1^1)= s_2^k(\alpha_1^2)= 1-1/(k+3)^2$, $s_1^k(\alpha_2^1)= s_2^k(\alpha_2^2)= 1/(k+3)^2$, $s_3^k(\alpha_1^3)= 1-1/(k+3)^3$, $s_3^k(\alpha_2^3)= 1/(k+3)^3$. Es evidente que $s^k\in S$ $\forall k$ y que $\lim\limits_{k\to\infty} s^k=(\alpha_1^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3)$. ¿Es s^k ε_k-perfectamente propio $\forall k$? Por un lado, está claro que s^k es completamente mixta $\forall k$. Además, si fijamos $k\in\mathbb{N}$

$$H_1(s^k\backslash\alpha_1^1)= H_2(s^k\backslash\alpha_1^2)= [1-1/(k+3)^2]\cdot[1-1/(k+3)^3]$$

$$H_1(s^k\backslash\alpha_2^1)= H_2(s^k\backslash\alpha_2^2)= 1/(k+3)^5$$

$$H_3(s^k\backslash\alpha_1^3)= 1$$

$$H_3(s^k\backslash\alpha_2^3)= 0$$

Como $H_1(s^k\backslash\alpha_2^1) = H_2(s^k\backslash\alpha_2^2) = 1/(k+3)^5 \leqslant 1/1024 < 945/1024 \leqslant [1-1/(k+3)^2]\cdot[1-1/(k+3)^3] = H_1(s^k\backslash\alpha_1^1) = H_2(s^k\backslash\alpha_1^2)$ y además $H_3(s^k\backslash\alpha_2^3) < H_3(s^k\backslash\alpha_1^3)$, debe ocurrir que

$$s_1^k(\alpha_2^1) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_1^k(\alpha_1^1)$$
$$s_2^k(\alpha_2^2) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_2^k(\alpha_1^2)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$

lo cual es cierto puesto que

$$s_1^k(\alpha_2^1) = s_2^k(\alpha_2^2) = \varepsilon_k/(k+3) \leqslant \varepsilon_k/4 < \varepsilon_k \cdot 15/16 \leqslant \varepsilon_k \cdot [1-1/(k+3)^2] = \varepsilon_k \cdot s_1^k(\alpha_1^1) = \varepsilon_k \cdot s_2^k(\alpha_1^2)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3) = \varepsilon_k/(k+3)^2 \leqslant \varepsilon_k/16 < \varepsilon_k \cdot 63/64 \leqslant \varepsilon_k \cdot [1-1/(k+3)^3] = \varepsilon_k \cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$

Por otro lado $\alpha_1^i \in B(s^k)$ con $i \in \{1,2,3\}$ y además

$$H_1(s^k\backslash\alpha_1^1) - H_1(s^k\backslash\alpha_2^1) = H_2(s^k\backslash\alpha_1^2) - H_2(s^k\backslash\alpha_2^2) = [1-1/(k+3)^2] \cdot [1-1/(k+3)^3] - 1/(k+3)^5 = 1 - 1/(k+3)^2 - 1/(k+3)^3 < 1 = H_3(s^k\backslash\alpha_1^3) - H_3(s^k\backslash\alpha_2^3)$$

con lo que debe ocurrir que

$$s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_1^k(\alpha_2^1)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_2^k(\alpha_2^2)$$

lo cual ocurre evidentemente.

Por último

$$0 = H_3(s^k\backslash\alpha_1^3) - H_3(s^k\backslash\alpha_1^3) < H_1(s^k\backslash\alpha_1^1) - H_1(s^k\backslash\alpha_2^1) = H_2(s^k\backslash\alpha_1^2) - H_2(s^k\backslash\alpha_2^2)$$

con lo que también deberíamos tener que

$$s_1^k(\alpha_2^1) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$
$$s_2^k(\alpha_2^2) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$

Procediendo análogamente para α_1^1 y α_1^2 también debería ocurrir que

$$s_2^k(\alpha_2^2) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_1^k(\alpha_1^1)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_1^k(\alpha_1^1)$$
$$s_1^k(\alpha_2^1) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_2^k(\alpha_1^2)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_2^k(\alpha_1^2)$$

y estas seis desigualdades se verifican como se puede comprobar de modo inmediato.

Por lo tanto, hemos encontrado un equilibrio perfectamente propio de Γ_{11}. De nuevo podemos afirmar que esto no es una casualidad puesto que, en general, todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal posee al menos un equilibrio perfectamente propio. La veracidad de este resultado, al igual que ocurría con la del análogo para el equilibrio fuertemente propio, se obtendrá como consecuencia de un teorema más general que probaremos en el capítulo siguiente.

Una vez hechas estas observaciones vamos a retomar un tema cuyo interés ya habíamos anunciado. ¿Qué ocurre cuando los pagos a los jugadores no son comparables? En tal caso no tiene sentido comparar el "coste de los errores" entre jugadores distintos a no ser que normalicemos esos costes de alguna manera. Ello da pie a introducir un nuevo concepto que resulta de modificar el equilibrio perfectamente propio para que pueda usarse con propiedad en el contexto en el que ahora nos hallamos.

DEFINICION 5.8

Dado un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ, llamaremos oscilación del jugador i (y lo denotaremos por O_i) a:

$$O_i = \max_{\phi \in \Phi} H_i(\phi) - \min_{\phi \in \Phi} H_i(\phi)$$

DEFINICION 5.9

Diremos que i es un jugador indiferente de Γ si $O_i = 0$.

De aquí en adelante, aunque no estaremos especificándolo continuamente, vamos a considerar juegos n-personales finitos no cooperativos en forma normal sin jugadores indiferentes. En realidad considerar que este tipo de jugadores podrían existir no haría diferente el análisis aunque sí lo complicaría desde el punto de vista formal. Por otro lado es lógico pensar de los jugadores indiferentes que se comportarán como tales, es decir, que elegirán entre sus estrategias puras de acuerdo a una cierta distribución de probabilidad, que en principio será la uniforme discreta, y que será independiente del comportamiento de los demás decisores. Es por ello que los jugadores indiferentes no actúan de modo estratégico y sus jugadas pueden ser consideradas movimientos del azar, pudiendo entonces ser eliminados del juego en forma normal. Dicho esto, pasemos a introducir el nuevo concepto.

DEFINICION 5.10

En un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ, dado $\varepsilon>0$ diremos que $s\in S$ es un equilibrio ε-perfectamente propio normalizado si:

* s es completamente mixta

* Si se verifica

$$\frac{H_i(s\backslash\phi_i) - H_i(s\backslash\phi'_i)}{O_i} < \frac{H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)}{O_j}$$

,siendo $\phi_i\in B_i(s), \phi_j\in B_j(s)$, entonces ha de ocurrir que:

$$s_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon\cdot s_i(\phi'_i)$$

y esto $\forall\phi'_i\in\Phi_i, \forall\bar{\phi}_j\in\Phi_j, \forall i,j\in\{1,...,n\}$ ⟦

DEFINICION 5.11

Diremos que $s\in S$ es un equilibrio perfectamente propio normalizado de Γ si existe un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,...,s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que:

* $\varepsilon_k>0\ \forall k,\ \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$

* s^k es ε_k-perfectamente propio normalizado $\forall k$.

* $\lim_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i) = s_i(\phi_i)\quad \forall\phi_i\in\Phi_i, \forall i\in\{1,...,n\}$

Análogamente a como ocurría con el equilibrio perfectamente propio, se verifica el siguiente resultado:

TEOREMA 5.12

Todo equilibrio perfectamente propio normalizado es propio. El recíproco, en general, no se verifica.

DEMOSTRACION

Para probar la primera de las afirmaciones basta demostrar que todo equilibrio ε-perfectamente propio normalizado es ε-propio. Sea s ε-perfectamente propio normalizado. Entonces s, por definición, es completamente mixto. Supongamos ahora que, para un cierto i, existen $\phi_i, \phi'_i \in \Phi_i$ tales que

$$H_i(s\backslash\phi_i) < H_i(s\backslash\phi'_i) \qquad (5.f)$$

Sea $\phi^*_i \in B_i(s)$. En tal caso (5.f) implica que

$$H_i(s\backslash\phi^*_i) - H_i(s\backslash\phi'_i) < H_i(s\backslash\phi^*_i) - H_i(s\backslash\phi_i) \qquad (5.e)$$

y entonces, como $O_i > 0$, tenemos

$$\frac{H_i(s\backslash\phi^*_i) - H_i(s\backslash\phi'_i)}{O_i} < \frac{H_i(s\backslash\phi^*_i) - H_i(s\backslash\phi_i)}{O_i}$$

y en tal caso, por ser s ε-perfectamente propio normalizado, se debe verificar que $s_i(\phi_i) \leqslant \varepsilon \cdot s_i(\phi'_i)$. Con esto queda probado que s es ε-propio y, por tanto, la primera parte del resultado.

En cuanto a la segunda, obsérvese que, en Γ_{11}, $O_1 = O_2 = O_3 = 1$, luego $(\alpha^1_2, \alpha^2_2, \alpha^3_1)$ también nos sirve como ejemplo de equilibrio propio que no es perfectamente propio normalizado. □

OBSERVACION 5.13

Nótese que $(\alpha_2^1,\alpha_2^2,\alpha_1^3)$ en Γ_{11} era fuertemente propio; por lo tanto también podemos afirmar que no todo equilibrio fuertemente propio es perfectamente propio normalizado. Recíprocamente, las mismas sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ que usamos para concluir en Γ_4 que (α_2,β_1) era propio son válidas para probar que es perfectamente propio normalizado. Como no era fuertemente propio, podemos afirmar que no todo equilibrio perfectamente propio normalizado es fuertemente propio.

<u>OBSERVACION</u> <u>5.14</u>

Antes de finalizar el capítulo hagamos un breve comentario sobre la relación entre los equilibrios perfectamente propio y perfectamente propio normalizado. En primer lugar digamos que son conceptos definidos para usar en contextos diferentes (más aún, en contextos incompatibles) por lo que no tiene mucho sentido hablar de una supuesta relación entre ellos. En cualquier caso, a pesar de que por lo dicho anteriormente no lo haremos más que de pasada, vamos a entrar en el tema. En concreto daremos dos ejemplos que nos permitirán afirmar, como era de esperar, que no todo equilibrio perfectamente propio es perfectamente propio normalizado y, recíprocamente, que no todo equilibrio perfectamente propio normalizado es perfectamente propio.

En el juego Γ_{12} que se incluye a continuación se puede comprobar que $(\alpha_1^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3)$ es un equilibrio perfectamente propio normalizado que no es perfectamente propio. (No es perfectamente propio porque J2 pierde 2 si se desvía de α^2_1, mientras que J3 sólo pierde 1 si se desvía de α^3_1, con lo que J3 tenderá al error más que J2 y entonces J1 preferirá α^1_2. En el caso normalizado J2 y J3 perderán lo mismo al equivocarse, una unidad, y entonces J1 podrá elegir α^1_1. Por eso $(\alpha^1_1,\alpha^2_1,\alpha^3_1)$ es perfectamente propio normalizado).

α^3_1:

	α^2_1	α^2_2
α^1_1	1, 2, 1	1, 0, 1
α^1_2	1, 2, 1	0, 0, 1

α^3_2:

	α^2_1	α^2_2
α^1_1	0, 2, 0	0, 0, 0
α^1_2	1, 2, 0	0, 0, 0

JUEGO Γ_{12}

Consideremos ahora el siguiente juego Γ_{13}.

α^3_1:

	α^2_1	α^2_2
α^1_1	1, 2, 1	1, 0, 1
α^1_2	1, 2, 1	0, 0, 1

α^3_2:

	α^2_1	α^2_2
α^1_1	0, 2, 0	0, 0, 0
α^1_2	1, 10, 0	0, 0, 0

JUEGO Γ_{13}

En Γ_{13} $(\alpha^1_2,\alpha^2_1,\alpha^3_1)$ es perfectamente propio pero no es perfectamente propio normalizado (es perfectamente propio porque J2, en principio, siempre pierde más que J3 al equivocarse, con lo que tenderá menos a hacerlo y J1 preferirá α^1_2. Sin embargo, al considerar pagos normalizados, J3 pierde más que J2 al equivocarse, con lo que J1 preferirá α^1_1, por lo que no es perfectamente propio normalizado. Nótese que, en términos relativos, efectivamente pierde más al equivocarse J3, que siempre pasa del "todo" al "nada", que J2, que pasa del "algo" al "nada"). Obsérvese por último que $(\alpha^1_1,\alpha^2_1,\alpha^3_1)$ también es un ejemplo de equilibrio perfectamente propio normalizado que no es perfectamente propio; si damos, de todas maneras, el ejemplo Γ_{12} es porque nos parece más intuitivo.

OBSERVACION 5.15

Por último incluimos esta observación relativa a la conveniencia de mantener los dos conceptos introducidos en este capítulo. En efecto, ya que el equilibrio perfectamente propio normalizado es un concepto invariante ante cambios de escala que conserva la filosofía del perfectamente propio, podría parecer que éste último es innecesario. Sin embargo nosotros no opinamos así. Piénsese por ejemplo en el juego Γ_{14} que incluimos en la página siguiente. En él, el concepto de equilibrio perfectamente propio normalizado, que compara costes normalizados, no discrimina entre $(\alpha^1_1,\alpha^2_1,\alpha^3_1)$ y $(\alpha^1_2,\alpha^2_1,\alpha^3_1)$. Sin embargo, si los pagos a los jugadores representan pesetas, J1 debería pensar que J3 pierde más que J2 al equivocarse con lo que éste tiende a hacerlo más que aquél. Esta forma de pensar de J1 se refleja en el concepto de equilibrio perfectamente propio que sólo acepta la combinación $(\alpha^1_2, \alpha^2_1, \alpha^3_1)$. Por eso en este contexto en el que los pagos a los jugadores son comparables (en el sentido de que lo son directamente por venir dados en las mismas unidades) nos parece más adecuado el concepto que compara pagos sin normalizar. No obstante también es necesario el equilibrio que compara pagos normalizados para el caso en que estos no sean comparables sin normalizar (en el sentido de que no vienen dados en las mismas unidades o no tenemos certeza de ello).

	α^2_1	α^2_2
α^1_1	1, 1, 200	0, 0, 200
α^1_2	1, 1, 200	1, 0, 200

α^3_1

	α^2_1	α^2_2
α^1_1	1, 1, 0	0, 0, 0
α^1_2	0, 1, 0	0, 0, 0

α^3_2

JUEGO Γ_{14}

Este criterio, relativo a definir conceptos que comparen pagos normalizados y conceptos que los comparen sin normalizar cuando hayan de realizarse comparaciones entre pagos a distintos jugadores, lo mantendremos a lo largo de todo este trabajo por las razones que ya hemos apuntado.

CAPITULO 6 EL EQUILIBRIO COMPLETO

En los capítulos anteriores hemos tratado de matizar de dos modos diferentes el concepto de racionalidad en los errores aportado por Myerson y, en base a ello, hemos dado dos refinamientos del equilibrio propio. Como las ideas que subyacen en tales refinamientos no son en absoluto incompatibles, inmediatamente nos planteamos refundirlos y dar un nuevo concepto que los englobe y que seleccione entre los equilibrios de Nash aquellos que sean estables frente a alguna tendencia racional al error por parte de los jugadores, entendiendo por tendencias racionales al error aquellas en las que:

H1. Cada jugador tiende a equivocarse más hacia lo que le cuesta menos.

H2. Cada jugador tiende a equivocarse con la misma probabilidad hacia todos los errores que le resultan indiferentes.

H3. En general tienden a equivocarse más aquellos jugadores a los que les cuesta menos equivocarse.

Pero, ya que hacemos estas tres hipótesis sobre las tendencias al error de los jugadores, podríamos introducir una cuarta que viniera a "completar" el equilibrio perfectamente propio de modo análogo a como el fuertemente propio "completa" el propio. Dicha cuarta hipótesis podría formularse así:

H4. En general, si ciertos jugadores sufren idénticas consecuencias al cometer ciertos errores, tenderán a cometerlos con la misma probabilidad.

Como ya ocurría en el capítulo anterior, para construir un concepto que refleje las hipótesis H3 y H4, hemos de distinguir el caso en el que los pagos a los jugadores son comparables del caso en el que no lo son. De nuevo supondremos en principio que estamos en la primera de las situaciones y abordaremos la segunda al final del capítulo.

Es importante comentar también que estas cuatro hipótesis pueden no ser aceptables en algunos casos, aunque sí parecen intuitivas y válidas en una amplia gama de problemas reales y, desde luego, responden al criterio general que alienta este trabajo y que, como ya habíamos comentado, está inspirado en los planteamientos de Selten (que introduce su equilibrio perfecto "which looks at complete racionality as a limiting case of incomplete rationality") y en los de Myerson.

Veamos a continuación un ejemplo que sugiere la introducción de la hipótesis H4. Sea el siguiente juego.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c|cc|}
 & \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \\
\hline
\alpha^1_1 & 1,\ 1,\ 1 & 0,\ 0,\ 1 \\
\alpha^1_2 & 1,\ 1,\ 1 & 2,\ 0,\ 1 \\
\hline
\end{array} \\
\alpha^3_1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c|cc|}
 & \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \\
\hline
\alpha^1_1 & 300,\ 1,\ 0 & 0,\ 0,\ 0 \\
\alpha^1_2 & 0,\ 1,\ 0 & 0,\ 0,\ 0 \\
\hline
\end{array} \\
\alpha^3_2
\end{array}
$$

JUEGO Γ_{15}

Si buscamos en Γ_{15} un equilibrio tal que cada jugador aproveche al máximo los "errores racionales" de sus contrincantes, nos interesa un concepto que, entre el $(\alpha^1_2,\alpha^2_1,\alpha^3_1)$ y el $(\alpha^1_1,\alpha^2_1,\alpha^3_1)$, elija éste último pues, en tal situación, J1 siempre preferirá α^1_1 que α^1_2 salvo que J2 tienda a equivocarse hacia α^2_2 claramente más de lo que J3 tiende a equivocarse hacia α^3_2, cosa que no tiene por qué ocurrir puesto que, a la vista de las funciones de pago, J2 y J3 se verían idénticamente afectados por sus errores respectivos. Sin embargo $(\alpha^1_2,\alpha^2_1,\alpha^3_1)$ es perfectamente propio (y, por tanto, propio y, por no tener ningún jugador estrategias puras equivalentes en pago, fuertemente propio). Efectivamente, tomemos, por ejemplo, $\{\varepsilon_k\}^{\infty}_{k=1}$ con $\varepsilon_k = 1/(k+2)$ y

$\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,s_2^k,s_3^k)\}_{k=1}^{\infty}$ con $s_1^k(\alpha_1^1)= 1/(k+2)^2$, $s_1^k(\alpha_2^1)= 1-1/(k+2)^2$, $s_2^k(\alpha_1^2)= 1-1/[2(k+2)^3]$, $s_2^k(\alpha_2^2)= 1/[2(k+2)^3]$, $s_3^k(\alpha_1^3)= 1-1/[400(k+2)^3]$, $s_3^k(\alpha_2^3)= 1/[400(k+2)^3]$. Es evidente que $s^k\in S$ $\forall k$ y que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, $\lim_{k\to\infty} s^k=(\alpha_2^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3)$. Sea $k\in\mathbb{N}$ arbitrario. Claramente s^k es completamente mixta. Teniendo esto último en cuenta, acabemos de comprobar que s^k es ε_k-perfectamente propio.

$$H_1(s^k\backslash\alpha_1^1)= \left(1-1/[2(k+2)^3]\right)\left(1-1/[400(k+2)^3]\right) + 300\left(1-1/[2(k+2)^3]\right)\cdot 1/[400(k+2)^3]$$

$$H_1(s^k\backslash\alpha_2^1)= \left(1-1/[2(k+2)^3]\right)\left(1-1/[400(k+2)^3]\right) + 2\left(1-1/[400(k+2)^3]\right)\cdot 1/[2(k+2)^3]$$

$$H_2(s^k\backslash\alpha_1^2)= H_3(s^k\backslash\alpha_1^3)= 1$$

$$H_2(s^k\backslash\alpha_2^2)= H_3(s^k\backslash\alpha_2^3)= 0$$

Obsérvese que

$$H_1(s^k\backslash\alpha_2^1) - H_1(s^k\backslash\alpha_1^1)= \left(1-1/[400(k+2)^3]\right)\cdot 1/(k+2)^3 - \left(1-1/[2(k+2)^3]\right)\cdot 3/[4(k+2)^3] > 0$$

y que, a la vista de todo lo dicho, es inmediato que $\alpha_2^1\in B_1(s^k)$, $\alpha_1^2\in B_2(s^k)$, $\alpha_1^3\in B_3(s^k)$ y que $0< H_1(s^k\backslash\alpha_2^1)- H_1(s^k\backslash\alpha_1^1)< H_2(s^k\backslash\alpha_1^2)- H_2(s^k\backslash\alpha_2^2)= H_3(s^k\backslash\alpha_1^3) - H_3(s^k\backslash\alpha_2^3)$, con lo que debe ocurrir que:

$$s_3^k(\alpha_2^3)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$

$$s_2^k(\alpha_2^2)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_2^k(\alpha_1^2)$$

$$s_1^k(\alpha_1^1)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_2^1)$$

$$s_2^k(\alpha_2^2) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_1^k(\alpha_1^1)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_1^k(\alpha_1^1)$$
$$s_1^k(\alpha_1^1) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_2^k(\alpha_1^2)$$
$$s_1^k(\alpha_1^1) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$
$$s_2^k(\alpha_2^2) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_2^k(\alpha_1^2)$$

todo lo cual es evidente que ocurre. En consecuencia $(\alpha_2^1, \alpha_1^2, \alpha_1^3)$ es perfectamente propio.

Por todo lo dicho vamos a introducir un nuevo concepto de equilibrio que será estable ante alguna tendencia racional al error, entendiendo la racionalidad según H1, H2, H3 y H4.

<u>DEFINICION</u> <u>6.1</u>

En un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ diremos que $s_i \in S_i$, $s'_j \in S_j$ son equivalentes en pago para i y j si y sólo si, para cualquier $s^* \in S$,

$$H_i(s^*\backslash\phi_i) - H_i(s^*\backslash s_i) = H_j(s^*\backslash\phi_j) - H_j(s^*\backslash s'_j)$$

siendo $\phi_i \in B_i(s^*), \phi_j \in B_j(s^*)$.

Obsérvese que cuando hacemos i=j en la definición 6.1 obtenemos la 4.1, luego ésta es generalizada por aquella.

<u>DEFINICION</u> <u>6.2</u>

Dado $\varepsilon > 0$ diremos que $s \in S$ es un equilibrio ε-completo de Γ si

* s es ε-perfectamente propio

* Si ϕ_i y ϕ'_j son equivalentes en pago para i y j entonces $s_i(\phi_i)= s_j(\phi'_j)$ y esto para cualquier $\phi_i\in \Phi_i\setminus B_i(s), \phi'_j\in \Phi_j\setminus B_j(s)$ y para cualquier $i,j\in\{1,...,n\}$.

DEFINICION 6.3

Diremos que $s\in S$ es un equilibrio completo de Γ si existe un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,...,s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que:

* $\varepsilon_k>0$ $\forall k$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$
* s^k es ε_k-completo $\forall k$.
* $\lim_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)= s_i(\phi_i)$ $\forall\phi_i\in \Phi_i, \forall i\in\{1,...,n\}$.

TEOREMA 6.4

a) En un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ cualquier equilibrio completo es perfectamente propio. El recíproco, en general, no se verifica.

b) En un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ cualquier equilibrio completo es fuertemente propio. El recíproco, en general, no se verifica.

DEMOSTRACION

De la definición 6.2 se obtiene inmediatamente que todo equilibrio ε-completo es también ε-perfectamente propio y ε-fuertemente propio (téngase en cuenta que la definición 6.1 generaliza la 4.1). En consecuencia, si $s\in S$ es completo, también será perfectamente propio y fuertemente propio.

El recíproco, en general, no se verifica. Efectivamente, en Γ_{15}, según hemos probado, $(\alpha_2^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3)$ es perfecta y fuertemente propio. Sin embargo no es completo. Comprobemos esta última afirmación por reducción al absurdo. Supongamos, pues, que $(\alpha_2^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3)$ es completo. En tal caso existirían $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ en las condiciones de la definición 6.3. Obsérvese que, puesto que α_1^2 domina estrictamente a α_2^2 y α_1^3 domina estrictamente a α_2^3, se tendría para cualquier k que $\alpha_2^2\notin B_2(s^k)$, $\alpha_2^3\notin B_3(s^k)$. Por otro lado α_2^2 y α_2^3 son equivalentes en pago para J2 y J3 en Γ_{15}, como se deduce de tener en cuenta que $H_2(s\backslash\alpha_2^2) = H_3(s\backslash\alpha_2^3) = 0 \ \ \forall s$, $H_2(s\backslash\alpha_1^2)= H_3(s\backslash\alpha_1^3)= 1 \ \forall s$ y $\alpha_1^2\in B_2(s)$, $\alpha_1^3\in B_3(s)$ $\forall s$. En consecuencia debería ocurrir que $s_2^k(\alpha_2^2)= s_3^k(\alpha_2^3)$ (y por tanto $s_2^k(\alpha_1^2)= s_3^k(\alpha_1^3)$) $\forall k\in\mathbb{N}$. Pero entonces, como

$$H_1(s^k\backslash\alpha_1^1)= s_2^k(\alpha_1^2)\cdot s_3^k(\alpha_1^3) + 300\cdot s_2^k(\alpha_1^2)\cdot s_3^k(\alpha_2^3)$$
$$H_1(s^k\backslash\alpha_2^1)= s_2^k(\alpha_1^2)\cdot s_3^k(\alpha_1^3) + 2\cdot s_2^k(\alpha_2^2)\cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$

se tendría $H_1(s^k\backslash\alpha_2^1)< H_1(s^k\backslash\alpha_1^1)$ $\forall k$, luego $s_1^k(\alpha_2^1)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_1^1)$ $\forall k$, con lo que sería imposible que $\lim_{k\to\infty} s_1^k(\alpha_2^1)=1$, $\lim_{k\to\infty} s_1^k(\alpha_1^1)=0$ lo cual contradice el hecho de que $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ son sucesiones en las condiciones de la definición 6.3. □

Sin embargo $(\alpha_1^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3)$ es completo en Γ_{15}. En efecto, téngase en cuenta que ningún jugador posee un par de estrategias puras que sean equivalentes en pago y que $\alpha_1^2\in B_2(s)$, $\alpha_1^3\in B_3(s)$ para cualquier $s\in S$ con lo que, a la hora de buscar estrategias equivalentes en pago para jugadores diferentes, sólo entrarán en liza α_1^1, α_2^1, α_2^2 y α_2^3. Sin embargo, es inmediato comprobar que la única equivalencia en pago que existe involucrando pares de estrategias puras de diferentes jugadores entre estas cuatro es la que ya conocemos referente a α_2^2 y α_2^3 (de las cuales podemos también asegurar que $\alpha_2^2 \notin B_2(s)$ y $\alpha_2^3 \notin B_3(s)$ $\forall s \in S$). Como consecuencia de todo lo dicho, para probar que $(\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_1^3)$ es completo basta encontrar $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty} = \{(s_1^k, s_2^k, s_3^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $\varepsilon_k > 0$ $\forall k$, $\lim\limits_{k\to\infty} s^k = (\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_1^3)$, s^k es ε_k-perfectamente propio $\forall k$ y $s_2^k(\alpha_2^2) = s_3^k(\alpha_2^3)$ $\forall k$. Tómese entonces, por ejemplo, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\varepsilon_k = 1/(k+5)$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty} = \{(s_1^k, s_2^k, s_3^k)\}_{k=1}^{\infty}$ con $s_1^k(\alpha_1^1) = 1-1/(k+5)^2$, $s_1^k(\alpha_2^1) = 1/(k+5)^2$, $s_2^k(\alpha_1^2) = 1-1/[2(k+5)^3]$, $s_2^k(\alpha_2^2) = 1/[2(k+5)^3]$, $s_3^k(\alpha_1^3) = 1-1/[2(k+5)^3]$, $s_3^k(\alpha_2^3) = 1/[2(k+5)^3]$. Es evidente que $s^k \in S$ $\forall k$ y que $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} s^k = (\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_1^3)$. Sea $k \in \mathbb{N}$ arbitrario. Teniendo en cuenta que s^k es completamente mixto comprobemos que es ε_k-perfectamente propio:

$$H_1(s^k \backslash \alpha_1^1) = \left(1-1/[2(k+5)^3]\right)^2 + 300\left(1-1/[2(k+5)^3]\right) \cdot 1/[2(k+5)^3]$$

$$H_1(s^k \backslash \alpha_2^1) = \left(1-1/[2(k+5)^3]\right)^2 + 2\left(1-1/[2(k+5)^3]\right) \cdot 1/[2(k+5)^3]$$

$$H_2(s^k \backslash \alpha_1^2) = H_3(s^k \backslash \alpha_1^3) = 1$$

$$H_2(s^k \backslash \alpha_2^2) = H_3(s^k \backslash \alpha_2^3) = 0$$

y a la vista de todo lo dicho es inmediato que $\alpha_1^1 \in B_1(s^k)$, $\alpha_1^2 \in B_2(s^k)$, $\alpha_1^3 \in B_3(s^k)$ y que

$0 < H_1(s^k \backslash \alpha_1^1) - H_1(s^k \backslash \alpha_2^1) = 288\left(1-1/[2(k+5)^3]\right) \cdot 1/[2(k+5)^3] < 1=$

$$H_2(s^k\backslash\alpha_1^2)-H_2(s^k\backslash\alpha_2^2)=H_3(s^k\backslash\alpha_1^3)-H_3(s^k\backslash\alpha_2^3)$$

con lo que debe ocurrir que

$$s_1^k(\alpha_2^1)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_1^1)$$
$$s_2^k(\alpha_2^2)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_2^k(\alpha_1^2)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$
$$s_2^k(\alpha_2^2)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_2^1)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_2^1)$$
$$s_1^k(\alpha_2^1)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_2^k(\alpha_1^2)$$
$$s_1^k(\alpha_2^1)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$
$$s_2^k(\alpha_2^2)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_2^k(\alpha_1^2)$$

todo lo cual ocurre, según se puede comprobar de modo inmediato. En consecuencia, hemos probado que $(\alpha_1^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3)$ es completo en Γ_{15}. En general se verifica el siguiente resultado:

<u>TEOREMA</u> <u>6.5</u>

Todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ posee al menos un equilibrio completo.

<u>DEMOSTRACION</u>

Probaremos que $\forall\ \varepsilon\in(0,1)$ existe $s(\varepsilon)$ un equilibrio ε-completo. Tomando entonces una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}\subset(0,1)$ tal que $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$, encontraremos una sucesión $\{s(\varepsilon_k)\}_{k=1}^{\infty}$ de equilibrios ε_k-completos. Como ésta última es una sucesión en

S, el cual es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^l$ con $l=\sum_{i=1}^{n}|\phi_i|$, podemos afirmar que existirá una subsucesión de $\{s(\varepsilon_k)\}_{k=1}^{\infty}$ que convergerá a un cierto $\bar{s}\in S$ que, en consecuencia, será un equilibrio completo de Γ.

Sea, pues, $\varepsilon \in (0,1)$. Denotaremos $m_i=|\Phi_i|$. Sean entonces:

$$\gamma = \varepsilon^{\sum_{i=1}^{n} m_i} / \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$S_i(\gamma)= \left\{ s_i\in S_i / \ s_i(\phi_i)\geqslant \gamma \quad \forall\phi_i\in \Phi_i \right\} \qquad \forall i=1,\dots,n$$

$$S(\gamma)= S_1(\gamma)\times\dots\times S_n(\gamma)$$

Definimos ahora F de $S(\gamma)$ en $P(S(\gamma))$ (Partes de $S(\gamma)$) del siguiente modo:

$$F(s)= \Big\{\sigma \in S(\gamma) / \text{ si } H_i(s\backslash\phi_i)- H_i(s\backslash\phi'_i)< H_j(s\backslash\phi_j)- H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)$$
$$\text{con } \phi_i\in B_i(s),\phi_j\in B_j(s) \text{ entonces } \sigma_j(\bar{\phi}_j)\leqslant \varepsilon\cdot\sigma_i(\phi'_i) \text{ y}$$
$$\text{esto } \forall\phi'_i\in \Phi_i,\forall\bar{\phi}_j\in \Phi_j, \ \ \forall i,j; \ \ \sigma_i(\phi_i)= \sigma_j(\phi'_j) \text{ para}$$
$$\text{cualquier par } \phi_i,\phi'_j \text{ de estrategias equivalentes en}$$
$$\text{pago para i y j con } \phi_i\in \Phi_i\backslash B_i(s), \ \ \phi'_j\in \Phi_j\backslash B_j(s)$$
$$\forall i,j\in\{1,\dots,n\}\Big\}$$

para cualquier $s \in S(\gamma)$

Es evidente que $S(\gamma)$ es convexo, compacto y no vacío y que F(s) es convexo y compacto $\forall s\in S(\gamma)$. Comprobemos ahora que, para cualquier $s\in S(\gamma)$, F(s) es no vacío. En efecto, sea $s\in S(\gamma)$ y definamos

$$* \ A(s,\phi'_i)= \sum_{j=1}^{n} \Big|\Big\{\bar{\phi}_j\in \Phi_j / \ H_j(s\backslash\phi_j)-H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)< H_i(s\backslash\phi_i)-H_i(s\backslash\phi'_i)$$
$$\text{con } \phi_j\in B_j(s),\phi_i\in B_i(s)\Big\}\Big|$$

$\forall \phi'_i \in \Phi_i, \forall i \in \{1,\ldots,n\}$

* $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ tal que, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$,

$$\sigma_i(\phi_i)=\frac{\varepsilon^{A(s,\phi_i)}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{\phi'_k\in\Phi_k}\varepsilon^{A(s,\phi'_k)}} \qquad \forall \phi_i \notin B_i(s)$$

$$\sigma_i(\phi_i)=\frac{1-\sum_{\phi'_i\notin B_i(s)}\sigma_i(\phi'_i)}{|B_i(s)|} \qquad \forall \phi_i \in B_i(s)$$

Entonces $\sigma\in F(s)$. Comprobémoslo:

- En primer lugar, es evidente que $\sigma_i(\phi_i)\geqslant 0$ $\forall \phi_i\in\Phi_i, \forall i$ y que $\sum_{\phi_i\in\Phi_i}\sigma_i(\phi_i)=1$ $\forall i$. Además se verifica que $\sigma_i(\phi_i)\geqslant\gamma$ $\forall\phi_i\in\Phi_i,\forall i$.

Efectivamente,

· si $\phi_i\notin B_i(s)$, como $\varepsilon^{\sum_{i=1}^{n} m_i}\leqslant\varepsilon^{A(s,\phi_i)}$ y como $\sum_{k=1}^{n}\sum_{\phi'_k\in\Phi_k}\varepsilon^{A(s,\phi'_k)}$ $\leqslant\sum_{k=1}^{n}(m_k\cdot 1)$, entonces $\sigma_i(\phi_i)\geqslant\gamma$.

· si $\phi_i\in B_i(s)$

$$1-\sum_{\phi'_i\notin B_i(s)}\sigma_i(\phi'_i)=\frac{\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\sum_{\phi'_k\in\Phi_k}\varepsilon^{A(s,\phi'_k)}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{\phi'_k\in\Phi_k}\varepsilon^{A(s,\phi'_k)}}+$$

$$\frac{\displaystyle\sum_{\phi'_i \in B_i(s)} \varepsilon^{A(s,\phi'_i)}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{\phi'_k \in \Phi_k} \varepsilon^{A(s,\phi'_k)}} \geqslant \sum_{\phi'_i \in B_i(s)} \frac{\varepsilon^{A(s,\phi'_i)}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{\phi'_k \in \Phi_k} \varepsilon^{A(s,\phi'_k)}}$$

Como $\varepsilon^{A(s,\phi'_i)} \geqslant \varepsilon^{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ (es más, en este caso, como $\phi'_i \in B_i(s)$, $\varepsilon^{A(s,\phi'_i)} = 1$) y $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{\phi'_k \in \Phi_k} \varepsilon^{A(s,\phi'_k)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} (m_k \cdot 1)$ es claro que $1 - \displaystyle\sum_{\phi'_i \notin B_i(s)} \sigma_i(\phi'_i) \geqslant |B_i(s)| \cdot \gamma$ y en consecuencia $\sigma_i(\phi_i) \geqslant \gamma$.

De todo lo dicho queda probado que $\sigma \in S(\gamma)$.

- Veamos que σ verifica la primera de las condiciones pedidas:

Sean $\hat{\phi}_i \in \Phi_i, \bar{\phi}_j \in \Phi_j$ cualesquiera de modo que

$$H_i(s \backslash \phi_i) - H_i(s \backslash \hat{\phi}_i) < H_j(s \backslash \phi_j) - H_j(s \backslash \bar{\phi}_j)$$

siendo $\phi_i \in B_i(s), \phi_j \in B_j(s)$

En tal caso es seguro que $\bar{\phi}_j \notin B_j(s)$ y que $A(s,\bar{\phi}_j) \geqslant A(s,\hat{\phi}_i)+1$.

Consideremos ahora dos casos:

- $\hat{\phi}_i \notin B_i(s)$. Entonces

$$\sigma_j(\bar{\phi}_j) = \frac{\varepsilon^{A(s,\bar{\phi}_j)}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{\phi'_k \in \Phi_k} \varepsilon^{A(s,\phi'_k)}} \leqslant \frac{\varepsilon^{A(s,\hat{\phi}_i)+1}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{\phi'_k \in \Phi_k} \varepsilon^{A(s,\phi'_k)}} = \varepsilon \cdot \sigma_i(\hat{\phi}_i)$$

- $\hat{\phi}_i \in B_i(s)$. Entonces

$$\varepsilon\cdot\sigma_i(\hat{\phi}_i)= \frac{1}{|B_i(s)|}\cdot\left[\frac{\varepsilon\cdot\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\sum\limits_{\phi'_k\in\Phi_k}\varepsilon^{A(s,\phi'_k)}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{\phi'_k\in\Phi_k}\varepsilon^{A(s,\phi'_k)}} + \frac{\sum\limits_{\phi'_i\in B_i(s)}\varepsilon^{A(s,\phi'_i)+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{\phi'_k\in\Phi_k}\varepsilon^{A(s,\phi'_k)}}\right] \geqslant$$

$$\frac{1}{|B_i(s)|}\cdot\sum_{\phi'_i\in B_i(s)}\frac{\varepsilon^{A(s,\phi'_i)+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{\phi'_k\in\Phi_k}\varepsilon^{A(s,\phi'_k)}}$$

Obsérvese que $\hat{\phi}_i\in B_i(s)$, luego $A(s,\hat{\phi}_i)= 0 =A(s,\phi'_i)$ $\forall\phi'_i\in B_i(s)$, en cuyo caso $A(s,\bar{\phi}_j)\geqslant A(s,\hat{\phi}_i)+1 = A(s,\phi'_i)+1$ $\forall\phi'_i\in B_i(s)$, con lo que $\varepsilon^{A(s,\phi'_i)+1} \geqslant \varepsilon^{A(s,\bar{\phi}_j)}$ $\forall\phi'_i\in B_i(s)$ y entonces $\varepsilon\cdot\sigma_i(\hat{\phi}_i)\geqslant \frac{1}{|B_i(s)|}\cdot|B_i(s)|\cdot\sigma_j(\bar{\phi}_j)$. Con todo lo dicho queda probado que σ verifica la primera de las condiciones.

- Veamos que σ verifica la segunda condición.

Sean $\phi_i\in \Phi_i\backslash B_i(s)$, $\phi'_j\in \Phi_j\backslash B_j(s)$ equivalentes en pago para i y j. En tal caso, $H_i(s\backslash\bar{\phi}_i)- H_i(s\backslash\phi_i)= H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)- H_j(s\backslash\phi'_j)$ con $\bar{\phi}_i\in B_i(s)$, $\bar{\phi}_j\in B_j(s)$, luego $A(s,\phi_i)= A(s,\phi'_j)$. Como además $\phi_i\notin B_i(s)$, $\phi_j\notin B_j(s)$ se tiene que

$$\sigma_i(\phi_i)= \frac{\varepsilon^{A(s,\phi_i)}}{\sum_{k=1}^{n} \sum_{\phi'_k \in \Phi_k} \varepsilon^{A(s,\phi'_k)}} = \frac{\varepsilon^{A(s,\phi'_j)}}{\sum_{k=1}^{n} \sum_{\phi'_k \in \Phi_k} \varepsilon^{A(s,\phi'_k)}} = \sigma_j(\phi'_j)$$

con lo que queda probado que σ verifica la segunda de las condiciones.

Por todo lo dicho podemos afirmar que $\sigma \in F(s)$ y, en consecuencia, que $F(s)\neq\emptyset$ $\forall s \in S(\gamma)$.

Comprobemos ahora que F es semicontinua superiormente. Sean $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\gamma)$ y $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\sigma_n\in F(s_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ tales que $\lim_{n\to\infty} s_n= s$, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n= \sigma$. Se trata de probar que $\sigma \in F(s)$. Como $S(\gamma)$ es cerrado y $\sigma_n\in S(\gamma)$ $\forall n$ está claro que $\sigma \in S(\gamma)$.

- Sean $\phi'_i\in \Phi_i$ y $\bar{\phi}_j\in \Phi_j$ tales que, si $\phi_i\in B_i(s), \phi_j\in B_j(s)$,

$$H_i(s\backslash\phi_i)- H_i(s\backslash\phi'_i)< H_j(s\backslash\phi_j)- H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)$$

Fijados $\phi_i\in B_i(s)$, $\phi_j\in B_j(s)$ y, como $H_i(s\backslash\phi_i)- H_i(s\backslash\phi'_i)- H_j(s\backslash\phi_j)+ H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)$ es continua en s, $\exists$ $N(\phi_i,\phi_j)$ tal que $\forall n\geq N(\phi_i,\phi_j)$ $H_i(s_n\backslash\phi_i)- H_i(s_n\backslash\phi'_i)< H_j(s_n\backslash\phi_j)- H_j(s_n\backslash\bar{\phi}_j)$. Como $|B_i(s)|$ y $|B_j(s)|$ son finitos, puedo considerar $N_1= \max\{N(\phi_i,\phi_j)/ \ \phi_i\in B_i(s),\phi_j\in B_j(s)\}$ y entonces $\forall n\geq N_1$ $H_i(s_n\backslash\phi_i)- H_i(s_n\backslash\phi'_i)< H_j(s_n\backslash\phi_j)- H_j(s_n\backslash\bar{\phi}_j)$ $\forall\phi_i\in B_i(s),\forall\phi_j\in B_j(s)$. Obsérvese por otro lado que, si $\tilde{\phi}_i\notin B_i(s)$, $\exists$ $\hat{\phi}_i\in B_i(s)$ tal que $H_i(s\backslash\tilde{\phi}_i)< H_i(s\backslash\hat{\phi}_i)$, con lo que, ya que $H_i(s\backslash\tilde{\phi}_i)- H_i(s\backslash\hat{\phi}_i)$ es continua en s, $\exists$ $N_2^{\tilde{\phi}_i} \in \mathbb{N}$ tal que $H_i(s_n\backslash\tilde{\phi}_i)< H_i(s_n\backslash\hat{\phi}_i)$ $\forall n\geq N_2^{\tilde{\phi}_i}$ en cuyo caso $\tilde{\phi}_i\notin B_i(s_n)$ $\forall n\geq N_2^{\tilde{\phi}_i}$. Como $|\Phi_i\backslash B_i(s)|$ es finito puedo considerar $N_2^i= \max\{N_2^{\tilde{\phi}_i}/ \ \tilde{\phi}_i\in \Phi_i\backslash B_i(s)\}$ y asegurar que $B_i(s_n) \subset B_i(s)$ $\forall n\geq N_2^i$. Análogamente $\exists$

N_2^j tal que $B_j(s_n) \subset B_j(s)$ $\forall n \geqslant N_2^j$. Tomando $N = \max\{N_1, N_2^i, N_2^j\}$ obtenemos que, $\forall n \geqslant N$, $H_i(s_n \backslash \phi_i) - H_i(s_n \backslash \phi'_i) < H_j(s_n \backslash \phi_j) - H_j(s_n \backslash \bar{\phi}_j)$ y esto $\forall\ \phi_i \in B_i(s), \forall\ \phi_j \in B_j(s)$ (luego también $\forall \phi_i \in B_i(s_n), \forall \phi_j \in B_j(s_n)$). Entonces, como $\sigma_n \in F(s_n)$ $\forall n$, se tiene que

$$\sigma_{jn}(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon \cdot \sigma_{in}(\phi'_i) \qquad \forall n \geqslant N$$

con lo que, tomando límites, obtenemos

$$\sigma_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon \cdot \sigma_i(\phi'_i) \qquad \forall n \geqslant N$$

Con esto queda probado que σ verifica la primera propiedad.

- Sean $\phi_i \in \Phi_i \backslash B_i(s), \phi'_j \in \Phi_j \backslash B_j(s)$ equivalentes en pago para i y j. Ya sabemos que $\exists\ N_1^{\phi_i}, N_2^{\phi'_j}$ tales que $\phi_i \in \Phi_i \backslash B_i(s_n)$, $\phi'_j \in \Phi_j \backslash B_j(s_n)$ $\forall n \geqslant N = \max\{N_1^{\phi_i}, N_2^{\phi'_j}\}$. Teniendo en cuenta esto, que la propiedad "equivalencia en pago" no depende de s y que $\sigma_n \in F(s_n)$ $\forall n$, se concluye que $\sigma_{ni}(\phi_i) = \sigma_{nj}(\phi'_j)$ $\forall n \geqslant N$. Tomando límites obtenemos $\sigma_i(\phi_i) = \sigma_j(\phi'_j)$. Con esto queda probado que σ verifica la segunda propiedad.

Por lo tanto hemos demostrado que $\sigma \in F(s)$ y, entonces, que F es semicontinua superiormente.

De todo lo dicho se deduce que estamos en condiciones de aplicar el teorema del punto fijo de Kakutani y, por lo tanto, F tendrá un punto fijo que, evidentemente, es el equilibrio ε-completo buscado. El teorema queda, pues, probado. □

Los teoremas 6.4 y 6.5 nos permiten enunciar el siguiente resultado.

COROLARIO 6.6

a) Todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ posee al menos un equilibrio perfectamente propio.

b) Todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ posee al menos un equilibrio fuertemente propio.

Retomemos ahora el problema en el que los pagos a los jugadores no son comparables. En tal caso hemos de definir un nuevo concepto que atrape las ideas incluidas por el equilibrio completo y que funcione en el contexto en el que ahora nos hallamos. Así surge el equilibrio completo normalizado cuya definición detallamos a continuación.

DEFINICION 6.7

En un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ diremos que $s_i \in S_i$, $s'_j \in S_j$ son equivalentes en pago normalizado para i y j si y sólo si , para cualquier $s^* \in S$,

$$\frac{H_i(s^*\backslash\phi_i) - H_i(s^*\backslash s_i)}{O_i} = \frac{H_j(s^*\backslash\phi_j) - H_j(s^*\backslash s'_j)}{O_j}$$

siendo $\phi_i \in B_i(s^*), \phi_j \in B_j(s^*)$.

Obsérvese que cuando hacemos i=j en la definición 6.7 obtenemos la 4.1 luego ésta es generalizada por aquélla.

DEFINICION 6.8

Dado $\varepsilon>0$ diremos que $s\in S$ es un equilibrio ε-completo normalizado de Γ si

* s es ε-perfectamente propio normalizado

* Si ϕ_i y ϕ'_j son equivalentes en pago normalizado para i y j entonces $s_i(\phi_i)= s_j(\phi'_j)$ y esto para cualquier $\phi_i\in \Phi_i\backslash B_i(s), \phi'_j\in \Phi_j\backslash B_j(s)$ y para cualquier $i,j \in \{1,...,n\}$.

<u>DEFINICION</u> <u>6.9</u>

Diremos que $s\in S$ es un equilibrio completo normalizado de Γ si existe un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,...,s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que:

* $\varepsilon_k>0\ \forall k,\ \lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k= 0$

* s^k es ε_k-completo normalizado $\forall k$.

* $\lim\limits_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)= s_i(\phi_i)\ \forall\phi_i\in \Phi_i, \forall i\in\{1,...,n\}$

Análogamente a como ocurría con el equilibrio completo, se verifica el siguiente resultado:

<u>TEOREMA</u> <u>6.10</u>

a) Todo equilibrio completo normalizado es perfectamente propio normalizado. El recíproco, en general, no se verifica.

b) Todo equilibrio completo normalizado es fuertemente propio. El recíproco, en general, no se verifica.

<u>DEMOSTRACION</u>

De la definición 6.8 se obtiene inmediatamente que todo equilibrio ε-completo normalizado es también ε-perfectamente propio normalizado y ε-fuertemente propio (esto último es consecuencia de la observación que sigue a la definición 6.7 relativa a que tal definición generaliza la 4.1). En consecuencia, si $s\in S$ es completo normalizado también será perfectamente propio normalizado y fuertemente propio.

El recíproco, en general, no se verifica. En efecto, ya habíamos probado que en Γ_{15} $(\alpha_2^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3)$ es fuerte y perfectamente propio pero no es completo. Más aún es perfectamente propio normalizado según se obtiene de considerar el mismo par de sucesiones que usábamos para probar que era perfectamente propio y de tener en cuenta que $O_2=O_3= 1$. Sin embargo $(\alpha_2^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3)$ no es completo normalizado. Efectivamente, si lo fuera existirían $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ en las condiciones de la definición 6.9. Obsérvese que, puesto que α_1^2 domina estrictamente a α_2^2 y α_1^3 domina estrictamente a α_2^3, se tendría para cualquier k que $\alpha_2^2\notin B_2(s^k)$, $\alpha_2^3\notin B_3(s^k)$. Por otro lado α_2^2 y α_2^3 son equivalentes en pago normalizado para J2 y J3 en Γ_{15}, como se deduce de tener en cuenta que $H_2(s\backslash\alpha_2^2) = H_3(s\backslash\alpha_2^3) = 0$ $\forall s$, $H_2(s\backslash\alpha_1^2)= H_3(s\backslash\alpha_1^3)= 1$ $\forall s$, $\alpha_1^2\in B_2(s),\alpha_1^3\in B_3(s)$ $\forall s$ y $O_2 = O_3 = 1$. En consecuencia debería ocurrir que $s_2^k(\alpha_2^2)= s_3^k(\alpha_2^3)$ (y por tanto $s_2^k(\alpha_1^2)= s_3^k(\alpha_1^3)$) $\forall k\in\mathbb{N}$. Pero entonces, como

$$H_1(s^k\backslash\alpha_1^1)= s_2^k(\alpha_1^2)\cdot s_3^k(\alpha_1^3) + 300\cdot s_2^k(\alpha_1^2)\cdot s_3^k(\alpha_2^3)$$
$$H_1(s^k\backslash\alpha_2^1)= s_2^k(\alpha_1^2)\cdot s_3^k(\alpha_1^3) + 2\cdot s_2^k(\alpha_2^2)\cdot s_3^k(\alpha_1^3)$$

se tendría $H_1(s^k\backslash\alpha_2^1)< H_1(s^k\backslash\alpha_1^1)$ $\forall k$, luego $s_1^k(\alpha_2^1)\leqslant \varepsilon_k\cdot s_1^k(\alpha_1^1)$

$\forall k$, con lo que sería imposible que $\lim_{k\to\infty} s_1^k(\alpha_2^1)=1$, $\lim_{k\to\infty} s_1^k(\alpha_1^1)=0$ lo cual contradice el hecho de que $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ son sucesiones en las condiciones de la definición 6.9. En consecuencia el teorema queda demostrado. □

Sin embargo $(\alpha_1^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3)$ es completo normalizado en Γ_{15}. Para probarlo basta considerar el par de sucesiones que usábamos para probar que era completo y llevar a cabo un razonamiento análogo (casi idéntico) al que hacíamos entonces. En general se puede demostrar el siguiente resultado:

TEOREMA 6.11

Todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ posee al menos un equilibrio completo normalizado.

DEMOSTRACION

La demostración de este teorema es esencialmente la misma que la del 6.5. Por eso nos remitiremos a ésta última continuamente.

Se tratará también aquí de demostrar que existe un equilibrio ε-completo normalizado para cualquier $\varepsilon \in (0,1)$. Para ello definimos γ, $S_i(\gamma)$, $S(\gamma)$ como en 6.5 y $F(s)$ del siguiente modo:

$F(s)= \{\sigma \in S(\gamma)/$ si para unos ciertos i y j

$$\frac{H_i(s\backslash\phi_i)- H_i(s\backslash\phi'_i)}{O_i} < \frac{H_j(s\backslash\phi_j)- H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)}{O_j}$$

con $\phi_i\in B_i(s),\phi_j\in B_j(s)$ entonces ha de ocurrir que:

$\sigma_j(\bar{\phi}_j)\leqslant \varepsilon\cdot\sigma_i(\phi'_i)$

y esto $\forall\phi'_i\in \Phi_i,\forall\bar{\phi}_j\in \Phi_j$, $\forall i,j$; $\sigma_i(\phi_i)= \sigma_j(\phi'_j)$ para cualquier par ϕ_i,ϕ'_j de estrategias equivalentes en pago normalizado para i y j con $\phi_i\in \Phi_i\backslash B_i(s)$, $\phi'_j\in \Phi_j\backslash B_j(s)$ $\forall i,j\in\{1,...,n\}\}$

y esto para cualquier $s \in S(\gamma)$.

Es evidente que $S(\gamma)$ es convexo, compacto y no vacío y que F(s) es convexo y compacto para todo $s \in S(\gamma)$. La demostración de que F(s) es no vacío para cualquier $s \in S(\gamma)$ es completamente análoga a la que hacíamos en 6.5 definiendo como entonces σ pero siendo ahora

$$A(s,\phi'_i)= \sum_{j=1}^{n} \left|\left\{\bar{\phi}_j / \frac{H_j(s\backslash\phi_j)-H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)}{O_j} < \frac{H_i(s\backslash\phi_i)-H_i(s\backslash\phi'_i)}{O_i}\right\}\right|$$

siendo $\phi_j\in B_j(s),\phi_i\in B_i(s)$.

Por último se puede probar como en 6.5 (las variaciones en la demostración son mínimas) que F es semicontinua superiormente. En consecuencia podemos aplicar el teorema de Kakutani que nos garantiza que F posee al menos un punto fijo que es evidentemente el equilibrio ε-completo normalizado que buscábamos. □

Es consecuencia inmediata de este teorema y del 6.10 el siguiente resultado.

COROLARIO 6.12

Todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal posee al menos un equilibrio perfectamente propio normalizado.

OBSERVACION 6.13

Al igual que hacíamos al final del capítulo anterior comentaremos brevemente la ausencia de relación entre el equilibrio completo y el equilibrio completo normalizado tal como cabía esperar del hecho de que son conceptos diseñados para ser usados en contextos distintos (por lo que, aún cuando existiera alguna relación entre ellos, no tendría ningún interés). En efecto, obsérvese que en Γ_{13} $\alpha_1^2 \in B_2(s)$ $\forall s$, $\alpha_1^3 \in B_3(s)$ $\forall s$ y no existe ninguna pareja de estrategias involucrando a $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_2^2$ o α_2^3 de la que se pueda decir que sus componentes son equivalentes en pago o equivalentes en pago normalizado. En consecuencia $(\alpha_2^1, \alpha_1^2, \alpha_1^3)$, que era perfectamente propio, es completo pero no es completo normalizado pues ya sabíamos que ni siquiera era perfectamente propio normalizado. Por otro lado $(\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_1^3)$, que era perfectamente propio normalizado, será completo normalizado pero no completo pues ni siquiera era perfectamente propio.

Por último hagamos la siguiente observación.

OBSERVACION 6.14

Comentábamos al principio del capítulo que las hipótesis H1, H2, H3 y H4 pueden no ser aceptables en alguna situación. Puede incluso que en algunos casos algunas de estas hipótesis sean aceptables y otras no. Por eso puede resultar conveniente introducir un concepto para cada una de las combinaciones de uno, dos, tres y cuatro de estas hipótesis (convenientemente modificadas para que sean complementarias). Así pues diremos que $s\in S$ es un equilibrio NP/A/B/C/D (donde A vale 0 o 1, B vale 0,1 o M1 y C y D valen 0,1 o N1) si verifica que existe un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}=\{(s_1^k,\dots,s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que:

* s^k es completamente mixta $\forall k$.

* $\varepsilon_k>0$ $\forall k$, $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$

* $\lim_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)= s_i(\phi_i)$ $\forall\phi_i\in\Phi_i,\forall i\in\{1,\dots,n\}$

* Si $H_i(s^k\backslash\phi_i)< H_i(s^k\backslash\phi'_i) \Rightarrow s_i^k(\phi_i)\leqslant\varepsilon_k$ $\quad\forall\phi_i,\phi'_i\in\Phi_i$ $\forall i$, $\forall k$

y además, para todo $k\in\mathbb{N}$

* Si A=1 y $H_i(s^k\backslash\phi_i)< H_i(s^k\backslash\phi'_i)$ entonces $s_i^k(\phi_i)\leqslant\varepsilon_k\cdot s_i^k(\phi'_i)$ y esto $\forall\phi_i,\phi'_i\in\Phi_i$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$.

* Si B=1 y ϕ_i,ϕ'_i son equivalentes en pago para el jugador i entonces $s_i^k(\phi_i)= s_i^k(\phi'_i)$ y esto $\forall\phi_i,\phi'_i\in\Phi_i\backslash B_i(s^k)$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$.

* Si B=M1 y ϕ_i,ϕ'_i son equivalentes en pago para el jugador i entonces $s_i^k(\phi_i)= s_i^k(\phi'_i)$ y esto $\forall\phi_i,\phi'_i\in\Phi_i$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$.

* Si C=1 y si $H_i(s^k\backslash\phi_i) - H_i(s^k\backslash\phi'_i) < H_j(s^k\backslash\phi_j) - H_j(s^k\backslash\bar{\phi}_j)$ con $\phi_i \in B_i(s^k), \phi_j \in B_j(s^k)$ entonces $s^k_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon_k \cdot s^k_i(\phi'_i)$ y esto $\forall\phi'_i \in \Phi_i, \forall\bar{\phi}_j \in \Phi_j$, $\forall i \neq j$.

* Si C=N1 y si se verifica que:

$$\frac{H_i(s^k\backslash\phi_i) - H_i(s^k\backslash\phi'_i)}{O_i} < \frac{H_j(s^k\backslash\phi_j) - H_j(s^k\backslash\bar{\phi}_j)}{O_j}$$

con $\phi_i \in B_i(s^k), \phi_j \in B_j(s^k)$ entonces ha de ocurrir que:

$$s^k_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon_k \cdot s^k_i(\phi'_i)$$

y esto $\forall\phi'_i \in \Phi_i, \forall\bar{\phi}_j \in \Phi_j$, $\forall i \neq j$.

* Si D=1 y ϕ_i y ϕ'_j son equivalentes en pago para i y j entonces $s^k_i(\phi_i) = s^k_j(\phi'_j)$ y esto para cualquier $\phi_i \in \Phi_i\backslash B_i(s^k)$, $\phi'_j \in \Phi_j\backslash B_j(s^k)$ y para cualquier $i \neq j$.

* Si D=N1 y ϕ_i y ϕ'_j son equivalentes en pago normalizado para i y j entonces $s^k_i(\phi_i) = s^k_j(\phi'_j)$ y esto para cualquier $\phi_i \in \Phi_i\backslash B_i(s^k), \phi'_j \in \Phi_j\backslash B_j(s^k)$ y para cualquier $i \neq j$.

Siguiendo la notación empleada en esta definición llamaríamos NP/1/1/1/1 al equilibrio completo, NP/1/1/N1/N1 al completo normalizado, NP/1/0/1/0 al perfectamente propio, NP/1/0/N1/0 al perfectamente propio normalizado, NP/1/1/0/0 al fuertemente propio, NP/1/M1/0/0 al fuertemente propio modificado, NP/1/0/0/0 al propio y NP/0/0/0/0 al perfecto. Esta notación, además de ser muy simple, nos permite disponer de otros equilibrios como por ejemplo el NP/0/0/1/1 o el NP/1/1/1/0 que podrían tener interés en algunas situaciones.

CAPITULO 7 EL EQUILIBRIO ESTRICTAMENTE PROPIO

Todos los conceptos que hemos introducido hasta ahora recogen la idea de que un equilibrio de Nash, para ser aceptable, debiera ser estable ante al menos una tendencia racional al error por parte de los jugadores. Los distintos refinamientos a los que nos hemos referido han ido matizando de diversas maneras el sentido en el que se debe entender esa racionalidad.

Sin embargo, parecería lógico proponer como propiedad deseable para una solución la de que fuera estable no ante una sino ante cualquier tendencia al error por parte de los jugadores. Esta es la idea que inspiró a Okada su equilibrio estrictamente perfecto introducido en 1981. El problema es que, según veremos, esta idea no conduce a un concepto que exista en todo juego n-personal finito en forma normal. Por eso hemos de conformarnos con conceptos que busquen equilibrios estables ante alguna perturbación de las estrategias y, en ese caso, parece conveniente no admitir que esa perturbación pueda ser increíble: debe ser de algún modo razonable. Esta es la consideración que ha dado lugar a los capítulos anteriores.

Pero entremos en el concepto de Okada.

DEFINICION 7.1

Dado un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ diremos que $s\in S$ es un equilibrio estrictamente perfecto si, para cualquier sucesión de perturbaciones $\{\eta^k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\lim_{k\to\infty} \eta_i^k(\phi_i)=0$ $\forall\phi_i\in \Phi_i$ y $\forall i$, se verifica que $\exists$ $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en S verificando que:

a) $\lim_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i)= s_i(\phi_i)$ $\forall\phi_i\in \Phi_i, \forall i\in\{1,\dots,n\}$.

b) s^k es un equilibrio de (Γ,η^k) $\forall k$.

Como ya habíamos indicado, este concepto no conduce a una solución en cada juego. En efecto, es inmediato comprobar que el juego Γ_{16} que incluimos a continuación no posee equilibrios estrictamente perfectos.

	β_1	β_2	β_3
α_1	1, 1	1, 0	0, 0
α_2	1, 1	0, 0	1, 0

Γ_{16}

Okada también introdujo en su artículo las tres siguientes condiciones suficientes para que un cierto equilibrio de Nash sea estrictamente perfecto.

TEOREMA 7.2

$s \in S$ es un equilibrio estrictamente perfecto de un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ si al menos una de las tres condiciones siguientes se cumple:

a) s es el único equilibrio de Nash de Γ.

b) s es un equilibrio de Nash completamente mixto.

c) s es un equilibrio estricto, es decir, verifica

$$H_i(s) > H_i(s \backslash s'_i) \quad \forall s'_i \in S_i, \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

A la vista de la definición 2.3 es inmediato que todo equilibrio estrictamente perfecto es perfecto (puesto que siempre es posible encontrar una sucesión de perturbaciones que tienda a cero). Okada también afirmó en su artículo (un poco a la ligera) que todo equilibrio estrictamente perfecto es también propio. Este hecho aparentemente es inmediato (pues el equilibrio estrictamente perfecto está concebido para ser un equilibrio de Nash estable ante cualquier tendencia al error por parte de los jugadores y el propio para ser un equilibrio de Nash estable ante alguna tendencia racional, en un cierto sentido, al error de los jugadores). Sin embargo, por ahora no pasa de ser una conjetura, puesto que no se ha probado su veracidad aunque tampoco se ha encontrado un ejemplo que demuestre su falsedad. Como ya hemos comentado en el tercer capítulo de esta memoria, todo esto es debido al hecho de que el concepto de Myerson va más allá de los presupuestos que motivaron su introducción: es más fuerte de lo que parece.

Para evitar estos problemas, van Damme introduce en su tesis doctoral el equilibrio estrictamente propio que resulta de añadir una condición de regularidad al concepto de Okada. Formalmente:

Sea un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ y sea h una perturbación de Γ. Denotaremos

$$U_h = \left\{ \eta \text{ perturbación de } \Gamma / \ \eta_i(\phi_i) < h_i(\phi_i) \quad \forall \phi_i \in \Phi_i, \forall i \right\}$$

$$E(\Gamma, h) = \left\{ \text{equilibrios del juego perturbado } (\Gamma, h) \right\}.$$

Entonces podemos dar la siguiente definición.

<u>DEFINICION</u> <u>7.3</u>

Diremos que $s \in S$ es un equilibrio estrictamente propio de Γ si existe una perturbación h y una aplicación continua s de U_h en S, con $s(\eta) \in E(\Gamma, \eta)$ $\forall \eta \in U_h$ y tal que cualquier sucesión $\{\eta^k\}_{k=1}^{\infty} \subset U_h$ verificando que $\lim_{k \to \infty} \eta_i^k(\phi_i) = 0$ $\forall \phi_i \in \Phi_i, \forall i$, cumple que $\lim_{k \to \infty} [s(\eta^k)]_i(\phi_i) = s_i(\phi_i)$ $\forall \phi_i \in \Phi_i, \forall i$.

Es evidente que todo equilibrio estrictamente propio es estrictamente perfecto. Si el recíproco se verifica o no es un tema que hoy continúa abierto. En cualquier caso, van Damme (1983) probó el siguiente resultado.

<u>TEOREMA</u> <u>7.4</u>

Todo equilibrio estrictamente propio es propio.

En consecuencia el equilibrio estrictamente propio constituye un refinamiento estricto del de Myerson. Nosotros, yendo más lejos, probaremos los resultados siguientes.

TEOREMA 7.5

Todo equilibrio estrictamente propio es completo.

DEMOSTRACION

Sea Γ un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal y sea s^1 un equilibrio estrictamente propio de Γ. Sean h y s como en la definición 7.3. Sean ε y V_ε dados por:

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ h_i(\phi_i) / \phi_i \in \Phi_i, i \in \{1,...,n\} \right\}$$

$$V_\varepsilon = \left\{ \eta \in U_h \;/\; \varepsilon^{\sum_{i=1}^{n} m_i + 1} \leqslant \eta_i(\phi_i) \leqslant \varepsilon \quad \forall \phi_i \in \Phi_i, \forall i \in \{1,...,n\} \right\}$$

y definamos la aplicación F de S en $P(V_\varepsilon)$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} F(s) = \Big\{ \eta \in V_\varepsilon \;/\; & \text{si } H_i(s\backslash\phi_i) - H_i(s\backslash\phi'_i) < H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\bar{\phi}_j) \\ & \text{con } \phi_i \in B_i(s), \phi_j \in B_j(s) \text{ entonces } \eta_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon \cdot \eta_i(\phi'_i) \text{ y} \\ & \text{esto } \forall \phi'_i \in \Phi_i, \forall \bar{\phi}_j \in \Phi_j, \quad \forall i,j; \quad \eta_i(\phi_i) = \eta_j(\phi'_j) \text{ para} \\ & \text{cualquier par } \phi_i, \phi'_j \text{ de estrategias equivalentes en} \\ & \text{pago para i y j con } \phi_i \in \Phi_i \backslash B_i(s), \quad \phi'_j \in \Phi_j \backslash B_j(s) \\ & \forall i,j \in \{1,...,n\} \Big\} \end{aligned}$$

para cualquier $s \in S$. Podemos entonces definir la aplicación G de V_ε en $P(V_\varepsilon)$ por $G(\eta) = F(s(\eta))$.

$$
\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dr, "F"] & \\
V_\varepsilon \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "G"'] & & F(V_\varepsilon)
\end{tikzcd}
$$

Lo que vamos a probar a continuación es que G está en las condiciones del teorema del punto fijo de Kakutani. En efecto, es inmediato que V_ε es convexo, compacto y no vacío y que $G(\eta)$ es convexo y compacto $\forall \eta \in V_\varepsilon$. Basta, pues, probar que $G(\eta)$ es no vacío $\forall\eta$ y que G es semicontinua superiormente.

· Sea $\eta \in V_\varepsilon$. Probemos que $G(\eta) = F(s(\eta))$ es no vacío. Definimos, para todo $\phi_i \in \Phi_i$ y para todo i

$$\hat{\eta}_i(\phi_i) = \varepsilon^{A(s(\eta),\phi_i)+1}$$

donde por $A(s(\eta),\phi_i)$ entendemos lo mismo que en el teorema 6.5. En tal caso es evidente que $\varepsilon^{\sum_{i=1}^{n} m_i +1} \leqslant \hat{\eta}_i(\phi_i) \leqslant \varepsilon$ para todo ϕ_i de Φ_i y para todo i, y que $\hat{\eta}$ verifica las demás condiciones para estar en $F(s(\eta))$, con lo que $G(\eta)$ es no vacío.

· La demostración de que G es semicontinua superiormente es absolutamente análoga a la que realizamos en el teorema 6.5 teniendo en cuenta que s es continua con lo que $H_i(s(\eta)\backslash\phi_i)$ es continua en η para todo ϕ_i de Φ_i y para todo i.

De todo lo dicho obtenemos que, según el teorema del punto fijo de Kakutani, G tiene al menos un punto fijo. Sea η^ε ese punto fijo y denotemos $s^\varepsilon = s(\eta^\varepsilon)$. En tal caso tenemos:

· Para cualesquiera $\phi'_i \in \Phi_i$, $\bar{\phi}_j \in \Phi_j$, para todo i,j, si $H_i(s^\varepsilon\backslash\phi_i) - H_i(s^\varepsilon\backslash\phi'_i) < H_j(s^\varepsilon\backslash\phi_j) - H_j(s^\varepsilon\backslash\bar{\phi}_j)$ con $\phi_i \in$

$B_i(s^\varepsilon)$, $\phi_j \in B_j(s^\varepsilon)$ entonces $\eta_j^\varepsilon(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon\cdot\eta_i^\varepsilon(\phi'_i)$. Pero obsérvese que $s^\varepsilon = s(\eta^\varepsilon) \in E(\Gamma,\eta^\varepsilon)$ con lo que, como en tales condiciones $\bar{\phi}_j \notin B_j(s^\varepsilon)$, se tendrá que $s_j^\varepsilon(\bar{\phi}_j) = \eta_j^\varepsilon(\bar{\phi}_j)$. Por otro lado es claro que $s_i^\varepsilon(\phi'_i) \geqslant \eta_i^\varepsilon(\phi'_i)$. En consecuencia

$$s_j^\varepsilon(\bar{\phi}_j) = \eta_j^\varepsilon(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon\cdot\eta_i^\varepsilon(\phi'_i) \leqslant \varepsilon\cdot s_i^\varepsilon(\phi'_i).$$

· Además para cualquier par ϕ_i, ϕ'_j de estrategias equivalentes en pago para i y j con $\phi_i \in \Phi_i \backslash B_i(s^\varepsilon)$, $\phi'_j \in \Phi_j \backslash B_j(s^\varepsilon)$, para cualquier $i,j \in \{1,...,n\}$, se verifica que $\eta_i^\varepsilon(\phi_i) = \eta_j^\varepsilon(\phi'_j)$. Obsérvese que $\phi_i \notin B_i(s^\varepsilon)$ y $\phi'_j \notin B_j(s^\varepsilon)$ y además $s^\varepsilon \in E(\Gamma,\eta^\varepsilon)$ con lo que $s_i^\varepsilon(\phi_i) = \eta_i^\varepsilon(\phi_i)$ y $s_j^\varepsilon(\phi'_j) = \eta_j^\varepsilon(\phi'_j)$ y por lo tanto $s_i^\varepsilon(\phi_i) = s_j^\varepsilon(\phi'_j)$.

En consecuencia s^ε es ε-completo. En tal caso, si elegimos una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ de modo que, para todo k, $0 < \varepsilon_k < \min\left\{h_i(\phi_i)/\phi_i \in \Phi_i, i\in\{1,...,n\}\right\}$ y tal que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, encontraremos una sucesión $\{\eta^{\varepsilon_k}\}_{k=1}^\infty \subset U_h$ (que, por ser $\eta^{\varepsilon_k} \in V_{\varepsilon_k}$ y por tenerse que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, verifica que $\lim_{k\to\infty} \eta^{\varepsilon_k} = 0$) que es tal que $s(\eta^{\varepsilon_k})$ es ε_k-completo $\forall$k. Pero, por la definición de equilibrio estrictamente propio, en tales condiciones, $\lim_{k\to\infty} [s(\eta^{\varepsilon_k})]_i(\phi_i) = s_i^1(\phi_i)$ para todo $\phi_i \in \Phi_i$, para todo i. Este último hecho garantiza que s^1 es completo. □

TEOREMA 7.6

Todo equilibrio estrictamente propio es completo normalizado.

DEMOSTRACION

La demostración es completamente análoga a la del teorema anterior sin más que definir

$F(s)= \{ \eta \in V_{\varepsilon}$ / si se verifica que

$$\frac{H_i(s\backslash\phi_i)- H_i(s\backslash\phi'_i)}{O_i} < \frac{H_j(s\backslash\phi_j)- H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)}{O_j}$$

con $\phi_i \in B_i(s), \phi_j \in B_j(s)$ entonces ha de ocurrir que:

$$\eta_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon \cdot \eta_i(\phi'_i)$$

y esto $\forall \phi'_i \in \Phi_i, \forall \bar{\phi}_j \in \Phi_j, \ \forall i,j;\ \eta_i(\phi_i)= \eta_j(\phi'_j)$ para cualquier par ϕ_i, ϕ'_j de estrategias equivalentes en pago normalizado para i y j con $\phi_i \in \Phi_i \backslash B_i(s)$, $\phi'_j \in \Phi_j \backslash B_j(s)\ \forall i,j \in \{1,...,n\} \}$

para cualquier s $\in$ S, y $A(s(\eta),\phi_i)$ como en el teorema 6.11. □

En consecuencia tenemos que el equilibrio estrictamente propio es un refinamiento estricto de los equilibrios completo y completo normalizado (nótese que es evidente que no todo equilibrio completo (normalizado) es estrictamente propio, ni siquiera estrictamente perfecto, como se deduce de tener en cuenta que Γ_{16} no posee equilibrios estrictamente perfectos).

Sin embargo no es cierto que todo equilibrio estrictamente propio sea fuertemente propio modificado. Efectivamente, téngase en cuenta para empezar que se verifica el siguiente teorema.

TEOREMA 7.7

Si $s \in S$ es un equilibrio de Nash completamente mixto entonces es estrictamente propio.

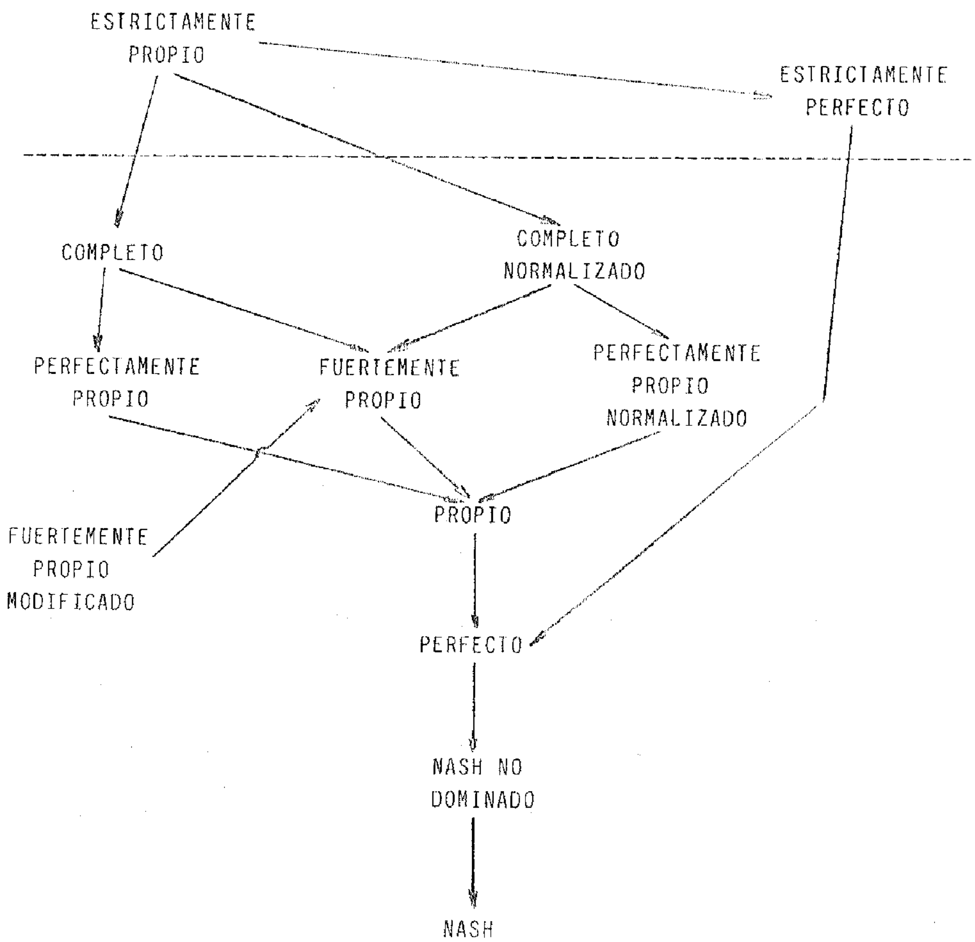
DEMOSTRACION

La demostración es inmediata sin más que tomar

$$\begin{array}{ll} h_i(\phi_i) < s_i(\phi_i) & \forall \phi_i \in \Phi_i, \forall i \in \{1,...,n\} \\ s(\eta) = s & \forall \eta \in U_h \end{array} \qquad \square$$

Por otro lado téngase en cuenta que, por ejemplo en Γ_5, (s_1,s_2) con $s_1(\alpha_1)=2/10$, $s_1(\alpha_2)=3/10$, $s_1(\alpha_3)=1/2$, $s_2(\beta_1)=5/6$, $s_2(\beta_2)=1/6$ es un equilibrio de Nash completamente mixto (y por tanto estrictamente propio según el teorema 7.7). Sin embargo no es fuertemente propio modificado puesto que α_1 y α_2 son estrategias equivalentes en pago para el primer jugador y s_1 no les asigna la misma probabilidad.

Para acabar este capítulo incluimos una tabla con todos los conceptos introducidos hasta el momento y las relaciones existentes entre ellos.



Nota: Todas estas flechas indican refinamientos estrictos excepto, quizá, la que va del estrictamente propio al estrictamente perfecto. Los conceptos por debajo de la línea de puntos existen en cualquier juego.

CAPITULO 8 EL EQUILIBRIO PERSISTENTE

Hasta ahora hemos estudiado refinamientos del concepto de equilibrio de Nash via perturbación de las estrategias. Hemos repasado algunos conceptos ya clásicos y hemos introducido otros nuevos. Todos ellos responden a la idea de que un equilibrio de Nash debería ser estable ante cualquier tendencia al error por parte de los jugadores pero que, como esto no conduce a un concepto de solución para el que se verifique la existencia en cualquier juego n-personal finito en forma normal, nos debemos conformar con buscar equilibrios de Nash estables ante al menos una tendencia al error por parte de los jugadores, pero aceptando solamente tendencias "creíbles" de acuerdo a determinados criterios.

Obsérvese, sin embargo, que en el teorema 7.7 probamos que todo equilibrio de Nash completamente mixto es estrictamente propio, con lo que los tales equilibrios completamente mixtos son automáticamente considerados estables por cualquiera de los conceptos vistos hasta el momento, excepto por el fuertemente propio modificado que, en cualquier caso, posee la siguiente propiedad.

TEOREMA 8.1

Sea Γ un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal y sea $s\in S$ un equilibrio de Nash completamente mixto de Γ. Entonces una condición necesaria y suficiente para que s sea fuertemente propio modificado es que, para todo i, $s_i(\phi_i)= s_i(\phi'_i)$ para cualesquiera ϕ_i,ϕ'_i equivalentes en pago para el jugador i.

DEMOSTRACION

" $\Rightarrow$ " (necesidad)

Si s es fuertemente propio modificado, es límite de una sucesión $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ de equilibrios ε_k-fuertemente propios modificados (con $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k= 0$). En tal caso, para todo i, para cualesquiera ϕ_i,ϕ'_i equivalentes en pago para i, $s^k_i(\phi_i)= s^k_i(\phi'_i)$ $\forall k$, con lo que $s_i(\phi_i)= s_i(\phi'_i)$.

" $\Leftarrow$ " (suficiencia)

Por hipótesis s es completamente mixto y $s_i(\phi_i)= s_i(\phi'_i)$ $\forall\phi_i,\phi'_i$ equivalentes en pago para i, $\forall$i. Además, por ser s un equilibrio de Nash, para todo i, $\forall\phi_i,\phi'_i\in \Phi_i$,

$$H_i(s\backslash\phi_i)< H_i(s\backslash\phi'_i) \Rightarrow s_i(\phi_i)= 0 \Rightarrow s_i(\phi_i)\leq \varepsilon\cdot s_i(\phi'_i) \quad (\forall\ \varepsilon>0).$$

A consecuencia de todo esto, s es ε-fuertemente propio modificado para cualquier $\varepsilon>0$, con lo que s es fuertemente propio modificado. $\square$

Por lo tanto todos los conceptos vistos hasta el momento conceden de alguna manera un trato especial a los equilibrios de Nash completamente mixtos, que son automáticamente aceptados en todos los casos (salvo por el concepto fuertemente propio modificado que les exige la condición indicada en el teorema 8.1). Sin embargo, ¿es esto razonable?, ¿son siempre estables los equilibrios de Nash completamente mixtos?. La respuesta a estas preguntas es negativa. En efecto, considérese por ejemplo el juego siguiente.

	β_1	β_2
α_1	1, 1	0, 0
α_2	0, 0	1, 1

Γ_{17}

Γ_{17} posee tres equilibrios de Nash: (α_1,β_1), (α_2,β_2) y $\bar{s}=(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ siendo $\bar{s}_1(\alpha_1)= \bar{s}_1(\alpha_2)= \bar{s}_2(\beta_1)= \bar{s}_2(\beta_2)= 1/2$. Obsérvese que $\bar{s}$ es un equilibrio completamente mixto y que en Γ_{17} ningún jugador tiene estrategias equivalentes en pago entre las puras. En consecuencia $\bar{s}$ es estrictamente propio y fuertemente propio modificado. Sin embargo $\bar{s}$ es altamente inestable. En efecto, en cuanto un jugador tiende a separarse de su estrategia (1/2,1/2), el otro inmediatamente preferirá una de sus estrategias puras. Por el contrario los equilibrios puros del juego son estables ante cualquier tendencia al error por parte de los jugadores. A la vista de esto, Γ_{17} nos proporciona un ejemplo de un equilibrio de Nash completamente mixto que es francamente malo desde el punto de vista de la estabilidad y que, sin embargo, es aceptado por todos los conceptos que se obtienen de refinar el de Nash mediante la perturbación de las estrategias.

Este problema se lo plantearon Kalai y Samet en 1984 y llegaron a la conclusión de que se hacía preciso buscar un nuevo modo de formalizar la estabilidad de manera que fuese posible dar un concepto capaz de rechazar equilibrios completamente mixtos que sean inestables. Kalai y Samet también observaron que la búsqueda de ese nuevo concepto se ha de realizar con cautela como demuestra el ejemplo siguiente.

	β_1	β_2
α_1	1, -1	-1, 1
α_2	-1, 1	1, -1

Γ_{18}

El único equilibrio de Nash de este juego es s con $s_1(\alpha_1)= s_1(\alpha_2)= s_2(\beta_1)= s_2(\beta_2)= 1/2$. Este equilibrio también es altamente inestable, pues cualquier jugador preferirá una de sus estrategias puras en cuanto el otro tienda a separarse de su estrategia (1/2,1/2). El problema es que, así como cualquier desviación del equilibrio completamente mixto iba a acabar conduciendo a un equilibrio puro en Γ_{17}, en Γ_{18} una desviación del equilibrio no conduce a ninguna parte puesto que no hay más equilibrios en el juego. Por tanto s en Γ_{18}, a pesar de ser altamente inestable, es aceptable por ser el único punto admisible en el contexto no cooperativo, al ser el único que verifica la condición de Nash. Es por esto que Kalai y Samet advirtieron la necesidad de obrar con precaución, pues se trata de definir un nuevo concepto que sea capaz de rechazar equilibrios completamente mixtos que sean inestables pero que, al mismo tiempo, conduzca a al menos una solución en todo juego n-personal finito en forma normal. Así introducen su equilibrio persistente que pasamos a definir formalmente a continuación. Todas las demostraciones que se omiten en este capítulo pueden encontrarse en Kalai-Samet (1984).

Sea un juego n-personal finito no cooperativo en forma normal Γ. Llamaremos retracto de Γ a un $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ tal que cada R_i es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío del correspondiente S_i. Dado $A \subset S$, diremos que el retracto R absorbe a A si, para cada $s \in A$, $\exists$ $s' \in R$ tal que s' es una respuesta óptima a s.

Diremos que un retracto R es de Nash si se absorbe a sí mismo. Obsérvese que la noción de retracto de Nash puede entenderse como un nuevo concepto de solución "set-valued" en el contexto no cooperativo, pues posee la propiedad que debe tener cualquier solución en dicho contexto: se autoimpone, en el sentido de que, una vez que se propone a los jugadores que jueguen en R, ninguno de ellos tiene motivos para elegir estrategias fuera de su R_i. Sin embargo, como concepto no es demasiado bueno pues téngase en cuenta, por ejemplo, que S siempre es un retracto de Nash. Por ello, para que tenga interés, parece que hemos de imponerle una condición de minimalidad.

Diremos entonces que R es un retracto de Nash minimal si no contiene propiamente otro retracto de Nash. Usando el teorema del punto fijo de Kakutani se puede probar el resultado siguiente.

TEOREMA 8.2

Todo retracto de Nash contiene un equilibrio de Nash.

Del teorema 8.2, de la definición de retracto de Nash minimal y del hecho inmediato de que si s es un equilibrio de Nash entonces {s} es un retracto de Nash, se obtiene la propiedad siguiente.

TEOREMA 8.3

Un retracto de Nash R es minimal si y sólo si R = {s} siendo s un equilibrio de Nash.

Hemos obtenido así una nueva caracterización del concepto de Nash. Kalai y Samet se propusieron entonces refinarlo siguiendo una trayectoria análoga a la que hemos descrito hasta llegar a esta caracterización.

Diremos pues que un retracto R es absorbente si, para algún entorno T de R (en la topología inducida en S como subespacio del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^{n}|\phi_i|}$), R absorbe a T. Siguiendo la misma filosofía que con los retractos de Nash, sería deseable "reducir" los retractos absorbentes tanto como sea posible. Se dice entonces que un retracto R es persistente si es un retracto absorbente minimal (que no contiene propiamente otro retracto absorbente). Se demuestra el siguiente resultado.

TEOREMA 8.4

Todo juego posee un retracto persistente.

Ahora estamos en condiciones, por fin, de dar la definición de equilibrio persistente.

DEFINICION 8.5

Diremos que $s \in S$ es un equilibrio persistente si es un equilibrio de Nash y pertenece a algún retracto persistente.

Obsérvese que todo retracto persistente es absorbente, luego de Nash. Este hecho, junto con los teoremas 8.2 y 8.4 y teniendo en cuenta la definición 8.5, nos permite afirmar lo siguiente.

TEOREMA 8.6

Todo juego posee un equilibrio persistente.

Kalai y Samet probaron que en Γ_{17} sólo (α_1,β_1) y (α_2,β_2) son persistentes, con lo que hay equilibrios estrictamente propios y fuertemente propios modificados que no son persistentes. Por otro lado, encontraron un ejemplo de un equilibrio persistente que ni siquiera es perfecto (en un juego en el que el único retracto absorbente es todo S). Sin embargo también demostraron el teorema siguiente, que permite conciliar los dos enfoques expuestos en esta memoria en la búsqueda de refinamientos del equilibrio de Nash y seleccionar puntos que sean considerados estables desde los dos puntos de vista.

TEOREMA 8.7

Todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal posee al menos un equilibrio propio que también es persistente.

Nosotros hemos ido más lejos y hemos probado los siguientes resultados.

LEMA 8.8

Sea R un retracto absorbente. Entonces, para cualquier $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño, existe un equilibrio ε-completo $\bar{s}$ tal que, para algún $s \in R$, $|\bar{s}_i(\phi_i) - s_i(\phi_i)| \leqslant \varepsilon \quad \forall \phi_i \in \Phi_i, \forall i$.

<u>DEMOSTRACION</u>

Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Consideremos $\delta = \varepsilon^{\sum_{i=1}^{n} m_i + 1} / \sum_{i=1}^{n} m_i$ y entonces:

$$S_i(\delta) = \{s_i \in S_i / \ s_i(\phi_i) \geqslant \delta \quad \forall \phi_i \in \Phi_i\} \qquad \forall i=1,\dots,n$$

$$S(\delta) = S_1(\delta) x \dots x S_n(\delta).$$

Definamos el conjunto $W = \prod_{i=1}^{n} W_i$ dado por:

$$W_i = \{s_i \in S_i / \ \exists \ s_i \in R_i \text{ con } |s_i(\phi_i) - s_i(\phi_i)| \leqslant \varepsilon \ \forall \phi_i \in \Phi_i\}.$$

Es evidente que W_i es convexo y cerrado para todo i. Además claramente $R \subset W$ y, por ser R absorbente, si ε es suficientemente pequeño, R absorbe a W.

Definamos ahora F de $S(\delta) \cap W$ en $P(S(\delta) \cap W)$ del siguiente modo:

$F(s) = \{\bar{\sigma} \in S(\delta) \cap W / \text{ si } H_i(s\backslash\phi_i) - H_i(s\backslash\phi'_i) < H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)$ con $\phi_i \in B_i(s), \phi_j \in B_j(s)$ entonces $\bar{\sigma}_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon \cdot \bar{\sigma}_i(\phi'_i)$ y esto $\forall \phi'_i \in \Phi_i, \forall \bar{\phi}_j \in \Phi_j, \quad \forall i,j; \quad \bar{\sigma}_i(\phi_i) = \bar{\sigma}_j(\phi'_j)$ para cualquier par ϕ_i, ϕ'_j de estrategias equivalentes en pago para i y j con $\phi_i \in \Phi_i \backslash B_i(s), \quad \phi'_j \in \Phi_j \backslash B_j(s)$ $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}\}$

y esto para cualquier $s \in S(\delta) \cap W$.

Es evidente que $S(\delta) \cap W$ es convexo, compacto y no vacío y que F(s) es convexo y compacto $\forall \ s \in S(\delta) \cap W$. Comprobemos ahora que, para cualquier $s \in S(\delta)\cap W$, $F(s)$ es no vacío. En efecto, sea $s \in S(\delta)\cap W$. Como R absorbe a W existirá un $s^* \in R$ tal que s^* es una respuesta óptima a s. Por otro lado, dado s podemos construir σ como en el teorema 6.5, es decir, para cada $i\in\{1,...,n\}$

$$\sigma_i(\phi_i)= \frac{\varepsilon^{A(s,\phi_i)}}{\sum_{k=1}^{n} \sum_{\phi'_k\in\Phi_k} \varepsilon^{A(s,\phi'_k)}} \qquad \forall\phi_i\notin B_i(s)$$

$$\sigma_i(\phi_i)= \frac{1 - \sum_{\phi'_i\notin B_i(s)} \sigma_i(\phi'_i)}{|B_i(s)|} \qquad \forall\phi_i\in B_i(s)$$

donde $A(s,\phi'_k)= \sum_{j=1}^{n} |\{\bar{\phi}_j\in \Phi_j/H_j(s\backslash\phi_j)-H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)<H_k(s\backslash\phi_k)-H_k(s\backslash\phi'_k)$

con $\phi_j\in B_j(s),\phi_k\in B_k(s)\}|$

$\forall\phi'_k\in \Phi_k,\forall k\in\{1,...,n\}$.

Consideremos ahora $\bar{\sigma} =(\bar{\sigma}_1,...,\bar{\sigma}_n)$ dado por:

$$\bar{\sigma}_i(\phi_i)=(1-\varepsilon)\cdot s^*_i(\phi_i)+ \varepsilon\cdot\sigma_i(\phi_i) \quad \forall\phi_i\in \Phi_i,\forall i\in \{1,...,n\}.$$

Veamos que $\bar{\sigma} \in F(s)$.

· $\bar{\sigma} \in S(\delta)$ puesto que, $\forall\phi_i,\forall i$, $(1-\varepsilon)\cdot s^*_i(\phi_i)\geq 0$ y, según habíamos probado en el teorema 6.5, $\sigma_i(\phi_i)\geq \varepsilon^{\sum_{i=1}^{n} m_i}/\sum_{i=1}^{n} m_i$ con lo que $\varepsilon\cdot\sigma_i(\phi_i)\geq \delta$.

· $\bar{\sigma} \in W$ puesto que, $\forall\phi_i,\forall i$,

$$|\bar{\sigma}_i(\phi_i)- s^*_i(\phi_i)|=|\varepsilon\cdot(\sigma_i(\phi_i)-s^*_i(\phi_i))|\leq \varepsilon.$$

· Si $H_i(s\backslash\phi_i)- H_i(s\backslash\phi'_i)< H_j(s\backslash\phi_j)- H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)$ con $\phi_i\in B_i(s)$, $\phi_j\in B_j(s)$ (y para cualquier $i,j \in \{1,...,n\}$) entonces:

* Según habíamos probado en el teorema 6.5, en tal caso ocurrirá que $\sigma_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon \cdot \sigma_i(\phi'_i)$.

* Por otro lado téngase en cuenta que s^* es una respuesta óptima a s con lo que el teorema 1.3 nos asegura que $s^*_j(\bar{\phi}_j) = 0$ (pues si $H_i(s\backslash\phi_i) - H_i(s\backslash\phi'_i) < H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)$ con $\phi_i \in B_i(s)$, $\phi_j \in B_j(s)$ entonces $\bar{\phi}_j \notin B_j(s)$).

Por lo tanto $\bar{\sigma}_j(\bar{\phi}_j) = (1-\varepsilon)\cdot s^*_j(\bar{\phi}_j) + \varepsilon\cdot\sigma_j(\bar{\phi}_j) = \varepsilon\cdot\sigma_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon\cdot\varepsilon\cdot\sigma_i(\phi'_i) \leqslant \varepsilon\cdot[(1-\varepsilon)\cdot s^*_i(\phi'_i) + \varepsilon\cdot\sigma_i(\phi'_i)] = \varepsilon\cdot\bar{\sigma}_i(\phi'_i)$.

· Sean $\phi_i \in \Phi_i \backslash B_i(s)$, $\phi'_j \in \Phi_j \backslash B_j(s)$ equivalentes en pago para i y j (siendo $i,j \in \{1,...,n\}$ cualesquiera). En tal caso, según habíamos probado en el teorema 6.5, $\sigma_i(\phi_i) = \sigma_j(\phi'_j)$. Por otro lado, como $\phi_i \notin B_i(s)$ y $\phi'_j \notin B_j(s)$, el teorema 1.3 y el hecho de que s^* es una respuesta óptima a s nos permiten asegurar que $s^*_i(\phi_i) = s^*_j(\phi'_j) = 0$ con lo que es evidente que $\bar{\sigma}_i(\phi_i) = \bar{\sigma}_j(\phi'_j)$.

Por último indiquemos que ya en el teorema 6.5 habíamos probado que F era semicontinua superiormente como aplicación de $S(\delta)$ en $P(S(\delta))$ (en realidad en dicho teorema no se probaba para δ sino para δ/ε, pero el valor exacto de este parámetro no intervenía en la demostración). Entonces, como W es cerrado, se sigue de modo inmediato que F es semicontinua superiormente de $S(\delta) \cap W$ en $P(S(\delta) \cap W)$.

De todo lo dicho queda patente que estamos en condiciones de aplicar el teorema del punto fijo de Kakutani el cual nos asegura que $\exists\ \bar{s} \in F(\bar{s})$, con lo que el lema queda demostrado. □

TEOREMA 8.9

Todo retracto absorbente contiene un equilibrio completo.

DEMOSTRACION

Sea R un retracto absorbente. El lema anterior nos permite asegurar que existen $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{s^k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, s^k es ε_k-completo $\forall k$ y, también para cualquier k, existe $\mathit{s}^k \in$ R tal que $|s_i^k(\phi_i) - \mathit{s}_i^k(\phi_i)| \leq \varepsilon_k$ $\forall \phi_i \in \Phi_i$, $\forall i \in \{1,...,n\}$. Teniendo en cuenta esto y que S es compacto, existirá una subsucesión convergente de $\{\mathit{s}^k\}_{k=1}^{\infty}$ que , puesto que R también es compacto, convergerá a un punto de R el cual, en consecuencia, será un equilibrio completo. □

COROLARIO 8.10

Todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal posee al menos un equilibrio completo que también es persistente.

DEMOSTRACION

Es inmediato sin más que tener en cuenta el teorema 8.9, la definición 8.5 y el hecho de que todo retracto persistente es absorbente. □

Análogamente podrían probarse los siguientes resultados.

LEMA 8.11

Sea R un retracto absorbente. Entonces, para cualquier $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño, existe un equilibrio ε-completo normalizado $\bar{s}$ tal que, para algún $s \in R$, $|\bar{s}_i(\phi_i) - s_i(\phi_i)| \leqslant \varepsilon$ $\forall \phi_i \in \Phi_i, \forall i$.

DEMOSTRACION

Es la misma que la del lema 8.8 tomando:

$F(s) = \{ \bar{\sigma} \in S(\delta) \cap W$ / si se verifica que

$$\frac{H_i(s\backslash\phi_i) - H_i(s\backslash\phi'_i)}{O_i} < \frac{H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)}{O_j}$$

con $\phi_i \in B_i(s), \phi_j \in B_j(s)$ entonces ha de ocurrir que

$$\bar{\sigma}_j(\bar{\phi}_j) \leqslant \varepsilon \cdot \bar{\sigma}_i(\phi'_i)$$

y esto $\forall \phi'_i \in \Phi_i, \forall \bar{\phi}_j \in \Phi_j$, $\forall i,j$; $\bar{\sigma}_i(\phi_i) = \bar{\sigma}_j(\phi'_j)$ para cualquier par ϕ_i, ϕ'_j de estrategias equivalentes en pago normalizado para i y j con $\phi_i \in \Phi_i \backslash B_i(s)$, $\phi'_j \in \Phi_j \backslash B_j(s)$ $\forall i,j \in \{1,...,n\} \}$

para cualquier $s \in S(\delta) \cap W$ y definiendo

$$A(s,\phi'_k) = \sum_{j=1}^{n} \left| \left\{ \bar{\phi}_j \in \Phi_j \,/\, \frac{H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\bar{\phi}_j)}{O_j} < \frac{H_k(s\backslash\phi_k) - H_k(s\backslash\phi'_k)}{O_k} \right.\right.$$

$$\left.\left. \text{con } \phi_j \in B_j(s),\ \phi_k \in B_k(s) \right\} \right| \qquad \square$$

Del mismo modo que del lema 8.8 se obtenían el teorema 8.9 y el corolario 8.10, de 8.11 se obtienen:

TEOREMA 8.12

Todo retracto absorbente contiene un equilibrio completo normalizado.

COROLARIO 8.13

Todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal posee al menos un equilibrio completo normalizado que también es persistente.

Por último, nos proponemos estudiar si existen resultados de este estilo para el equilibrio fuertemente propio modificado. Para ello hemos de profundizar un poco más en el concepto de retracto persistente.

Consideremos en cada Φ_i la relación de equivalencia "ser equivalente en pago para i" (según la definición 4.1) y la partición a que ésta da lugar: $\Phi_i = \bigcup_{j=1}^{l_i} \Phi_i^j$. Denotaremos por $\mathrm{conv}(\Phi_i^j)$ la envoltura convexa de Φ_i^j.

Diremos que F_i es una selección de estrategias del jugador i si:

a) F_i es un subconjunto no vacío de S_i.

b) Si $s_i \in F_i$ entonces $\exists\ j \in \{1, ..., l_i\}$ tal que $s_i \in \mathrm{conv}(\Phi_i^j)$.

c) Si $s_i, s'_i \in F_i$ entonces s_i y s'_i no son equivalentes en pago para i.

Diremos que un retracto $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ es selectivo si, para cada i, $R_i = conv(F_i)$ siendo F_i una selección de estrategias del jugador i.

Kalai y Samet probaron en su artículo de 1984 el siguiente resultado.

TEOREMA 8.14

Todo retracto absorbente contiene un retracto absorbente selectivo.

Es consecuencia directa de este teorema la siguiente propiedad.

TEOREMA 8.15

Un retracto es persistente si y sólo si es absorbente selectivo minimal (en el sentido de que no contiene propiamente otro retracto absorbente selectivo).

DEMOSTRACION

Si R es un retracto persistente ha de ser también absorbente selectivo minimal pues, si no lo fuera, contendría propiamente otro retracto absorbente selectivo que, en particular, sería absorbente en cuyo caso R no sería persistente.

Recíprocamente, si R es un retracto absorbente selectivo minimal ha de ser persistente pues, si no lo fuera, contendría propiamente otro retracto absorbente que a su vez, según el teorema 8.14, contendría un retracto absorbente selectivo en cuyo caso R no sería absorbente selectivo minimal. □

Si $R = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{conv}(F_i)$ es un retracto selectivo, llamaremos cardinalidad de R a la suma de los cardinales de los F_i. Usaremos este concepto para probar el siguiente resultado.

<u>TEOREMA</u> <u>8.16</u>

Todo retracto absorbente contiene un retracto persistente.

<u>DEMOSTRACION</u>

El teorema 8.14 nos permite asegurar que todo retracto absorbente contiene un retracto absorbente selectivo, el cual tendrá cardinalidad n siendo n un número entero. En tal caso es evidente que todo retracto absorbente contiene uno absorbente selectivo minimal (cualquiera con cardinalidad mínima contenido en él) que, según el teorema 8.15, es persistente. □

Ahora ya estamos en condiciones de probar los resultados siguientes:

<u>LEMA</u> <u>8.17</u>

Existe al menos un retracto persistente R para el cual, dado cualquier $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño, existe un equilibrio ε-fuertemente propio modificado $\bar{s}$ tal que, para algún $s \in R$, $|\bar{s}_i(\phi_i)-s_i(\phi_i)| \leqslant \varepsilon \quad \forall\phi_i \in \Phi_i, \ \forall i$.

DEMOSTRACION

Considérese para cada jugador i la siguiente selección de estrategias F_i:

$s_i \in F_i$ si y sólo si existe $j\in\{1,...,l_i\}$ tal que
$s_i(\bar{\phi}_i)= 1/|\Phi_i^j|$ si $\bar{\phi}_i \in \Phi_i^j$, $s_i(\bar{\phi}_i)= 0$ si $\bar{\phi}_i \notin \Phi_i^j$.

Es evidente entonces que el retracto $\bar{R} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{conv}(F_i)$ es absorbente selectivo (es absorbente puesto que absorbe a todo S) y, por el teorema 8.16, contendrá un retracto absorbente selectivo minimal (persistente) R. Obsérvese que cualquier $s\in R$ verifica que $s_i(\phi_i)= s_i(\phi'_i) \quad \forall\phi_i,\phi'_i$ equivalentes en pago para el jugador i.

Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Consideremos entonces:

$$\delta = \varepsilon^{m+1}/m, \text{ siendo } m=\max\left\{m_i=|\Phi_i| / i\in\{1,...,n\}\right\}$$

$$S_i(\delta)= \left\{s_i \in S_i / \ s_i(\phi_i) \geqslant \delta \quad \forall\phi_i \in \Phi_i\right\}$$

$$S(\delta)= S_1(\delta)\mathrm{x}...\mathrm{x}\ S_n(\delta).$$

Definamos el conjunto $W = \prod_{i=1}^{n} W_i$ dado por:

$$W_i = \left\{s_i \in S_i / \ \exists \ s_i \in R_i \text{ con } |s_i(\phi_i)-s_i(\phi_i)| \leqslant \varepsilon \quad \forall\phi_i \in \Phi_i\right\}$$

Es evidente que W_i es convexo y cerrado para todo i, que $R\subset W$ y que, si ε es suficientemente pequeño, R absorbe a W (puesto que R es persistente, luego absorbente).

Definamos ahora F de $S(\delta) \cap W$ en $P(\ S(\delta) \cap W\ )$ del siguiente modo:

$F(s)=(F_1(s),...,F_n(s))$, siendo

$F_i(s)= \{\bar{\sigma}_i \in S_i(\delta)\cap W_i \ /\ H_i(s\backslash\phi'_i)< H_i(s\backslash\phi_i) \Rightarrow \bar{\sigma}_i(\phi'_i) \leqslant \varepsilon\cdot\bar{\sigma}_i(\phi_i)$ para cualquier ϕ_i,ϕ'_i de Φ_i; $\bar{\sigma}_i(\phi_i)= \bar{\sigma}_i(\phi'_i)$ para cualquier par de estrategias ϕ_i,ϕ'_i equivalentes en pago para i$\}$

y esto para todo $s \in S(\delta)\cap W$.

Es evidente que $S(\delta)\cap W$ es convexo, compacto y no vacío y que $F(s)$ es convexo y compacto $\forall\ s \in S(\delta)\cap W$.

Comprobemos ahora que, para cualquier $s \in S(\delta)\cap W$, $F(s)$ es no vacío. En efecto, sea $s \in S(\delta)\cap W$. Como R absorbe a W existirá un $\mathbf{s} \in R$ tal que $\mathbf{s}$ es una respuesta óptima a s. Por otro lado, dado s podemos construir σ como en la observación 4.7, es decir, para cada $i \in \{1,...,n\}$

$$\sigma_i(\phi_i)= (\varepsilon)^{A_i(s,\phi_i)} / \sum_{\phi'_i\in\Phi_i} (\varepsilon)^{A_i(s,\phi'_i)} \quad \forall\phi_i\in \Phi_i$$

siendo $A_i(s,\phi_i)=\left|\{\phi'_i\in \Phi_i \ /\ H_i(s\backslash\phi_i)< H_i(s\backslash\phi'_i)\}\right|$.

Consideremos ahora $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1,...,\bar{\sigma}_n)$ dada por:

$$\bar{\sigma}_i(\phi_i)= (1-\varepsilon)\cdot\mathbf{s}_i(\phi_i)+\varepsilon\cdot\sigma_i(\phi_i) \quad \forall\phi_i\in \Phi_i,\ \forall i.$$

Veamos que $\bar{\sigma} \in F(s)$.

· $\bar{\sigma} \in S(\delta)$ puesto que, para todo ϕ_i y para todo i, $(1-\varepsilon)\cdot\mathbf{s}_i(\phi_i)\geqslant 0$ y $\sigma_i(\phi_i)\geqslant \varepsilon^m/m$.

· $\bar{\sigma} \in W$ puesto que $\left|\bar{\sigma}_i(\phi_i)-\mathbf{s}_i(\phi_i)\right|=\varepsilon\cdot\left|\sigma_i(\phi_i)-\mathbf{s}_i(\phi_i)\right|\leqslant \varepsilon$.

· Si $H_i(s\backslash\phi'_i)< H_i(s\backslash\phi_i)$ entonces es claro que $\sigma_i(\phi'_i)\leqslant\varepsilon\cdot\sigma_i(\phi_i)$

y además $\mathbf{s}_i(\phi'_i)= 0$ por ser $\mathbf{s}$ una respuesta óptima a s. En tal caso $\bar{\sigma}_i(\phi'_i)= \varepsilon\cdot\sigma_i(\phi'_i) \leqslant \varepsilon\cdot\varepsilon\cdot\sigma_i(\phi_i) \leqslant \varepsilon\cdot\bar{\sigma}_i(\phi_i)$. (Y esto para cualquier i).

· Si ϕ_i y ϕ'_i son equivalentes en pago para i, entonces es inmediato que $\sigma_i(\phi_i)= \sigma_i(\phi'_i)$. Por otro lado, como $\mathbf{s} \in R$, $\mathbf{s}_i(\phi_i)= \mathbf{s}_i(\phi'_i)$. En consecuencia $\bar{\sigma}_i(\phi_i)= \bar{\sigma}_i(\phi'_i)$. (Y esto para todo i)

Por último téngase en cuenta que ya en la observación 4.7 habíamos probado que F era semicontinua superiormente como aplicación de $S(\delta)$ en $P(S(\delta))$. Entonces, como W es cerrado, también lo tenemos para F de $S(\delta)\cap W$ en $P(S(\delta)\cap W)$.

En consecuencia, aplicando el teorema del punto fijo de Kakutani, podemos asegurar que existe un $\bar{s}$ tal que $\bar{s} \in F(\bar{s})$ con lo que el lema queda demostrado. □

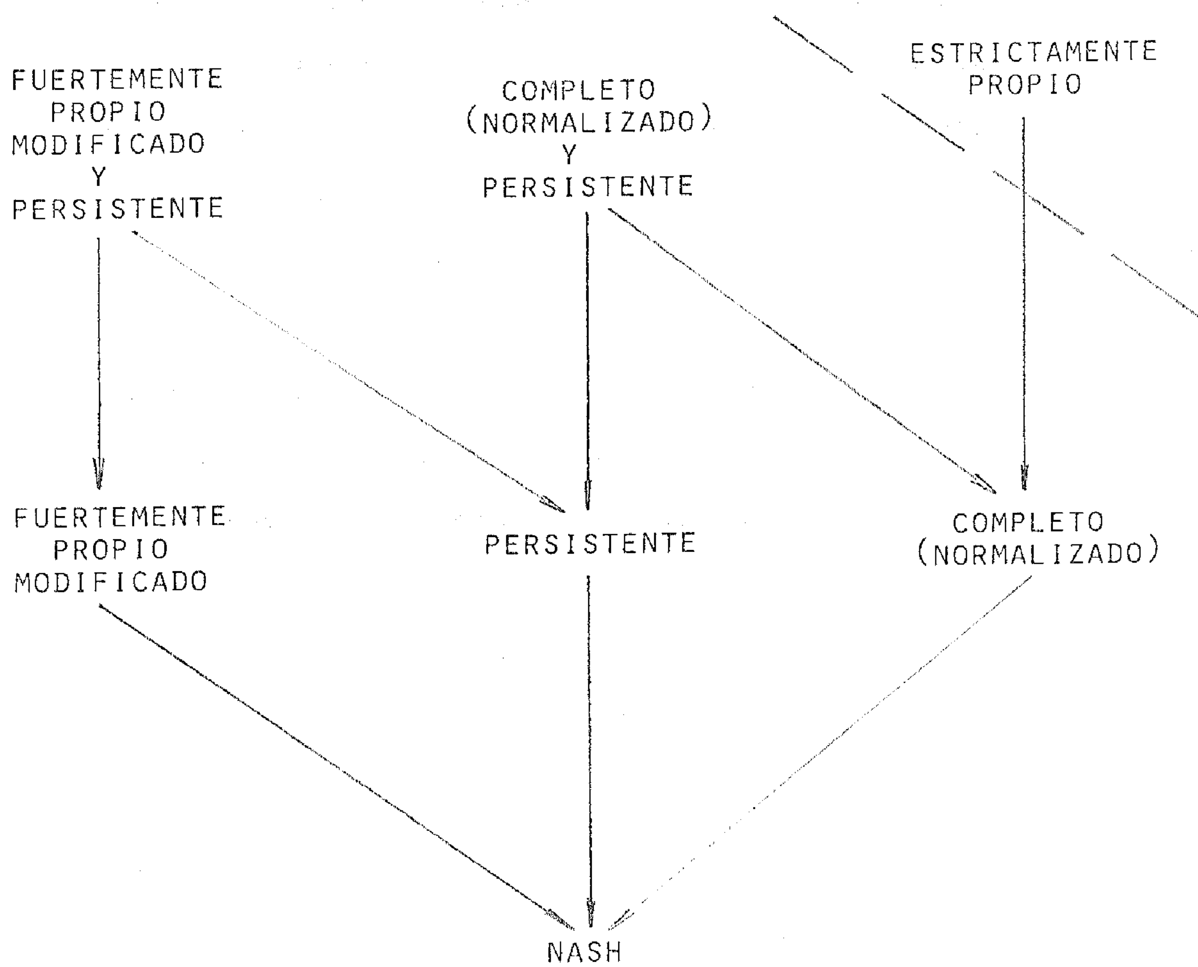
<u>TEOREMA</u> <u>8.18</u>

Todo juego n-personal finito no cooperativo en forma normal posee un equilibrio fuertemente propio modificado que además es persistente.

<u>DEMOSTRACION</u>

Por la definición de equilibrio persistente, basta comprobar que en cualquier juego n-personal finito no cooperativo en forma normal existe un retracto persistente que contiene un equilibrio fuertemente propio modificado, lo cual se deduce inmediatamente del lema anterior. □

Con esto hemos acabado de conciliar el enfoque de Kalai y Samet y el que habíamos adoptado en los capítulos anteriores. A continuación incluimos una tabla-resumen general.


FUERTEMENTE PROPIO MODIFICADO Y PERSISTENTE
COMPLETO (NORMALIZADO) Y PERSISTENTE
ESTRICTAMENTE PROPIO
FUERTEMENTE PROPIO MODIFICADO
PERSISTENTE
COMPLETO (NORMALIZADO)
NASH

BIBLIOGRAFIA

Aumann, R.J. (1974). Subjectivity and correlation in randomized strategies. J. Math. Econ. 1, 67-96.

Aumann, R.J. (1976). Agreeing to disagree. Annals of Statistics 4, 1236-1239.

Benoit, J.P. and V. Krishna (1987). Nash equilibria of finitely repeated games. Int. J. Game Theory 16, 197-204.

Bomze, I.M. (1986). Non-cooperative two-person games in biology: A classification. Int. J. Game Theory 15, 31-57.

García Jurado, I. (1988). Un refinamiento del concepto de equilibrio propio de Myerson. De próxima aparición en Trabajos de Investigación Operativa.

García Jurado, I. and J.M. Prada Sánchez (1988). A remark on Myerson's concept of proper equilibrium. De próxima aparición.

Güth, W. (1985). A remark on the Harsanyi-Selten theory of equilibrium selection. Int. J. Game Theory 14, 31-39.

Harsanyi, J.C. (1973). Games with randomly disturbed payoffs: a new rationale for mixed strategy equilibrium points. Int. J. Game Theory 2, 1-23.

Harsanyi, J.C. (1975). The tracing procedure: a Bayesian approach to defining a solution for n-person noncooperative games. Int. J. Game Theory 4, 61-94.

Harsanyi, J.C. (1976). A solution concept for n-person noncooperative games. Int. J. Game Theory 5, 211-225.

Harsanyi, J.C. (1977). Rational behavior and bargaining equilibrium in games and social situations. Cambridge University Press.

Ichiishi, T. (1983). Game Theory for Economic Analysis. Academic Press. New York.

Kakutani, S. (1941). A generalisation of Brouwer's fixed point theorem. Duke Math. J. 8, 457-459.

Kalai, E. and D. Samet (1984). Persistent equilibria in strategic games. Int. J. Game Theory 13, 129-144.

Kohlberg, E. and J.F. Mertens (1986). On the strategic stability of equilibria. Econometrica 54, 1003-1039.

Kreps, D.M. and R. Wilson (1982). Sequential equilibrium. Econometrica 50, 863-894.

Kuhn, H.W. (1953). Extensive games and the problem of information. Annals of Mathematics Studies 28, 193-216.

Luce, R.D. and H. Raiffa (1957). Games and decisions. Wiley. New York.

Marchi, E. (1976). Some topics in equilibria. Trans. Am. Math. Soc. 20, 87-102.

Marchi, E. (1986). Cooperative equilibria. Compt. and Math. with Appl. Vol. 128, 516, 1185-1186.

Myerson, R.B. (1978). Refinements of the Nash equilibrium concept. Int. J. Game Theory 7, 73-80.

Myerson, R.B. (1986). Acceptable and Predominant Correlated Equilibria. Int. J. Game Theory 15, 133-154.

Nash, J.F. (1951). Non-cooperative games. Ann of Math. 54, 286-295.

Okada, A. (1981a). On stability of perfect equilibrium points. Int. J. Game Theory 10, 67-73.

Okada, A. (1981b). A note on the perfectness concept and information structures in games. Int. J. Game Theory 10, 133-136.

Okada, A. (1984). Strictly perfect equilibrium points of bimatrix games. Int. J. Game Theory 13, 145-154.

Okada, A. (1988). Perfect equilibrium points and lexicographic domination. Int. J. Game Theory 17, 225-239.

Owen, G. (1968). Game Theory. W.B. Saunders Company. Philadelphia.

Parthasarathy T. and T.E.S. Raghavan (1971). Some topics in two-person games. Elsevier. New York.

Rosenmüller, J. (1981). The theory of games and markets. North Holland. Amsterdam.

Selten, R. (1973). A simple model of competition where 4 are few and 6 are many. Int. J. Game Theory 3, 141-201.

Selten, R. (1975). Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. Int. J. Game Theory 4, 25-55.

Tietz R., W. albers and R. Selten (eds.) (1988). Bounded rational behavior in experimental games and markets. Lecture Notes in Economics and Math. Systems. Springer-Verlag. Berlin.

Van Damme, E.E.C. (1983). Refinements of the Nash equilibrium concept. Lecture Notes in Economics and Math. Systems, 219, Springer-Verlag. Berlin.

Van Damme, E.E.C. (1984). A relation between perfect equilibria in extensive form games and proper equilibria in normal form games. Int. J. Game Theory 13, 1-13.

Van Damme, E.E.C. (1987a). Stable equilibria and forward induction. Discussion Paper A-128. Dept. of Economics, University of Bonn.

Van Damme, E.E.C. (1987b). Stability and perfection of Nash equilibria. Springer-Verlag. Berlin.

Von Neumann, J. and O. Morgenstern (1947). Theory of games and economic behavior. Princeton University Press. Princeton.

Wu Wen-Tsün and Jiang Jia-He (1962). Essential equilibrium points of n-person noncooperative games. Sci Sinica 11, 1307-1322.