JUEGOS COOPERATIVOS QUE DESCRIBEN MODELOS EN LOS QUE EL ORDEN ES INHERENTE AL PROBLEMA

M. Estela Sánchez Rodríguez

9 de Marzo 1999

Índice General

Agradecimiento

"Verba volant, scripta manent"

Sirvan estas palabras para que aquellos que han contribuido a que este trabajo se realizara se hagan partícipes.

Mis primeros agradecimientos son para el director de esta tesis, el Profesor Gustavo Bergantiños Cid, por su apoyo constante y por las fructíferas reuniones que hemos mantenido a lo largo de estos años.

Especial recuerdo tienen en mi memoria los consejos iniciales de los Profesores Luis Coladas Uría y Antonio Vaamonde Liste. Importantes fueron también las sugerencias del Profesor Ignacio García Jurado y aquellas entrañables reuniones en Santiago con el grupo gallego de teóricos de juegos.

En el mes de Junio de 1997 acudí a la Universidad de Tilburg (Holanda) por invitación del Profesor Peter Borm. Allí se perfiló el tercer capítulo de esta tesis bajo su dirección. Quisiera mencionar también la colaboración de Herbert Hamers y Mark Voorneveld y en particular la de mi compañera la Profesora Gloria Fiestras Janeiro.

Agradezco también la colaboración de los Departamentos de Estadística e Investigación Operativa de las Universidades de Vigo y Santiago.

Debo hacer constar que este trabajo se ha beneficiado de la financiación de los siguientes proyectos de investigación: XUGA 20704B95 (Xunta de Galicia), PB94-0648-C02-02 y PB97-0550-C02-02 (Ministerio de Educación y Cultura (DGESIC)), y el proyecto "European railways optimisation planning environment. Transportation railway integrated planning" (Comisión de las Comunidades Europeas).

En el ámbito personal, una mención especial por apoyos de otro tipo a Agueda, Julián, Beni y Belén, y un reconocimiento a F. Napeman.

Vigo, Noviembre de 1998.

Introducción

La Teoría de Juegos tiene como principal objetivo analizar situaciones en las que existe un conflicto entre diversos agentes. Estas situaciones incluyen aquellos juegos que desde siempre se han designado como tales, entre ellos el ajedrez, el parchís, el póker ..., pero además otras situaciones "menos entretenidas" en las que el conflicto es entre empresas, fuerzas militares, naciones ...

La primera publicación sobre teoría de juegos se debe a John von Neumann y Oskar Morgenstern, matemático y economista respectivamente que con su obra *Theory of games and economic behaviour* en el año 1944 plasmaron en este libro un estudio sobre el comportamiento de los agentes en situaciones económicas. Desde este año han aparecido numerosas publicaciones en este campo. En el año 1994 se reconoce su importancia con la concesión del premio Nobel de Economía a tres reconocidos teóricos de juegos, John F. Nash, Reinhard Selten y John C. Harsanyi por sus contribuciones a la teoría de juegos no cooperativos.

La teoría de juegos analiza las situaciones desde dos perspectivas distintas, aquellas en las que los jugadores no disponen de mecanismos para tomar acuerdos vinculantes, también llamados juegos no cooperativos y aquellas situaciones en las que los jugadores sí disponen de estos mecanismos, los conocidos como juegos cooperativos. El estudio de una situación conflictiva y su análisis mediante la teoría de juegos no cooperativos permite que cada agente obtenga las "mejores estrategias" adaptadas a cada situación. La posibilidad de la cooperación permite a los agentes coordinar sus estrategias para conseguir la mayor utilidad posible. El hecho de que los agentes cooperen depende de las habilidades y de las interrelaciones entre ellos. Es frecuente encontrar situaciones conflictivas en las que los agentes además de coordinarse para maximizar la utilidad total que pueden conseguir también se coordinen en grupos (coaliciones). En estas situaciones el sentido de la cooperación es más amplio. Estos juegos son conocidos como juegos cooperativos en forma característica. En ellos nos centraremos en la mayor parte de esta tesis.

Dentro de los juegos cooperativos podemos encontrar situaciones en las que la utilidad que consiguen los agentes se puede transferir de cualquier modo entre ellos, y situaciones en las que la utilidad no se puede transferir de cualquier modo y está sujeta a las restricciones del problema. Siguiendo este criterio los juegos cooperativos se clasifican en juegos TU o juegos con utilidad transferible y juegos NTU o juegos sin utilidad transferible.

Esta tesis ha sido estructurada de modo cronológico en su desarrollo en tres capítulos. En los capítulos 1 y 3 estudiaremos problemas que dan lugar a juegos cooperativos TU y en el capítulo 2 se plantea un problema que origina un juego NTU. Los problemas que aquí se plantean tienen en común que en todas las situaciones que se describen el orden es un elemento inherente al problema y no se puede desvincular del mismo. Analizaremos brevemente en esta somera introducción el carácter intrínseco del orden en las situaciones que describimos y los principales temas que tratamos.

El primer capítulo versa sobre valores para juegos en forma característica generalizada; es decir, aquellos juegos cooperativos con utilidad transferible en los que el orden de formación de la coalición determina la utilidad que ésta puede alcanzar. En estos juegos los agentes no controlan el orden de formación de las coaliciones y es por tanto de interés disponer de un valor que mida la utilidad esperada en el juego teniendo en cuenta la función característica asociada. Es bien conocida la importancia del valor de Shapley (1953b) en juegos en forma característica. Nowak y Rakzik (1994) proponen una generalización del valor de Shapley para funciones características generalizadas y aquí se propone otra generalización para el valor de Shapley. Diversos ejemplos, interpretaciones heurísticas, propiedades, caracterizaciones y aplicaciones de estos dos valores son analizados y comparados.

En determinadas ocasiones en juegos cooperativos con utilidad transferible existen elementos externos a la función característica que debemos considerar si queremos definir un valor que reparta la utilidad de un modo razonable. Pensemos por ejemplo que inicialmente los agentes pueden no ser simétricos, o bien se parte de una estructura inicial en la que jugadores afines se coaligan, o bien existen restricciones en la comunicación. En la literatura nos encontramos con múltiples trabajos que estudian estas situaciones modificando adecuadamente el valor de Shapley. Kalai y Samet (1987) introducen los valores ponderados que proporcionan repartos de la utilidad considerando que los jugadores pueden no ser simétricos inicialmente. Owen (1977) propone una modificación del valor de Shapley si los jugadores forman coaliciones *a priori*. Myerson (1977) estudia otra modificación del valor de Shapley para situaciones en las que los jugadores están sujetos a restricciones en la comunicación que viene modelizada mediante un grafo. En este primer capítulo estudiamos y generalizamos al conjunto de las funciones características generalizadas los valores ponderados y los valores coalicionales. Además utilizamos las ideas de Myerson para definir un valor cuando hay restricciones en la comunicación que viene modelizada mediante un grafo orientado.

En los juegos en forma característica generalizada los agentes no controlan el orden en el que entran a formar parte de una coalición, y por tanto, los valores que se exponen en este capítulo deben entenderse como unos valores estimados de las posibilidades que cada jugador tiene en el juego. Si los distintos agentes pudieran controlar el orden, surge de manera natural el dar una perspectiva no cooperativa de este problema y decidir qué estrategias son mejores para los jugadores. Aquí incluimos un primer análisis de un modelo no cooperativo que trata de resolver esta cuestión.

En el segundo capítulo el orden también está presente en la estructura del problema, aunque en esta ocasión viene dado desde un principio. Un problema PERT consiste en la realización de un proyecto que supone llevar a cabo una serie de actividades en un orden fijo. El PERT es un método de planificación de proyectos que nos indica qué actividades son más urgentes; es decir aquellas que si se demoran producen un retraso en la finalización del proyecto. Además para el resto de las actividades nos da unos intervalos de tiempo en los que se debe realizar cada actividad. Por tanto, algunas actividades pueden consumir algún tiempo extra sin que se demore el proyecto. El objetivo de este capítulo es distribuir este tiempo extra entre las distintas actividades. Para ello se introducen los juegos PERT que se corresponden con juegos cooperativos NTU. Una función característica NTU nos permite describir de manera adecuada el tiempo que podría ser asignado a los jugadores de cada coalición teniendo en cuenta todas las restricciones que intervienen en el problema. La teoría de juegos proporciona, como ya hemos comentado, modos de reparto de la utilidad total que se pueden garantizar los jugadores. Hemos estudiado conceptos de solución estables clásicos como son el núcleo y el núcleo fuerte. También hemos adaptado reglas de reparto inspiradas en las dadas para los problemas de bancarrota, entre ellas la solución de igual ganancia, la solución de igual pérdida, la solución proporcional y la solución proporcional ajustada. Estas soluciones puntuales se encuentran en la frontera débil de Pareto y son caracterizadas axiomáticamente y comparadas en diversos ejemplos. Además extendemos estas soluciones a la frontera fuerte de Pareto que se encuentra en el núcleo del juego NTU.

Mostramos también en este segundo capítulo posibles aplicaciones a problemas reales. Ambos se basan en distribuir los costes originados por los retrasos en la ejecución de un proyecto.

En el capítulo 3 un problema de optimización es analizado desde la perspectiva de la teoría de juegos. Una situación de secuenciación consiste en la realización de una serie de tareas en una máquina que inicialmente vienen dadas en un orden inicial. Curiel *et al.* (1989) introducen los juegos de secuenciación asociados a situaciones de secuenciación en las que la función de costes es lineal en el tiempo de finalización. El cambiar la posición de las tareas puede producir reducciones en el coste asociado al orden inicial. De nuevo, la teoría de juegos proporciona mecanismos para repartir la utilidad alcanzada por la gran coalición si ésta decide cooperar. Aquí planteamos el estudio de un problema de secuenciación con fechas límite. Estas fechas límite nos indican que si una tarea se lleva a cabo después de cierto tiempo se incurre en un coste. En este capítulo estudiamos dos funciones de coste diferentes que no son lineales en el tiempo de finalización de las tareas. De este modo asociamos a cada situación de secuenciación con fechas límite un juego de secuenciación y analizamos algunas propiedades; en concreto estos juegos son equilibrados, monótonos y superaditivos. La mayor parte del capítulo se centra en el análisis de la propiedad de convexidad. Los juegos de secuenciación asociados a situaciones de secuenciación donde la función de costes es lineal en el tiempo de finalización son convexos y han sido ampliamente estudiados en la literatura. Cuando la función de costes no es lineal, la propiedad de convexidad se pierde en general y aquí se presenta un estudio exhaustivo para las funciones de coste que se consideran. En algunos casos particulares los juegos asociados son convexos y en otros casos con diversos ejemplos se pone de manifiesto que no lo son. Una de las principales aportaciones consiste en la significativa reducción de las condiciones que necesitan ser verificadas para probar la convexidad de estos juegos.

Es común a todos los capítulos una última sección en la que se puede encontrar un resumen de los principales resultados obtenidos, así como una serie de problemas que se pretenden abordar próximamente.

Notación y conceptos previos

Introducimos en este epígrafe la notación empleada a lo largo de toda la memoria junto con aquellos conceptos de teoría de juegos que serán utilizados en los diferentes capítulos.

Dado un conjunto finito N :

- $|N| = n$ denotará el cardinal del conjunto N, es decir, el número de elementos del conjunto N.
- $\Pi(N) = H(N)$ denotará el conjunto de permutaciones de N, es decir,

$$\Pi(N) = \{\sigma \mid \sigma : N \to N \text{ biyectiva}\}$$

- 2^N denotará el conjunto de partes de N, es decir,

$$2^N = \{S \mid S \subset N\}.$$

- Si $S \subset N$, denotaremos $N \backslash S = S^c$ al complementario de S. Por abuso de notación designaremos $N \backslash \{i\}$ mediante $N \backslash i$.

Dados $x = (x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n) \in I\!R^n$, $\lambda \in I\!R$ y $\emptyset \neq S \subset N$ definimos $x_S = (x_i)_{i \in S} \in I\!R^s$ siendo:

- $x_S + y_S = (x_i + y_i)_{i \in S}$
- $x \backslash_i \lambda = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, \lambda, x_{i+1}, ..., x_n)$
- Diremos que $x_S = y_S$ si $x_i = y_i$ para todo $i \in S$.
- Diremos que $x_S < y_S$ si $x_i < y_i$ para todo $i \in S$.
- Diremos que $x_S \leq y_S$ si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in S$.
- Además $1_S \in I\!R^n$ denota el vector tal que $(1_S)_i = 1$ si $i \in S$, y $(1_S)_i = 0$ si $i \notin S$.

Si $b \in I\!R$ denotaremos $[b]_+ = \max\{b, 0\}$.

Dada una permutación $\sigma \in \Pi(N)$ e $i \in N$, denotaremos por $P(\sigma, i)$ al conjunto de predecesores de i en el orden dado por σ y por $F(\sigma, i)$ al conjunto de seguidores de i en el orden dado por σ. Formalmente,

$$\begin{aligned} P(\sigma, i) &= \{j \in N \mid \sigma(j) < \sigma(i)\} \\ F(\sigma, i) &= \{j \in N \mid \sigma(j) > \sigma(i)\}. \end{aligned}$$

Un *juego cooperativo con utilidad transferible o juego TU* es un par (N, v) donde N representa el conjunto finito de jugadores y v es una función característica ($v : 2^N \to I\!R$) que asocia a cada $S \in 2^N$ un número real $v(S)$, siendo $v(\emptyset) = 0$. Cada subconjunto S del conjunto de jugadores N se denomina *coalición* y $v(S)$ es su *valor*. A menudo identificaremos un juego TU (N, v) con su función característica v.

Dado $S \subset N$ se define el *juego de unanimidad* de la coalición S, (N, u_S), donde para cada $T \subset N$ la función característica viene dada por

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subset T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Una coalición T con $u_S(T) = 1$ se llama coalición ganadora, y una coalición T con $u_S(T) = 0$ se denomina perdedora. Por tanto en el juego de unanimidad de la coalición S las coaliciones ganadoras son aquellas que contienen a S.

Un juego TU (N, v) es *superaditivo* si para cada par de coaliciones $S, T \in 2^N$ tal que $S \cap T = \emptyset$ se verifica que

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Un juego TU (N, v) es *convexo* si para cada par de coaliciones $S, T \in 2^N$ se verifica que

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Equivalentemente, un juego cooperativo es convexo si y sólo si para todo $i \in N$ y para toda coalición $T \subset S \subset N \setminus \{i\}$

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

En los juegos convexos la contribución marginal de un jugador a una coalición S es mayor que la contribución marginal que puede obtener si se une a cualquiera subcoalición de S.

El *núcleo* (Gillies (1953)) del juego (N, v) es el conjunto

$$C(N,v) = \left\{ x \in I\!R^n \mid \sum_{i\in N} x_i = v(N) \text{ y } \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \text{ para todo } S \in 2^N \right\}.$$

Si la utilidad que consiguen los jugadores de la gran coalición N se divide de acuerdo a un elemento del núcleo, ninguna coalición tiene incentivos de no formar la gran coalición dado que la cantidad total que se reparten, $\sum_{i\in S} x_i$, es al menos $v(S)$, es decir, la utilidad que conseguirían por ellos mismos. El núcleo de un juego puede ser vacío o contener demasiados elementos. Los juegos convexos tienen núcleo no vacío. El conjunto de juegos TU que tienen núcleo no vacío coincide con la clase de *juegos equilibrados*.

Capítulo 1

Valores para juegos en forma característica generalizada

En juegos cooperativos con utilidad transferible o juegos TU, la utilidad que pueden conseguir los miembros de una coalición S viene definida mediante la función característica. Dada una coalición S, $v(S)$ nos da el valor que pueden garantizarse los miembros de la coalición S si deciden cooperar, independientemente de lo que hagan los miembros de $N \backslash S$. Shapley (1953b) proporcionó una regla de reparto justa entre los jugadores, el bien conocido valor de Shapley.

Si pensamos la formación de una coalición S como un proceso secuencial, la utilidad que pueden conseguir los miembros de S puede depender del orden de formación de la coalición. Esto da lugar a juegos en los que la función característica viene definida en todos los posibles órdenes de las coaliciones. Estos juegos fueron introducidos en Nowak y Radzik (1994) y denominados juegos en forma característica generalizada (abreviadamente los denominaremos juegos en f.c.g.).

Pensemos por ejemplo en la formación de la Comunidad Económica Europea como un proceso secuencial; es claro que los acuerdos llevados a cabo entre los países que integran la comunidad dependen sustancialmente del orden en que se ha formado la CEE, es decir, la utilidad total que alcanzan los países (acuerdos a los que llegan) depende del orden en que se han incorporado los países a dicha comunidad. Aunque este tipo de situaciones resultan muy difíciles de modelizar en la práctica, sirven para justificar que el orden de incorporación a la coalición debe ser un factor a tener en cuenta en determinadas situaciones, sobre todo para tener una primera idea de las posibilidades de cada jugador antes de que comience el juego.

Los pioneros en estudiar estos juegos fueron Nowak y Radzik (1994) quienes introducen el modelo y dan una generalización del valor de Shapley para este tipo de juegos. Van der Laan *et al.* (1994) consideran juegos cooperativos NTU o juegos sin utilidad transferible en los cuales el conjunto de pagos de una coalición S está definido en todos los posibles órdenes de la coalición y estudian condiciones para que el núcleo del juego sea no vacío.

En este capítulo se presentarán nuevos resultados para juegos TU en forma característica generalizada. En una primera sección se introducen los juegos en forma característica generalizada, la segunda sección está basada en el artículo de Sánchez y Bergantiños (1997) en el que se introduce un nuevo valor para estos juegos que generaliza al valor de Shapley en juegos TU. Al igual que hizo Shapley estudiamos a continuación los valores ponderados para este tipo de juegos. La sección 1.4 basada en Sánchez y Bergantiños (1999) estudia valores coalicionales a partir de las dos extensiones del valor de Shapley que se consideran. En la sección 1.5 se da una aproximación no cooperativa para tratar de discernir de una manera aceptable cuáles son los mejores órdenes en el caso de que los agentes involucrados pudiesen elegir el orden de cooperación. Y por último el capítulo termina con dos aplicaciones de los juegos en forma característica generalizada y un resumen de las principales conclusiones que se han obtenido.

1.1 Juegos en forma característica generalizada

1.1.1 Definiciones y conceptos básicos

Dado un conjunto finito N de jugadores y una coalición $S \in 2^N \backslash \emptyset$ denotaremos por $H(S)$ el conjunto de todas las posibles ordenaciones de la coalición S siendo $H(\emptyset) = \{\emptyset\}$. A los elementos de $H(S)$ $(S \in 2^N)$ les llamaremos *coaliciones ordenadas.* Sea Ω el conjunto de todas las posibles ordenaciones de todas las coaliciones de N, es decir, $\Omega = \{T \in H(S) \mid S \in 2^N\}$.

Un *juego en forma característica genereralizada* es un par (N, v) donde N es el conjunto de jugadores y v es una función $(v : \Omega \to I\!R)$ que asigna a cada $T \in H(S)$, $S \in 2^N$, un número real $v(T)$ siendo $v(\emptyset) = 0$.

Para cada coalición ordenada T, $v(T)$ representa la utilidad que los jugadores de T pueden garantizarse si la coalición ha sido formada siguiendo el orden de T.

Denotaremos por Γ_0 el conjunto de juegos donde v es constante en $H(S)$ para cada $S \in 2^N$, es decir, los juegos cooperativos con utilidad transferible, o juegos TU, y por Γ al conjunto de juegos en forma característica generalizada.

Fijado $T = (i_1, ..., i_t) \in \Omega$, $i \notin T$, y $h \in \{1, ..., t+1\}$, (T, i^h) denotará la coalición $(i_1, ..., i_{h-1}, i, i_h, ..., i_t)$, $(T, i) = (T, i^{t+1})$. Designaremos mediante $(T \backslash i_h)$ a la coalición $(i_1, ..., i_{h-1}, i_{h+1}, ..., i_t)$.

En juegos en forma característica generalizada existen diversas formas de definir un juego de unanimidad.

Sea $T = (t_1, ..., t_t) \in \Omega$. Nowak y Radzik (1994) definen para cada $R \in \Omega$

$$u_T(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \in \epsilon(T) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1.1}$$

donde

$$\epsilon(T) = \{R \in \Omega \text{ tal que } R = (r_1, ..., r_t, r_{t+1}, ..., r_r), \text{ con } r_k = t_k \; \forall \, k \leq t\}$$

es decir, una coalición ordenada R es ganadora si contiene a la coalición ordenada T en sus primeros t términos.

Fijada $T \in \Omega$, Sánchez y Bergantiños (1997) definen para cada coalición ordenada R el siguiente juego de unanimidad

$$w_T(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; T = R\,/\,T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $R\,/\,T$ es la coalición ordenada que se obtiene al restringir R a los jugadores de T, es decir una coalición ordenada R es ganadora si contiene a los miembros de T y además el orden inducido al restringir R a T es el dado por T.

Dados $v, w \in \Gamma$ y $\alpha \in I\!R$, definimos $(v + w)(T) = v(T) + w(T)$ y $(\alpha v)(T) = \alpha v(T)$ para cada $T \in \Omega$.

Un valor en Γ es una aplicación $\varphi : \Gamma \rightarrow I\!R^n$.

Trabajaremos con juegos 0-normalizados, es decir, juegos donde $v(i) = 0$ para cada $i \in N$. Si el juego (N, v) no fuera 0-normalizado consideraríamos el juego (N, v_0) siendo $v_0(S) = v(S) - \sum\limits_{i \in S} v(i)$ para todo $S \subset N$, y entonces $\varphi_i(N, v) = \varphi_i(N, v_0) + v(i)$ para todo $i \in N$.

1.1.2 El valor de Shapley en juegos TU

Dado un juego con utilidad transferible (N, v), Shapley (1953b) propuso como reparto el bien conocido valor de Shapley que axiomatizó utilizando propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad. Analizaremos la formulación de estas propiedades junto con su significado. Previamente damos dos definiciones.

Diremos que $i \in N$ es un jugador nulo en el juego (N, v) si para cada $S \subset N \backslash \{i\}$

$$v(S \cup \{i\}) = v(S).$$

Diremos que $i, j \in N$ son jugadores simétricos en el juego (N, v) si para cada $S \subset N \backslash \{i, j\}$

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}).$$

Sea φ un valor en Γ_0. Diremos que φ satisface:

- *Eficiencia* si para cada $(N, v) \in \Gamma_0$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(N, v) = v(N).$$

- *Jugador nulo* si para cada $(N, v) \in \Gamma_0$ e i jugador nulo

$$\varphi_i(N, v) = 0.$$

- *Simetría* si para cada $(N, v) \in \Gamma_0$ y para cada par de jugadores simétricos $i, j \in N$

$$\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v).$$

- *Aditividad* si dados (N, v), $(N, w) \in \Gamma_0$

$$\varphi(N, v + w) = \varphi(N, v) + \varphi(N, w).$$

El significado de estas propiedades es claro; la propiedad de eficiencia nos indica que la suma de las asignaciones que reciben todos los jugadores ha de coincidir con el valor de la coalición total, la propiedad de jugador nulo establece que si un jugador no realiza aportación a ninguna coalición entonces no debe recibir asignación alguna, la propiedad de simetría nos dice que si dos jugadores son intercambiables en el juego deben recibir el mismo pago, y la propiedad de aditividad indica que el pago que reciben los jugadores en un juego es igual a la suma de los pagos que recibirían si el juego se dividiera en dos juegos.

Shapley (1953b) probó que existe un único valor Sh en Γ_0 satisfaciendo las propiedades anteriores, y se puede expresar de la siguiente forma:

$$Sh_i(N,v) = \sum_{S \subset N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)) \quad \text{para cada } \ i \in N.$$

Esta expresión puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$Sh_i(N,v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} v\left((P(\sigma,i) \cup \{i\}) - v(P(\sigma,i))\right).$$

La anterior expresión del valor de Shapley la podemos interpretar de la siguiente forma. Supongamos que los jugadores van llegando a un lugar de modo aleatorio, y al llegar cada jugador recibe como utilidad la aportación marginal a los jugadores que ya estaban presentes; el valor de Shapley se puede ver como el vector de utilidades esperadas de los jugadores bajo este procedimiento.

1.1.3 Una generalización del valor de Shapley

Nowak y Radzik (1994) introducen axiomáticamente un valor ψ en Γ. Cuando este valor es restringido a aquellos juegos en los que la función característica es constante en todos los órdenes, *i.e.*, los juegos TU clásicos, coincide con el valor de Shapley.

Definición 1.1 (Nowak y Radzik (1994)) *Un jugador i es un jugador nulo* en el juego (N,v) si para cada coalición ordenada $T \in \Omega$ tal que $i \notin T$, se tiene que $v((T,i)) = v(T)$.*

Esta definición generaliza el concepto de jugador nulo en juegos TU.

Para caracterizar su valor Nowak y Radzik utilizan los siguientes axiomas:

Sea φ un valor en Γ. Diremos que φ satisface:

(EF) *Eficiencia* si para cada juego $(N,v) \in \Gamma$,

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N,v) = \frac{1}{n!} \sum_{T \in H(N)} v(T).$$

(JN*) *Jugador nulo** si para cada $(N,v) \in \Gamma$ e i jugador nulo*,

$$\varphi_i(N, v) = 0.$$

(AD) *Aditividad* si dados $(N, v), (N, w) \in \Gamma$ entonces

$$\varphi(N, v + w) = \varphi(N, v) + \varphi(N, w).$$

Un reparto eficiente en juegos TU supone distribuir la utilidad que consiguen el total de jugadores entre ellos. En juegos en forma característica generalizada tenemos $n!$ utilidades distintas que puede conseguir la coalición total según el orden en que se forme. Si suponemos que los jugadores no controlan el orden, parece intuitivo que la suma de los valores conseguidos por los jugadores sea el valor esperado de los distintos órdenes. El axioma JN* otorga reparto cero a los jugadores nulos. El axioma AD es el axioma clásico de aditividad.
En juegos TU estos axiomas coinciden con los axiomas clásicos de eficiencia, jugador nulo y aditividad.

Teorema 1.1 (Nowak y Radzik, 1994) *Existe un único valor ψ en Γ satisfaciendo los axiomas EF, JN* y AD, y tiene la forma siguiente:*

$$\psi_i(N, v) = \sum_{S \subset N \setminus i} \sum_{T \in H(S)} \frac{(n - t - 1)!}{n!} \left(v((T, i)) - v(T) \right),$$

donde $(N, v) \in \Gamma$, e $i \in N$.

1.1.4 Ejemplos

En esta sección presentamos dos ejemplos en los que el valor de Nowak y Radzik proporciona repartos nada intuitivos en determinados juegos, discutiendo cuál sería la solución más adecuada.

Ejemplo 1.1 Consideremos el siguiente juego en forma característica generalizada siendo $N = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} v(T) &= 1 \text{ si } T = (1, 2, 3) \\ v(T) &= 0 \text{ para todo } T \in \Omega \setminus (1, 2, 3). \end{aligned}$$

En este juego, los jugadores consiguen en el orden $(1, 2, 3)$ una unidad de utilidad, mientras que en cualquier otro orden no consiguen ninguna utilidad. A simple vista, parece intuitivo que los tres jugadores son necesarios para conseguir el máximo beneficio, e incluso que los tres hacen falta de la misma forma (cada uno ocupando la posición adecuada).

Si atendemos a la definición dada por Nowak y Radzik de jugador nulo, vemos que los jugadores 1 y 2 son nulos. Esto nos da un reparto $\psi(v) = (0, 0, 0.167)$. Por lo anteriormente expuesto, parece más intuitivo la distribución $(0.056, 0.056, 0.056)$, donde ahora los jugadores 1 y 2 no son nulos.

Ejemplo 1.2 Un vendedor desea vender dos productos y dos compradores están interesados en su adquisición, valorándolos en 0.5 unidades cada uno. Consideramos que el jugador 1 representa al vendedor y los jugadores 2 y 3 son los compradores.

La utilidad conseguida por el orden (1,2,3) se interpretaría de la siguiente manera: primero llega el vendedor al mercado y pone a la venta ambos productos, a continuación llega un comprador (el jugador 2) y compra un producto (a precio x), y después aparece otro comprador (el jugador 3) y compra el otro producto (a precio y).

En el orden (2,1,3) primero llegaría un comprador y al no haber productos a la venta, se iría; a continuación llegaría el vendedor y luego el otro comprador que le compraría un producto a un precio y.

Esta situacion daría lugar al siguiente juego en forma característica generalizada. El conjunto de jugadores sería $N = \{1, 2, 3\}$, la utilidad que conseguirían los jugadores en el orden $(1, 2, 3)$ sería igual a $v(1, 2, 3) = x + y + 0.5 - x + 0.5 - y = 1$, y de manera análoga se formaría el valor asociado a cada coalición ordenada que presentamos a continuación

$$\begin{array}{lll} v(1,2,3) = 1 & v(1,2) = 0.5 & \\ v(1,3,2) = 1 & v(2,1) = 0 & v(1) = 0 \\ v(2,1,3) = 0.5 & v(1,3) = 0.5 & v(2) = 0 \\ v(2,3,1) = 0 & v(3,1) = 0 & v(3) = 0 \\ v(3,1,2) = 0.5 & v(2,3) = 0 & \\ v(3,2,1) = 0 & v(3,2) = 0 & \end{array}$$

Con esta función característica el vendedor es un jugador nulo* y los compradores son simétricos. Por lo tanto, el valor de Nowak y Radzik daría el reparto $(0, 0.25, 0.25)$. Teniendo en cuenta que los jugadores 2 y 3 son simétricos y que el valor obtenido por estos dos jugadores es 0 en cualquier orden en el que sólo están ellos dos, la importancia del jugador 1 (el vendedor) se hace evidente y desde luego esto no se ve reflejado en el reparto propuesto. En esta situación lo más natural parece que cuando el vendedor venda alguno de sus productos lo haga a 0.25 unidades cada uno, con lo cual lo más razonable sería dar el reparto $(0.25, 0.125, 0.125)$.

Estos dos ejemplos ponen de manifiesto la asimetría de este valor. Esto nos lleva a intentar dar una generalización del valor de Shapley que trate a los jugadores de una manera más simétrica.

1.2 Un nuevo valor de Shapley

Hemos visto en la sección 1.1.2 que Shapley axiomatizó su valor utilizando los axiomas de eficiencia, simetría, jugador nulo y aditividad. Nowak y Radzik extendieron este valor para juegos en forma característica generalizada modificando el axioma de eficiencia y el de jugador nulo, prescindieron del de simetría y utilizaron aditividad. Teniendo en cuenta que los jugadores no controlan el orden de juego, y suponiendo que todos los órdenes son equiprobables, el axioma de eficiencia parece claro. No lo es tanto el axioma de jugador nulo por los ejemplos anteriormente expuestos (los jugadores 1 y 2 no parecen ser jugadores nulos en el ejemplo 1.1 y el vendedor tampoco en el ejemplo 1.2), lo cual nos lleva a introducir un nuevo concepto de jugador nulo.

Definición 1.2 *Un jugador i es un jugador nulo en el juego (N, v) si para cada coalición ordenada $T \in \Omega$ tal que $i \notin T$, se tiene que*

$$v\left((T, i^h)\right) = v(T) \quad \textit{para todo } h = 1, ..., t+1.$$

Un jugador es nulo si el valor de cualquier coalición no se ve afectado por la presencia del jugador i, cualquiera que sea el lugar que ocupa en la ordenación.

Esta definición generaliza el concepto de jugador nulo en juegos TU.

Es trivial comprobar que si i es un jugador nulo entonces i es un jugador nulo*. Sin embargo el recíproco es falso como se puede comprobar en el ejemplo 1.1 dado que los jugadores 1 y 2 son jugadores nulos* y sin embargo no son jugadores nulos. Lo mismo ocurre con el vendedor en el ejemplo 1.2.

A continuación definiremos el concepto de simetría que usaremos más adelante.

Definición 1.3 *Dos jugadores i, j son simétricos en el juego $(N, v) \in \Gamma$ si para cada coalición ordenada $T \in \Omega$ tal que $i, j \notin T$ se tiene que*

$$v(T, i^h) = v(T, j^h) \ \ para\ todo\ h = 1, ..., t+1.$$

Dos jugadores son simétricos cuando son intercambiables en cualquier posición sin alterar el valor de la coalición.

Esta definición generaliza el concepto de jugadores simétricos en juegos TU.

En el ejemplo 1.1 los tres jugadores son simétricos y en el ejemplo 1.2 lo son los dos compradores.

Consideremos nuevos axiomas. Sea φ un valor en Γ. Diremos que φ satisface:

(JN) *Jugador nulo* si para cada $(N, v) \in \Gamma$ e i jugador nulo

$$\varphi_i(N, v) = 0.$$

(SI) *Simetría* si para cada $(N, v) \in \Gamma$ y para cada par de jugadores simétricos $i, j \in N$

$$\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v).$$

Estos axiomas generalizan los axiomas de jugador nulo y simetría existentes en juegos TU.

El siguiente teorema proporciona una caracterización axiomática de un nuevo valor que se introduce para juegos en forma característica generalizada.

Teorema 1.2 *Existe un único valor ϕ en Γ satisfaciendo EF, JN, AD y SI y se expresa de la siguiente forma:*

$$\phi_i(N, v) = \sum_{i \in S \subset N} \sum_{T \in H(S)} \frac{(n-t)!}{t\, n!} \left(v(T) - v(T \backslash i)\right) \quad para\ todo\ \ i \in N. \tag{1.3}$$

Otra forma de expresarlo es la siguiente:

$$\phi_i(N, v) = \sum_{S \subset N \backslash i} \sum_{T \in H(S)} \sum_{l=1}^{t+1} \frac{(n-t-1)!}{n!(t+1)} \Big(v(T, i^l) - v(T)\Big) \text{ para todo } \ i \in N. \tag{1.4}$$

La demostración de este teorema se realiza siguiendo las líneas de Shapley (1953b). Previamente daremos dos lemas; el primero proporciona dos descomposiciones de un juego en forma característica generalizada en función de los juegos de unanimidad descritos en (1.1) y (1.2).

Lema 1.1 a) *Para cada* $(N,v) \in \Gamma$, $v = \sum_{T\in\Omega} \lambda_T u_T$ *donde para* $T = (i_1, ..., i_t) \in \Omega$,

$$\lambda_T = v(T) - v(T \backslash i_t).$$

b) *Para cada* $(N,v) \in \Gamma$, $v = \sum_{T\in\Omega} c_T w_T$ *donde para cada* $T \in \Omega$,

$$c_T = \sum_{R=T\,/R} (-1)^{t-r} v(R).$$

Demostración.
a) Se puede ver en Nowak y Radzik (1994).
b) Sea $U \in \Omega$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{T\in\Omega} c_T w_T(U) &= \sum_{T\in\Omega} \left(\sum_{R=T/R} (-1)^{t-r} v(R) \right) w_T(U) \\
&= \sum_{T=U/T} \left(\sum_{R=T\,/R} (-1)^{t-r} v(R) \right) \\
&= \sum_{R=U/R} \left(\sum_{T=U/T, R=T/R} (-1)^{t-r} \right) v(R) \\
&= \sum_{R=U/R} \left(\sum_{t=r}^{u} \binom{u-r}{u-t} (-1)^{t-r} \right) v(R).
\end{aligned}$$

Como $\sum_{t=r}^{u} \binom{u-r}{u-t}(-1)^{t-r}$ vale 1 si $u = r$ y 0 si $u \neq r$ concluimos que

$$\sum_{T\in\Omega} c_T w_T(U) = v(U). \ \blacksquare$$

El siguiente lema nos indica cómo reparte un valor eficiente que satisfaga los axiomas de jugador nulo y simetría en el conjunto de los juegos de unanimidad definidos en (1.2).

Lema 1.2 *Fijado $T \in \Omega$, si φ satisface EF, JN y SI, entonces*

$$\varphi_i(N, w_T) = \begin{cases} \dfrac{1}{t!t} & \text{si} \quad i \in T \\ 0 & \text{si} \quad i \notin T \end{cases}.$$

Demostración.

Si $i \notin T$, i es un jugador nulo y por JN, $\varphi_i(N, w_T) = 0$. Aplicando EF obtenemos

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, w_T) = \frac{1}{n!} \sum_{R \in H(N)} w_T(R) = \frac{\frac{n!}{t!}}{n!} = \frac{1}{t!}.$$

Como todos los jugadores de T son simétricos, aplicando SI obtenemos

$$\varphi_i(N, w_T) = \begin{cases} \dfrac{1}{t!t} & \text{si} \quad i \in T \\ 0 & \text{si} \quad i \notin T \end{cases}. \blacksquare$$

Nota 1.1 De manera análoga se prueba que dado $\alpha \in I\!R$,

$$\varphi_i(N, \alpha w_T) = \begin{cases} \alpha\dfrac{1}{t!t} & \text{si} \quad i \in T \\ 0 & \text{si} \quad i \notin T \end{cases}.$$

A partir de estos dos lemas procedemos a la demostración del teorema 1.2.

Demostración del teorema 1.2.

Se prueba fácilmente que ϕ satisface los axiomas EF, JN, AD y SI. Probemos a continuación la unicidad del valor. Utilizando los lemas 1.1 b), 1.2

y el axioma AD obtenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_i(N,v) &= \sum_{T\in\Omega} c_T\varphi_i(N,w_T) \\
&= \sum_{i\in T\in\Omega} c_T\frac{1}{t!t} \\
&= \sum_{i\in T\in\Omega} \frac{1}{t!t}\left(\sum_{R=T/R}(-1)^{t-r}v(R)\right) \\
&= \sum_{R\in\Omega}\left(\sum_{i\in T\in\Omega,\, R=T/R}(-1)^{t-r}\frac{1}{t!t}\right)v(R) \\
&= \sum_{i\in S\subset N}\sum_{T'\in H(S)}\gamma_i(T')\left(v(T')-v(T'\backslash i)\right).
\end{aligned}$$

donde $\gamma_i(T')=\sum_{i\in T\in\Omega, T'=T/T'}(-1)^{t-t'}\frac{1}{t!t}$.

Con algunos cálculos adicionales obtenemos

$$\begin{aligned}
\gamma_i(T') &= \sum_{t=t'}^{n}\binom{n-t'}{t-t'}\frac{t!}{t'!}(-1)^{t-t'}\frac{1}{t!t} \\
&= \frac{1}{t'!}\sum_{t=t'}^{n}\binom{n-t'}{t-t'}(-1)^{t-t'}\frac{1}{t} \\
&= \frac{1}{t'!}\frac{(t'-1)!(n-t')!}{n!} \\
&= \frac{(n-t')!}{t'n!}.
\end{aligned}$$

y por tanto para cada $i\in N$

$$\varphi_i(N,v)=\sum_{i\in S\subset N}\sum_{T'\in H(S)}\frac{(n-t')!}{t'n!}\left(v(T')-v(T'\backslash i)\right)=\phi_i(N,v). \blacksquare$$

Nota 1.2 Ningún axioma del anterior teorema es redundante.

- Eficiencia no es redundante.

  $\varphi=2\phi$ verifica JN, AD y SI.

- Jugador nulo no es redundante.

Sea para cada $i \in N$, $\varphi_i(N,v) = \dfrac{\frac{1}{n!} \sum\limits_{T \in H(N)} v(T)}{n}$, φ satisface EF, AD y SI.

- Aditividad no es redundante.

Sea D el conjunto de jugadores nulos de (N,v), y definamos

$$\varphi_i(N,v) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{n!} \sum\limits_{T \in H(N)} v(T)}{n-d} & \text{si} \quad i \in N \backslash D \\ 0 & \text{si} \quad i \in D \end{cases}.$$

Fácilmente se comprueba que φ satisface EF, JN y SI. Claramente no coincide con ϕ, pero además comprobamos que no verifica AD. Consideremos $w_{(13)}$ y $w_{(12)}$, entonces

$$w_{(13)}(T) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T \in \{(13),(132),(123),(213)\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$w_{(12)}(T) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T \in \{(12),(123),(132),(312)\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(w_{(13)} + w_{(12)})(T) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad T \in \{(132),(123)\} \\ 1 & \text{si} \quad T \in \{(213),(312),(1,3),(1,2)\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi(N, w_{(12)} + w_{(13)}) &= (0.33, 0.33, 0.33) \\ \varphi(N, w_{(13)}) &= (0.25, 0, 0.25) \\ \varphi(N, w_{(12)}) &= (0.25, 0.25, 0). \end{aligned}$$

- Simetría no es redundante.

El valor definido por Nowak y Radzik ψ satisface EF, JN y AD. Es sencillo comprobar que satisface JN teniendo en cuenta que si i es un jugador nulo entonces i es un jugador nulo*.

Nota 1.3 ϕ representa una generalización del valor de Shapley, es decir, si nos restringimos a juegos TU nuestro valor coincide con el valor de Shapley. Sea $(N, v) \in \Gamma_0$ entonces para cada $i \in N$

$$\begin{aligned}\phi_i(N, v) &= \sum_{S \subset N \setminus i} s!(s+1) \frac{(n-s-1)!}{n!(s+1)} \left(v(S \cup i) - v(S)\right) \\ &= \sum_{S \subset N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(v(S \cup i) - v(S)\right) \\ &= Sh_i(N, v).\end{aligned}$$

Nota 1.4 Si calculamos ϕ en los ejemplos 1.1 y 1.2 observamos que en ambos casos se obtienen asignaciones razonables; en el ejemplo 1.1,

$$\phi(N, v) = (0.056, 0.056, 0.056)$$

y en el ejemplo 1.2,

$$\phi(N, v) = (0.250, 0.125, 0.125).$$

La principal diferencia entre ψ y ϕ es que a la hora de calcular el valor de un jugador i, ϕ tiene en cuenta más información que ψ.

Supongamos que $n = 3$. Para el jugador 1 la generalización del valor de Shapley de Nowak y Radzik, ψ, tiene en cuenta las siguientes contribuciones:

$$v(231) - v(23),\ v(321) - v(32),\ v(21) - v(2),\ v(31) - v(3),\ v(1) - v(\emptyset)$$

mientras que el valor que proponemos, ϕ, tiene en cuenta además:

$$v(123) - v(23), \quad v(132) - v(32), \quad v(213) - v(23), \quad v(312) - v(32),$$

junto con

$$v(12) - v(2), \quad v(13) - v(3).$$

Consideremos el juego planteado en Nowak y Radzik (1994).

Ejemplo 1.3 (Nowak y Radzik (1994)). Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y la siguiente función característica generalizada:

$$\begin{array}{c} v(1,3,2) = v(3,1,2) = v(2,3,1) = v(3,2,1) = 4 \\ v(1,2,3) = v(2,1,3) = 3 \\ v(1,2) = v(2,1) = 2 \\ v(1,3) = v(3,1) = 3 \\ v(2,3) = v(3,2) = 0 \\ v(i) = 0 \;\text{ para cada }\; i \in N. \end{array} \tag{1.5}$$

El valor de Nowak y Radzik da como reparto

$$\psi(N,v) = (2.167, 0.667, 0.833).$$

Con nuestro valor obtendríamos

$$\phi(N,v) = (2.056, 0.556, 1.056),$$

que en líneas generales no difiere demasiado del anterior. En este caso está motivado porque en la anterior función característica generalizada no hay demasiadas diferencias entre las contribuciones que tienen en cuenta los dos valores.

Nota 1.5 Dado un juego en forma característica generalizada (N,v) podemos construir un juego TU de tal forma que el valor de Shapley de este juego coincida con el nuevo valor de Shapley del juego original. Nowak y Radzik (1994) definieron el "juego promedio" como $w(S) = \frac{1}{s!} \sum\limits_{T \in H(S)} v(T)$ para cada $S \in 2^N \backslash \emptyset$. Se verifica que

$$Sh(N,w) = \phi(N,v).$$

El juego promedio se basa en el hecho de que los jugadores no controlan el orden y por tanto todos los órdenes de una coalición son igualmente probables. Luego el valor de una coalición será el valor medio en todos los órdenes.

$$
\begin{aligned}
Sh_i(N,w) &= \sum_{S\subset N\backslash i} \frac{(n-s-1)!s!}{n!}\left(w(S\cup i)-w(S)\right)\\
&= \sum_{S\subset N\backslash i} \frac{(n-s-1)!s!}{n!}\left(\frac{1}{(s+1)!}\sum_{T\in H(S\cup i)} v(T)-\frac{1}{s!}\sum_{T\in H(S)} v(T)\right)\\
&= \sum_{S\subset N\backslash i} \frac{(n-s-1)!s!}{n!}\left(\frac{\sum_{T\in H(S\cup i)} v(T)-(s+1)\sum_{T\in H(S)} v(T)}{(s+1)!}\right)\\
&= \sum_{S\subset N\backslash i}\sum_{T\in H(S)} \frac{(n-t-1)!}{n!(t+1)}\sum_{l=1}^{t+1}\Big(v(T,i^l)-v(T)\Big)\\
&= \phi_i(N,v)\,.
\end{aligned}
$$

Nota 1.6 Dado $(N,v)\in\Gamma$ y $T\in H(N)$, definimos el juego $(N,v_T)\in\Gamma_0$ como $v_T(S)=v(T/S)$ para cada $S\in 2^N$. La función característica v_T mide la utilidad que obtienen los jugadores de S cuando cooperan en el orden inducido por T. Se verifica que para cada $i\in N$

$$\phi_i(N,v)=\sum_{T\in H(N)}\frac{1}{n!}Sh_i(N,v_T).$$

Haciendo algunos cálculos, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\phi_i(N,v) &= \sum_{S\subset N\backslash i}\sum_{T\in H(S)} \frac{(n-t-1)!t!}{n!}\sum_{l=1}^{t+1}\frac{1}{(t+1)!}\Big(v(T,i^l)-v(T)\Big)\\
&= \sum_{S\subset N\backslash i}\sum_{T\in H(S)} \frac{(n-t-1)!t!}{n!}\\
&\quad \sum_{l=1}^{t+1}\left(\sum_{R\in H(N),(T,i^l)=R/(T,i^l)}\frac{1}{n!}\right)\Big(v(T,i^l)-v(T)\Big)\\
&= \sum_{R\in H(N)}\frac{1}{n!}\left(\sum_{i\in T=R/T}\frac{(n-t)!(t-1)!}{n!}\left(v(T)-v(T\backslash i)\right)\right)\\
&= \sum_{T\in H(N)}\frac{1}{n!}Sh_i(N,v_T)\,.
\end{aligned}
$$

Nota 1.7 (Interpretaciones heurísticas)
Sabemos que el valor de Shapley de un jugador puede ser visto como la media de sus contribuciones marginales tal y como se puede ver en la siguiente fórmula.

$$Sh_i(N,v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} (v(P(\sigma,i) \cup \{i\}) - v(P(\sigma,i))).$$

La siguiente tabla refleja las aportaciones de los jugadores cuando $n = 3$.

Orden	Utilidad jug.1	Utilidad jug.2	Utilidad jug.3
123	$v(1)$	$v(1,2) - v(1)$	$v(1,2,3) - v(1,2)$
132	$v(1)$	$v(1,3,2) - v(1,3)$	$v(1,3) - v(1)$
213	$v(2,1) - v(2)$	$v(2)$	$v(2,1,3) - v(2,1)$
231	$v(2,3,1) - v(2,3)$	$v(2)$	$v(2,3) - v(2)$
312	$v(3,1) - v(3)$	$v(3,1,2) - v(3,1)$	$v(3)$
321	$v(3,2,1) - v(3,2)$	$v(3,2) - v(3)$	$v(3)$

(Tabla 1.1)

La interpretación heurística dada por Nowak y Radzik es la misma que la de Shapley; sólo que ahora puede ser diferente la contribución marginal de cada jugador a los distintos órdenes de una coalición. Por ejemplo, en el valor de Shapley $v(2,3,1) - v(2,3)$ coincide exactamente con $v(3,2,1) - v(3,2)$, sin embargo en f.c.g. pueden ser diferentes.

Veamos dos interpretaciones heurísticas para el valor ϕ que ha sido introducido en este trabajo.

Interpretación 1:
ϕ tiene en cuenta todas las posibles contribuciones de los jugadores a todos los órdenes. En la búsqueda de dar una interpretación similar a la de Shapley diseñamos el siguiente sistema. Para ello, definimos los órdenes de colaboración gratuita (designados entre corchetes y abreviadamente denotados O.C.G.).

El orden [123] indica que el jugador 1 va a colaborar gratuitamente con los jugadores 2 y 3, y el jugador 2 va a colaborar gratuitamente con el jugador 3.

Suponemos que estos órdenes tienen todos la misma probabilidad, entonces $p = \frac{1}{n!}$.

La siguiente tabla refleja las contribuciones obtenidas por los jugadores si el orden de llegada (designados entre paréntesis) es (123).

O.C.G	jugador 1	jugador 2	jugador 3
[123]	$v(1)$	$v(1,2)-v(1)$	$v(1,2,3)-v(1,2)$
[132]	$v(1)$	$v(1,2,3)-v(1,3)$	$v(1,3)-v(1)$
[213]	$v(1,2)-v(2)$	$v(2)$	$v(1,2,3)-v(1,2)$
[231]	$v(1,2,3)-v(2,3)$	$v(2)$	$v(2,3)-v(2)$
[312]	$v(1,3)-v(3)$	$v(1,2,3)-v(1,3)$	$v(3)$
[321]	$v(1,2,3)-v(2,3)$	$v(2,3)-v(3)$	$v(3)$

(Tabla 1.2)

El valor esperado mediante este procedimiento (hay 6 posibles órdenes de llegada) nos da ϕ.

Cabe sugerir como observación, que fijado un orden de llegada de los jugadores, por ejemplo el orden (123), la suma de las aportaciones de los jugadores es $v(1,2,3)$, generalizando la interpretación de Shapley. En cada orden de colaboración gratuita se alcanza $\frac{1}{6}v(1,2,3)$.

Interpretación 2:

Teniendo en cuenta el resultado presentado anteriormente en la nota 1.6, podemos dar otra interpretación; ϕ representa el valor esperado de los valores de Shapley de los juegos TU inducidos por el orden de llegada de los jugadores, supuestos que estos órdenes son equiprobables.

1.2.1 Caracterizaciones del nuevo valor de Shapley

En la literatura hay diversas caracterizaciones del valor de Shapley. Young (1985) caracteriza el valor de Shapley utilizando la propiedad de marginalidad, Hart y Mas-Colell (1989) dan dos caracterizaciones, una utilizando la función potencial y otra mediante una propiedad de consistencia, y Myerson (1980) da otra caracterización utilizando una propiedad de contribuciones equilibradas. A continuación probaremos en una serie de teoremas que ϕ es el único valor para juegos en forma característica generalizada que se puede caracterizar por medio de estas propiedades.

La propiedad de marginalidad

Young (1985) definió la propiedad de marginalidad (en su artículo la denominó monotonía fuerte); dicha propiedad junto con las de simetría y eficiencia le permitieron caracterizar axiomáticamente el valor de Shapley.

En este apartado extendemos este resultado al contexto de juegos en forma característica generalizada.

Sea φ un valor en Γ, diremos que φ satisface:

(MG) *Marginalidad* si para cada (N, v), $(N, w) \in \Gamma$ tal que para todo $T \in \Omega$, $i \notin T$ y $l = 1, ..., t + 1$

$$v(T, i^l) - v(T) \geq w(T, i^l) - w(T)$$

se verifica que

$$\varphi_i(N, v) \geq \varphi_i(N, w).$$

Nota 1.8 El axioma de marginalidad implica que si para todo $T \in \Omega$, $i \notin T$ y $l = 1, ..., t + 1$

$$v(T, i^l) - v(T) = w(T, i^l) - w(T)$$

entonces

$$\varphi_i(N, v) = \varphi_i(N, w).$$

Se verifica también que los axiomas de jugador nulo (JN) y el de aditividad (AD) implican la propiedad anterior dado que para todo $T \in \Omega$ tal que $i \notin T$ y $l = 1, ..., t + 1$

$$v(T, i^l) - v(T) = w(T, i^l) - w(T) \quad \Leftrightarrow (v - w)(T, i^l) - (v - w)(T) = 0$$

lo que implica que i es un jugador nulo en $(N, v - w)$ con lo que aplicando JN obtenemos que $\varphi_i(N, v - w) = 0$, y por AD, $\varphi_i(N, v) = \varphi_i(N, w)$.

Teorema 1.3 *ϕ es el único valor satisfaciendo EF, SI y MG.*

Demostración.

Es fácil ver que ϕ satisface los axiomas de eficiencia, simetría y marginalidad. Veamos que es el único.

Sea φ un valor en Γ satisfaciendo EF, SI y MG. Consideremos el juego nulo (N, w), es decir aquel cuya función característica generalizada es $w(T) = 0$ para todo $T \in \Omega$. Dado que se verifica que $w(T, i^l) - w(T) = 0$ para todo $T \in \Omega$ tal que $i \notin T$ y $l = 1, ..., t + 1$, aplicando SI obtenemos que para cada $i, j \in N$

$$\varphi_i(N, w) = \varphi_j(N, w). \tag{1.7}$$

Además teniendo en cuenta que φ satisface EF,

$$\sum_{i\in N}\varphi_i(N,w)=\frac{1}{n!}\sum_{T\in H(N)}w(T)=0. \tag{1.8}$$

Aplicando conjuntamente (1.7) y (1.8) se verifica que $\varphi_i(N,w)=0$ para cada $i\in N$.
Sea i un jugador nulo (JN) en el juego (N,v) entonces

$$v(S,i^l)-v(S)=0=w(S,i^l)-w(S).$$

Aplicando MG concluimos que

$$\varphi_i(N,v)=\varphi_i(N,w)=0.$$

Por otra parte sabemos que dado $(N,v)\in\Gamma$, entonces por el lema 1.1 b)

$$v=\sum_{R\in\Omega}c_Rw_R. \tag{1.9}$$

Sea I el número de términos distintos de cero de la anterior expresión de v. Si $I=0$ entonces todos los jugadores son jugadores nulos y por tanto $\varphi_i(N,v)=0=\phi_i(N,v)$ para cada $i\in N$. Sea $I=1$, por tanto $v=c_Rw_R$ para algún $R\in\Omega$; sea $i\in N$, dos casos pueden ocurrir:

- $i\notin R$, en este caso se verifica que $v(T,i^l)-v(T)=0$ para todo $T\in\Omega$ tal que $i\notin T$, $l=1,...,t+1,$ y por tanto $\varphi_i(N,v)=0=\phi_i(N,v)$.
- $i\in R,$ en este caso aplicando SI obtenemos que si $i,j\in R$ entonces $\varphi_i(N,v)=\varphi_j(N,v)$, y por EF, $\sum\limits_{i\in N}\varphi_i(N,v)=\frac{1}{n!}\sum\limits_{T\in H(N)}v(T)=\frac{c_R}{r!}$.
  Con lo que deducimos que para cada $i\in R$
  $$\begin{aligned}\varphi_i(N,v)&=\frac{c_R}{r\ r!}\\&=\phi_i(N,v).\end{aligned}$$

Utilizando inducción y usando argumentos similares a los que utilizó Young (1985) demostramos a continuación la unicidad de ϕ.

Por hipótesis de inducción supongamos que $\varphi=\phi$ siempre que el número de términos distintos de cero de la expresión (1.9) sea menor o igual a I.
Sea (N,v) tal que $v=\sum\limits_{k=1}^{I+1}c_{R_k}v_{R_k}$ con $c_{R_k}\neq 0$ para todo $k=1,...,I+1$.

- Si existe k tal que $i \notin R_k$ sea (N, w) el juego definido como $w = \sum_{k|i \in R_k} c_{R_k} v_{R_k}$. Entonces $w(T, i^l) - w(T) = v(T, i^l) - v(T)$ para todo $T \in \Omega$ tal que $i \notin T$ y $l = 1, ..., t+1$, lo que implica que

$$\begin{aligned} \varphi_i(N, v) &= \varphi_i(N, w) \\ &= \sum_{k|i \in R_k} \frac{c_{R_k}}{r_k \, r_k!} \\ &= \phi_i(N, v). \end{aligned}$$

- Si para todo k, $i \in R_k$, sea

$$M = \{j \in N \mid j \in R_k \text{ , para todo } k = 1, ..., I+1\}$$

sabemos por SI que existen $c', c'' \in I\!R$ tal que $\varphi_j(N, v) = c'$, $\phi_j(N, v) = c''$ para cada $j \in M$. Por el apartado anterior sabemos que $\varphi_j(N, v) = \phi_j(N, v)$ si $j \in N \backslash M$, y por tanto aplicando EF obtenemos que

$$\varphi_i(N, v) = \phi_i(N, v). \ \blacksquare$$

Nota 1.9 Nowak y Radzik (1994) obtuvieron una caracterización para su valor ψ utilizando la propiedad de contribuciones marginales (si $v(T, i) - v(T) \geq w(T, i) - w(T)$ para todo $T \in \Omega$ tal que $i \notin T$, entonces $\varphi_i(N, v) \geq \varphi_i(N, w)$), la propiedad del juego nulo (si $v(T) = 0$ para todo $T \in \Omega$ entonces $\varphi_i(N, v) = 0$ para todo $i \in N$) y el axioma EF.

La propiedad de contribuciones equilibradas

En Myerson (1980) se prueba que el valor de Shapley es el único valor que satisface los axiomas de eficiencia y contribuciones equilibradas. En este apartado extendemos este resultado para juegos en forma característica generalizada.

Diremos que un valor φ satisface:

(CE) *Contribuciones equilibradas* si para todo $(N, v) \in \Gamma$ y para todo $i, j \in N$

$$\varphi_i(N, v) - \varphi_i(N \backslash j, v) = \varphi_j(N, v) - \varphi_j(N \backslash i, v).$$

Una regla de reparto φ satisface contribuciones equilibradas si la utilidad que pierde o gana el jugador i si j deja de participar en el juego coincide con la utilidad que pierde o gana el jugador j si se va del juego el jugador i. Hacer notar que la formulación de este axioma es la misma que en Myerson (1980) ya que lo único que hemos hecho es generalizar la función característica.

Este axioma junto con el de eficiencia nos permite generalizar el resultado de Myerson (1980).

Teorema 1.4 *ϕ es el único valor en Γ satisfaciendo EF y CE.*

Demostración.

Primero probamos que ϕ satisface CE y a continuación que existe un único valor satisfaciendo EF y CE.

Sea $(N,v) \in \Gamma$. Utilizando la nota 1.6 obtenemos que

$$\phi_i(N,v) - \phi_i(N\backslash j, v)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{T \in H(N)} Sh_i(N, v_T) - \frac{1}{(n-1)!} \sum_{T \in H(N\backslash j)} Sh_i(N\backslash j, v_T)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{l=1}^{n} \sum_{T \in H(N\backslash j)} Sh_i(N, v_{(T,j^l)}) - \frac{1}{n!} \sum_{T \in H(N\backslash j)} nSh_i(N\backslash j, v_T)$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{T \in H(N\backslash j)} \left(Sh_i(N, v_{(T,j^l)}) - Sh_i(N\backslash j, v_T) \right) \right) \right).$$

Teniendo en cuenta que el valor de Shapley verifica contribuciones equilibradas en juegos TU y que los juegos v_T son TU podemos escribir

$$\phi_i(N,v) - \phi_i(N\backslash j, v) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!} \left(\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{T \in H(N\backslash i)} \left(Sh_j(N, v_{(T,i^l)}) - Sh_j(N\backslash i, v_T) \right) \right) \right) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{T \in H(N)} Sh_j(N, v_T) \\
&\quad - \frac{1}{(n-1)!} \sum_{T \in H(N\backslash i)} Sh_j(N\backslash i, v_T) \\
&= \phi_j(N,v) - \phi_j(N\backslash i, v).
\end{aligned}$$

La demostración de la unicidad es similar a la dada por Myerson (1980). Sean φ^1, φ^2 dos valores en Γ satisfaciendo los axiomas EF y CE. Es trivial comprobar por EF que si $n = 1$, $\varphi^1(N,v) = \varphi^2(N,v)$. Supongamos por hipótesis de inducción que $\varphi^1(N,v) = \varphi^2(N,v)$ si hay $n-1$ jugadores, y probémoslo cuando hay n.

Sean $i, j \in N$, aplicando CE y la hipótesis de inducción obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i^1(N,v) - \varphi_j^1(N,v) & = & -\varphi_j^1(N\backslash i,v) + \varphi_i^1(N\backslash j,v) \\ & = & -\varphi_j^2(N\backslash i,v) + \varphi_i^2(N\backslash j,v) \\ & = & \varphi_i^2(N,v) - \varphi_j^2(N,v). \end{array}$$

Teniendo en cuenta EF,

$$\sum_{i \in N} \left(\varphi_i^1(N,v) - \varphi_i^2(N,v)\right) = 0$$

que junto con el resultado anterior permite concluir que para cada $i \in N$

$$\varphi_i^1(N,v) = \varphi_i^2(N,v). \ \blacksquare$$

Nota 1.10 La generalización dada por Nowak y Radzik (1994) no satisface el axioma de contribuciones equilibradas. Esto se aprecia fácilmente considerando el ejemplo 1.1 donde

$$\psi_3(N,v) - \psi_3(N\backslash 2,v) = \frac{1}{6} - 0$$

mientras que

$$\psi_2(N,v) - \psi_2(N\backslash 3,v) = 0 - 0.$$

La función potencial y la propiedad de consistencia

Hart y Mas-Colell (1989) caracterizaron el valor de Shapley utilizando la función potencial.

Se dice que $P : \Gamma_0 \to I\!R$ es una función potencial si verifica lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} i)\, P(\emptyset,v) & = & 0 \\ ii) \sum_{i \in N} D^i P(N,v) & = & v(N) \text{ para cada } (N,v) \in \Gamma_0 \end{array}$$

donde $D^iP(N,v)$ representa la contribución marginal del jugador i al juego $(N,v) \in \Gamma_0$ mediante la función P, es decir:

$$D^iP(N,v) = P(N,v) - P(N\backslash i, v).$$

Hart y Mas-Colell (1989) demostraron que existe una única función potencial P, y además para cada juego $(N,v) \in \Gamma_0$ y para cada jugador $i \in N$, la contribución marginal del jugador i coincide con el valor de Shapley de dicho jugador, es decir,

$$D^iP(N,v) = Sh_i(N,v).$$

Procedemos de la forma más natural para extender la función potencial al contexto de las f.c.g.

Diremos que $P : \Gamma \rightarrow I\!R$ es *una función potencial* si:

$$\begin{aligned} i) \quad P(\emptyset, v) &= 0 \\ ii) \sum_{i\in N} D^iP(N,v) &= \frac{1}{n!} \sum_{T\in H(N)} v(T) \ \text{ para todo } (N,v) \in \Gamma \end{aligned}$$

donde $D^iP(N,v)$ representa la contribución marginal del jugador i al juego $(N,v) \in \Gamma$ mediante la función P, es decir:

$$D^iP(N,v) = P(N,v) - P(N\backslash i, v).$$

La condición $i)$ es la misma que utilizaron Hart y Mas-Colell. La condición $ii)$ nos dice que la suma de las contribuciones marginales de los jugadores es igual al "valor esperado" de la gran coalición (en Hart y Mas-Colell se correspondía con el valor de la gran coalición).

Teorema 1.5 *Existe una única función potencial P. Además para cada juego $(N,v) \in \Gamma$ y para cada $i \in N$, $D^iP(N,v) = \phi_i(N,v)$.*

Demostración.

Es fácil ver que

$$P(N,v) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n!}\sum_{T\in H(N)} v(T) + \sum_{i\in N} P(N\backslash i, v)\right). \tag{1.10}$$

Utilizando la hipótesis de inducción en el número de jugadores n es posible comprobar que la función potencial P existe y es única.

Probamos a continuación que el vector de contribuciones marginales, $\left(D^i P(N,v)\right)_{i\in N}$, satisface los axiomas de eficiencia (EF), jugador nulo (JN), aditividad (AD) y simetría (SI), con lo que se finalizaría la demostración ya que ha sido probado en el teorema 1.2 que ϕ es el único valor satisfaciendo estos axiomas.

$\left(D^i P(N,v)\right)_{i\in N}$ satisface EF por la definición de P. Utilizaremos inducción en el número de jugadores n para probar que satisface los otros tres axiomas. Para $n=1$ es trivial. Supongamos por hipótesis de inducción que $\left(D^i P(N,v)\right)_{i\in N}$ verifica JN, AD y SI para todos aquellos juegos que tienen menos de n jugadores, y probémoslo para n.

Para probar JN es suficiente comprobar que si i es un jugador nulo entonces $P(N,v)=P(N\backslash i,v)$. Utilizando la expresión (1.10) obtenemos

$$n\left(P(N,v)-P(N\backslash i,v)\right)=$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!}\sum_{T\in H(N)} v(T)+\sum_{j\neq i}\left(P(N\backslash j,v)-P(N\backslash i,v)\right)\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{T\in H(N)} v(T)+\sum_{j\neq i}\left(P(N\backslash j,v)-P(N\backslash \{j,i\},v)\right)\\
&\quad -\sum_{j\neq i}\left(P(N\backslash i,v)-P(N\backslash \{j,i\},v)\right)\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{T\in H(N)} v(T)+\sum_{j\neq i}\left(P(N\backslash j,v)-P(N\backslash \{j,i\},v)\right)\\
&\quad -\sum_{j\neq i} D^j P(N\backslash i,v).
\end{aligned}$$

Como además $\sum\limits_{j\neq i} D^j P(N\backslash i,v)=\frac{1}{(n-1)!}\sum\limits_{T\in H(N\backslash i)} v(T)$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
n\left(P(N,v)-P(N\backslash i,v)\right) &= \frac{1}{n!}\sum_{T\in H(N)} v(T)-\frac{1}{(n-1)!}\sum_{T\in H(N\backslash i)} v(T)\\
&\quad +\sum_{j\neq i}\left(P(N\backslash j,v)-P(N\backslash\{i,j\},v)\right).
\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{n!}\sum_{T\in H(N)} v(T) - \frac{1}{(n-1)!}\sum_{T\in H(N\backslash i)} v(T) \\ B &= \sum_{j\neq i}\left(P(N\backslash j, v) - P(N\backslash\{i,j\}, v)\right). \end{aligned}$$

Como i es un jugador nulo,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{n!}\sum_{l=1}^{n}\sum_{T\in H(N\backslash i)} v(T, i^l) - \frac{1}{(n-1)!}\sum_{T\in H(N\backslash i)} v(T) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción $B = 0$.
Entonces si i es jugador nulo se verifica que $D^i P(N, v) = 0$.
Comprobemos que P verifica el axioma de aditividad (AD), es decir que dados (N, v), $(N, w) \in \Gamma$

$$P(N, v + w) = P(N, v) + P(N, w)$$

con lo cual quedará probado que $\left(D^i P(N, v)\right)_{i\in N}$ también lo verifica. De nuevo, utilizando el método de inducción sobre el número de jugadores podemos escribir

$$\begin{aligned} P(N, v+w) &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n!}\sum_{T\in H(N)} (v+w)(T) + \sum_{i\in N} P(N\backslash i, v+w)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n!}\sum_{T\in H(N)} v(T) + \frac{1}{n!}\sum_{T\in H(N)} w(T) + \right. \\ &\qquad \left.\sum_{i\in N} P(N\backslash i, v) + \sum_{i\in N} P(N\backslash i, w)\right) \\ &= P(N, v) + P(N, w). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\left(D^i P(N, v)\right)_{i\in N}$ satisface AD.

Probemos a continuación que $\left(D^i P(N, v)\right)_{i\in N}$ verifica SI. Supongamos ahora dos jugadores i, j simétricos. Si probamos que $P(N\backslash i, v) = P(N\backslash j, v)$ entonces $D^i P(N, v) = D^j P(N, v)$.

Por simetría de los jugadores i y j sabemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{T\in H(N\backslash i)} v(T) &= \sum_{T\in H(N\backslash\{i,j\})} \sum_{l=1}^{n-1} v(T,j^l)\\
&= \sum_{T\in H(N\backslash\{i,j\})} \sum_{l=1}^{n-1} v(T,i^l)\\
&= \sum_{T\in H(N\backslash j)} v(T).
\end{aligned}$$

Utilizando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\sum_{k\in N\backslash i} P(N\backslash\{i,k\},v) = \sum_{k\in N\backslash j} P(N\backslash\{j,k\},v)$$

y por tanto se verifica que

$$\begin{aligned}
P(N\backslash i,v) &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(n-1)!}\sum_{T\in H(N\backslash i)} v(T) + \sum_{k\in N\backslash i} P(N\backslash\{i,k\},v)\right)\\
&= \frac{1}{(n-1)}\left(\frac{1}{(n-1)!}\sum_{T\in H(N\backslash j)} v(T) + \sum_{k\in N\backslash j} P(N\backslash\{j,k\},v)\right)\\
&= P(N\backslash j,v). \blacksquare
\end{aligned}$$

Nota 1.11 Como consecuencia de este teorema tenemos que ψ no se puede obtener a partir de la función potencial.

Hart y Mas-Colell (1989) caracterizan el valor de Shapley utilizando una propiedad de consistencia y la propiedad de ser estándar para dos.

Dada φ valor en Γ_0, definen para cada grupo de jugadores ($S \subset N$) el juego reducido (S, v_S^{φ}) donde la función característica de una subcoalición $R \subset S$ representa la utilidad que queda después de que los miembros de $N\backslash S$ han sido pagados mediante φ. Formalmente, para cada coalición $S \subset N$, se define el siguiente juego reducido (S, v_S^{φ}) siendo para cada $R \subset S$

$$v_S^{\varphi}(R) = v(R\cup S^c) - \sum_{i\in S^c} \varphi_i(R\cup S^c, v).$$

Se dice que un valor φ es:

- *Consistente* si para todo $(N, v) \in \Gamma_0$, $S \subset N$ y $j \in S$ se verifica que

$$\varphi_j(S, v_S^{\varphi}) = \varphi_j(N, v).$$

- *Estándar para dos* si dado $(N, v) \in \Gamma_0$ con $N = \{1, 2\}$ se verifica que para todo $i \in N$

$$\varphi_i(N, v) = v(i) + \frac{1}{2}\left(v(1,2) - v(1) - v(2)\right).$$

Un valor es estándar para dos si en cada juego en el que intervienen dos jugadores la asignación que recibe cada jugador se puede dividir en dos partes, en una primera fase cada jugador recibe lo que se puede garantizar por si mismo y en una segunda fase se dividen el resto a partes iguales.

Hart y Mas-Colell (1989) probaron que la única solución consistente y estándar para dos es el valor de Shapley.

A continuación extendemos estas dos propiedades para juegos en forma característica generalizada y caracterizamos el nuevo valor ϕ mediante estos axiomas.

Sea φ un valor en Γ, definimos para cada $S \in 2^N$ el juego reducido $(S, v_S^{\varphi}) \in \Gamma$, siendo para todo $S' \subset S$ y $R \in H(S')$

$$v_S^{\varphi}(R) = \frac{r!}{(n+r-s)!} \sum_{T \in H(S' \cup (N \backslash S)),\, R = T/R} v(T) - \sum_{i \in N \backslash S} \varphi_i(S' \cup (N \backslash S)), v).$$

Este juego representa la generalización natural del juego considerado por Hart y Mas-Colell. Fijado un grupo de jugadores $S \subset N$, para cada coalición ordenada ($R \in H(S')$, $S' \subset S$), $v_S^{\varphi}(R)$ representa la utilidad que obtienen los jugadores de S' si cooperan en el orden R y los jugadores de $N \backslash S$ son pagados mediante φ. Nótese que $\frac{r!}{(n+r-s)!} \sum_{T \in H(S' \cup (N \backslash S)),\, R = T/R} v(T)$ es la utilidad esperada que consiguen los jugadores de S' en el orden R cuando los jugadores de $N \backslash S$ cooperan en cualquier orden.

Diremos que φ satisface:

(CS) *Consistencia* si para todo $(N, v) \in \Gamma$, $S \subset N$ y $j \in S$

$$\varphi_j(S, v_S^{\varphi}) = \varphi_j(N, v).$$

(E2) *Estándar para dos* si para todo $(N,v) \in \Gamma$ con $N = \{1,2\}$ se tiene que para todo $i \in N$

$$\varphi_i(N,v) = v(i) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v(1,2) + \frac{1}{2}v(2,1) - v(1) - v(2)\right).$$

La interpretación de estas propiedades es análoga a la dada para juegos TU, no en vano son una generalización de ellas.

Teorema 1.6 *ϕ es el único valor en Γ que satisface CS y E2.*

Demostración.
Es trivial comprobar que ϕ satisface E2. Probemos que ϕ satisface CS.

$$\begin{aligned}
\sum_{R\in H(S')} v_S^{\phi}(R) &= \frac{r!}{(n+r-s)!}\sum_{R\in H(S')}\left(\sum_{T\in H(S'\cup(N\backslash S)),R=T/R} v(T)\right) \\
&\quad - \sum_{R\in H(S')}\sum_{i\in N\backslash S}\phi_i(S'\cup(N\backslash S),v) \\
&= r!\left(\sum_{i\in S'\cup(N\backslash S)}\phi_i(S'\cup(N\backslash S),v)\right) \\
&\quad - r!\left(\sum_{i\in N\backslash S}\phi_i(S'\cup(N\backslash S),v)\right) \\
&= r!\left(\sum_{i\in S'}\phi_i(S'\cup(N\backslash S),v)\right).
\end{aligned}$$

Por otra parte sabemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r!}\sum_{R\in H(S')} v_S^{\phi}(R) &= \sum_{i\in S'}\left(P(S',v_S^{\phi}) - P(S'\backslash\{i\},v_S^{\phi})\right) \\
&= \sum_{i\in S'}\phi_i(S'\cup(N\backslash S),v) \\
&= \sum_{i\in S'}\left(P(S'\cup(N\backslash S),v) - P(S'\cup(N\backslash S)\backslash\{i\},v)\right).
\end{aligned}$$

La primera igualdad es cierta por la existencia de la función potencial, la segunda la hemos visto previamente y la tercera es una consecuencia del teorema 1.5.

Comparando ambas expresiones y teniendo en cuenta que la función potencial para el juego (S, v_S^{ϕ}) es única, tenemos que para cada $S' \subset S$

$$c + P(S^{'} \cup (N \backslash S), v) = P(S', v_S^{\phi}) \quad \text{siendo} \;\; c = -P(N \backslash S, v).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \phi_i(S, v_S^{\phi}) &= P(S, v_S^{\phi}) - P(S \backslash i, v_S^{\phi}) \\ &= P(N, v) - P(N \backslash i, v) \\ &= \phi_i(N, v). \end{aligned}$$

Probamos a continuación que existe un único valor φ satisfaciendo CS y E2. La demostración sigue las líneas del Teorema B que aparece en Hart y Mas-Colell (1988); en una primera parte de la demostración probamos que si φ es consistente y estándar para dos entonces es eficiente, lo que demostramos por inducción en el número de jugadores n, y a continuación procedemos a demostrar la unicidad utilizando este resultado.

Sea $n = 2$, el resultado es trivial por ser φ estándar para dos. Si $n = 1$, $N = \{i\}$, sea j un jugador nulo, aplicando CS y E2 tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_i(\{i\}, v) &= \varphi_i(\{i\}, v_{\{i\}}^{\varphi}) \\ &= \varphi_i(\{i, j\}, v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sea $n \geq 3$ y $(N, v) \in \Gamma$. Consideremos una coalición S de dos jugadores, aplicando CS se obtiene

$$\sum_{j \in N} \varphi_j(N, v) = \sum_{j \in S} \varphi_j(S, v_S^{\varphi}) + \sum_{j \in N \backslash S} \varphi_j(N, v).$$

Sea el juego (S, v_S^{φ}) tal que $|S| = 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in S} \varphi_j(S, v_S^{\varphi}) &= \frac{1}{s!} \sum_{R\in H(S)} v_S^{\varphi}(R) \\
&= \frac{1}{s!} \sum_{R\in H(S)} \frac{r!}{(n+r-s)!} \sum_{T\in H(R\cup(N\backslash S)),R=T/R} v(T) \\
&\quad - \sum_{j\in N\backslash S} \varphi_j(S\cup(N\backslash S), v) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{T\in H(N)} v(T) - \sum_{j\in N\backslash S} \varphi_j(N, v)
\end{aligned}$$

ya que $r = s$. Por tanto se concluye que

$$\sum_{j\in N} \varphi_j(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{T\in H(N)} v(T)$$

es decir, φ es eficiente.

A continuación procedemos a demostrar la unicidad. Sean φ^1, φ^2 dos valores verificando consistencia y estándar para dos. Supongamos que coinciden para aquellos juegos que tienen menos de n jugadores con $n \geq 2$.

Para cada par de jugadores $i, j \in N$ consideramos los juegos reducidos,

$$\left(\{i,j\}, v_{\{i,j\}}^{\varphi^1}\right) \quad \text{y} \quad \left(\{i,j\}, v_{\{i,j\}}^{\varphi^2}\right)$$

que identificaremos con v^{φ^1} y v^{φ^2} respectivamente. Utilizando que φ^1 y φ^2 son estándar para dos y el hecho de que $v^{\varphi^1}(i) = v^{\varphi^2}(i)$, $v^{\varphi^1}(j) = v^{\varphi^2}(j)$ tenemos que se dan las relaciones siguientes

$$\varphi_i^1(v^{\varphi^1}) \ \geq \varphi_i^1(v^{\varphi^2}) \Leftrightarrow \varphi_j^1(v^{\varphi^1}) \geq \varphi_j^1(v^{\varphi^2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^{\varphi^1}(i,j) + v^{\varphi^1}(j,i) \geq v^{\varphi^2}(i,j) + v^{\varphi^2}(j,i).$$

Utilizando que ambos valores son consistentes y que coinciden para aquellos juegos en los que $n = 2$ tenemos

$$\varphi_i^1(N,v) = \varphi_i^1(v^{\varphi^1}) = \varphi_i^2(v^{\varphi^1}) \geq \varphi_i^1(v^{\varphi^2}) = \varphi_i^2(v^{\varphi^2}) = \varphi_i^2(N,v) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi_j^1(N,v) \geq \varphi_j^2(N,v).$$

Si esto lo hacemos para cada par de jugadores $i, j \in N$, obtenemos por eficiencia que para todo $i \in N$

$$\varphi_i^1(N,v) = \varphi_i^2(N,v). \blacksquare$$

Nota 1.12 Es trivial comprobar que ψ no es estándar para dos, sea $N = \{1,2\}$, $v(1,2) = 1$ y $v(T) = 0$ para todo $T \in \Omega \backslash (1,2)$ entonces $\psi_1(N,v) = 0$ mientras que $\psi_2(N,v) = 0.5$.

Comprobemos que tampoco verifica CS. Sea (N,v) el juego presentado en el ejemplo 1.1 y tomemos $S = \{1,2\}$. La función característica generalizada del juego (S, v_S^ψ) es la siguiente

$$\begin{array}{ll} v_S^\psi(1,2) = 0.167 & v_S^\psi(1) = 0 \\ v_S^\psi(2,1) = -0.167 & v_S^\psi(2) = 0 \end{array}$$

con lo que $\psi_1(S, v_S^\psi) = -0.083$, $\psi_2(S, v_S^\psi) = 0.083$ mientras que

$$\psi(N,v) = (0, 0, 0.167).$$

1.3 Valores ponderados

La propiedad de simetría es uno de los principales axiomas que caracteriza el valor de Shapley, sin embargo en ocasiones no parece razonable exigir esta propiedad. Pensemos por ejemplo que no siempre los esfuerzos de los jugadores son iguales a la hora de formar una coalición o bien que a menudo los jugadores tienen diferentes habilidades lo que supone que inicialmente partan de una situación no simétrica. También podemos pensar en situaciones no simétricas cuando cada jugador representa a su vez a otros agentes pudiendo ser el número o el tipo de agentes representados por cada jugador distinto. Shapley (1953a) en su tesis ya introdujo los valores de Shapley ponderados, y a partir de este momento muchos otros han desarrollado estudios de valores no simétricos, Owen (1968, 1972), Kalai y Samet (1987) y Hart y Mas-Colell (1989).

1.3.1 Valores de Shapley ponderados en juegos TU

Un sistema de ponderaciones o pesos p es un par (λ, Σ) donde $\lambda \in I\!R^n$, $\lambda_i > 0$ para todo $i \in N$ y $\Sigma = \{S_1, ..., S_m\}$ es una partición ordenada de N.

El valor de Shapley ponderado con sistema de ponderaciones $p = (\lambda, \Sigma)$ al que denotaremos $(Sh)_p$ es un valor en Γ_0 definido para cada juego de unanimidad $u_S \, (S \subset N)$, de la siguiente forma. Sea $k = \max\{j \mid S_j \cap S \neq \emptyset\}$,

$$((Sh)_p)_i(N, u_S) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\sum\limits_{j \in S \cap S_k} \lambda_j} & \text{si } i \in S \cap S_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

La partición ordenada Σ divide a los jugadores en distintos niveles de forma que los jugadores que están en el nivel más alto se reparten la unidad proporcionalmente a sus pesos, mientras que el resto de los jugadores no obtiene ninguna utilidad.

Dado que el conjunto de juegos de unanimidad $u_S \; (S \subset N)$ son una base para Γ_0 tenemos que,

$$(Sh_p)_i(N, v) = \sum_{S \subset N} c_s((Sh)_p)_i(N, u_S).$$

Se deduce fácilmente que si $\lambda_i = \lambda_j$ para todo $i \neq j$ y $\Sigma = \{N\}$ entonces el valor de Shapley coincide con el valor de Shapley ponderado.

Un juego $(N, v) \in \Gamma_0$ es *monótono* si $v(T) \geq v(S)$ para cualquier par de coaliciones T, S con $S \subset T$.

Una coalición S se dice una *coalición de socios* en el juego $(N, v) \in \Gamma_0$ si

$$v(R \cup T) = v(R) \quad \text{para todo}\, T \subset S,\, T \neq S \text{ y } \; R \subset N \backslash S.$$

Diremos que un valor φ satisface:

- *Positividad* si para cualquier juego monótono $(N, v) \in \Gamma_0$ se tiene que $\varphi(N, v) \geq 0$.

- *Compañerismo* si dada una coalición de socios S en $(N, v) \in \Gamma_0$, entonces para todo $i \in S$

$$\varphi_i(N, v) = \varphi_i\left(S, \left(\sum_{j \in S} \varphi_j(N, v)\right) u_S\right).$$

Una coalición de socios S se comporta como si fuera un único jugador de tal forma que cualquier coalición no aumenta su utilidad si se une a una subcoalición propia de S. El axioma de compañerismo lo que nos indica es que la utilidad total que consiguen en el juego (N, v) los miembros de cada coalición de socios, $\sum_{j \in S} \varphi_j(N, v)$, se la reparten los jugadores de S del mismo modo que si jugasen el juego de unanimidad u_S entre ellos solos.

Kalai y Samet (1987) axiomatizaron el valor de Shapley ponderado utilizando propiedades de eficiencia, jugador nulo, aditividad, positividad y compañerismo. A continuación procedemos a definir el valor de Shapley ponderado para juegos en forma característica generalizada.

1.3.2 Valores de Shapley ponderados para juegos en forma característica generalizada

Dado un sistema de ponderaciones $p = (\lambda, \Sigma)$ con $\lambda \in I\!R^n$, $\lambda_i > 0$ para todo $i \in N$ y $\Sigma = \{S_1, ..., S_m\}$ una partición ordenada de N, definimos para cada $S \subset N$, $T \in H(S)$ y $k = \max\{j \mid S_j \cap T \neq \emptyset\}$

$$(\phi_p)_i(N, w_T) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{s! \sum\limits_{j \in T \cap S_k} \lambda_j} & \text{si } i \in T \cap S_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo w_T el juego de unanimidad definido en (1.2).

Al igual que en juegos TU la partición ordenada Σ nos indica los distintos niveles que ocupan los jugadores. Así los jugadores de T que están en el nivel más alto se van a repartir la utilidad total proporcionalmente a sus pesos.

De forma inmediata se puede comprobar que cuando $\lambda_i = \lambda_j$ para todo $i \neq j$ y $\Sigma = \{N\}$, la expresión anterior coincide con ϕ.

Teniendo en cuenta la descomposición dada en el lema 1.1 b) de cada juego $(N, v) \in \Gamma$ en los juegos de unanimidad w_T, podemos generalizar el valor de Shapley ponderado de la siguiente forma:

$$(\phi_p)_i(N, v) = \sum_{T \in \Omega} c_T (\phi_p)_i(N, w_T).$$

A continuación veremos que podemos obtener el valor de Shapley ponderado de un juego en forma característica generalizada como el valor esperado de los valores de Shapley ponderados de los juegos TU inducidos por cada orden de la gran coalición, supuestos todos los órdenes igualmente probables.

Sea $T \in H(S)\,(S \subset N)$ y w_T el correspondiente juego de unanimidad. En la nota 1.6 ya hemos considerado el juego $(w_T)_R$ definido como $(w_T)_R(S) = w_T(R/S)$ para cada $S \subset N$. Se verifica entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\sum_{R\in H(N)}((Sh)_p)_i(w_T)_R &= \frac{1}{n!}\frac{n!}{t!}\frac{\lambda_i}{\sum\limits_{j\in T\cap S_k}\lambda_j} \\
&= (\phi_p)_i(N, w_T).
\end{aligned}$$

Dado $(N, v) \in \Gamma$ y teniendo en cuenta la relación anterior junto con la aditividad del valor de Shapley obtenemos,

$$\begin{aligned}
(\phi_p)_i(N, v) &= \sum_{T\in\Omega} c_T(\phi_p)_i(N, w_T) \\
&= \sum_{T\in\Omega} c_T \frac{1}{n!}\sum_{R\in H(N)}((Sh)_p)_i(w_T)_R \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{R\in H(N)}\left(\sum_{T\in\Omega} c_T((Sh)_p)_i(w_T)_R\right) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{R\in H(N)}((Sh)_p)_i\left(\sum_{T\in\Omega} c_T(w_T)_R\right) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{R\in H(N)}((Sh)_p)_i(v_R).
\end{aligned}$$

También se verifica que dado $(N, v) \in \Gamma$ si definimos $w(S) = \frac{1}{s!}\sum\limits_{T\in H(S)} v(T)$ para todo $S \subset N$ entonces,

$$((Sh)_p)_i(N, w) = (\phi_p)_i(N, v).$$

Definición 1.4 *Diremos que* $(N, v) \in \Gamma$ *es monótono si* $v(T) \leq v(R)$ *para todo* $R, T \in \Omega$ *tales que* $R/T = T$.

Definición 1.5 *Diremos que* $S \subset N$ *es una coalición de socios en* $(N, v) \in \Gamma$ *si para todo* $S' \subset S$ $(S' \neq S)$, $R \subset N\backslash S$ *y* $U' \in H(S' \cup R)$ *se verifica que* $v(U') = v(R')$ *siendo* $R' = U'/R$.

La idea que refleja la anterior definición es la siguiente: diremos que un conjunto de jugadores S forman una coalición de socios cuando cualquier coalición formada por elementos no pertenecientes a S no aumenta la utilidad que puede conseguir (en ningún orden) si un subgrupo de jugadores de S se le unieran (en cualquier orden), lo que significa que los jugadores de S sólo aportan utilidad cuando actúan como un bloque.

A continuación damos una serie de axiomas que utilizaremos para dar una caracterización de los valores ponderados para juegos en forma característica generalizada.

Diremos que un valor φ verifica:

(PS) *Positividad* si dado un juego monótono $(N, v) \in \Gamma$, entonces

$$\varphi(N, v) \geq 0.$$

(CO) *Compañerismo* si dada una coalición de socios S entonces para cada $i \in S$

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{T \in H(S)} \varphi_i \left(S, \left(\sum_{j \in S} \varphi_j(N, v) \right) w_T \right).$$

El axioma de compañerismo nos dice que si S es una coalición de socios, la asignación que recibe cada jugador coincide con la suma de las asignaciones que recibiría cada jugador si se repartiesen la utilidad total que consiguen ellos en el juego (N, v), $\sum_{i \in S} \varphi_i(N, v)$, teniendo sólo en cuenta los juegos de unanimidad de cada orden de la coalición de socios. Estos axiomas generalizan los axiomas de positividad y compañerismo introducidos por Kalai y Samet (1987).

Nota 1.13 Es fácil comprobar que S es una coalición de socios en $(N, v) \in \Gamma$ si y sólo si S es una coalición de socios en $(N, v_R) \in \Gamma_0$ para cada $R \in H(N)$.

Teorema 1.7 *Un valor φ en Γ satisface los axiomas de EF, JN, AD, PS y CO si y sólo si existe un sistema de ponderaciones p tal que $\varphi = \phi_p$.*

Demostración.

Teniendo en cuenta que $(\phi_p)_i(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{R \in H(N)} ((Sh)_p)_i(N, v_R)$ obtenemos,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in N}(\phi_p)_i(N,v) &= \frac{1}{n!}\sum_{R\in H(N)}\sum_{i\in N}((Sh)_p)_i(N,v_R)\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{R\in H(N)} v_R(N)\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{R\in H(N)} v(R).
\end{aligned}
$$

lo cual demuestra que ϕ_p satisface EF.

Sea $p=(\lambda,\Sigma)$, probaremos que ϕ_p satisface CO. Si S es una coalición de socios en $(N,v)\in\Gamma$ entonces S es una coalición de socios en v_R para todo $R\in H(N)$. Por tanto,

$$
((Sh)_p)_i(N,v_R) = ((Sh)_p)_i\left(S,\left(\sum_{j\in S}((Sh)_p)_j(N,v_R)\right)u_S\right).
$$

Por ello, utilizando la primera expresión y la aditividad del valor de Shapley tenemos que para cada $i\in S$

$$
\begin{aligned}
(\phi_p)_i(N,v) &= \frac{1}{n!}\sum_{R\in H(N)}\left(((Sh)_p)_i\left(S,\left(\sum_{j\in S}((Sh)_p)_j(N,v_R)\right)u_S\right)\right)\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{R\in H(N)}\left((((Sh)_p)_i(S,u_S))\sum_{j\in S}((Sh)_p)_j(N,v_R)\right)\\
&= ((Sh)_p)_i(S,u_S)\sum_{j\in S}\sum_{R\in H(N)}\frac{1}{n!}((Sh)_p)_j(N,v_R)\\
&= ((Sh)_p)_i(S,u_S)\sum_{j\in S}(\phi_p)_j(N,v)\\
&= \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{j\in S\cap S_k}\lambda_j}\sum_{j\in S}(\phi_p)_j(N,v)\\
&= s!\frac{\lambda_i}{s!\sum\limits_{j\in S\cap S_k}\lambda_j}\sum_{j\in S}(\phi_p)_j(N,v).
\end{aligned}
$$

Sea $T\in H(S)$ y w_T el juego de unanimidad definido previamente, entonces

$$
\begin{aligned}
s!\frac{\lambda_i}{s!\sum\limits_{j\in S\cap S_k}\lambda_j}\sum_{j\in S}(\phi_p)_j(N,v) &= s!(\phi_p)_i(S,w_T)\sum_{j\in S}(\phi_p)_j(N,v)\\
&= \sum_{T\in H(S)}(\phi_p)_i(S,w_T)\sum_{j\in S}(\phi_p)_j(N,v)\\
&= \sum_{T\in H(S)}(\phi_p)_i\left(S,\left(\sum_{j\in S}(\phi_p)_j(N,v)\right)w_T\right).
\end{aligned}
$$

Es inmediato comprobar que ϕ_p satisface el resto de los axiomas.

Sea φ satisfaciendo los axiomas anteriores. Probaremos que para todo $i \in N$, $\varphi_i(w_{T'}) = \varphi_i(w_{T''})$ para todo $S \subset N$ y para todo T', $T'' \in H(S)$.

Es claro que para todo $S \subset N$, S es una coalición de socios en $w_{T'}$ y en $w_{T''}$ para todo $T', T'' \in H(S)$. Sea $i \in N$, si $i \notin S$ por JN,

$$\varphi_i(N,w_{T'}) = 0 = \varphi_i(N,w_{T''}).$$

Si $i \in S$, aplicando CO y EF obtenemos

$$
\begin{aligned}
\varphi_i(N,w_{T'}) &= \sum_{T\in H(S)}\varphi_i\left(S,\left(\sum_{j\in S}\varphi_j(N,w_{T'})\right)w_T\right)\\
&= \sum_{T\in H(S)}\varphi_i\left(S,w_T\right)\left(\sum_{j\in S}\varphi_j(N,w_{T'})\right)\\
&= \sum_{T\in H(S)}\varphi_i\left(S,w_T\right)\left(\sum_{j\in S}\varphi_j(N,w_{T''})\right)\\
&= \varphi_i(N,w_{T''}).
\end{aligned}
$$

Con la anterior consideración y siguiendo la misma línea de la demostración que aparece en Kalai (1987) probamos la unicidad.

Definimos un sistema de pesos $p_0 = (\lambda, (S'_1, ..., S'_m))$ de la siguiente forma: dado $N' \in H(N)$, S'_1 contiene a todos los jugadores de tal forma que $\varphi_i(N, w_{N'}) \neq 0$ (es claro que $S'_1 \neq \emptyset$ utilizando el axioma de eficiencia) y definimos para cada $i \in S'_1$, $\lambda_i = \varphi_i(N, w_{N'})$; supuestos definidos $S'_1, ..., S'_k$, sea $T = N\backslash(S'_1\cup...\cup S'_k)$. Sea ahora S'_{k+1} conteniendo a los jugadores para los cuales $\varphi_i(N, w_{T'}) \neq 0$ y definimos $\lambda_i = \varphi_i(N, w_{T'})$ para todo $i \in S'_{k+1}$. Este procedimiento terminará en un número finito m de etapas.

Puesto que φ verifica monotonía entonces $\lambda > 0$. Definimos $S_i = S'_{m-i+1}$ para todo $i = 1, ..., m$, y $p = (\lambda, (S_1, ..., S_m))$.

Probamos a continuación que φ y ϕ_p coinciden sobre los juegos de unanimidad.

Sea $S \subset N$, $T \in H(S)$, $k = \max\{j \mid S \cap S_j \neq \emptyset\}$ y $R = \bigcup_{j=1}^{k} S_j$, entonces S es una coalición de socios en $w_{R'}$ para todo $R' \in H(R)$. Además se verifica que para cada $w_{R'}$ los únicos miembros que tienen pagos distintos de cero son los elementos de S_k, por ello $\sum_{j \in S} \varphi_j(N, w_{R'}) = \sum_{j \in S \cap S_k} \lambda_j$.

Aplicando CO y AD, para todo $i \in S$

$$\begin{aligned}
\varphi_i(N, w_{R'}) &= \sum_{T \in H(S)} \varphi_i\left(S, \left(\sum_{j \in S} \varphi_j(N, w_{R'})\right) w_T\right) \\
&= \sum_{T \in H(S)} \left(\sum_{j \in S} \varphi_j(N, w_{R'})\right) \varphi_i(S, w_T) \\
&= s! \varphi_i(S, w_T) \sum_{j \in S} \varphi_j(N, w_{R'}) \\
&= s! \varphi_i(S, w_T) \sum_{j \in S \cap S_k} \lambda_j.
\end{aligned}$$

Por ello,

$$\varphi_i(S, w_T) = \frac{\varphi_i(N, w_{R'})}{s! \sum\limits_{j \in S \cap S_k} \lambda_j}.$$

Entonces,

$$\varphi_i(S, w_T) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{s! \sum\limits_{j \in S \cap S_k} \lambda_j} & i \in S \cap S_k \\ 0 & i \notin S \cap S_k \end{cases}.$$

A continuación probamos que para cada $i \in S$, $\varphi_i(S, w_T) = \varphi_i(N, w_T)$ con lo que se finaliza la demostración.

Como S es una coalición de socios en w_T y φ verifica CO tenemos que

$$\varphi_i(N, w_T) = \sum_{R \in H(S)} \varphi_i \left(S, \left(\sum_{j \in S} \varphi_j(N, w_T) \right) w_R \right). \qquad (1.11)$$

Además como φ verifica JN y los jugadores de $N \backslash S$ son nulos

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in S} \varphi_j(N, w_T) &= \sum_{j \in N} \varphi_j(N, w_T) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{A \in H(N)} w_T(A) \\
&= \frac{1}{n!} \frac{n!}{s!} \\
&= \frac{1}{s!}.
\end{aligned}$$

De este modo podemos reescribir (1.11) como

$$\begin{aligned}
\varphi_i(N, w_T) &= \sum_{R \in H(S)} \varphi_i \left(S, \frac{1}{s!} w_R \right) \\
&= \frac{1}{s!} \sum_{R \in H(S)} \varphi_i (S, w_R) \\
&= \frac{1}{s!} s! \varphi_i (S, w_T).
\end{aligned}$$

Hemos demostrado entonces que $\varphi = \phi_p$. ■

1.4 Valores coalicionales para juegos en forma característica generalizada

En juegos cooperativos con utilidad transferible, Shapley (1953b) obtuvo una regla de reparto que distribuye "equitativamente" la utilidad total que pueden conseguir los jugadores. Puede ocurrir que, por mecanismos externos al propio juego no contemplados en la función característica, se sepa que ciertos jugadores tienen afinidades (de tipo personal, político,...) que provoquen una mayor tendencia a cooperar entre ellos. De esta forma, el juego se modifica sustancialmente y se parte de un estado inicial en el que los jugadores que tienen afinidades aparecen agrupados en un sistema de coaliciones *a priori*. Owen (1977) estudia este problema para juegos con utilidad transferible, e introduce un valor llamado valor coalicional o valor de Owen, el cual proporciona un reparto de la utilidad en juego. El proceso que realiza básicamente es el siguiente: la estructura de coaliciones induce un juego entre éstas (juego cociente), a cada coalición *a priori* le asigna el valor de Shapley del juego cociente y distribuye este valor entre los miembros de la coalición teniendo en cuenta las posibilidades de que éstos entren a formar parte de otras coaliciones. Owen da una caracterización de su valor utilizando axiomas de eficiencia, títeres, simetría entre jugadores de una misma coalición *a priori*, simetría en el juego cociente y aditividad.

En un juego en forma característica generalizada, la utilidad que puede conseguir una coalición depende del orden de formación de la misma. En este contexto hemos visto que hay dos generalizaciones del valor de Shapley; una obtenida por Nowak y Radzik (1994) y otra dada por Sánchez y Bergantiños (1997).

El objetivo de esta sección es definir un valor coalicional para este tipo de juegos. Del mismo modo que hizo Owen (1977) consideramos que la partición de los jugadores induce un juego cociente en forma característica generalizada (juego cociente generalizado). A cada coalición *a priori* le asignamos un valor de Shapley generalizado y distribuimos éste entre los miembros de la coalición, teniendo en cuenta las posibilidades de que dichos jugadores entren a formar parte de otras coaliciones.

Obtenemos por tanto dos extensiones del valor de Owen para las funciones características generalizadas, una por cada extensión del valor de Shapley.

1.4.1 El valor coalicional en juegos TU

Presentamos a continuación los resultados más importantes obtenidos por Owen (1977).

Sea C^N el conjunto de todas las particiones de N. Sea $(N, v) \in \Gamma_0$ y $B = \{B_1, ..., B_m\} \in C^N$. B es llamado sistema de coaliciones *a priori*, y cada B_j $(j = 1, ..., m)$ está formado por aquellos jugadores que tienen afinidades. Definimos el juego cociente (M, v_B) donde $M = \{1, ..., m\}$ representa el conjunto de coaliciones *a priori* y para todo $S \subset M$,

$$v_B(S) = v(\bigcup_{j \in S} B_j).$$

Llamaremos $U_0(N)$ al conjunto de juegos TU con coaliciones *a priori* y conjunto de jugadores N. Normalmente identificamos (N, v, B) con (v, B).

Dado $(N, v) \in \Gamma_0$ y $B = \{B_1, ..., B_m\}$ un sistema de coaliciones *a priori*, Owen (1977) probó que existe una única regla de reparto $\varphi : U_0(N) \to I\!R^n$ verificando los axiomas que se exponen a continuación. Sea φ un valor en Γ_0, diremos que φ satisface:

- *Eficiencia* si para todo $(N, v, B) \in U_0(N)$ se verifica que

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v, B) = v(N).$$

- *Jugador nulo* si para todo $(N, v, B) \in U_0(N)$ se verifica que si i es un jugador nulo entonces

$$\varphi_i(N, v, B) = 0.$$

- *Simetría entre jugadores* si para todo $(N, v, B) \in U_0(N)$ se verifica que si $i, j \in B_k \in B$ son jugadores simétricos entonces se tiene que

$$\varphi_i(N, v, B) = \varphi_j(N, v, B).$$

- *Simetría entre coaliciones* si para todo $(N, v, B) \in U_0(N)$, $B_k, B_l \in B$ tales que k, l son jugadores simétricos en el juego cociente se tiene que

$$\sum_{i \in B_k} \varphi_i(N, v, B) = \sum_{i \in B_l} \varphi_i(N, v, B).$$

- *Aditividad* si para todo $(N, v, B), (N, v, B) \in U_0(N)$ se tiene que

$$\varphi(N, v + w, B) = \varphi(N, v, B) + \varphi(N, w, B).$$

Además para todo $(N, v, B) \in U_0(N)$, $B_j \in B$ e $i \in B_j$, esta regla de asignación viene dada por la siguiente fórmula,

$$CV_i(N, v, B) =$$

$$= \sum_{R \subset M, j \notin R} \sum_{S \subset B_j, i \notin S} \frac{s!(b_j - s - 1)!r!(m - r - 1)!}{b_j!m!} \left(v(Q \cup S \cup i) - v(Q \cup S)\right)$$

siendo $Q = \bigcup_{k \in R} B_k$.

Este valor conocido con el nombre de valor de Owen o valor coalicional también puede ser visto como la media de las contribuciones marginales dándoles probabilidad cero a aquellos órdenes en los cuales entre dos jugadores de una coalición *a priori* hay jugadores de otras coaliciones *a priori* e igual probabilidad al resto de órdenes, es decir, en aquellos órdenes en los que los jugadores de cada coalición *a priori* aparecen juntos. Además, $CV(N, v, B) = Sh(N, v)$ si $B = \{N\}$, o $B = \{\{1\}, ..., \{n\}\}$.

Otra propiedad que verifica el valor coalicional es la siguiente:

- *Propiedad del juego cociente* si para todo $(N, v, B) \in U_0(N)$ *y* para todo $B_j \in B$,

$$\sum_{i \in B_j} \varphi_i(N, v, B) = \varphi_j(M, v_B, \{M\}).$$

1.4.2 Definición de dos valores coalicionales

En este apartado definimos dos valores coalicionales para juegos en f.c.g. basándonos en los dos valores de Shapley (ψ y ϕ) definidos previamente.

Definición 1.6 *Sea* $(N,\ v) \in \Gamma$ *y* $B = \{B_1, ..., B_m\}$ *un sistema de coaliciones a priori. Definimos el juego cociente generalizado* (M, v_B) *del siguiente modo:* $M = \{1, 2, ..., m\}$ *representa las coaliciones a priori, para todo* $R \subset M$ *y* $R' = (R'_1, R'_2, ..., R'_r) \in H(R)$

$$v_B(R') = \frac{1}{\prod\limits_{i \in R} b_i!} \sum_{T'_1 \in H(B_{R'_1})} \sum_{T'_2 \in H(B_{R'_2})} ... \sum_{T'_t \in H(B_{R'_r})} v(T'_1, ..., T'_t).$$

Este juego, cuyos jugadores son las coaliciones *a priori,* representa el valor esperado si asumimos que los miembros de cada coalición *a priori* aparecen consecutivamente.

Llamaremos $U(N)$ al conjunto de juegos en forma característica generalizada con coaliciones *a priori* y conjunto de jugadores N. Denotaremos por $H_B(N)$ a todos los órdenes de la gran coalición en los cuales los jugadores de cada coalición *a priori* aparecen consecutivos, es decir si $T' = (T'_1, ..., T'_n) \in H_B(N) \subset H(N)$ entonces dados $B_k \in B$, $T'_i, T'_j \in B_k$ con $i \leq j$ se verifica que para todo $i \leq l \leq j$, $T'_l \in B_k$. Los elementos de $H_B(N)$ se llamarán órdenes admisibles.

Veamos a continuación en el ejemplo 1.3 el cálculo del juego cociente generalizado. Sea el sistema de coaliciones *a priori* tal que $B = \{B_1, B_2\}$, siendo $B_1 = \{1, 3\}$ y $B_2 = \{2\}$.

La función característica del juego inducido por las coaliciones *a priori* será la siguiente:

$$v_B(1,2) = \frac{1}{b_1!b_2!} \sum_{T_1' \in H(B_1)} \sum_{T_2' \in H(B_2)} v(T_1', T_2') = \frac{1}{2}\left(v(1,3,2) + v(3,1,2)\right) = 4$$
$$v_B(2,1) = \frac{1}{b_1!b_2!} \sum_{T_2' \in H(B_2)} \sum_{T_1' \in H(B_1)} v(T_2', T_1') = \frac{1}{2}\left(v(2,1,3) + v(2,3,1)\right) = 3.5$$
$$v_B(1) = \frac{1}{b_1!} \sum_{T_1' \in H(B_1)} v(T_1') = \frac{1}{2}\left(v(1,3) + v(3,1)\right) = 3$$
$$v_B(2) = \frac{1}{b_2!} \sum_{T_2' \in H(B_2)} v(T_2') = v(2) = 0$$
$$v_B(\emptyset) = 0.$$

Utilizando los mismos pasos que Owen, pero ahora aplicado a juegos en forma característica generalizada, podemos obtener el valor coalicional de la forma que se expone a continuación.

Sea $(N, v, B) \in U(N)$, si denotamos por $\varphi_i(N, v, B)$ el valor esperado por el jugador i en el juego v bajo la estructura de coaliciones $B = \{B_1, ..., B_m\}$, parece natural que la suma de los valores obtenidos por los jugadores de la j-ésima coalición *a priori* (B_j) en el juego v sea igual al valor asignado al jugador j en el juego cociente generalizado, es decir,

$$\sum_{i \in B_j} \varphi_i(N, v, B) = \varphi_j\left(M, v_B\right).$$

Tratando de encontrar un reparto de los miembros de cada coalición *a priori* procedemos de la siguiente forma: para cada coalición *a priori* construimos distintos juegos para ver lo que ocurre cuando reemplazamos la coalición por las distintas subcoaliciones ordenadas posibles. De esta manera analizamos el poder de cada subcoalición ordenada de jugadores.

Para todo $B_j \in B$, $S \subset B_j$ y $S' \in H(S)$, sea $(M, v_{B_j \backslash S'})$ el juego definido de la siguiente forma. Si $R \subset M$ y $R' \in H(R)$,

$$v_{B_j \backslash S'}(R') =$$

$$\begin{cases} v_B(R') & \text{si} \quad j \notin R \\ \dfrac{1}{\prod\limits_{i \in R, i \neq j} b_i!} \sum\limits_{T_1' \in H(B_{R_1'}), R_1' \neq j} \cdots \sum\limits_{T_r' \in H(B_{R_r'}), R_r' \neq j} v(T_1', ..., S', ..., T_r') & \text{si} \quad j \in R \end{cases}$$

donde la posición de S' en $(T'_1, ..., S', ..., T'_r)$ viene dada por R'. El juego $(M, v_{B_j \backslash S'})$ nos muestra como cambia el juego (M, v_B) cuando la coalición *a priori* B_j es sustituida por la coalición ordenada S'.

Ahora para cada $B_j \in B$ consideremos los siguientes juegos en forma característica generalizada: (B_j, w_j^ϕ) y (B_j, w_j^ψ) donde para todo $S \subset B_j$, $S' \in H(S)$, $w_j^\phi(S') = \phi_j(M, v_{B_j \backslash S'})$ y $w_j^\psi(S') = \psi_j(M, v_{B_j \backslash S'})$. Estos juegos miden el poder de cada subcoalición ordenada S' cuando los jugadores de $B_j \backslash S$ dejan el juego, siguiendo el valor ϕ (Sánchez and Bergantiños (1997)) o el valor ψ (Nowak and Radzik (1994)). Estos juegos también miden las posibilidades de cada ordenación de cada coalición *a priori*, ya que para cada $B'_j \in H(B_j)$

$$w_j^\psi(B'_j) = \psi_j(M, v_{B_j \backslash B'_j}) \qquad \text{y} \qquad w_j^\phi(B'_j) = \phi_j(M, v_{B_j \backslash B'_j})$$

y también se verifica que

$$w_j^\psi(\emptyset) = \psi_j(M, v_{B_j \backslash \emptyset}) = \phi_j(M, v_{B_j \backslash \emptyset}) = w_j^\phi(\emptyset) = 0$$

ya que j es un jugador nulo en el juego $(M, v_{B_j \backslash \emptyset})$.

Siguiendo las líneas de Owen (1977) definimos *el valor coalicional* ϕ como $\phi_i(N, v, B) = \phi_i(B_j, w_j^\phi)$ para todo $i \in B_j$ y $j \in M$. También definimos *el valor coalicional* ψ como $\psi_i(N, v, B) = \psi_i(B_j, w_j^\psi)$ para todo $i \in B_j$ y $j \in M$.

A continuación realizamos los cálculos para obtener el valor coalicional ψ para cada jugador $i \in B_j$. Por definición de ψ obtenemos que

$$\psi_i(B_j, w_j^\psi) = \sum_{R \subset B_j, i \notin R} \sum_{R' \in H(R)} \frac{(b_j - r - 1)!}{b_j!} \left[w_j^\psi(R', i) - w_j^\psi(R') \right]$$

donde

$$w_j^\psi(R') = \sum_{T \subset M, j \notin T} \sum_{T' \in H(T)} \frac{(m - t - 1)!}{m!} \left(v_{B_j \backslash R'}(T', j) - v_{B_j \backslash R'}(T') \right)$$

y

$$w_j^\psi(R', i) = \sum_{T \subset M, j \notin T} \sum_{T' \in H(T)} \frac{(m - t - 1)!}{m!} \left(v_{B_j \backslash (R', i)}(T', j) - v_{B_j \backslash (R', i)}(T') \right).$$

Sea $T \subset M$, $j \notin T$, y $T' \in H(T)$. Dado que $j \notin T$, de la definición de $v_{B_j \backslash S'}$ obtenemos que $v_{B_j \backslash (R',i)}(T') - v_{B_j \backslash R'}(T') = 0$. Además,

$$v_{B_j \backslash (R',i)}(T', j) - v_{B_j \backslash R'}(T', j) =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{k \in T} b_k!} \sum_{S'_1 \in H(B_{T'_1})} \cdots \sum_{S'_t \in H(B_{T'_t})} \left(v(S'_1, ..., S'_t, R', i) - v(S'_1, ..., S'_t, R') \right).$$

Ahora,

$$w_j^{\psi}(R', i) - w_j^{\psi}(R') = \sum_{T \subset M, j \notin T} \sum_{T' \in H(T)} \frac{(m-t-1)!}{m! \prod\limits_{k \in T} b_k!}$$

$$\sum_{S'_1 \in H(B_{T'_1})} \cdots \sum_{S'_t \in H(B_{T'_t})} \left(v(S'_1, ..., S'_t, R', i) - v(S'_1, ..., S'_t, R') \right).$$

Entonces

$$\psi_i(N, v, B) = \psi_i(B_j, w_j^{\psi}) =$$

$$= \sum_{T \subset M, j \notin T} \sum_{T' \in H(T)} \sum_{R \subset B_j, i \notin R} \sum_{R' \in H(R)} \frac{(m-t-1)!(b_j-r-1)!}{b_j! m! \prod\limits_{k \in T} b_k!}$$

$$\sum_{S'_1 \in H(B_{T'_1})} \cdots \sum_{S'_t \in H(B_{T'_t})} \left(v(S'_1, ..., S'_t, R', i) - v(S'_1, ..., S'_t, R') \right).$$

El valor coalicional ψ tiene la misma interpretación probabilística que el valor coalicional, $\psi_i(N, v, B)$ representa el valor esperado del jugador i en el juego (N, v) si sólo consideramos los órdenes admisibles con respecto a B.

Con argumentos similares se obtiene que para todo $i \in B_j$,

$$\phi_i(N, v, B) = \phi_i(B_j, w_j^{\phi}) =$$

$$= \sum_{T \subset M, j \notin T} \sum_{T' \in H(T)} \sum_{R \subset B_j, i \notin R} \sum_{R' \in H(R)} \frac{(m-t-1)!(b_j-r-1)!}{b_j! m! \prod\limits_{k \in T} b_k!(t+1)(r+1)}$$

$$\sum_{S'_1 \in H(B_{T'_1})} \cdots \sum_{S'_t \in H(B_{T'_t})} \sum_{l=1}^{t+1} \sum_{k=1}^{r+1} \left(v(S'_1, ..., S'_t, (R', i^k)^l) - v(S'_1, ..., S'_t, (R')^l) \right).$$

Nota 1.14 El valor coalicional ψ y el valor coalicional ϕ generalizan el valor coalicional, es decir, si $(N, v) \in \Gamma_0$ entonces $\psi(N, v, B) = \phi(N, v, B) = CV(N, v, B)$. Además, si $B = \{N\}$ o $B = \{\{1\}, ..., \{n\}\}$ entonces $\phi(N, v, B) = \phi(N, v)$ y $\psi(N, v, B) = \psi(N, v)$.

Nota 1.15 Dado $(N, v) \in \Gamma$ y $N' \in H(N)$ definimos previamente $(N, v_{N'}) \in \Gamma_0$ como $v_{N'}(S) = v(N'/S)$ ($S \subset N$), se verifica que para todo $i \in N$

$$\phi_i(N, v, B) = \frac{1}{m! \prod_{k \in M} b_k!} \sum_{N' \in H_B(N)} CV_i(N, v_{N'}, B).$$

Teniendo en cuenta la definición de ϕ y haciendo algunos cálculos obtenemos que si $i \in B_j$,

$$\phi_i(N, v, B) =$$

$$= \sum_{T \subset M, j \notin T} \sum_{T' \in H(T)} \sum_{R \subset B_j, i \notin R} \sum_{R' \in H(R)} \frac{(m-t-1)!(b_j - r - 1)!}{b_j! m! \prod_{k \in T} b_k!}$$

$$\sum_{S'_1 \in H(B_{T'_1})} \cdots \sum_{S'_t \in H(B_{T'_t})} \sum_{l=1}^{t+1} \sum_{k=1}^{r+1} \left(v(S'_1, ..., S'_t, (R', i^k)^l) - v(S'_1, ..., S'_t, (R')^l) \right)$$

$$= \sum_{T\subset M, j\notin T}\sum_{T'\in H(T)}\sum_{R\subset B_j, i\notin R}\sum_{R'\in H(R)} \frac{(m-t-1)!(b_j-r-1)!t!r!}{b_j!m!}$$
$$\sum_{S_1'\in H(B_{T_1'})} \cdots \sum_{S_t'\in H(B_{T_t'})} \sum_{l=1}^{t+1}\sum_{k=1}^{r+1} \frac{1}{(t+1)!(r+1)!\prod_{k\in T} b_k!}$$
$$\left(v\left(S_1',...,S_t',(R',i^k)^l\right) - v\left(S_1',...,S_t',(R')^l\right)\right)$$
$$= \sum_{T\subset M, j\notin T}\sum_{T'\in H(T)}\sum_{R\subset B_j, i\notin R}\sum_{R'\in H(R)} \frac{(m-t-1)!(b_j-r-1)!t!r!}{b_j!m!}$$
$$\sum_{S_1'\in H(B_{T_1'})} \cdots \sum_{S_t'\in H(B_{T_t'})} \sum_{l=1}^{t+1}\sum_{k=1}^{r+1} \left(\sum_{\substack{N'\in H_B(N) \\ \left(S_1',...,S_t',(R',i^k)^l\right)=N'/\left(S_1',...,S_t',(R',i^k)^l\right)}} \frac{1}{m!\prod_{k\in M} b_k!}\right)$$
$$\left(v\left(S_1',...,S_t',(R',i^k)^l\right) - v\left(S_1',...,S_t',(R')^l\right)\right).$$

Si definimos $f(t,m,r,b_j) = \dfrac{(m-t-1)!(b_j-r-1)!t!r!}{b_j!m!}$ y $Q = \bigcup_{i\in T} B_i$, obtenemos que la expresión anterior coincide con

$$\phi_i(N,v,B) =$$

$$= \sum_{N'\in H_B(N)} \frac{1}{m!\prod_{k\in M} b_k!} \left(\sum_{T\subset M, j\notin T}\sum_{R\subset B_j, i\notin R} f(t,m,r,b_j)\right.$$
$$\left.\big(v(N'/(Q\cup R\cup i) - v(N'/(Q\cup R))\big)\right)$$
$$= \frac{1}{m!\prod_{k\in M} b_k!} \sum_{N'\in H_B(N)} CV_i(N, v_{N'}, B).$$

Nota 1.16 Se verifica que para todo $j\in M$, $\sum_{k\in B_j} \psi_k(N,v,B) = \psi_j(M,v_B)$ y $\sum_{k\in B_j} \phi_k(N,v,B) = \phi_j(M,v_B)$. En el caso de ϕ lo veremos posteriormente en la demostración del teorema 1.8. La demostración para el valor ψ es análoga.

Veremos algunos ejemplos que pondrán de manifiesto el distinto comportamiento del valor coalicional ϕ y del valor coalicional ψ. Consideremos los ejemplos 1.1 y 1.3 y analicemos sus valores coalicionales en todos los casos posibles. En la tabla 1.3 aparecen los resultados correspondientes al ejemplo 1.1 y en la tabla 1.4 los correspondientes al ejemplo 1.3.

B	$\psi(N, v, B)$	$\phi(N, v, B)$
$\{\{1,2\},\{3\}\}$	(0,0,0.25)	(0.0625,0.0625,0.125)
$\{\{1,3\},\{2\}\}$	(0,0,0)	(0,0,0)
$\{\{1\},\{2,3\}\}$	(0,0,0.25)	(0.125,0.0625,0.0625)

(Tabla 1.3)

B	$\psi(N, v, B)$	$\phi(N, v, B)$
$\{\{1,2\},\{3\}\}$	(2.25,0.75,0.5)	(2.125,0.625,0.75)
$\{\{1,3\},\{2\}\}$	(2.25,0.5,1)	(2.1875,0.375,1.1875)
$\{\{1\},\{2,3\}\}$	(2,0.75,1)	(1.875,0.6875,1.1875)

(Tabla 1.4)

Analizando los resultados en el ejemplo 1.1 observamos que los repartos según el valor coalicional ψ y según ϕ difieren considerablemente. Además los jugadores 1 y 2 son jugadores nulos*, así como la coalición $\{1, 2\}$ en el juego cociente con sistema de coaliciones *a priori* $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, mientras que los jugadores del juego cociente son jugadores simétricos y no son jugadores nulos.

En el segundo ejemplo vemos que no hay demasiadas diferencias entre los dos valores obtenidos.

1.4.3 Caracterizaciones axiomáticas

En la literatura hay varias caracterizaciones axiomáticas del valor coalicional. Owen (1977) caracterizó el valor coalicional utilizando las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría entre coaliciones *a priori*, simetría entre jugadores de una misma coalición *a priori* y aditividad. Más tarde, Winter (1992) añadió dos caracterizaciones, una utilizando la propiedad de consistencia y otra mediante el potencial. Ya ha sido dicho también que estas propiedades fueron introducidas por Hart and Mas-Colell (1989). Calvo *et al.* (1996) caracterizaron el valor coalicional utilizando la propiedad de contribuciones equilibradas introducida por Myerson (1980). En esta sección probamos que el valor coalicional ϕ satisface propiedades similares y generalizamos las caracterizaciones axiomáticas dadas para juegos TU. Por el contrario observaremos que el valor coalicional ψ no satisface todas las propiedades aunque también se verá una caracterización para este valor.

Previamente indicamos que las definiciones de jugador nulo* (definición 1.1), jugador nulo (definición 1.2) y simetría (definición 1.3) se pueden generalizar a $U(N)$ de manera trivial con lo que no las formulamos rigurosamente.

Sea G el conjunto de todas las triplas (N, v, B) donde N es un conjunto finito de jugadores, $B = \{B_1, ..., B_m\} \in C^N$, y v es una función característica generalizada.

Un *valor coalicional* en Γ es una aplicación en G que asigna a cada tripla $(N, v, B) \in G$ un vector $\varphi(N, v, B) \in I\!R^n$. Diremos que φ satisface:

(EFC) *Eficiencia* si

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v, B) = \frac{1}{m! \prod\limits_{k \in M} b_k!} \sum_{N' \in H_B(N)} v(N').$$

Esta propiedad nos indica que la utilidad total que se van a repartir los jugadores es la utilidad esperada que se alcanza a través de la cooperación de los jugadores considerando aquellos órdenes en los que jugadores de una misma coalición *a priori* van a aparecer de forma consecutiva.

Si $B = \{N\}$ o $B = \{\{1\}, ..., \{n\}\}$, entonces el axioma EFC coincide con el axioma EF.

La propiedad EFC puede ser reescrita en función de los juegos $\left(M, v_{B_j/B'_j}\right)$ cuando el valor φ es de la forma $\varphi_i(N, v, B) = \varphi_i(B_j, w_j^\varphi)$ si $i \in B_j$, teniendo en cuenta que

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v, B) = \sum_{j \in M} \sum_{i \in B_j} \varphi_i(N, v, B).$$

Además para todo $j \in M$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in B_j} \varphi_i(N, v, B) &= \sum_{i \in B_j} \varphi_i(B_j, w_j^\varphi) \\
&= \frac{1}{b_j!} \sum_{B'_j \in H(B_j)} w_j^\varphi(B'_j) \\
&= \frac{1}{b_j!} \sum_{B'_j \in H(B_j)} \varphi_j \left(M, v_{B_j/B'_j}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v, B) = \frac{1}{b_j!} \sum_{j \in M} \sum_{B'_j \in H(B_j)} \varphi_j \left(M, v_{B_j/B'_j}\right).$$

(JN*) *Jugador nulo** si para cada jugador nulo* i

$$\varphi_i(N, v, B) = 0.$$

(JN) *Jugador nulo* si para cada jugador nulo i

$$\varphi_i(N, v, B) = 0.$$

(AD) *Aditividad* si para cada par de juegos $(N, v, B), (N, w, B)$,

$$\varphi(N, v + w, B) = \varphi(N, v, B) + \varphi(N, w, B).$$

(SIJ) *Simetría entre jugadores* si para cada par de jugadores simétricos i y j de la misma coalición *a priori* B_k,

$$\varphi_i(N, v, B) = \varphi_j(N, v, B).$$

(SIC) *Simetría entre coaliciones* si para cada par de coaliciones simétricas B_i y B_j en el juego (M, v_B),

$$\sum_{k \in B_i} \varphi_k(N, v, B) = \sum_{k \in B_j} \varphi_k(N, v, B).$$

Ya hemos visto que JN* y JN son dos extensiones diferentes del axioma de jugador nulo para juegos TU y que JN* implica JN. Las propiedades AD, SIJ y SIC son las generalizaciones estándar de las mismas propiedades en juegos TU.

A continuación procedemos a dar caracterizaciones del valor coalicional ψ y del valor coalicional ϕ utilizando las propiedades anteriores.

Teorema 1.8 *a) El valor coalicional ψ es el único valor coalicional que satisface EFC, JN* y AD.*

b) El valor coalicional ϕ es el único valor coalicional que satisface EFC, JN, AD, SIJ y SIC.

Antes de proceder a la demostración damos un lema previo.

Lema 1.3 *a) Sea $R \subset M$, $R' \in H(R)$, $j \notin R$, $i \in B_j$, $T' = (T'_1, ..., T'_r)$ siendo $T'_k \in H(B_{R'_k})$ para todo $k = 1, ..., r$, $S \subset B_j$, $i \notin S$, y $S' \in H(S)$. Si φ satisface EFC y JN* entonces*

$$\varphi_l(N, u_{(T', S', i)}, B) = \begin{cases} \dfrac{(m-r-1)!(b_j-s-1)!}{m! \prod\limits_{k \in \{R \cup j\}} b_k!} & si \;\; l = i \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

siendo $u_{(T',S',i)}$ el juego de unanimidad definido en (1.1).

Si $K' \in \Omega$ no es de la forma (T', S', i) se verifica que $\varphi_l(N, u_{K'}, B) = 0$ para todo $l \in N$.

b) Sea $T \subset N$, $T' \in H(T)$. Si φ satisface EFC, JN, SIJ, y SIC entonces

$$\varphi_i(N, w_{T'}, B) = \begin{cases} \dfrac{1}{m_T(m_T)!|B_j \cap T| \prod\limits_{l \in M} |B_l \cap T|} & si \quad \begin{array}{c} i \in B_j \cap T \\ T' \in H_B(T) \end{array} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

siendo $w_{T'}$ el juego de unanimidad definido en (1.2), y
$m_T = |\{j \in M \mid B_j \cap T \neq \emptyset\}|$.

Demostración.
a) Si $l \neq i$, l es un jugador nulo* en $\big(N, u_{(T',S',i)}, B\big)$ y por JN*

$$\varphi_l(N, u_{(T',S',i)}, B) = 0.$$

Aplicando EFC obtenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_i(N, u_{(T',S',i)}, B) &= \sum_{l \in N} \varphi_l(N, u_{(T',S',i)}, B) \\ &= \frac{1}{m! \prod\limits_{k \in M} b_k!}(m-r-1)! \left[\prod_{k \in M, k \notin R, k \neq j} b_k! \right] (b_j - s - 1)! \\ &= \frac{(m-r-1)!(b_j-s-1)!}{m! \prod\limits_{k \in \{R \cup j\}} b_k!}. \end{aligned}$$

Y si $K' \in \Omega$ no es de la forma (T', S', i), por EFC,

$$\begin{aligned} \sum_{l \in N} \varphi_l(N, u_{K'}, B) &= \frac{1}{m! \prod\limits_{k \in M} b_k!} \sum_{N' \in H_B(N)} u_{K'}(N') \\ &= 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que todos los jugadores excepto el último jugador en K' son nulos*, y aplicando JN*, obtenemos que $\varphi_l(N, u_{K'}, B) = 0$ para todo $l \in N$.

b) Sea $T' \in H_B(T)$. Por EFC,

$$\begin{aligned}\sum_{l\in N}\varphi_l(N,w_{T'},B) &= \frac{1}{m!\displaystyle\prod_{k\in M} b_k!}\sum_{N'\in H_B(N)} w_{T'}(N') \\ &= \frac{1}{m_T!\displaystyle\prod_{k\in M}|B_k\cap T|!}.\end{aligned}$$

Sea $A=\{j\in M \mid B_j\cap T\neq\emptyset\}$. Si $i\notin T$ entonces i es un jugador nulo, y aplicando JN se obtiene que $\varphi_i(N,w_{T'},B)=0$. Como todas las coaliciones de A son simétricas en el juego cociente, aplicando SIC se verifica que para todo $j\in A$,

$$\sum_{i\in B_j}\varphi_i(N,w_{T'},B)=\frac{1}{m_T(m_T)!\displaystyle\prod_{k\in M}|B_k\cap T|!}.$$

Teniendo en cuenta que los jugadores de T son simétricos y aplicando SIJ obtenemos que si $i,k\in B_j\cap T$ entonces,

$$\varphi_i(N,w_{T'},B)=\varphi_k(N,w_{T'},B).$$

Por tanto si $i\in B_j\cap T$ y $j\in A$,

$$\varphi_i(N,w_{T'},B)=\frac{1}{m_T(m_T)!|B_j\cap T|\displaystyle\prod_{l\in M}|B_l\cap T|!}.$$

Supongamos ahora que $T'\notin H_B(T)$. Por EFC,

$$\begin{aligned}\sum_{l\in N}\varphi_l(N,w_{T'},B) &= \frac{1}{m!\displaystyle\prod_{k\in M} b_k!}\sum_{N'\in H_B(N)} w_{T'}(N') \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dado que todas las coaliciones son simétricas, se obtiene por SIC que para todo $B_j\in B$, $\sum_{l\in B_j}\varphi_l(N,w_{T'},B)=0$ y como todos los jugadores de la misma coalición son simétricos, obtenemos por SIJ que $\varphi_l(N,w_{T'},B)=0$ para todo $l\in N$. ■

Demostración del teorema 1.8

a) Es fácil probar que ψ satisface EFC, JN* y AD. Sea φ otra solución verificando EFC, JN* y AD. Teniendo en cuenta el lema 1.3 a) podemos concluir que φ y ψ coinciden en todos los juegos de unanimidad u_T. Usando la descomposición en los juegos de unanimidad u_T dada en el lema 1.1 a) y aplicando AD se concluye que $\varphi = \psi$ en Γ.

b) Es fácil probar que ϕ satisface EFC, JN, AD y SIJ. Sea $B_i \in B$, entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in B_i} \phi_k(N,v,B) &= \frac{1}{b_i!} \sum_{B'_i \in H(B_i)} \phi_i(M, v_{B_i \backslash B'_i}) \\
&= \phi_i \left[(M, \frac{1}{b_i!} \sum_{B'_i \in H(B_i)} v_{B_i \backslash B'_i}) \right] \\
&= \phi_i(M, v_B)
\end{aligned}$$

y por tanto ϕ también satisface SIC.

Sea φ otra solución verificando los cinco axiomas. Utilizando el lema 1.3 b) y los axiomas EFC, JN, SIJ y SIC obtenemos que φ coincide con ϕ en todos los juegos de unanimidad w_T. Aplicando la descomposición dada en el lema 1.1 b) en función de los juegos de unanimidad w_T conjuntamente con la propiedad AD se obtiene la unicidad en Γ. ■

Nota 1.17

a) Los tres axiomas utilizados en el teorema 1.8 a) son necesarios.

- $\varphi = 2\psi$ satisface JN* y AD.
- $\varphi_i(N,v,B) = \dfrac{\dfrac{1}{m! \prod_{k \in M} b_k!} \sum_{N' \in H_B(N)} v(N')}{n}$ para todo $i \in N$ satisface EFC y AD.
- Sea D el conjunto de jugadores nulos* de (N,v). Definimos φ como

$$\varphi_i(N,v,B) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{m! \prod_{k \in M} b_k!} \sum_{N' \in H_B(N)} v(N')}{n-d} & \text{si } i \in N \backslash D \\ 0 & \text{si } i \in D \end{cases}$$

  φ satisface EFC y JN*.

b) Los cinco axiomas utilizados en el teorema 1.8 b) son necesarios.

- $\varphi = 2\phi$ satisface JN, AD, SIJ y SIC.
- $\varphi_i(N,v,B) = \dfrac{\dfrac{1}{m!\prod\limits_{k\in M} b_k!}\sum\limits_{N'\in H_B(N)} v(N')}{mb_j}$ si $i \in B_j$ satisface EFC, AD, SIJ y SIC.
- Sea D_j el conjunto de jugadores nulos de (N,v,B) de la coalición *a priori* B_j. Sea C el conjunto formado por todas las coaliciones *a priori* que son jugadores nulos en el juego cociente. Definimos,

$$\varphi_i(N,v,B) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \bigcup\limits_{j=1}^{m} D_j \cup (\bigcup\limits_{j\in C} B_j) \\ \dfrac{\dfrac{1}{m!\prod\limits_{k\in M} b_k!}\sum\limits_{N'\in H_B(N)} v(N')}{(m-c)(b_j-d_j)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  φ satisface EFC, JN, SIJ y SIC.

- Sea ω el valor definido como,

$$\omega_i(N,v,B) = \begin{cases} \phi_i(N,v,B) & \text{si } B \neq \{N\} \\ \psi_i(N,v,B) & \text{si } B = \{N\} \end{cases} \tag{1.12}$$

  Fácilmente se puede comprobar que ω satisface EFC dado que ϕ y ψ verifican la propiedad de eficiencia. ω también satisface JN, AD y SIC ya que para todo $i \in N$, $\psi_i(N,v,\{N\}) = \psi_i(N,v)$.

- Sea η definido para cada $i \in N$ como

$$\eta_i(N,v,B) = \frac{1}{m!\prod\limits_{k\in M} b_k!}\sum_{N'\in H_B(N)} Sh_i(N,v_{N'}). \tag{1.13}$$

  η satisface EFC, JN, AD y SIJ.

  Si un jugador i es un jugador nulo en (N,v,B) entonces i es un jugador nulo en el juego TU $(N,v_{N'})$ para todo $N' \in H(N)$ y en este caso $Sh_i(N,v_{N'}) = 0$ para todo $N' \in H_B(N)$. Entonces η satisface JN. Además si los jugadores $i,j \in B_k$ son simétricos en el juego

(N, v, B), también son simétricos en los juegos TU $(N, v_{N'})$ para todo $N' \in H_B(N)$, y por tanto $Sh_i(N, v_{N'}) = Sh_j(N, v_{N'})$ para todo $N' \in H_B(N)$, lo que implica que $\eta_i(N, v, B) = \eta_j(N, v, B)$. Por tanto, η también satisface SIJ. η satisface AD porque el valor de Shapley es aditivo.

Myerson (1980) introduce la propiedad de contribuciones equilibradas, que dice que para cada par de jugadores i, j, la utilidad que pierde o gana el jugador j si el jugador i desaparece del juego es la misma que pierde o gana el jugador i si el jugador j deja del juego. Myerson (1980) utiliza esta propiedad junto con la propiedad de eficiencia para caracterizar el valor de Shapley. Calvo *et al.* (1996) generalizan este resultado para juegos TU con jerarquías de cooperación y en este capítulo ya se ha extendido este resultado para juegos en forma característica generalizada. Ahora introduciremos esta propiedad para juegos en forma característica generalizada con coaliciones *a priori*.

Diremos que un valor coalicional φ satisface:

(CEI) *Contribuciones equilibradas entre jugadores de una misma coalición a priori* si para cada par de jugadores i, j de la misma coalición B_k se verifica que

$$\varphi_i(N, v, B) - \varphi_i(N \setminus j, v, B_{|N\setminus j}) = \varphi_j(N, v, B) - \varphi_j(N \setminus i, v, B_{|N\setminus i})$$

donde $B_{|N\setminus l} = (B_1, ..., B_k \setminus l, ..., B_m)$ para todo $l \in B_k$.

(CEC) *Contribuciones equilibradas entre coaliciones a priori* si para cada par de coaliciones B_i, B_j se verifica que

$$\sum_{k\in B_i} \varphi_k(N, v, B) - \sum_{k\in B_i} \varphi_k(N \setminus B_j, v, B_{|N\setminus B_j}) =$$

$$\sum_{k\in B_j} \varphi_k(N, v, B) - \sum_{k\in B_j} \varphi_k(N \setminus B_i, v, B_{|N\setminus B_i})$$

donde $B_{|N\setminus B_l} = (B_1, ..., B_{l-1}, B_{l+1}, ..., B_m)$ para todo $l = 1, ..., m$.

El siguiente teorema nos da una caracterización del valor coalicional ϕ utilizando las anteriores propiedades.

Teorema 1.9 *El valor coalicional ϕ es el único valor que satisface EFC, CEI y CEC.*

Demostración.

Es trivial comprobar que ϕ satisface EFC, probamos en primer lugar que ϕ satisface CEI.

Teniendo en cuenta la nota 1.15 se verifica que

$$\phi_i(N,v,B) = \frac{1}{m! \prod\limits_{l \in M} b_l!} \sum_{N' \in H_B(N)} CV_i(N, v_{N'}, B),$$

y por tanto para todo $i, j \in B_k$

$$\phi_i(N,v,B) - \phi_i(N \setminus j, v, B_{|N \setminus j}) =$$

$$= \frac{1}{m! \prod\limits_{l \in M} b_l!} \sum_{N' \in H_B(N)} \left[CV_i(N, v_{N'}, B) - CV_i(N \setminus j, v_{N' \setminus j}, B_{|N \setminus j}) \right].$$

Dado que CV satisface contribuciones equilibradas en juegos TU y $(N, v_{N'}, B)$ y $(N \setminus j, v_{N' \setminus j}, B_{|N \setminus j})$ son juegos TU, la última expresión es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m! \prod\limits_{l \in M} b_l!} \sum_{N' \in H_B(N)} \left[CV_j(N, v_{N'}, B) - CV_j(N \setminus i, v_{N' \setminus i}, B_{|N \setminus i}) \right] \\ = \; & \phi_j(N,v,B) - \phi_j(N \setminus i, v, B_{|N \setminus i}). \end{aligned}$$

Probamos que ϕ satisface CEC. Utilizando la nota 1.16 sabemos que para todo $j \in M$,

$$\sum_{i \in B_j} \phi_i(N,v,B) = \phi_j(M, v_B),$$

entonces ϕ satisface CEC si y sólo si para todo $i, j \in M$

$$\phi_i(M, v_B) - \phi_i(M \setminus j, v_{B \setminus B_j}) = \phi_j(M, v_B) - \phi_j(M \setminus i, v_{B \setminus B_i})$$

lo cual es cierto como consecuencia del teorema 1.4.

A continuación probamos la unicidad. Sean φ^1 y φ^2 dos valores satisfaciendo EFC, CEI y CEC. Usando razonamientos análogos a los empleados en el teorema 1.4 podemos concluir que para todo $k \in M$,

$$\sum_{i \in B_k} \varphi_i^1(N,v,B) = \sum_{i \in B_k} \varphi_i^2(N,v,B).$$

Sea $B_k \in B$ e $i, j \in B_k$. Probamos la unicidad por inducción en b_k. Si $b_k = 1$ ($B_k = \{i\}$) entonces $\varphi_i^1(N, v, B) = \varphi_i^2(N, v, B)$. Supongamos que el resultado es cierto para $b_k - 1$. Ahora probaremos que el resultado también se verifica para b_k. Aplicando la hipótesis de inducción y CEI obtenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_i^1(N, v, B) - \varphi_j^1(N, v, B) &= \varphi_i^1(N \setminus j, v, B_{|N \setminus j}) - \varphi_j^1(N \setminus i, v, B_{|N \setminus i}) \\
&= \varphi_i^2(N \setminus j, v, B_{|N \setminus j}) - \varphi_j^2(N \setminus i, v, B_{|N \setminus i}) \\
&= \varphi_i^2(N, v, B) - \varphi_j^2(N, v, B).
\end{aligned}$$

Dado que $\sum_{i \in B_k} \varphi_i^1(N, v, B) = \sum_{i \in B_k} \varphi_i^2(N, v, B)$ concluimos que $\varphi^1 = \varphi^2$. ■

Nota 1.18 El valor coalicional ψ no satisface CEI ni CEC.

En el ejemplo 1.1 se puede comprobar que si tomamos $B = \{B_1, B_2\}$ siendo $B_1 = \{1\}$ y $B_2 = \{2, 3\}$,

$$\begin{aligned}
\psi_2(N, v, B) &= 0,\ \psi_2(N \setminus 3, v, B_{|N \setminus 3}) = 0 \\
\psi_3(N, v, B) &= \frac{1}{4},\ \psi_3(N \setminus 2, v, B_{|N \setminus 2}) = 0
\end{aligned}$$

con lo que el valor coalicional ψ no satisface CEI.

Además ψ no satisface CEC dado que

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in B_1} \psi_k(N, v, B) &= 0,\ \sum_{k \in B_1} \psi_k(N \setminus B_2, v, B_{|N \setminus B_2}) = 0 \\
\sum_{k \in B_2} \psi_k(N, v, B) &= \frac{1}{4},\ \sum_{k \in B_2} \psi_k(N \setminus B_1, v, B_{|N \setminus B_1}) = 0.
\end{aligned}$$

Nota 1.19 Los tres axiomas utilizado en el teorema 1.9 son necesarios.

- $\varphi = 2\phi$ satisfacen CEI y CEC.
- Es claro que el valor η que aparece definido en (1.13) en la nota 1.17 satisface EFC. Teniendo en cuenta que el valor de Shapley satisface CEI en juegos TU, es fácil probar que η también satisface CEI.
- Sea $i_j \in B_j$ el jugador de menor índice en B_j, definimos para todo $i \in B_j$ y $B_j \in B$

$$\mu_i(N, v, B) = \begin{cases} \phi_j(M, v_B, \{M\}) & \text{si } i = i_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1.14}$$

μ satisface EFC y CEC.

Hart and Mas-Colell (1989) introducen el potencial en juegos TU y lo utilizan para caracterizar el valor de Shapley. Winter (1992) extiende el potencial a juegos TU con estructura de coaliciones y lo utiliza para caracterizar el valor coalicional. En la sección 1.2 del presente capítulo se extiende el potencial a las funciones características generalizadas y se caracteriza el valor ϕ. A continuación se extenderá el potencial a las funciones características generalizadas con estructura de coaliciones *a priori*.

Sea P una función en G que asigna a cada tripla $(N, v, B) \in G$ un vector $P(N, v, B) \in I\!R^m$. Definimos la contribución marginal del jugador $i \in B_j$ en un juego como

$$D^i(P(N, v, B)) = P_j(N, v, B) - P_j(N \setminus i, v, B_{|N \setminus i}).$$

P es una *función potencial* si*:*

i) $P_j(N, v, B) = 0$ cuando $B_j = \emptyset$.

ii) $\displaystyle\sum_{i \in B_j} D^i(P(N, v, B)) = D^j(P(M, v_B, \{M\}))$ para todo $j \in M$.

iii) $\displaystyle\sum_{i \in N} D^i(P(N, v, B)) = \frac{1}{m! \prod_{j \in M} b_j!} \sum_{N' \in H_B(N)} v(N').$

La primera diferencia entre este potencial y el potencial de Winter (1992) es que la suma de las contribuciones marginales de todos los jugadores es ahora igual al valor esperado de la gran coalición teniendo en cuenta sólo los órdenes admisibles. La segunda diferencia es que el conjunto G en donde hemos definido el potencial es más grande que en Winter (1992).

Es fácil comprobar que la definición anterior generaliza el potencial de Hart y Mas-Colell (1989), Winter (1992), y la función potencial generalizada introducida en la sección 1.2 de este capítulo.

A continuación caracterizamos el valor coalicional ϕ mediante el potencial que ha sido definido.

Teorema 1.10 *Existe una única función potencial. Además para cada* $(N, v, B) \in G$, $\phi_i(N, v, B) = D^i(P(N, v, B))$.

Demostración.

En primer lugar procedemos a la demostración de la unicidad de P. Sea $i \in B_j \in B$. Teniendo en cuenta que P satisface *ii)* se verifica que

$$\begin{aligned} D^j(P(M, v_B, \{M\})) &= \sum_{i \in B_j} \left(P_j(N, v, B) - P_j(N \setminus i, v, B_{|N \setminus i})\right) \\ &= |B_j| P_j(N, v, B) - \sum_{i \in B_j} P_j(N \setminus i, v, B_{|N \setminus i}). \end{aligned}$$

Entonces $P_j(N, v, B) = \frac{1}{|B_j|} \left(D^j(P(M, v_B, \{M\})) + \sum_{i \in B_j} P_j(N \setminus i, v, B_{|N \setminus i}) \right)$.
Utilizando inducción en el número de jugadores ($P(\emptyset, v, \emptyset) = 0$) y teniendo en cuenta que

$$D^j(P(M, v_B, \{M\})) = P(M, v_B, \{M\}) - P(M \backslash j, v_B, \{M \backslash j\}$$

donde P es una función potencial en el sentido de la sección 1.2, es sencillo demostrar la unicidad de P.

A continuación probamos la existencia. Para todo $(N, v, B) \in G$, $j \in M$, $T \subset N$ y $T' \in H_B(T)$ se define[1]

$$d_{T'}(B_j) = \begin{cases} \dfrac{c_{T'}}{m_T(m_T)!|B_j \cap T| \prod_{l \in M} |B_l \cap T|} & \text{si } B_j \cap T \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Definimos P como:

$$P(N, v, B) = \left(\sum_{T \subset N, T' \in H_B(T)} d_{T'}(B_1), ..., \sum_{T \subset N, T' \in H_B(T)} d_{T'}(B_m) \right).$$

[1]Nótese que para todo $T' \in H_B(T)$, $c_{T'}$ son las constantes definidas en el lema 1.1 b).

Si $j \in M$ e $i \in B_j$ entonces

$$\begin{aligned}
D^i(P(N,v,B)) &= \sum_{T\subset N, T'\in H_B(T)} d_{T'}(B_j) - \sum_{T\subset N\setminus i, T'\in H_B(T)} d_{T'}(B_j) \\
&= \sum_{i\in T\subset N, T'\in H_B(T)} d_{T'}(B_j) \\
&= \sum_{i\in T\subset N, T'\in H_B(T)} \frac{c_{T'}}{m_T(m_T)!|B_j\cap T| \prod_{l\in M} |B_l\cap T|!} \\
&= \sum_{T\subset N, T'\in H(T)} c_{T'}\phi_i(N, w_{T'}, B) \\
&= \phi_i(N,v,B).
\end{aligned}$$

Por tanto es fácil ver que P satisface *i), ii)* y *iii),* teniendo en cuenta que el valor coalicional ϕ las satisface. ■

Nota 1.20 Como consecuencia del teorema 1.10 obtenemos que el valor coalicional ψ no se puede obtener a partir de la función potencial.

La propiedad de consistencia ha sido ampliamente estudiada en la literatura. Hart y Mas-Colell (1989) caracterizan el valor de Shapley utilizando esta propiedad, Winter (1992) la utiliza para caracterizar el valor coalicional, y en el teorema 1.6 del presente capítulo hemos utilizado una versión generalizada de esta propiedad para caracterizar el valor ϕ en los juegos en forma característica generalizada. A continuación introducimos la propiedad de consistencia para funciones características generalizadas con estructura de coaliciones *a priori*.

Dado (N,v,B) un juego TU con estructura de coaliciones, un valor coalicional φ y $S\subset B_j$, Winter (1992) definió el juego reducido $\left(S, v^{\varphi}_{S,B}\right)$ donde para todo $T\subset S$,

$$v^{\varphi}_{S,B}(T) = v(T\cup S^c) - \sum_{k\in S^c} \varphi_k\left(T\cup S^c, v, B_{|T\cup S^c}\right).$$

Generalizando esta definición a nuestro contexto tenemos que dado $(N,v,B)\in G$, φ un valor coalicional, $j\in M$ y $S\subset B_j$, definimos el juego reducido $\left(S, v^{\varphi}_{S,B}\right)$ donde para todo $T\subset S$ y $T'\in H(T)$,

$$v^{\varphi}_{S,B}(T') =$$

$$= \frac{t!}{m!\prod_{i\neq j} b_i!(t+b_j-s)!}\left[\sum_{R'\in H_B(T\cup S^c),R'/T=T'} v(R')\right]$$
$$-\sum_{k\in S^c}\varphi_k\left(T\cup S^c, v, B_{|T\cup S^c}\right).$$

En esta expresión $\frac{t!}{m!\prod_{i\neq j} b_i!(t+b_j-s)!}\sum_{R'\in H_B(T\cup S^c),R'/T=T'} v(R')$ es la utilidad esperada que obtienen los miembros de T si cooperan en el orden dado por T' y los jugadores de $N\backslash S$ cooperan en cualquier orden admisible respecto a B.

Diremos que un valor φ satisface:

(CSC) *Consistencia* si para todo $(N,v,B)\in G$, $j\in M$, $S\subset B_j$ e $i\in S$,

$$\varphi_i(N,v,B)=\varphi_i\left(S, v^{\varphi}_{S,B}, \{S\}\right).$$

(E2*) *Estándar para dos* si para todo $(N,v,B)\in G$ siendo $N=\{1,2\}$

$$\varphi_1(N,v,B)=\varphi_2(N,v,B).$$

(PJC) *La propiedad del juego entre coaliciones o juego cociente* si para todo $(N,v,B)\in G$ y $B_j\in B$

$$\sum_{i\in B_j}\varphi_i(N,v,B)=\varphi_j(M,v_B,\{M\}).$$

La definición de consistencia generaliza las definiciones dadas en Hart and Mas-Colell (1989), Winter (1992), y la dada en la sección 1.2 del presente capítulo. La propiedad E2* es una versión más débil de la clásica propiedad de ser estándar para dos. La propiedad del juego entre coaliciones nos dice que la suma de lo que consiguen los jugadores de una coalición *a priori* coincide con lo que obtiene dicha coalición en el juego entre coaliciones.

Utilizando estas propiedades obtenemos el resultado que a continuación se expone.

Teorema 1.11 *El valor coalicional ϕ es el único valor satisfaciendo EFC, CSC, E2* y PJC.*

Demostración.

Probamos que el valor coalicional ϕ satisface CSC dado que previamente ha sido demostrado que el valor coalicional ϕ satisface EFC y PJC y es fácil ver que también satisface E2*.

Sea $j \in M$ y $S \subset B_j$, teniendo en cuenta que para todo $T \subset S$

$$\frac{1}{m! \prod_{i \neq j} b_i!(t + b_j - s)!} \sum_{T' \in H(T)} \sum_{R' \in H_B(T \cup S^c), R'/T=T'} v(R') =$$

$$= \sum_{i \in T \cup S^c} \phi_i \left(T \cup S^c, v, B_{|T \cup S^c} \right)$$

obtenemos que,

$$\sum_{T' \in H(T)} v^{\phi}_{S,B}(T') = t! \sum_{i \in T} \phi_i \left(T \cup S^c, v, B_{|T \cup S^c} \right) =$$

$$= t! \sum_{i \in T} \left(P_j \left(T \cup S^c, v, B_{|T \cup S^c} \right) - P_j \left((T \cup S^c) \setminus i, v, B_{|(T \cup S^c) \setminus i} \right) \right).$$

La primera parte de la igualdad se obtiene de la definición del juego reducido y de la fórmula anterior y la segunda igualdad se obtiene del teorema 1.10.

Definimos para todo $T \subset S$,

$$P'(T, v) = P_j \left(T \cup S^c, v, B_{|T \cup S^c} \right) - P_j \left(S^c, v, B_{|S^c} \right).$$

Con algunos cálculos sencillos obtenemos que $P'(\emptyset, v) = 0$ y

$$\sum_{i \in S} \left(P'(S, v) - P'(S \setminus i, v) \right) = \frac{1}{s!} \sum_{S' \in H(S)} v^{\phi}_{S,B}(S').$$

El teorema 1.5 prueba que existe una única función potencial Po satisfaciendo estas condiciones y además que para cada $i \in S$,

$$Po(S, v^{\phi}_{S,B}) - Po(S \setminus i, v^{\phi}_{S,B}) = \phi_i(S, v^{\phi}_{S,B}, \{S\}).$$

Entonces obtenemos que

$$\begin{aligned}
\phi_i(S, v^{\phi}_{S,B}, \{S\}) &= Po(S, v^{\phi}_{S,B}) - Po(S \setminus i, v^{\phi}_{S,B}) \\
&= P'(S, v) - P'(S \setminus i, v) \\
&= P_j(N, v, B) - P_j(N \setminus i, v, B_{|N \setminus i}) \\
&= \phi_i(N, v, B).
\end{aligned}$$

Las dos primeras igualdades de la anterior expresión son consecuencia del teorema 1.5 aplicado al juego $(S, v^{\phi}_{S,B}, \{S\})$. Es fácil comprobar la tercera igualdad sin más que sustituir P' por su expresión, y la cuarta igualdad es consecuencia del teorema 1.10.

Probamos a continuación la unicidad. Sean φ^1, φ^2 dos valores satisfaciendo los anteriores axiomas. Por PJC, para todo $j \in M$,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in B_j} \varphi^1_i(N, v, B) &= \varphi^1_j(M, v_B, \{M\})\\ \sum_{i\in B_j} \varphi^2_i(N, v, B) &= \varphi^2_j(M, v_B, \{M\}).\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que un valor φ satisface EFC y E2* si y sólo si φ satisface EFC y E2. Por tanto, el teorema 1.6 también se verifica si sustituimos E2 por E2*. Teniendo en cuenta que $(M, v_B, \{M\})$ es un juego en forma característica generalizada, aplicando ese teorema tenemos que $\varphi^1_j(M, v_B, \{M\}) = \varphi^2_j(M, v_B, \{M\})$, lo que implica

$$\sum_{i\in B_j} \varphi^1_i(N, v, B) = \sum_{i\in B_j} \varphi^2_i(N, v, B).$$

Si $n = 1$, $\varphi^1 = \varphi^2$. Aplicando EFC y E2* el resultado se verifica para $n = 2$. Ahora supongamos que el resultado es cierto para $n-1$ jugadores con $n \geq 3$. Probaremos pues que el resultado también se verifica con n jugadores. Sea $(N, v, B) \in G$, $B_k \in B$ e $i, j \in B_k$, utilizando la hipótesis de inducción obtenemos que $v^{\varphi^1}_{\{i,j\},B}(i) = v^{\varphi^2}_{\{i,j\},B}(i)$.

Por CSC, se verifica que para $l = 1, 2$

$$\varphi^l_i\left(\{i,j\}, v^{\varphi^l}_{\{i,j\},B}, \{i,j\}\right) - \varphi^l_j\left(\{i,j\}, v^{\varphi^l}_{\{i,j\},B}, \{i,j\}\right) =$$

$$= \varphi^l_i(N, v, B) - \varphi^l_j(N, v, B)$$

y por tanto

$$\varphi^1_i(N, v, B) - \varphi^2_i(N, v, B) = \varphi^1_j(N, v, B) - \varphi^2_j(N, v, B).$$

Como $\sum_{i\in B_j} \varphi^1_i(N, v, B) = \sum_{i\in B_j} \varphi^2_i(N, v, B)$ podemos concluir que $\varphi^1 = \varphi^2$. ■

Nota 1.21 Si reemplazamos E2* en este teorema por SIJ y covarianza (si $(N, v, B) \in G$, $\alpha > 0$ y $\beta \in I\!R^n$ entonces $\varphi(N, \alpha\, v+\beta, B) = \alpha\varphi(N, v, B)+\beta)$, entonces el resultado también se verifica.

Nota 1.22 El valor coalicional ψ no satisface consistencia. Consideremos como contraejemplo el ejemplo 1.1, sea $B = \{N\}$ y $S = \{1, 2\}$, obtenemos que $\psi_1\left(S, v^{\psi}_{S,B}, \{S\}\right) = -0.083$ y $\psi_1(N, v, B) = 0$.

Nota 1.23 Los cuatro axiomas utilizados en el teorema 1.11 son necesarios.

- $\varphi = 2\phi$ satisface CSC, E2* y PJC.
- $\varphi_i(N, v, B) = \dfrac{\phi_j(M, v_B, \{M\})}{b_j}$ para todo $i \in B_j$ y $B_j \in B$ satisface EFC, E2* y PJC.
- Sea μ el valor definido en (1.14) en la nota 1.19. Es claro que satisface EFC y PJC.

Probamos que μ satisface CSC. Sea $(S, v^{\mu}_{S,B}, \{S\})$ el juego reducido por μ y sea k el jugador de menor índice en S. Si $k = i_j$, entonces

$$\begin{aligned}
\mu_{i_j}(S, v^{\mu}_{S,B}, \{S\}) &= \sum_{l\in S} \mu_l(S, v^{\mu}_{S,B}, \{S\}) \\
&= \frac{1}{s!} \sum_{S'\in H(S)} v^{\mu}_{S,B}(S') \\
&= \frac{1}{s!} \left(\frac{s!}{m! \prod\limits_{k\in M} b_k!} \sum_{R'\in H_B(N)} v(R') - \sum_{S'\in H(S)} \sum_{l\in S^c} \mu_l(N, v, B) \right) \\
&= \sum_{k\in M} \mu_k(M, v_B, \{M\}) - \frac{s!}{s!} \sum_{k\in M\setminus j} \mu_k(M, v_B, \{M\}) \\
&= \mu_j(M, v_B, \{M\}) \\
&= \phi_j(M, v_B, \{M\}) \\
&= \mu_{i_j}(N, v, B).
\end{aligned}$$

Si $k \neq i_j$, entonces

$$\begin{aligned}
\mu_k(S, v^{\mu}_{S,B}, \{S\}) &= \frac{1}{s!} \sum_{S' \in H(S)} v^{\mu}_{S,B}(S') \\
&= \frac{1}{m! \prod\limits_{k \in M} b_k!} \left(\sum_{R' \in H_B(N)} v(R') \right) - \sum_{i \in S^c} \mu_i(N, v, B) \\
&= 0 \\
&= \mu_k(N, v, B).
\end{aligned}$$

Para todo $l \in S$ con $l \neq k$ la igualdad es inmediata.

- Sea el valor η definido en (1.13) en la nota 1.17.

Es claro que η satisface EFC y E2*. Mostramos que η es consistente.

Utilizando el hecho de que el valor de Shapley satisface la propiedad de consistencia, aditividad y es lineal en juegos TU, obtenemos que para todo $S \subset B_j$ e $i \in S$

$$\begin{aligned}
\eta_i(N, v, B) &= \frac{1}{m! \prod\limits_{k \in M} b_k!} \sum_{N' \in H_B(N)} Sh_i(N, v_{N'}) \\
&= \frac{1}{m! \prod\limits_{k \in M} b_k!} \sum_{N' \in H_B(N)} Sh_i(S, (v_{N'})^{Sh}_S) \\
&= Sh_i(S, \frac{1}{m! \prod\limits_{k \in M} b_k!} \sum_{N' \in H_B(N)} (v_{N'})^{Sh}_S)
\end{aligned}$$

donde $(v_{N'})^{Sh}_S(T) = v_{N'}(T \cup S^c) - \sum\limits_{l \in S^c} Sh_l(T \cup S^c, v_{N'})$ para todo $T \subset S$.

Entonces

$$\frac{1}{m! \prod\limits_{k \in M} b_k!} \sum_{N' \in H_B(N)} (v_{N'})^{Sh}_S(T)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m!\prod_{k\in M} b_k!}\frac{b_j!}{(b_j-(s-t))!}\left(\sum_{R'\in H_B(T\cup S^c)} v_{R'}(T\cup S^c)\right.\\
&\quad \left. - \sum_{R'\in H_B(T\cup S^c)}\sum_{l\in S^c} Sh_l(T\cup S^c, v_{R'})\right)\\
&= \frac{1}{m!\prod_{k\neq j} b_k!(b_j-(s-t))!}\left(\sum_{R'\in H_B(T\cup S^c)} v_{R'}(T\cup S^c)\right.\\
&\quad \left. - \sum_{R'\in H_B(T\cup S^c)}\sum_{l\in S^c} Sh_l(T\cup S^c, v_{R'})\right).
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\eta_i(S, v^{\eta}_{S,B}, \{S\}) &= \frac{1}{s!}\sum_{S'\in H(S)} Sh_i(S, (v^{\eta}_S)_{S'})\\
&= Sh_i(S, \frac{1}{s!}\sum_{S'\in H(S)} (v^{\eta}_S)_{S'})
\end{aligned}$$

donde el juego $(S, (v^{\eta}_S)_{S'})$ se define para todo $T \subset S$ como,

$$(v^{\eta}_S)_{S'}(T) =$$

$$= \frac{t!}{m!\prod_{k\neq j} b_k!(b_j-(s-t))!}\sum_{\substack{R'\in H_B(T\cup S^c)\\ R'/T=S'/T}} v(R') - \sum_{l\in S^c}\eta_l(T\cup S^c, v, B_{|T\cup S^c})$$

y de estas expresiones podemos obtener la siguientes igualdades,

$$\frac{1}{s!}\sum_{S'\in H(S)} (v^{\eta}_S)_{S'}(T) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{s!} \sum_{S' \in H(S)} \frac{1}{m! \prod\limits_{k \neq j} b_k!(b_j - (s-t))!} \left(t! \sum_{\substack{R' \in H_B(T \cup S^c) \\ R'/T = S'/T}} v(R') \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l \in S^c} \sum_{R' \in H_B(T \cup S^c)} Sh_l(T \cup S^c, v_{R'}) \right) \\
&= \frac{1}{m! \prod\limits_{k \neq j} b_k!(b_j - (s-t))!} \left(\sum_{T' \in H(T)} \sum_{\substack{R' \in H_B(T \cup S^c) \\ R'/T = T'}} v(R') \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l \in S^c} \sum_{R' \in H_B(T \cup S^c)} Sh_l(T \cup S^c, v_{R'}) \right) \\
&= \frac{1}{m! \prod\limits_{k \neq j} b_k!(b_j - (s-t))!} \left(\sum_{R' \in H_B(T \cup S^c)} v(R') \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l \in S^c} \sum_{R' \in H_B(T \cup S^c)} Sh_l(T \cup S^c, v_{R'}) \right).
\end{aligned}
$$

Por tanto ha sido probado que η satisface CSC.

1.5 El problema de la elección de los mejores órdenes

La idea que subyace detrás de los juegos en forma característica generalizada es que los jugadores no controlan el orden de formación de la coalición; de esta forma se genera cada coalición mediante un proceso secuencial y la utilidad que pueden obtener los jugadores varía según el orden de incorporación a la coalición.

En esta sección vamos a estudiar qué ocurriría si los jugadores pudiesen controlar el orden de formación de las coaliciones. Esta situación la modelizaremos mediante un juego no cooperativo, en el cual estudiaremos sus equilibrios de Nash. Previamente introducimos algunos conceptos.

1.5.1 Juegos no cooperativos: juegos en forma normal

A diferencia de los juegos cooperativos, en los juegos no cooperativos los jugadores no tienen capacidad para tomar acuerdos vinculantes. Además se supone que los jugadores toman sus decisiones independientemente, son completamente racionales y tratan de maximizar la utilidad que pueden conseguir en el juego.

Un *juego finito en forma normal* es una terna (N, X, H) donde N es el conjunto de jugadores, $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ siendo X_i el conjunto de estrategias puras del jugador i, y $H = (H_1, ..., H_n)$ donde para cada $i \in N$, $H_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow I\!R$ representa la función de pago al jugador i.

Diremos que $x \in X$ es un *equilibrio de Nash* del juego en forma normal (N, X, H) si para cada $i \in N$

$$H_i(x) \geq H_i(x\backslash_i x_i) \text{ para todo } x_i \in X_i.$$

Seleccionar equilibrios de Nash supone que ningún jugador ve incrementado su pago si se desvía unilateralmente del equilibrio.

Aquí trabajemos con juegos finitos en forma normal donde cada jugador tiene un número finito de estrategias puras. A partir de las estrategias puras, habitualmente se define el conjunto de estrategias mixtas de un jugador como el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras. Nash (1951) introdujo el concepto de equilibrio de Nash y probó que todo juego en forma normal posee al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Teniendo en cuenta que pueden existir varios equilibrios de Nash y que a menudo algunos parecen más razonables que otros, este concepto de solución ha dado lugar a diferentes refinamientos, entre otros, el equilibrio perfecto introducido por Selten (1975). Seguidamente daremos una sencilla aproximación estratégica del problema que nos planteamos incialmente y estudiaremos únicamente los equilibrios de Nash en estrategias puras.

1.5.2 Una aproximación estratégica

Dado $(N, v) \in \Gamma$ y un valor φ, construimos un juego no cooperativo en forma normal (N, X, H) de la manera que se expone a continuación.

Consideramos las estrategias del jugador $i \in N$ como el conjunto de órdenes de la gran coalición, es decir, para cada $i \in N$, $X_i = \{T \mid T \in H(N)\}$.

Definimos la función de pago del siguiente modo:

$$\begin{array}{lll} H: \prod_{i=1}^{n} X_i & \longrightarrow I\!R^n & \\ x=(x_i)_{i\in N} & \rightarrow H(x) = \left\{ \begin{array}{ll} Sh(N,v_T) & \text{si } x_i = T \text{ para todo } i \\ \varphi(N,v) & \text{en otro caso} \end{array} \right. \end{array}$$

La función de pago H nos indica lo siguiente: si todos los jugadores eligen el mismo orden, la función de pago coincide con el valor de Shapley del juego inducido por ese orden y si al menos dos de ellos difieren en cuanto al orden elegido, entonces la función de pago actúa de acuerdo al valor φ para juegos en forma característica generalizada. Consideraremos como posible regla de reparto φ las dos generalizaciones del valor de Shapley para juegos en forma característica generalizada ψ y ϕ obtenidas respectivamente en Nowak y Radzik (1994) y en Sánchez y Bergantiños (1997) y analizadas con detalle en este capítulo.

Definición 1.7 *Dado el juego* $(N,v)\in\Gamma$ *y* φ *un valor en* Γ*, diremos que un orden* $T\in H(N)$ *es preferido según el valor* φ *cuando para todo* $i\in N$, $Sh_i(N,v_T)\geq\varphi_i(N,v)$.

Proposición 1.1 *El conjunto de pagos asociados a equilibrios en estrategias puras de* (N,X,H) *son los pagos dados por los órdenes preferidos del juego junto con la asignación dada por* φ.

Demostración.

Analizamos las distintas estrategias para calcular los equilibrios de Nash del juego. Distinguimos tres casos:

a) $x_i = T \in H(N)$ para todo $i\in N$.

- Si existe $j\in N$ tal que $Sh_j(N,v_T)<\varphi_j(N,v)$ entonces x no es un equilibrio de Nash ya que si j se desvía hacia $T'\neq T$ obtendrá un pago $\varphi_j(N,v)$.
- Si para todo $i\in N$ $Sh_i(N,v_T)\geq\varphi_i(N,v)$ entonces x es un equilibrio de Nash ya que si algún jugador $j\in N$ decidiera desviarse unilateralmente obtendrá un pago $\varphi_i(N,v)$, con lo cual no mejorará.

b) $x_j = T'$ y $x_i = T$ para todo $i\in N\backslash j$ con $T'\neq T$.

- Si $Sh_j(N,v_T) > \varphi_j(N,v)$ entonces x no es un equilibrio de Nash ya que el jugador j se desviará hacia T alcanzando el pago $Sh_j(N,v_T)$.

– Si $Sh_j(N, v_T) \leq \varphi_j(N, v)$ entonces x es un equilibrio de Nash que nos lleva al pago $\varphi(N, v)$.

c) Si existen $i, j, k \in N$ tal que $x_i \neq x_j,\ x_i \neq x_k$ y $x_j \neq x_k$ entonces x es un equilibrio de Nash cuyo vector de pagos es $\varphi(N, v)$. ■

Consideremos los valores ψ y ϕ; los siguientes ejemplos ponen de manifiesto que puede haber juegos en los que ningún orden sea preferido (ejemplo 1.4) y juegos en los que dos o más ordenes sean preferidos (ejemplo 1.5).

Ejemplo 1.4 Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y consideremos la siguiente función característica generalizada,

$$\begin{array}{lll} v(1,2,3)=1 & v(1,2)=0 & \\ v(1,3,2)=1 & v(2,1)=0 & v(1)=0 \\ v(2,1,3)=1 & v(1,3)=1 & v(2)=0 \\ v(2,3,1)=1 & v(3,1)=0 & v(3)=0 \\ v(3,1,2)=1 & v(2,3)=0 & \\ v(3,2,1)=1 & v(3,2)=0 & \end{array}$$

Se verifica que $\phi(v) = (0.416, 0.167, 0.416)$ y $\psi(v) = (0.333, 0.167, 0.5)$. Además,

$$\begin{array}{rcl} Sh(v_{(1,2,3)}) & = & (0.5, 0, 0.5) \\ Sh(v_{(1,3,2)}) & = & (0.5, 0, 0.5) \\ Sh(v_{(2,1,3)}) & = & (0.5, 0, 0.5) \\ Sh(v_{(2,3,1)}) & = & (0.33, 0.33, 0.33) \\ Sh(v_{(3,1,2)}) & = & (0.33, 0.33, 0.33) \\ Sh(v_{(3,2,1)}) & = & (0.33, 0.33, 0.33) \end{array}$$

Lo que nos lleva a deducir que no hay ningún orden preferido según ϕ ni según ψ, siendo los únicos equilibrios de Nash los que nos llevan al pago según la solución considerada.

Ejemplo 1.5 Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y consideremos la siguiente función característica generalizada,

$$\begin{array}{ll}v(1,2,3)=2 & v(1,2)=0 \\ v(1,3,2)=1 & v(2,1)=0 \\ v(2,1,3)=1 & v(1,3)=1 \\ v(2,3,1)=1.5 & v(3,1)=0 \\ v(3,1,2)=0 & v(2,3)=0 \\ v(3,2,1)=0 & v(3,2)=0\end{array} \quad \begin{array}{l}v(1)=0 \\ v(2)=0 \\ v(3)=0\end{array}$$

Se verifica que $\phi(v)=(0.39, 0.14, 0.39)$ y $\psi(v)=(0.25, 0, 0.67)$. Además,

$$\begin{array}{rcl} Sh(v_{(1,2,3)}) & = & (0.83, 0.33, 0.83) \\ Sh(v_{(1,3,2)}) & = & (0.5, 0, 0.5) \\ Sh(v_{(2,1,3)}) & = & (0.5, 0, 0.5) \\ Sh(v_{(2,3,1)}) & = & (0.5, 0.5, 0.5) \\ Sh(v_{(3,1,2)}) & = & (0, 0, 0) \\ Sh(v_{(3,2,1)}) & = & (0, 0, 0) \end{array}$$

Lo que nos lleva a concluir que los órdenes $(1,2,3)$ y $(2,3,1)$ son órdenes preferidos según ϕ y el orden $(1,2,3)$ es preferido según ψ.

1.6 Aplicaciones

En esta sección se presentan dos posibles aplicaciones que involucran a coaliciones ordenadas, la primera versa sobre un problema de asignación de costes y la segunda sobre un problema de comunicación restringida.

1.6.1 Un problema de asignación de costes

Cuatro universidades están interesadas en la visita de un investigador de otra universidad. Además cada una de ellas tiene interés no sólo en que visite su universidad sino también en que el investigador visite las otras para obtener distintas informaciones necesarias para llevar a cabo un proyecto conjunto. Las cuatro universidades van a pagar la totalidad del coste del viaje. En los gráficos 1.1, 1.2 y 1.3 aparecen reflejadas tres situaciones que difieren en las distancias entre las universidades. Representamos a las universidades mediante los nodos 1, 2, 3 y 4 y a la universidad del investigador con el nodo X. El número que aparece sobre cada arco indica el coste asociado al trayecto que une esos dos nodos. Así por ejemplo, en el gráfico 1.1 el arco que une el nodo X con la universidad 1 (jugador 1) lleva asociado un coste de 1 unidad, mientras que desde el nodo X hasta la universidad 3 (jugador 3) hay asociado un coste de 2 unidades. Como se aprecia fácilmente en los gráficos 1.2 y 1.3 la situación de los jugadores 1 y 2 es la misma que en el gráfico 1.1 con respecto al nodo X mientras que en el gráfico 1.2 los jugadores 3 y 4 representarían universidades situadas a mayor distancia, siendo ésta considerablemente mayor en la situación presentada en el gráfico 1.3.

El objetivo que nos planteamos es dar una estimación *a priori* del coste esperado con el que debería contribuir cada universidad si no se pudiera predecir de antemano el orden en que se va a producir la visita del investigador.

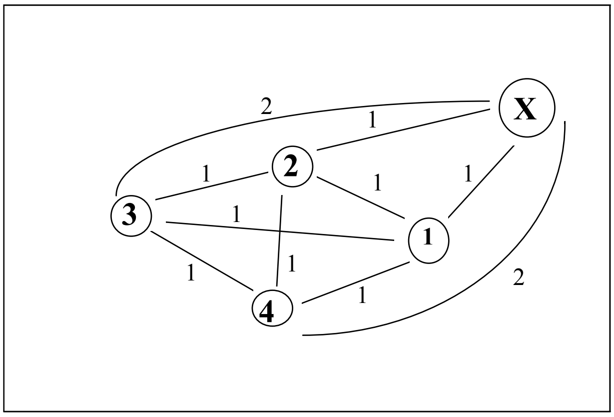


Gráfico 1.1

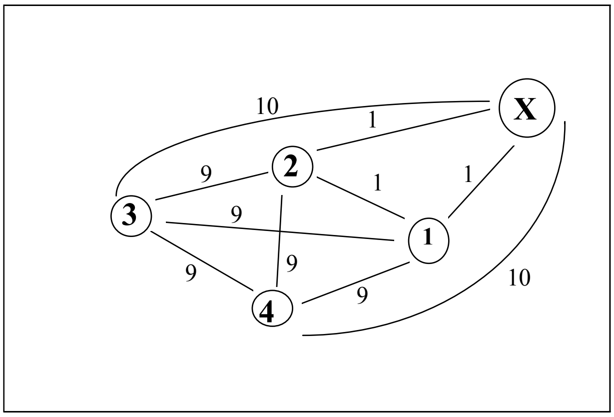


Gráfico 1.2

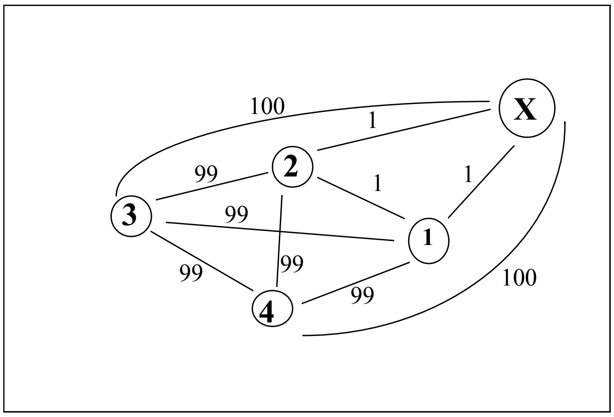


Gráfico 1.3

Resolución clásica

Desde el punto de vista clásico, un problema de asignación de costes se puede modelizar como un juego cooperativo con utilidad transferible asignando a cada coalición S el mínimo coste que pueden garantizarse los miembros de S. Con ello va implícita la total cooperación entre los jugadores, y se supone que éstos están interesados de igual forma en la consecución del proyecto. Formalmente:

Sea N el conjunto de jugadores. Dado $S \subset N$, $c(S)$ denota el coste correspondiente a que el investigador visite las universidades de S. El juego de costes se corresponde con el par (N, c) donde $c : 2^N \to I\!R$ verifica $c(\emptyset) = 0$ y $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$ para todo $S, T \subset N$ tal que $S \cap T = \emptyset$ (c es subaditiva).

En el problema anterior, $c(S) = \min\limits_{T \in H(S)} c(T)$.

Dar una solución a este problema consiste en encontrar $x \in I\!R^n$ tal que $\sum\limits_{i \in N} x_i = c(N)$.

Con los datos del gráfico 1.3 obtendríamos el siguiente juego en forma característica:

$$
\begin{aligned}
c(1,2,3,4) &= 299 \\
c(1,2,3) &= 200 \\
c(1,3,4) &= 299 \\
c(1,2,4) &= 200 \\
c(2,3,4) &= 299
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{ll} c(1,2)=3 & c(2,3)=200 \\ c(1,3)=200 & c(2,4)=200 \\ c(1,4)=200 & c(3,4)=299 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} c(1)=c(2)=2 \\ c(3)=c(4)=200 \end{array}$$

De forma análoga se modelizarían las situaciones reflejadas en los gráficos 1.1 y 1.2. Presentamos a continuación el reparto de costes que asigna el valor de Shapley:

Gráfico	$Sh(N,c)$
1.1	$(0.58, 0.58, 1.92, 1.92)$
1.2	$(0.58, 0.58, 13.92, 13.92)$
1.3	$(0.58, 0.58, 148.92, 148.92)$

(Tabla 1.5)

Se observa que los jugadores 1 y 2 son simétricos en las tres situaciones, asi como los jugadores 3 y 4. Además el valor de Shapley trata a los jugadores 1 y 2 por igual en las tres situaciones teniendo en cuenta que la distancia de los jugadores 1 y 2 al nodo X no ha cambiado. Por ello el hecho de que las universidades 3 y 4 estén a mayor distancia deben sufragarlo las propias universidades.

Cabría suponer en los gráficos 1.2 y 1.3 (mayormente en el 1.3) que los jugadores 1 y 2 formasen una coalición por razones de proximidad. En este caso calcularíamos el valor coalicional o valor de Owen siendo en el ejemplo presentado en el gráfico 1.3

$$CV(N, c, (\{12\}, \{3\}, \{4\}) = (0.5, 0.5, 149, 149).$$

La conclusión es que los jugadores 1 y 2 salen beneficiados de formar la coalición $\{12\}$, como era de esperar.

En general, al plantear un problema de asignación de costes como un juego cooperativo, hemos visto que la función característica de cada coalición se define como el menor coste que posibilita la realización del proyecto involucrando a los jugadores de la coalición. Sin embargo, pueden existir factores que prevalezcan sobre minimizar costes, tales como las fechas de visita. En este caso, consideramos que la formulación clásica no es la adecuada.

Resolución utilizando funciones en forma característica generalizada

Sea $N = \{1,2,3,4\}$ el conjunto de jugadores. Construimos una función característica generalizada de la siguiente forma; representamos por $c(T)$ (para todo $T \in H(S)\,,\ S \subset N$) el coste asociado si el investigador recorre las ciudades de S en el orden dado por T y regresa a su punto de partida.

De esta forma obtenemos con los datos del gráfico 1.3 el siguiente juego en forma característica generalizada:

$$\begin{array}{llll}
c(1,2,3,4) = 300 & c(2,1,3,4) = 300 & c(3,1,2,4) = 399 & c(4,1,2,3) = 399 \\
c(1,2,4,3) = 300 & c(2,1,4,3) = 300 & c(3,1,4,2) = 398 & c(4,1,3,2) = 398 \\
c(1,3,2,4) = 398 & c(2,3,1,4) = 398 & c(3,4,1,2) = 300 & c(4,3,1,2) = 300 \\
c(1,4,2,3) = 398 & c(2,4,1,3) = 398 & c(3,2,1,4) = 399 & c(4,2,1,3) = 399 \\
c(1,3,4,2) = 299 & c(2,3,4,1) = 299 & c(3,2,4,1) = 398 & c(4,2,3,1) = 398 \\
c(1,4,3,2) = 299 & c(2,4,3,1) = 299 & c(3,4,2,1) = 300 & c(4,3,2,1) = 300
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
c(1,2,3) = 201 & c(2,1,3) = 201 & c(3,1,2) = 201 & c(4,1,2) = 201 \\
c(1,3,2) = 200 & c(2,3,1) = 200 & c(3,2,1) = 201 & c(4,2,1) = 201 \\
c(1,2,4) = 201 & c(2,1,4) = 201 & c(3,1,4) = 398 & c(4,1,3) = 398 \\
c(1,4,2) = 200 & c(2,4,1) = 200 & c(3,4,1) = 299 & c(4,3,1) = 299 \\
c(1,3,4) = 299 & c(2,3,4) = 299 & c(3,2,4) = 398 & c(4,2,3) = 398 \\
c(1,4,3) = 299 & c(2,4,3) = 299 & c(3,4,2) = 299 & c(4,3,2) = 299
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
c(1,2) = c(2,1) = 3 & c(1,3) = c(3,1) = 200 & c(2,3) = c(3,2) = 200 \\
c(1,4) = c(4,1) = 200 & c(3,4) = c(4,3) = 299 & c(2,4) = c(4,2) = 200
\end{array}$$

$$c(1) = c(2) = 2 \quad c(3) = c(4) = 200 \quad c(\emptyset) = 0$$

Análogamente se modelizarían las situaciones reflejadas en los gráficos 1.1 y 1.2.

Las funciones características generalizadas asocian a cada ruta el coste asociado y en función de esta información la generalización del valor de Shapley (ϕ) estudiada en este capítulo proporciona el coste esperado para cada jugador.

En la siguiente tabla se obtiene el reparto esperado de los costes en cada una de las situaciones anteriores.

Gráfico	$\phi(N,c)$	$\dfrac{\phi(N,c)}{\sum_{j\in N}\phi_j(N,c)}\times 100$
1.1	$(0.89, 0.89, 2.11, 2.11)$	$(14.83\%, 14.83\%, 35.17\%, 35.17\%)$
1.2	$(1.44, 1.44, 15.56, 15.56)$	$(4.235\%, 4.235\%, 45.76\%, 45.76\%)$
1.3	$(7.69, 7.69, 166.81, 166.81)$	$(2.20\%, 2.20\%, 47.80\%, 47.80\%)$

(Tabla 1.6)

Observamos que, a pesar de que el coste total esperado ha variado, los datos porcentuales nos indican que respecto a la totalidad del coste, las universidades 1 y 2 reducen sustancialmente su participación en el coste en las situaciones presentadas en los gráficos 1.2 y 1.3.

En el caso de que se formen las coaliciones *a priori* dadas por $B = (\{12\}, \{3\}, \{4\})$, obtendríamos

Gráfico	$\phi(N,c,B)$	$\dfrac{\phi(N,c,B)}{\sum_{j\in N}\phi_j(N,c,B)}\times 100$
1.3	$(6.33, 6.33, 160.17, 160.17)$	$(1.9\%, 1.9\%, 48.1\%, 48.1\%)$

(Tabla 1.7)

Observamos que el valor coalicional ϕ se comporta de manera similar al valor de Owen en la resolución, es decir, la formación de la coalición $\{12\}$ beneficia a estos jugadores.

Los valores que hemos calculado se han de interpretar como valores esperados, es decir, como una estimación del coste. Uno de los axiomas más criticables de los valores estudiados para juegos en forma característica generalizada es el axioma de eficiencia ya que se trata de una “eficiencia esperada”; para motivar cuando estos valores pueden ser de utilidad consideremos la siguiente perspectiva del problema.

Supongamos que la visita por parte del investigador a las cuatro universidades se fuera a repetir durante varios años o períodos de tiempo y supongamos también que se desconoce el orden de visita de cada año debido a que las universidades y el investigador pueden variar su disponibilidad. En este caso las universidades pueden optar por dos opciones; una consiste en resolver un problema de asignación de costes cada año (problema de asignación de costes clásico) y la otra en fijar unos criterios de reparto válidos a lo largo de los años considerados. Desde el segundo punto de vista lo más razonable sería que se acordara decidir el porcentaje con el que debe contribuir cada universidad, pudiendo tomar como porcentajes los dados en las anteriores tablas. Veámoslo en un ejemplo concreto.

Supongamos que en un año determinado se decide que el orden a llevar a cabo es $(3, 1, 2, 4)$. Si utilizamos los datos del gráfico 1.3, el coste asociado es de 399 unidades y aplicando los porcentajes de la tabla 1.7 obtenemos el reparto

$$x = (7.58, 7.58, 191.92, 191.92).$$

Evidentemente si el proyecto se repitiese en todos los posibles órdenes y se aplicase el anterior criterio, la participación en el coste para cada universidad a lo largo de todos los años coincidiría aplicando ambos procedimientos.

Otra posible aplicación consistiría en dar una estimación del dinero que necesitarán las universidades si el proyecto continúa durante una serie de períodos, lo que facilitaría que las universidades puedan pedir subvenciones de manera más realista. Imaginémonos que en el caso anterior el proyecto dura 20 períodos, en ese caso las universidades 1 y 2 podrían considerar como estimación de sus gastos, $6.33 \times 20 = 126.6$, y las universidades 3 y 4, $160.17 \times 20 = 3203.4$.

Analizamos brevemente qué ocurriría si utilizamos el valor ψ (Nowak y Radzik (1994)) y el valor coalicional ψ con la estructura de coaliciones *a priori* $B = (\{1, 2\}, \{3\}, \{4\})$.

Gráfico	$\psi(N, c)$	$\dfrac{\psi(N,c)}{\sum_{j \in N} \psi_j(N,c)} \times 100$
1.3	$(0.75, 0.75, 173.75, 173.75)$	$(0.215\%, 0.215\%, 49.785\%, 49.785\%)$

(Tabla 1.8)

Gráfico	$\psi(N, c, B)$	$\dfrac{\psi(N,c,B)}{\sum_{j \in N} \psi_j(N,c,B)} \times 100$
1.3	$(0.83, 0.83, 165.67, 165.67)$	$(0.25\%, 0.25\%, 49.75\%, 49.75\%)$

(Tabla 1.9)

Se observa que el coste de las universidades 1 y 2 es inferior utilizando el valor ψ en lugar del valor ϕ, lo que es fácilmente justificable teniendo en cuenta que ψ sólo considera aquellas aportaciones marginales a las coaliciones en las que el jugador es el último de la coalición (en este caso se eliminan órdenes de coste “elevado”). Observamos también en la tabla 1.9 que el hecho de que las universidades 1 y 2 se coaliguen les resulta perjudicial al tener que asumir un coste mayor.

1.6.2 Un problema de comunicación orientada

En determinadas situaciones pueden existir limitaciones en la comunicación que no permitan que los jugadores cooperen libremente. Los dos principales valores estudiados en este contexto son el valor de Myerson (Myerson (1977)) y el valor posicional (Borm *et al.* (1992b)). En este trabajo nos centramos en el valor de Myerson.

En juegos cooperativos con utilidad transferible, Myerson (1977) estudia situaciones de comunicación restringida y modeliza la restricción en la cooperación mediante un grafo. Si dos jugadores están unidos mediante un arco del grafo pueden comunicarse directamente y por tanto formar una coalición, pudiendo también comunicarse por medio de otros jugadores si éstos sirven de enlace en el grafo.

La regla de asignación que propuso es el valor de Myerson que viene a ser el valor de Shapley de un nuevo juego construido a partir del original (juego restringido por el grafo). Este juego representa el valor que puede obtener cada coalición si la restricción en la cooperación viene dada por un grafo g.

En el tipo de situaciones que analizó Myerson los arcos son no orientados, entendiendo con ello que se pueden comunicar libremente los jugadores que están unidos mediante un arco. Exponemos a continuación detalladamente el valor de Myerson.

El valor de Myerson

Estudiemos inicialmente algunas definiciones previas.

Definición 1.8 *Sea $N = \{1, ..., n\}$ un conjunto de jugadores. Un grafo no orientado definido sobre N es un conjunto g de pares no ordenados de miembros de N. Llamamos arco al par no ordenado $i : j \in g$ (*obviamente *$i : j = j : i$).*

Denotaremos por $G(N)$ al conjunto de grafos no orientados definidos sobre N y por g^N al grafo completo sobre N, es decir,

$$g^N = \{i : j \mid i, j \in N, i \neq j\}.$$

Definición 1.9 *Dada una coalición $S \subset N$ y un grafo $g \in G(N)$, diremos que dos jugadores $i, j \in N$ están conectados en S por g, si g induce* *un camino en S conectando i y j, es decir, existe una sucesión finita de jugadores $i_1, ..., i_r$ de S tal que para todo $l = 1, ..., r+1$, $i_{l-1} : i_l \in g$, $i_0 = i$, $i_{r+1} = j$.*

Denotaremos por S/g a la partición de S formada por el conjunto de componentes conexas en S asociadas al grafo g, es decir, subconjuntos maximales de elementos conectados en S por g.

Definición 1.10 *Una situación con comunicación es una terna (N, v, g) donde (N, v) es un juego con utilidad transferible, y g es un grafo no orientado definido sobre N.*

Denotaremos por $CNO(N)$ a todas las situaciones con comunicación y conjunto de jugadores N.

Dada una situación de comunicación $(N, v, g) \in CNO(N)$, Myerson (1977) define el juego de comunicación, (N, v_g), del siguiente modo,

$$v_g(S) = \sum_{T \in S/g} v(T) \quad \text{para cada } S \subset N.$$

Un valor en $CNO(N)$ es una aplicación $\varphi : CNO(N) \to I\!R^n$.

El valor de Myerson se corresponde con el valor de Shapley del correspondiente juego de comunicación:

$$My(N, v, g) = Sh(N, v^g).$$

Veamos algunas propiedades. Sea $\varphi : CNO(N) \to I\!R^n$, φ verifica:

- *Eficiencia en componentes* si para todo $(N, v, g) \in CNO(N)$

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(N, v, g) = v(S) \text{ para todo } S \in N/g.$$

- *Justicia individual* si para todo $(N, v, g) \in CNO(N)$ e $i : j \in g$

$$\varphi_i(N, v, g) - \varphi_i(N, v, g \backslash i : j) = \varphi_j(N, v, g) - \varphi_j(N, v, g \backslash i : j).$$

- *Estabilidad* si para todo $(N, v, g) \in CNO(N)$ e $i : j \in g$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i(N, v, g) & \geq & \varphi_i(N, v, g \backslash i : j) \\ \varphi_j(N, v, g) & \geq & \varphi_j(N, v, g \backslash i : j). \end{array}$$

La primera propiedad nos indica que cada componente conexa S del grafo g se reparte la utilidad que puede conseguir. La propiedad de justicia individual representa que si el arco que une a los jugadores i y j desaparece y por tanto estos jugadores no se pueden comunicar directamente, ambos jugadores se ven afectados de la misma forma. La propiedad de estabilidad se refiere a que nunca puede ser perjudicial para los jugadores comunicarse directamente.

Myerson (1977) caracterizó un valor con estos axiomas, obteniendo el siguiente resultado.

Existe un único valor sobre $CNO(N)$ satisfaciendo las propiedades de eficiencia en componentes y justicia individual y éste es el valor de Myerson. Además, si el juego es superaditivo, esta solución verifica la propiedad de estabilidad.

Obviamente el valor de Myerson es una generalización del valor de Shapley, puesto que cuando la comunicación entre los jugadores es completa

$$My(N, v, g^N) = Sh(N, v) \text{ para todo } (N, v) \in \Gamma_0.$$

Ahora pretendemos estudiar situaciones en las que la restricción en la cooperación viene modelizada mediante arcos orientados.

Definición 1.11 *Sea $N = \{1, ..., n\}$ un conjunto de jugadores. Un grafo orientado definido sobre N es un conjunto g de pares ordenados de miembros de N. Llamamos arco al par ordenado $i \rightarrow j \in g$.*

Denotaremos por $\overrightarrow{G}(N)$ al conjunto de grafos orientados definidos sobre N.

Definición 1.12 *Dados $i, j \in S$, $S \subset N$* y *un grafo orientado $g \in \overrightarrow{G}(N)$, diremos que existe un camino en S desde i hasta j si existe una sucesión finita de jugadores $i_1, ..., i_r$ de S tal que para todo $l = 1, ..., r+1$, $i_{l-1} \rightarrow i_l \in g$, $i_0 = i$, $i_{r+1} = j$.*

Van den Nouweland (1993) en su tesis doctoral define una situación de comunicación orientada como una terna (N, v, g^d) donde (N, v) es un juego TU y g^d es un grafo orientado. Con su definición, los jugadores de una coalición S pueden comunicarse a través del subgrafo $g^d(S)$

$$g^d(S) = \left\{ i \rightarrow j \in g^d \mid i \in S, \, j \in S \right\}$$

siendo $i \rightarrow j$ un arco orientado del jugador i al jugador j.

Van den Nouweland (1993) dice que una coalición S está fuertemente conectada si para cada par de jugadores $i, j \in S$ existe un camino desde i hasta j en el subgrafo $g^d(S)$. De esta forma, para cada coalición S podemos considerar su partición en componentes fuertemente conectadas. Denotaremos a esta partición por S/g^d. Van den Nouweland define el juego de comunicación

$$v_{g^d}(S) = \sum_{T \in S/g^d} v(T)$$

y define el valor de Myerson como el valor de Shapley del juego (N, v_{g^d}).

En todo su trabajo asume pues que en los grafos orientados para que el jugador i se pueda comunicar con el jugador j ha de existir un camino desde i hasta j y un camino desde j hasta i. Aquí presentamos un enfoque distinto de lo que entendemos por comunicación orientada.

Una situación de comunicación orientada

En el mundo real existen situaciones en las que los jugadores de algún modo no son simétricos a la hora de proponer acuerdos. Podemos pensar como ejemplo en lo que ocurre en el mundo empresarial en donde en cualquier sector hay empresas líderes y empresas seguidoras, siendo las primeras las que dirigen el mercado y las empresas seguidoras las que tienen que adaptarse a éstas.

Un arco orientado del jugador i al jugador j va a suponer que el jugador i va a poder proponer ofertas al jugador j y éste aceptarlas o no, pero el jugador j no va a tener la posibilidad de ofertarle o contraofertarle algo al jugador i.

Al igual que Myerson, dado un juego TU pasamos a considerar el juego asociado al grafo que tiene en cuenta los arcos involucrados en el juego. El juego restringido por el grafo es un juego en forma característica generalizada; *i.e.*, es un juego en el que el valor que obtiene cada coalición depende del orden de la misma. El siguiente paso sería aplicar un valor de Shapley para juegos en forma característica generalizada al juego restringido por el grafo.

De las dos generalizaciones del valor de Shapley para estos juegos, utilizamos la dada por Nowak y Radzik (1994) ya que nos ha parecido que su valor puede reflejar mejor este tipo de situaciones al tratar a los jugadores de modo no simétrico.

Motivamos brevemente en un ejemplo el funcionamiento del valor; supongamos dos jugadores que se van a repartir una unidad de utilidad de tal forma que individualmente no consiguen nada y si se forma la coalición $(1,2)$ obtienen la utilidad en juego.

Si modelizamos una restricción en la comunicación mediante un arco orientado del jugador 1 al jugador 2 $(1 \to 2)$ surgen de modo inmediato dos cuestiones: la cantidad a repartir y cómo se reparte.

Nuestro modelo refleja que en este tipo de situaciones puede ocurrir que no se alcance el total de la utilidad en juego, debido a que puede haber pérdidas de la misma al dificultar la comunicación entre jugadores conectados.

Por lo que respecta al modo de repartirse la utilidad, nuestro modelo está asignando peso 1 al jugador del cual parte el arco y peso 0 al jugador al cual llega el arco, en nuestro ejemplo el jugador 1 se llevaría toda la utilidad disponible. Otra posibilidad sería asignar igual peso a cada jugador, esto se vería reflejado si utilizásemos la generalización del valor de Shapley dada en la sección 1.2, pero en este caso los arcos orientados únicamente implicarían una pérdida de eficiencia al dificultarse la comunicación. Quizás un término medio entre ambas soluciones fuera lo más aconsejable, lo cual se podría conseguir asignando distintos pesos a los jugadores involucrados en cada arco orientado $((2/3,1/3),\ (3/4,1/4),...)$.

Describimos a continuación formalmente el modelo.

El modelo

Sea $g \in \overrightarrow{G}(N)$.

Definición 1.13 *Se dirá que existe comunicación libre en el grafo g entre dos jugadores i y j (denotado $(i \leftrightarrow j)$), si*

$$\begin{array}{rcl} (i & \to & j) \in g \\ (j & \to & i) \in g \end{array}$$

Si $(i \to j) \in g$ indicará que el jugador i puede proponerle ofertas al jugador j y éste aceptarlas o no; pero el jugador j no tiene la posibilidad de ofertar o contraofertar algo al jugador i si $(j \to i) \notin g$.

Definimos de forma recursiva la partición de S inducida por el orden de T y el grafo g.

Dado $T = (t_1, ..., t_l, t_{l+1}, ..., t_t) \in H(S)\,(S \subset N)$. Denotemos por P_l a la partición de los jugadores $\{t_1, ..., t_l\}$, obviamente P_t será la partición de S inducida por el orden de T y el grafo g.

Definimos $P_1 = \{t_1\}$. Si $t_2 \to t_1 \in g$, entonces $P_2 = \{t_1, t_2\}$, y si $(t_2 \to t_1) \notin g$, $P_2 = \{\{t_1\}, \{t_2\}\}$.

Supongamos que $P_l = \left\{B_1^l, ..., B_h^l\right\}$ es la partición construida para $\{t_1, ..., t_l\}$.
Sea $A(t_{l+1}) = \left\{B_k^l \in P_l \mid \text{existe } i \in B_k^l \text{ tal que } (t_{l+1} \to i) \in g\right\}$.
Si $A(t_{l+1}) = \emptyset$, entonces $P_{l+1} = \left\{B_1^l, ..., B_h^l, \{t_{l+1}\}\right\}$ mientras que si $A(t_{l+1}) \neq \emptyset$,

$$P_{l+1} = \left\{ \left\{B_k^l\right\}_{B_k^l \notin A(t_{l+1})}, \left(\bigcup_{B_k^l \in A(t_{l+1})} B_k^l \right) \bigcup \{t_{l+1}\} \right\}.$$

Denotaremos por T/g a la partición de S inducida por el orden de T asociada al grafo g.

Básicamente el proceso antes descrito supone que los jugadores de S se van incorporando al proceso de comunicación en el orden dado por T pudiendo establecer vínculos con los jugadores que los preceden si la estructura del grafo lo permite.

Por ejemplo si $g = \{(1 \to 2), (1 \to 3)\}$, y consideramos las coaliciones ordenadas $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$ y $(2, 3, 1)$ obtendríamos las siguientes particiones:

$$\begin{aligned} (1,2,3)/g &= \{(1),(2),(3)\} \\ (2,1,3)/g &= \{(1,2),(3)\} \\ (2,3,1)/g &= \{(1,2,3)\}. \end{aligned}$$

Definición 1.14 *Una situación con comunicación orientada es una terna (N, v, g) donde (N, v) es un juego TU, y g es un grafo orientado definido sobre N.*

Denotaremos por $CO(N)$ a todas las situaciones con comunicación orientada y conjunto de jugadores N.

Dada una situación de comunicación orientada $(N, v, g) \in CO(N)$ construimos el juego de comunicación asociado a dicho grafo orientado:

$$v_g(T) = \sum_{P \in T/g} v(P) \text{ para cada } T \in H(S),\ S \subset N.$$

El valor obtenido por la coalición ordenada T, $(v_g(T))$, representa la suma de los valores de las coaliciones que forman la partición inducida por el orden T (componentes conectadas maximales).

Un valor en $CO(N)$ es una aplicación $\varphi : CO(N) \to I\!R^n$.
Definimos el siguiente valor para todo $(N, v, g) \in CO(N)$

$$\theta(N, v, g) = \psi(N, v_g)$$

donde ψ es la generalización del valor de Shapley dada por Nowak y Radzik (1994) para juegos en forma característica generalizada.

Nota 1.24 Si tenemos un grafo no orientado se verifica que $(N, v_g) \in \Gamma_0$ y

$$\theta(N, v, g) = \psi(N, v_g) = Sh(N, v_g) = My(N, v, g).$$

Nota 1.25 Sea $N = \{1, 2, 3\}$, $(N, v) \in \Gamma_0$ y $g = \{(1 \to 2), (3 \to 2)\}$. Mostramos a continuación el juego asociado al grafo:

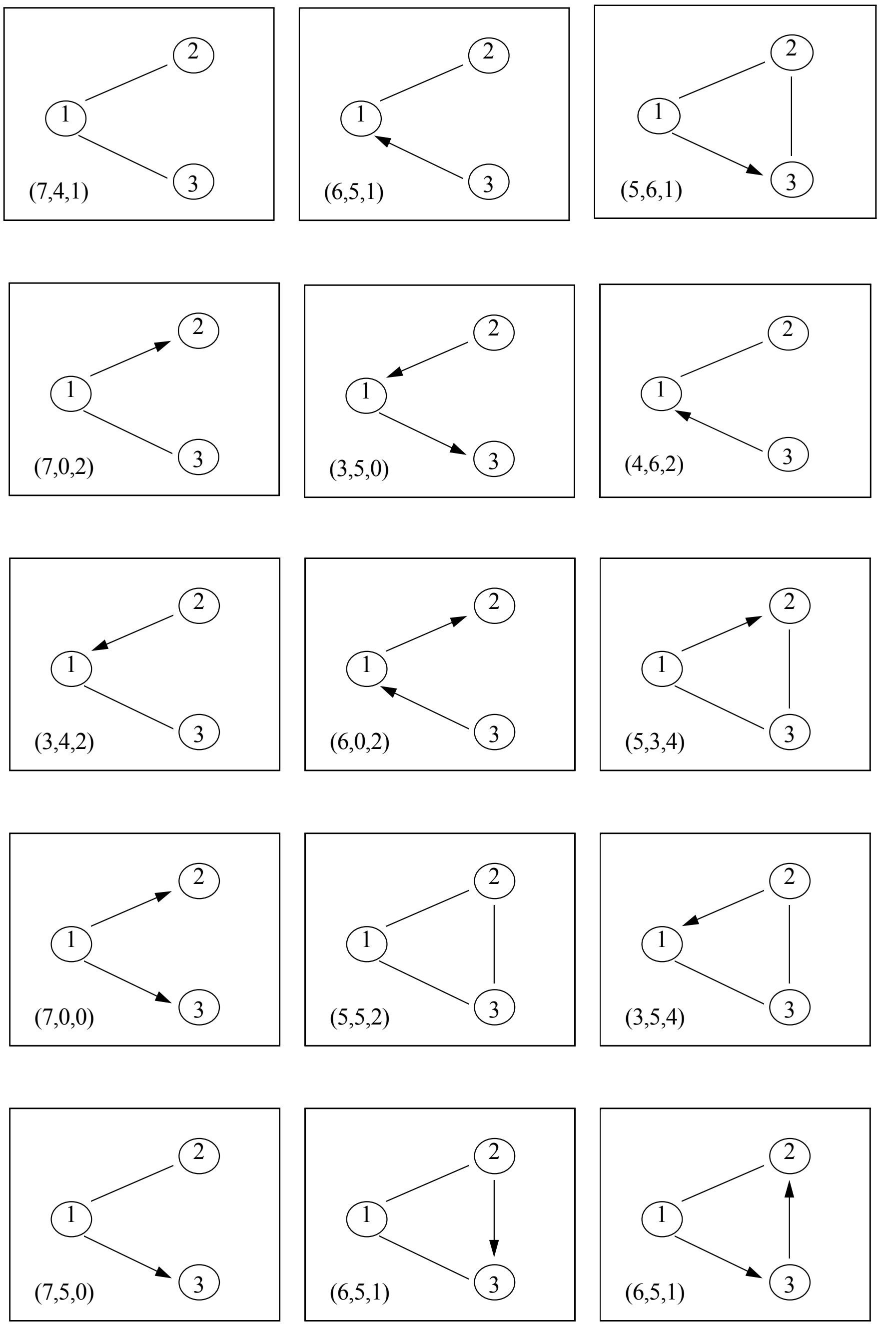
$$\begin{aligned}
v_g(1,2,3) &= v(2,3) + v(1) \\
v_g(1,3,2) &= v_g(3,1,2) = v(1) + v(2) + v(3) \\
v_g(2,1,3) &= v_g(2,3,1) = v(1,2,3) \\
v_g(3,2,1) &= v(1,2) + v(3) \\
v_g(1,3) &= v_g(3,1) = v(1) + v(3) \\
v_g(1,2) &= v(1) + v(2) \\
v_g(2,1) &= v(1,2) \\
v_g(2,3) &= v(2,3) \\
v_g(3,2) &= v(2) + v(3) \\
v_g(i) &= v(i) \quad \text{para todo } i \in N
\end{aligned}$$

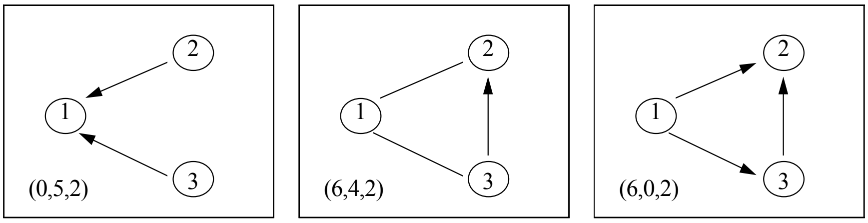
Ejemplo 1.6 Presentamos un ejemplo de un juego con utilidad transferible junto con los repartos que proporciona el valor analizado en distintos casos de comunicación restringida. El primer caso trata de un problema de comunicación restringida no orientada coincidiendo el reparto con el propuesto por Myerson. En los demás casos se pueden observar distintas posibilidades de restricción en la comunicación, incluyendo la situación de comunicación total entre los jugadores, donde podemos observar que el reparto coincide con el valor de Shapley (5,5,2).

Sea $N = \{1, 2, 3\}$, y el siguiente juego con utilidad transferible,

$$\begin{gathered}
v(1,2,3) = v(1,2) = 12 \\
v(1,3) = v(2,3) = 6 \\
v(1) = v(2) = v(3) = 0
\end{gathered}$$

En los siguientes gráficos denotaremos la existencia de comunicación libre entre los jugadores i y j mediante $(i - j)$.





Caracterización axiomática

Sea φ un valor en $CO(N)$, diremos que φ satisface:

(EFG) *Eficiencia* si para todo $g \in \overrightarrow{G}$ y $S \in N/g$.

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(N, v, g) = \frac{1}{s!} \sum_{T \in H(S)} v_g(T).$$

Esta igualdad nos indica que el total que reciben los jugadores de cada componente conectada maximal es la utilidad esperada por los jugadores que están conectados a través de arcos en S si la via de cooperación viene dada por el grafo g.

(IAO) *Independencia de arcos orientados* si para todo $i \in N$ tal que $(j \to i) \in g$.

$$\varphi_i(N, v, g) = \varphi_i(N, v, g \backslash (j \to i)) \,.$$

Este axioma nos indica que un jugador no pierde ni gana utilidad si deja de poder responder a ofertas formuladas por otros jugadores.

Nota 1.26 Un jugador i es nulo en (N, v, g) si es nulo en el juego (N, v_g).

Deducimos las siguientes propiedades inmediatas:

- Si un jugador i es nulo en (N, v, g) entonces $\varphi_i(N, v, g) = 0$.
- Si para todo $j \in N, (i \to j) \notin g$ entonces i es un jugador nulo.
- Si $i \leftrightarrow j \in g$

$$\varphi_i(N, v, g) - \varphi_i(N, v, g \backslash (j \to i)) = \varphi_j(N, v, g) - \varphi_j(N, v, g \backslash (i \to j)).$$

Esta relación nos dice que dos jugadores pierden la misma utilidad si dejan de poder recibir ofertas uno del otro, si ambos parten de una situación de libre comunicación entre ellos.

- Si $(i \to j) \in g$ y $(j \to i) \notin g$

$$\varphi_i(N, v, g) - \varphi_i(N, v, g \backslash (i \to j)) =$$

$$\varphi_i(N, v, g \cup (j \to i)) - \varphi_i\left(N, v, (g \cup (j \to i)) \setminus (i \to j)\right).$$

Esta expresión nos dice que lo que deja de ganar un jugador i, al perder la posibilidad de hacer ofertas al jugador j, permanece invariante aún si existiera la posibilidad de que el jugador j pudiera hacer ofertas al jugador i.

(JUS) *Justicia* para tres jugadores si dado $N = \{i, j, k\}$ y $g = \{(i \to j), (k \to j)\}$,

$$\varphi_i(N, v, g) - \varphi_i(N, v, g \backslash (k \to j)) = \varphi_k(N, v, g) - \varphi_k(N, v, g \backslash (i \to j)).$$

Este axioma nos dice que si i y k se pueden comunicar con j mediante arcos orientados, lo que pierde el jugador i si k rompe la comunicación con j es lo mismo que perdería el jugador k si i rompe la comunicación con el jugador j.

Teorema 1.12 *Sea $(N, v, g) \in CO(N)$ tal que $N = \{i, j, k\}$, θ es el único valor satisfaciendo los axiomas EFG, IAO y JUS.*

Demostración.

θ verifica trivialmente el axioma EFG. A continuación probamos que satisface el axioma IAO.

Sea $(N, v) \in \Gamma$, se verifica que

$$\psi_i(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{T \in H(N)} (v(P(T, i), i) - v(P(T, i))).$$

Además para todo $T \in H(N)$ se verifica:

$$v_g(P(T, i), i) - v_g(P(T, i)) = v_{g \backslash (j \to i)}(P(T, i), i) - v_{g \backslash (j \to i)}(P(T, i)).$$

Es fácil ver la relación anterior dado que para todo $T \in H(N)$ pueden ocurrir dos casos: $j \notin P(T, i)$ o bien $j \in P(T, i)$. En el primer caso la igualdad es trivial y en el segundo se sigue directamente sin más que tener en cuenta la construcción del juego v_g y que los juegos v_g y $v_{g\backslash(j\to i)}$ sólo se diferencian en el arco $j \to i$.

Comprobemos que θ verifica JUS, sea $g = \{(i \to j), (k \to j)\}$

$$\theta_i(N, v, g) = \psi_i(N, v_g) = \frac{1}{6}\left(v(i, j, k) - v(j, k) + 2v(i, j)\right)$$

$$\theta_i(N, v, g\backslash(k \to j)) = \psi_i(N, v_{g\backslash(k\to j)}) = \frac{1}{2}\left(v(i, j)\right)$$

$$\theta_k(N, v, g) = \psi_k(N, v_g) = \frac{1}{6}\left(v(i, j, k) - v(i, j) + 2v(j, k)\right)$$

$$\theta_k(N, v, g\backslash(i \to j)) = \psi_k(N, v_{g\backslash(i\to j)}) = \frac{1}{2}\left(v(j, k)\right).$$

Por tanto,

$$\theta_i(N, v, g) - \theta_i(N, v, g\backslash(k \to j)) = \theta_k(N, v, g) - \theta_k(N, v, g\backslash(i \to j)).$$

Probamos la unicidad del valor utilizando inducción en el número de arcos presentes en el grafo.

Sea a el número de arcos orientados presentes.

Si $a = 1$, es decir en una situación del tipo $g = \{(i \to j)\}$ aplicando IAO y EFG tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_j(N, v, g) &= \varphi_j(v, g\backslash(i \to j)) = 0 = \theta_j(N, v, g) \\
\varphi_k(N, v, g) &= 0 = \theta_k(N, v, g) \\
\varphi_i(N, v, g) &= \frac{1}{2}\left(v_g(i, j) + v_g(j, i)\right) = \theta_i(N, v, g)
\end{aligned}$$

con lo cual queda probada la unicidad del valor cuando $a = 1$.

Si $a = 2$, podemos encontrarnos en las siguientes situaciones,

$$g_1 = \{(i \to j), (i \to k)\}$$

$$g_2 = \{(j \to i), (k \to i)\}$$

$$g_3 = \{(i \to k), (j \to i)\}$$

$$g_4 = \{(i \to j), (j \to i)\} = \{(i \leftrightarrow j)\}.$$

Sean φ^1 y φ^2dos soluciones satisfaciendo los axiomas propuestos.

En el grafo g_1, por IAO y EFG

$$\varphi_j^1(N, v, g_1) = \varphi_j^1(N, v, \{i \to k\}) = 0.$$

Análogamente se probaría que

$$\varphi_j^2(N, v, g_1) = \varphi_k^1(N, v, g_1) = \varphi_k^2(N, v, g_1) = 0.$$

Por EFG concluimos que

$$\varphi_i^1(N, v, g_1) = \varphi_i^2(N, v, g_1).$$

En el grafo g_2, por IAO y EFG

$$\varphi_i^1(N, v, g_2) = \varphi_i^1(N, v, \emptyset) = 0.$$

Análogamente tendríamos que $\varphi_i^2(N, v, g_2) = 0$. Aplicando JUS y la hipótesis de inducción

$$\varphi_k^1(N, v, g_2) - \varphi_k^1(N, v, g_2 \backslash (j \to i)) = \varphi_j^1(N, v, g_2) - \varphi_j^1(N, v, g_2 \backslash (k \to i))$$

$$\begin{aligned} \varphi_k^1(N, v, g_2) - \varphi_j^1(N, v, g_2) &= \varphi_k^1(N, v, g_2 \backslash (j \to i)) - \varphi_j^1(N, v, g_2 \backslash (k \to i)) \\ &= \varphi_k^2(N, v, g_2 \backslash (j \to i)) - \varphi_j^2(N, v, g_2 \backslash (k \to i)) \\ &= \varphi_k^2(N, v, g_2) - \varphi_j^2(N, v, g_2). \end{aligned}$$

Además, por EFG

$$\varphi_k^1(N,v,g_2)+\varphi_j^1(N,v,g_2)=\varphi_k^2(N,v,g_2)+\varphi_j^2(N,v,g_2).$$

Con lo cual se prueba que $\varphi_k^1=\varphi_k^2$ y $\varphi_j^1=\varphi_j^2$.

Con los grafos g_3 y g_4 se prueba mediante procedimientos análogos la unicidad del valor.

Supongamos por hipótesis de inducción que es cierto cuando el número de arcos que posibilita la comunicación entre los jugadores es menor o igual que h y lo probamos para $h+1$.

Para cualquier número de arcos $2<h\leq 6$ que permita la comunicación entre tres jugadores es cierto el resultado, ya que al menos dos jugadores reciben un arco orientado, y en este caso, utilizando la hipótesis de inducción y el axioma IAO, obtenemos unicidad del valor para estos dos jugadores, deduciéndose de modo inmediato por EFG la unicidad del valor para el otro jugador. ■

Teorema 1.13 *Sea* $(N,v,g)\in CO(N)$*, si para cada* $i\in N$ *existe* $j\in N$ *tal que* $(j\rightarrow i)\in g$ *entonces* θ es el *único valor satisfaciendo los axiomas EFG y IAO.*

Demostración.

Es claro que el valor propuesto satisface los axiomas considerados.

La demostración de la unicidad la haremos por inducción en el número de arcos orientados a. Si $a=1$ la demostración es análoga a la del teorema 1.12. Suponemos por hipótesis de inducción que lo es para $a\leq h$ y lo probamos para $a=h+1$.

Sean φ^1 y φ^2 dos soluciones satisfaciendo los axiomas EFG y IAO, dado $i\in N$ existe $j\in N$ tal que $(j\rightarrow i)\in g$, aplicando IAO y la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}\varphi_i^1(N,v_g) &= \varphi_i^1(N,v_{g/(j\rightarrow i)})\\ &= \varphi_i^2(N,v_{g/(j\rightarrow i)})\\ &= \varphi_i^2(N,v_g).\ \blacksquare\end{aligned}$$

Nota 1.27 θ no verifica el axioma de justicia propuesto por Myerson. Sea φ un valor que satisface los axiomas IAO y el axioma de justicia propuesto por Myerson.

Aplicando IAO tendríamos que si $(i\leftrightarrow j)\in g$ entonces

$$\varphi_i(N,v,g) - \varphi_i(N,v,g\backslash(i \leftrightarrow j)) = \varphi_i(N,v,g) - \varphi_i(N,v,(g\backslash(i \to j))\backslash(j \to i)) \tag{1.16}$$

$$= \varphi_i(N,v,g\backslash(j \to i)) - \varphi_i(N,v,g\backslash(i \to j)).$$

De la misma forma,

$$\varphi_j(N,v,g) - \varphi_j(N,v,g\backslash(i \leftrightarrow j)) = \varphi_j(N,v,g\backslash(i \to j)) - \varphi_j(N,v,g\backslash(j \to i)).$$

Por lo tanto si φ satisface el axioma de justicia propuesto por Myerson tendríamos que

$$\varphi_i(N,v,g\backslash(j \to i)) + \varphi_j(N,v,g\backslash(j \to i)) =$$

$$= \varphi_i(N,v,g\backslash(i \to j)) + \varphi_j(N,v,g\backslash(i \to j))$$

Consideremos en el ejemplo 1.6 el grafo $g = \{(1 \leftrightarrow 2)(1 \to 3)\}$. Se verifica que

$$\theta_2(v,g\backslash(1 \to 2)) + \theta_1(v,g\backslash(1 \to 2)) = 5 + 3$$

$$\theta_1(v,g\backslash(2 \to 1)) + \theta_2(v,g\backslash(2 \to 1)) = 7 + 0$$

y por lo tanto la anterior igualdad no es cierta.

1.7 Conclusiones

El primer capítulo de esta monografía ha pretendido abarcar el estudio de juegos cooperativos en forma característica generalizada. Estos juegos, introducidos por Nowak y Radzik (1994), describen un modelo que tiene en cuenta el hecho de que, cuando los jugadores se coaligan lo hacen en un determinado orden y éste es un elemento inherente al problema. A lo largo de todo el capítulo han sido discutidos y comparados dos generalizaciones del valor de Shapley para estos juegos. Hemos abarcado diferentes tópicos que existen en la literatura para juegos TU, entre ellos el valor de Shapley, los valores de Shapley ponderados y los valores coalicionales, caracterizando conceptos de solución a partir de propiedades bien conocidas para juegos TU y que hemos generalizado a este contexto.

Un problema interesante es el de dar una aproximación no cooperativa para establecer qué órdenes son preferidos. Aquí hemos planteado un modelo muy sencillo pero sería interesante analizar otros modelos no cooperativos más complejos y estudiar diferentes refinamientos del equilibrio de Nash.

El capítulo termina con dos aplicaciones con las que de alguna manera pretendemos motivar el hecho de que las funciones características generalizadas se pueden aplicar a problemas reales, el primero trata de analizar qué ocurre cuando disponemos de incertidumbre acerca de los órdenes que se van a formar y queremos obtener una utilidad "esperada" y el segundo versa sobre un problema de comunicación restringida. En concreto, respecto a la segunda aplicación, hemos tratado un problema de comunicación orientada, entendiendo con ello que el hecho de que dos jugadores se puedan comunicar no presupone que la comunicación sea libre y que éstos sean complementamente simétricos a la hora de cooperar, como creemos que ocurre en la realidad. En esta parte sólo obtenemos resultados parciales, y serían necesarias más investigaciones para indagar cómo resolver este problema desde el punto de vista de la teoría de juegos.

Capítulo 2

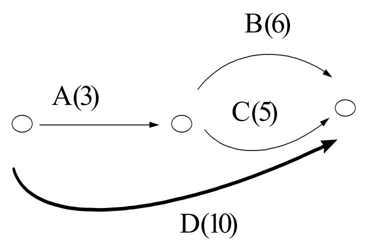
Juegos PERT

El P.E.R.T. (Proyect Evaluation and Review Technique) es un método de investigación de operaciones que coordina la ejecución de un proyecto consistente en la realización de una serie de actividades en un determinado orden. Muchos métodos de investigación de operaciones se han analizado utilizando métodos de teoría de juegos. En este capítulo se plantea el problema de repartir las holguras o tiempos extra que están asociados al PERT. Primeramente se presenta una motivación del problema que justifica su análisis desde el punto de vista de la teoría de juegos junto con la notación utilizada y los conceptos necesarios. Posteriormente se introducen los problemas PERT y se define el juego NTU que se asocia a cada problema PERT. Es interesante hacer notar que los juegos que se definen son NTU dado que la utilidad que alcanza una coalición no se puede transferir a los jugadores de cualquier modo, estando condicionada por las restricciones del problema. Ya en la sección 2.5 se introducen los problemas PERT generalizados que como su nombre indica son una generalización de los problemas PERT, y además también son una generalización de los problemas de bancarrota. Seguidamente se proponen soluciones para estos problemas basadas en los principios de igual ganancia, igual pérdida y reparto proporcional. Además, dichas soluciones son caracterizadas axiomáticamente. En general estas soluciones se encuentran en la frontera débil de Pareto. En la sección 2.6 se definen soluciones en la frontera fuerte siguiendo los mismos principios que definían las soluciones en la frontera débil. El capítulo termina con una aplicación basada en un problema de asignación de costes junto con un resumen de los principales temas a desarrollar en el futuro.

2.1 Motivación del problema

El PERT es un método de planificación que tiene como propósito coordinar todas las actividades involucradas en un proyecto. Las distintas actividades a realizar tienen asignadas duraciones y existen ciertas relaciones de precedencia entre ellas. El análisis del PERT nos proporciona el tiempo que como mínimo dura el proyecto, conocido como tiempo pert, junto con ciertas indicaciones sobre aquellas actividades que son más urgentes, es decir, aquellas que si se demoraran por algún motivo, provocarían un retraso en la finalización del proyecto. Desde el punto de vista de la teoría de la planificación de proyectos, una actividad es crítica si no puede consumir más del tiempo que dura su realización, lo que es equivalente a decir que existe un camino de longitud máxima (de duración el tiempo pert) en el que dicha actividad tiene que ejecutarse. Un camino crítico es un camino de longitud máxima desde el nodo inicio al nodo término y todas sus actividades son críticas. El estudio del PERT proporciona los caminos críticos formados por aquellas actividades que no disponen de holgura si el proyecto se lleva a cabo lo más pronto posible. En su análisis además se puede obtener un calendario en donde se presentan las fechas más tempranas y más tardías de inicio y finalización de cada actividad. Para un estudio más detallado del PERT se puede consultar Moder y Phillips (1970).

Consideremos el ejemplo 2.1 que aparece representado a continuación mediante un grafo.



Ejemplo 2.1

Este proyecto consta de cuatro actividades designadas con las letras A, B, C y D cuyas duraciones aparecen indicadas en el gráfico entre paréntesis y son de 3, 6, 5 y 10 unidades de tiempo respectivamente. Existen en este grafo tres caminos, designados mediante C_1, C_2 y C_3, donde $C_1 = \{A, B\}$, $C_2 = \{A, C\}$, y $C_3 = \{D\}$. El tiempo que lleva la realización de las actividades de cada camino se corresponde con la suma de las duraciones de las actividades que lo forman, de esta manera el tiempo para realizar las actividades de los caminos C_1, C_2 y C_3, es de 9, 8 y 10 unidades de tiempo respectivamente. El tiempo pert del proyecto es entonces de 10 unidades dado que el camino crítico sería C_3. Por tanto, existe una holgura de 1 unidad de tiempo en C_1 y una holgura de 2 unidades de tiempo en C_2, que se corresponden con la diferencia entre el tiempo pert y el tiempo de duración de las actividades involucradas en cada camino.

Presentamos para las actividades no críticas un calendario en donde los intervalos de la segunda columna representan el conjunto de posibles fechas para comenzar la actividad y en la tercera columna se presentan las posibles fechas de finalización de tal forma que no se demore el proyecto.

Actividad	Fechas de comienzo	Fechas de finalización
A	$[0, 1]$	$[3, 4]$
B	$[3, 4]$	$[9, 10]$
C	$[3, 5]$	$[8, 10]$

(Tabla 2.1)

Fácilmente observamos que, si todas las actividades son realizadas lo más pronto posible, el proyecto se lleva a cabo en su debido tiempo y por tanto no se repartirían las 3 unidades de holgura que existen en este caso. Teniendo en cuenta que las distintas actividades a menudo son realizadas por empresas diferentes, es interesante para ellas disponer de cierta holgura que les permita distribuir mejor sus recursos.

A lo largo de este trabajo daremos distintos criterios para repartir las holguras o tiempos entre las actividades, lo que nos permitirá fijar para cada actividad el momento exacto en que debe empezarse y terminarse. Por ejemplo, un posible reparto en el ejemplo 2.1 sería de 0.5 unidades de tiempo para las actividades A y B y de 1.5 unidades de tiempo para la actividad C, con lo que quedarían determinadas las fechas de inicio y finalización de cada actividad tal y como se presenta en la siguiente tabla.

Actividad	Fecha de comienzo	Fecha de finalización
A	0	3.5
B	3.5	10
C	3.5	10

(Tabla 2.2)

En este trabajo modelizamos por medio de la Teoría de Juegos el problema de cómo repartir las holguras existentes entre las actividades no críticas. Planteamos el problema mediante un juego cooperativo sin utilidad transferible o juego NTU (N, V). Consideramos el conjunto de jugadores N como el conjunto de las actividades no críticas (todas aquéllas que no están en caminos críticos), y la función característica de una coalición $S \subset N$, $V(S)$, como el conjunto de repartos factibles para esa coalición siguiendo las líneas clásicas, es decir, correspondería al tiempo extra u holgura que tienen los miembros de S si los miembros de $N \backslash S$ han consumido el mayor tiempo posible.

La importancia del PERT es primordial a la hora de planificar un proyecto; encontrar pues algún modo de repartir los costes ocasionados por los retrasos de las actividades puede ser interesante cuando diferentes entidades o empresas deben actuar conjuntamente en la consecución de un proyecto y deben asumir responsabilidades. Un ejemplo en esta línea se puede encontrar en la última sección de este capítulo.

2.2 Notación y conceptos previos

Un grafo G es un par (X, A) donde X es un conjunto finito que representa los nodos o vértices del grafo y A representa a los arcos del grafo. En el problema que consideramos cada arco $i \in A$ se corresponde con la realización de la actividad $i = \left((i)_o, (i)_f\right)$ donde $(i)_o, (i)_f \in X$ siendo $(i)_o$ el nodo origen de la actividad i, e $(i)_f$ el nodo fin de la actividad i.

$O \in X$ es un nodo inicio si no existe $i \in A$ verificando que $(i)_f = O$ y $\gamma \in X$ es un nodo término si no existe $i \in A$ verificando que $(i)_o = \gamma$.

Además los grafos que consideraremos tienen un único nodo inicio y un único nodo término a los que denotaremos mediante O y γ respectivamente.

Un camino es una colección de arcos $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ tales que $i_l \in A$ para todo $l = 1, ..., k$, $(i_1)_o = O$, $(i_l)_f = (i_{l+1})_o$ para todo $l = 1, ..., k-1$ e $(i_k)_f = \gamma$.

$\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ es un subcamino desde i_1 hasta i_k si $i_l \in A$ para todo $l = 1, ..., k$ y si $(i_l)_f = (i_{l+1})_o$ para todo $l = 1, ..., k-1$.

CA denotará el conjunto de caminos existentes en el grafo,

$$CA = \{C_j \subset A \mid C_j \text{ es un camino}\}.$$

Identificaremos habitualmente C_j con su subíndice j.

Sean $i_l, i_k \in C_j$, diremos que i_l precede a i_k si existe un subcamino desde i_l hasta i_k.

Denotaremos por d_i a la duración o tiempo que necesita para llevarse a cabo la actividad i. La longitud de cada camino C_j vendrá dada por $l_j = \sum_{i \in C_j} d_i$. Denotaremos por l_0 el tiempo pert, es decir, la longitud del camino o caminos de máxima duración, $l_0 = \max_{C_j \in CA} \sum_{i \in C_j} d_i$. Un camino crítico será un camino de longitud l_0. La holgura presente en cada camino C_j la denotaremos por h_j y valdrá $l_0 - l_j$.

Pueden aparecer en el grafo determinados arcos que no representan actividades propiamente dichas sino que únicamente indican relaciones de precedencia entre las actividades. Dichas actividades recibirán el nombre de ficticias y serán aquellas cuya duración asociada es de 0 unidades.

Sea $B \subset \mathbb{R}^n$, B se dice comprehensivo si dado $x \in B$ e $y \in \mathbb{R}^n$ es un punto tal que $y \leq x$, entonces $y \in B$. La envoltura comprehensiva de B es el conjunto $comp(B) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{ existe } x \in B \text{ con } y \leq x\}$.

2.2.1 Juegos NTU

Los juegos NTU introducidos por Aumann y Peleg (1960) comprenden una amplia clase de juegos, los juegos con utilidad transferible o juegos TU (Von Neumann y Morgenstern (1944)) y la clase de juegos de regateo (Nash (1950)).

A diferencia de los juegos con utilidad transferible, en los juegos sin utilidad transferible la utilidad que pueden obtener los jugadores de una coalición no se puede asignar de cualquier forma y existen determinadas restricciones que condicionan la distribución de pagos.

Un juego NTU es un par (N, V) donde N representa el conjunto de jugadores y V es una función llamada función característica que asigna a cada coalición S un conjunto no vacío $V(S) \subset \mathbb{R}^S$ con las siguientes propiedades:

- Para cada $i \in N$, existe $V(i) \in \mathbb{R}$ tal que

  $$V(\{i\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq V(i)\}.$$

  Habitualmente identificaremos $V(\{i\})$ con $V(i)$.

- $V(S)$ es un subconjunto cerrado, comprehensivo y no vacío de $I\!R^S$ para toda coalición S.
- El conjunto $V(S)_+ = \{x \in V(S) \text{ tales que } x \geq (V(i))_{i\in S}\}$ es compacto para toda coalición S.

A menudo identificaremos un juego NTU (N, V) con su función característica V.

Un juego TU puede ser visto como un juego NTU (N, V) donde:

$$V(S) = \left\{ x \in I\!R^S \;\mid\; \sum_{i\in S} x_i \leq v(S) \right\} \text{ para todo } \; S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}.$$

Un juego NTU (N, V) se dice monótono si dados $S, T \in 2^N \backslash \emptyset,\ S \subset T$, y dado $x \in V(S)$, existe $y \in V(T)$ tal que $y_S \geq x_S$, o equivalentemente si la proyección de $V(T)$ en $I\!R^S$ contiene al conjunto $V(S)$.

Un juego NTU (N, V) se dice superaditivo si $V(S) \times V(T) \subset V(S \cup T)$ para todo $S, T \in 2^N \backslash \emptyset$ con $S \cap T = \emptyset$.

A continuación definimos el núcleo y el núcleo fuerte de un juego NTU (Aumann (1961)) que denotaremos mediante $C(V)$ y $SC(V)$ respectivamente.

Sea (N, V) un juego NTU (N, V). Para cada $S \in 2^N \backslash \emptyset$ sea

$$dom(S) = \left\{ x \in I\!R^S \;\mid\; \text{existe } y \in V(S),\, y > x \right\}$$

es decir, los elementos que son dominados por la coalición S y

$$wdom(S) = \left\{ x \in I\!R^S \mid \text{existe } y \in V(S),\; y \geq x,\, y \neq x \right\}.$$

Evidentemente para cada $S \subset N,\ dom(S) \subset wdom(S)$.

El núcleo selecciona aquellos puntos $x \in I\!R^n$ que no están dominados por ninguna coalición S, es decir tales que ninguna coalición de jugadores S puede obtener un punto en $V(S)$ en donde cada jugador mejore la utilidad que alcanzaba con x.

$$C(V) = \left\{ x \in V(N) \mid x_S \notin dom(S) \;\text{ para todo } S \in 2^N \backslash \emptyset \right\}.$$

El núcleo de un juego NTU puede ser vacío o contener demasiados elementos. Cuando el núcleo es demasiado grande interesa seleccionar algunos de sus elementos sin perder la noción de estabilidad que lo caracteriza; por ello se han estudiado diferentes subconjuntos del núcleo como el núcleo fuerte.

El núcleo fuerte selecciona aquellos puntos $x \in I\!R^n$ tales que no están estrictamente dominados por ninguna coalición S, es decir tales que ninguna coalición de jugadores S puede obtener un punto en $V(S)$ en donde al menos un jugador i obtenga una utilidad estrictamente mayor que la proporcionada por x y el resto de jugadores de S no salgan perjudicados con respecto a x.

$$SC(V) = \left\{x \in V(N) \ \mid \ x_S \notin wdom(S) \text{ para todo } S \in 2^N \backslash \emptyset \right\}.$$

Evidentemente $SC(V) \subset C(V)$.

Otros conceptos de solución se han definido para juegos NTU extendiendo las ideas de los mismos conceptos en juegos TU. Algunos de ellos, en lugar de seleccionar un conjunto de elementos, seleccionan un único elemento. Estudiaremos en este trabajo el valor de compromiso introducido en Borm *et al.* (1992a) y que es extensión del $\tau-$valor introducido por Tijs (1981) en la clase de juegos TU.

Dado $i \in N$ se define el pago de utopía para el jugador i, $K_i(V)$, como

$$K_i(V) = \sup \left\{ t \in I\!R \ \mid \ \text{existe } a \in I\!R^{N\backslash i}, \begin{array}{c} (a,t) \in V(N) \\ a \notin dom(N\backslash i) \\ a \geq (V(j))_{j \in N\backslash i} \end{array} \right\}.$$

Al vector $K(V) = (K_i(V))_{i \in N}$ le llamaremos valor superior de V.
Sea $i \in N$ y $S \in 2^N$ tal que $i \in S$, definimos

$$\rho^V(S,i) = \sup \left\{ t \in I\!R \ \mid \ \text{existe } a \in I\!R^{S\backslash i}, \begin{array}{c} (a,t) \in V(S) \\ a > (K_j(V))_{j \in S\backslash i} \end{array} \right\}.$$

Se define por tanto el mínimo derecho del jugador i como

$$k_i(V) = \max_{S \mid i \in S} \rho^V(S,i).$$

Al vector $k(V) = (k_i(V))_{i \in N}$ le llamaremos valor inferior de V.

Nos restringiremos a juegos NTU tales que $K(V)$ y $k(V) \in I\!R^N$.

En Borm *et al.* (1992a) se comprueba que si (N,V) es un juego NTU con $C(V) \neq \emptyset$, entonces $k(V) \leq x \leq K(V)$ para todo $x \in C(V)$.

Un juego NTU (N, V) se llama de compromiso admisible si $k(V) \leq K(V)$, $k(V) \in V(N)$ y $K(V) \notin dom(N)$.

Por tanto tenemos que si V es tal que $C(V) \neq \emptyset$ entonces V es de compromiso admisible.

Para estos juegos se define el valor de compromiso $\Upsilon(V)$ como el único punto que está en el segmento que une $k(V)$ y $K(V)$, está en $V(N)$ y es el más cercano al valor superior $K(V)$, *i.e.*,

$$\Upsilon(V) = k(V) + \alpha_V \left[K(V) - k(V)\right]$$

donde $\alpha_V = \max\left\{\alpha \in [0,1] \mid k(V) + \alpha\left[K(V) - k(V)\right] \in V(N)\right\}.$

2.2.2 Problemas de bancarrota

Una amplia descripción de los problemas de bancarrota se puede encontrar en Aumann y Maschler (1985). A continuación exponemos de forma abreviada las principales ideas y algunas soluciones.

Un problema de bancarrota es un par $(E, c) \in I\!R \times I\!R^N$, donde $c_i \geq 0$ para todo $i \in N$ y $0 \leq E \leq \sum_{i \in N} c_i$. Aqui, E es el estado que tiene que ser dividido entre los demandantes y c_i es la demanda del acreedor $i \in N$.

Una regla de reparto es una función f que asigna a cada problema de bancarrota (E, d) un vector $f(E, d) \in I\!R^N$ tal que

$$0 \leq f_i(E, d) \leq c_i, \text{ para todo } i \in N$$

$$\sum_{i \in N} f_i(E, c) = E.$$

En Curiel *et al.* (1987) podemos encontrar distintas reglas de reparto como la solución de igual ganancia, la solución de igual pérdida, el reparto proporcional y el reparto proporcional ajustado, las cuales resumimos brevemente.

La solución de igual ganancia (CEA) asigna a cada acreedor i el mínimo entre α y su demanda c_i, estando α unívocamente determinado por la propiedad de eficiencia, es decir, para cada $i \in N$

$$CEA_i(E, c) = \min\left\{\alpha, c_i\right\} \text{ donde } \alpha \text{ es tal que} \sum_{i \in N} \min\left\{\alpha, c_i\right\} = E.$$

La solución de igual pérdida (CEL) asigna a cada acreedor i el máximo entre 0 y $c_i - \beta$, estando β unívocamente determinado por la propiedad de eficiencia, es decir, para cada $i \in N$

$$CEL_i(E,c) = \max\{0, c_i - \beta\} \ \text{ donde } \beta \text{ es tal que} \sum_{i \in N} \max\{0, c_i - \beta\} = E.$$

El reparto proporcional (PRO) divide el estado de forma proporcional a las demandas de los acreedores, es decir, para cada $i \in N$

$$PRO_i(E,c) = c_i \frac{E}{\sum\limits_{k \in N} c_k}.$$

El reparto proporcional ajustado $(APRO)$ empieza asignándole a cada acreedor su derecho mínimo, que se corresponde con el máximo entre 0 y la parte del estado no demandada por el resto de los demandantes, es decir, $s_i = \max\left\{0, E - \sum\limits_{j \in N \setminus i} c_j\right\}$. Una vez realizada esta asignación, el estado restante $E' = E - \sum\limits_{i \in N} s_i$ es dividido de forma proporcional entre los demandantes teniendo en cuenta que las demandas de los jugadores en el estado E' son $c_i' = \min\{c_i - s_i, E'\}$, dado que demandas mayores que E' se consideran irrelevantes. Por tanto el reparto proporcional ajustado asigna a cada $i \in N$

$$APRO_i(E,c) = s_i + c_i' \frac{E'}{\sum\limits_{k \in N} c_k'}.$$

A cada problema de bancarrota (E,c), O'Neill (1982) le asocia el juego TU $(N, v_{E,c})$ definido como

$$v_{E,c}(S) = \max\left\{E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i, 0\right\} \ \text{ para todo } S \subset N.$$

En Curiel *et al.* (1987) se prueba que los juegos de bancarrota son convexos y por tanto el $\tau-$valor puede ser fácilmente calculado. Además se prueba que $APRO(E,c)$ coincide con el $\tau - valor$ de $v_{E,c}$.

2.3 El problema PERT

Definimos a continuación los elementos fundamentales que intervienen en un problema PERT.

Definición 2.1 *Llamamos holgura potencial de una actividad i no ficticia, denotada como $h^p(i)$, a*

$$h^p(i) = \min_{j \mid i \in C_j} \{h_j\}.$$

Para cada $i \in A$, $h^p(i)$ representa el máximo tiempo extra (además de d_i) que puede emplearse en la actividad i sin que se demore el proyecto.
Si i es una actividad ficticia entonces tomamos $h^p(i) = 0$.

Un camino $C_j \in CA$ es crítico si su holgura es nula y una actividad $i \in A$ es crítica si está en al menos un camino crítico o es ficticia. Denotaremos por C al conjunto de caminos no críticos y por N al conjunto de actividades no críticas, es decir

$$\begin{aligned} C &= \{C_j \in CA \mid h_j > 0\} \\ N &= \{i \in A \mid h^p(i) > 0\}. \end{aligned}$$

Definición 2.2 *Un problema PERT es una terna (G, h, h^p) donde $G = (X, A)$ es el grafo; $h = (h_j)_{j \in C} \in I\!R^c$ es el vector de holguras de los diferentes caminos* y *$h^p = (h^p(i))_{i \in N} \in I\!R^n$.*

Designaremos por P al conjunto de problemas PERT.

Definición 2.3 *Dado $(G, h, h^p) \in P$ sea*

$$R(G,h,h^p) = \left\{ x \in I\!R^n \mid \begin{array}{cc} 0 \leq x_i \leq h^p(i) & \text{para todo } i \in N \\ \sum_{i \in C_j} x_i \leq h_j & \text{para todo } C_j \in C \end{array} \right\}$$

el conjunto de repartos factibles.

Definición 2.4 *Llamamos holgura potencial de una coalición S en el camino C_j a,*

$$h_j^p(S) = \begin{cases} \max\limits_{x \in R(G,h,h^p)} \sum\limits_{i \in C_j \cap S} x_i & \text{si} \quad S \cap C_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{si} \quad S \cap C_j = \emptyset. \end{cases}$$

Para cada $S \subset N$ y $C_j \in C$, $h_j^p(S)$ denota el máximo tiempo que puede emplearse en las actividades de S que están en el camino C_j sin que se demore el proyecto.

Es trivial comprobar que para cada $i \in N$, $h_j^p(i) = \begin{cases} h^p(i) & \text{si } i \in C_j \\ 0 & \text{si } i \notin C_j \end{cases}$.

Además para cada $C_j \in C$, $h_j^p(C_j) = h_j$.

Una *solución* será una aplicación $f : P \longrightarrow I\!R^n$ tal que $f(G, h, h^p) \in R(G, h, h^p)$ para cada $(G, h, h^p) \in P$.

Para cada $i \in N$, $f_i(G, h, h^p)$ nos da el tiempo extra que se le otorga a la actividad i.

Dado $B \subset I\!R^n$ denotamos por $WPB(B)$ a la *frontera débil de Pareto* del conjunto B, es decir,

$$WPB(B) = \{x \in B \mid \text{no existe } \lambda > 0 \text{ verificando que } x + \lambda 1_N \in B\}$$

y por $LWPB(B)$ a la *frontera débil de Pareto inferior del conjunto B*, es decir,

$$LWPB(B) = \{x \in B \mid \text{no existe } \lambda > 0 \text{ verificando que } x - \lambda 1_N \in B\}.$$

Denotamos por $PB(B)$ a la *frontera de Pareto del conjunto B*, es decir,

$$PB(B) = \left\{x \in B \mid \text{no existe } \lambda > 0 \text{ e } i \in N \text{ verificando que } x + \lambda 1_{\{i\}} \in B\right\}$$

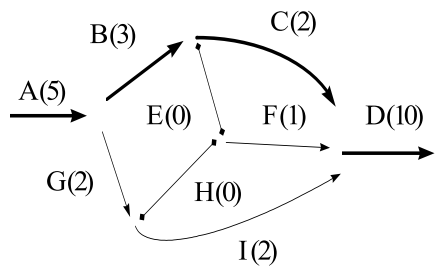
y por $LPB(B)$ a la *frontera inferior de Pareto del conjunto B*, es decir,

$$LPB(B) = \left\{x \in B \mid \text{no existe } \lambda > 0 \text{ e } i \in N \text{ verificando que } x - \lambda 1_{\{i\}} \in B\right\}.$$

A cada una de las asignaciones que están en la frontera de Pareto las denominaremos *óptimas de Pareto.*

Nota 2.1 El siguiente ejemplo nos muestra que, si hay actividades ficticias, podemos encontrar asignaciones factibles en la frontera de Pareto que no reparten la holgura en todos los caminos, es decir, existe $x \in$

$PB(R(G,h,h^p))$, y un camino C_{j_0} tal que $\sum_{i \in C_{j_0}} x_i < h_{j_0}$.



Ejemplo 2.2

El grafo PERT anterior está constituido por los siguientes caminos:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{A, B, C, D\} \\ C_2 &= \{A, B, E, F, D\} \\ C_3 &= \{A, G, H, F, D\} \\ C_4 &= \{A, G, I, D\}\,. \end{aligned}$$

Las actividades E y H son actividades ficticias y nos indican que la actividad F debe realizarse después de B y G. Claramente el camino crítico es C_1 siendo el tiempo pert de 20 unidades y las holguras presentes en los caminos C_2, C_3 y C_4, son de $1, 2$ y 1 unidades de tiempo respectivamente.

La asignación $f_F = 1$, $f_G = 0.5$, $f_I = 0.5$ y $f_i = 0$ si $i = A, B, C, D, E, H$ es un óptimo de Pareto y reparte las unidades de holgura existentes en C_2 y en C_4, sin embargo en el camino C_3 queda media unidad de holgura sin repartir.

La siguiente proposición nos dice que, si no hay actividades ficticias, una solución óptima de Pareto reparte todas las holguras existentes en los caminos.

Proposición 2.1 *Si no hay actividades ficticias se verifica que f solución es óptima de Pareto de $R(G,h,h^p)$ si y sólo si $\sum_{i\in C_j} f_i(G,h,h^p) = h_j$ para cada $C_j \in C$.*

Demostración.

Es trivial comprobar que si $\sum_{i\in C_j} f_i(G,h,h^p) = h_j$ para todo $C_j \in C$, entonces f es óptima de Pareto.

Sea f óptima de Pareto y probemos que f reparte todas las holguras existentes en los caminos. Supongamos que existiera C_{j_0} tal que

$$\sum_{i\in C_{j_0}} f_i(G,h,h^p) < h_{j_0} = l_0 - l_{j_0}.$$

Denotemos para cada $i \in N,\ g_i = f_i(G,h,h^p) + d_i$. La anterior desigualdad la podemos escribir como $\sum_{i\in C_{j_0}} g_i < l_0$. Sea $C_{j_0} = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ tal que i_l precede a i_{l+1} para todo $l = 1, ..., k-1$, siendo i_1 la primera actividad del camino C_{j_0} e i_k la última actividad del camino C_{j_0}.

Si no hay actividades ficticias y f es óptima de Pareto entonces para todo $l = 1, ..., k,$ existe un camino $C_j(i_l)$ tal que $i_l \in C_j(i_l)$ y $\sum_{i\in C_j(i_l)} g_i = l_0$. Sea $i_l \in C_{j_0}$ y supongamos que para todo camino C_j tal que $i_l \in C_j$ se verifica que $\sum_{i\in C_j(i_l)} g_i < l_0$.

Si $g_{i_l} < d_i + h^p(i_l)$ entonces tomando $\varepsilon > 0$ y $f' \in I\!R^n$ definida como:

$$f'_k(G,h,h^p) = \begin{cases} f_{i_l}(G,h,h^p) + \varepsilon & \text{si } k = i_l \\ f_k(G,h,h^p) & \text{si } k \neq i_l \end{cases}$$

contradecimos el hecho de que f sea óptima de Pareto.

Si $g_{i_l} = d_i + h^p(i_l)$ y dado que i_l no es una actividad ficticia podemos encontrar un camino $C_{j_0} \in C$ tal que $i_l \in C_{j_0}$ y $h_{j_0} = h^p(i_l)$ lo que contradice que $\sum_{i\in C_{j_0}} g_i < l_0$.

Debemos hacer notar que si en el grafo hay actividades ficticias lo anterior no es cierto, como se puede ver en el ejemplo 2.2, dado que si consideramos la actividad H, que sólo pertenece al camino C_3, y la solución f definida previamente tenemos que, $\sum_{i\in C_3} g_i = 19.5 < 20 = l_0$.

Tendremos para la actividad i_k, última del camino C_{j_0}, la siguiente igualdad,

$$\sum_{i \in C_j(i_k) \setminus i_k} g_i = l_0 - g_{i_k}.$$

Consideremos para cada $l = 1, 2, ..., k$, los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} Pre(C_j(i_l)) &= \{\text{arcos del camino } C_j(i_l) \text{ que preceden al arco } i_l\} \\ Pos(C_j(i_l)) &= \{\text{arcos del camino } C_j(i_l) \text{ a los cuales precede el arco } i_l\}. \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i \in Pre(C_j(i_{k-1}))} g_i + g_{i_{k-1}} \\ B &= \sum_{i \in Pos(C_j(i_{k-1}))} g_i \\ C &= \sum_{i \in Pre(C_j(i_k))} g_i \\ D &= g_{i_k}. \end{aligned}$$

Con esta notación podemos escribir

$$\begin{aligned} A + B &= l_0 \\ C + D &= l_0. \end{aligned}$$

Además las actividades involucradas en los términos C y B forman un camino, al igual que las actividades involucradas en A y en D, y por ello

$$\begin{aligned} C + B &\leq l_0 \\ A + D &\leq l_0. \end{aligned}$$

Fácilmente se deduce que las anteriores desigualdades son en realidad igualdades, dado que si por ejemplo $C+B < l_0$, tendríamos que $A+B+C+D = 2l_0 < 2l_0$. Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} C + B &= l_0 \\ A + D &= l_0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $A + D = l_0$, podemos escribir la siguiente relación,

$$\sum_{i \in Pre(C_j(i_{k-1}))} g_i = l_0 - g_{i_k} - g_{i_{k-1}}.$$

Supongamos por hipótesis de inducción que la anterior relación es cierta para el lugar $l+1$, es decir, $\sum_{i \in Pre(C_j(i_{l+1}))} g_i = l_0 - \sum_{j=l+1}^{k} g_{i_j}$, y veamos que ocurre con i_l (aplicamos por tanto un procedimiento de inducción hacia atrás). Tenemos que

$$\sum_{i \in Pre(C_j(i_l))} g_i = l_0 - g_{i_l} - \sum_{i \in Pos(C_j(i_l))} g_i. \tag{2.1}$$

Sabemos además que el conjunto de actividades $Pre(C_j(i_{l+1})) \cup Pos(C_j(i_l))$ forman un camino dado que i_l precede a i_{l+1}. Por ello podemos escribir

$$\sum_{i \in Pre(C_j(i_{l+1}))} g_i + \sum_{i \in Pos(C_j(i_l))} g_i \leq l_0.$$

Utilizando la hipótesis de inducción deducimos que

$$\sum_{i \in Pos(C_j(i_l))} g_i \leq l_0 - l_0 + \sum_{j=l+1}^{k} g_{i_j} = \sum_{j=l+1}^{k} g_{i_j}$$

y por tanto podemos escribir (2.1) como

$$\sum_{i \in Pre(C_j(i_l))} g_i = l_0 - g_{i_l} - \sum_{i \in Pos(C_j(i_l))} g_i \geq l_0 - \sum_{j=l}^{k} g_{i_j}.$$

Además utilizando el hecho de que el conjunto $Pre(C_j(i_l)) \cup i_l \cup ... \cup i_k$ forma un camino, tenemos que $\sum_{i \in Pre(C_j(i_l))} g_i + \sum_{j=l}^{k} g_{i_j} \leq l_0$, lo que nos permite concluir que

$$\sum_{i \in Pre(C_j(i_l))} g_i = l_0 - \sum_{j=l}^{k} g_{i_j}.$$

La expresión anterior es válida para todo $l \geq 2$, dado que sólo hemos necesitado que $Pre(C_j(i_l)) \neq \emptyset$.

Como $\sum_{j=1}^{k} g_{i_j} < l_0$ concluimos que

$$\sum_{i \in Pre(C_j(i_2))} g_i = l_0 - \sum_{j=2}^{k} g_{i_j} > g_{i_1}.$$

Si ahora consideramos el camino formado por $Pre(C_j(i_2)) \cup Pos(C_j(i_1))$ tenemos que $\sum_{i \in Pre(C_j(i_2))} g_i + \sum_{i \in Pos(C_j(i_1))} g_i > g_{i_1} + l_0 - g_{i_1} = l_0$, lo que es un absurdo ya que f es factible. ■

2.4 El problema PERT como un juego NTU

A cada problema PERT $(G, h, h^p) \in P$ le asociamos un juego NTU $(N, V_{(G,h,h^p)})$ donde N es el conjunto de actividades con holgura positiva y para cada $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ definimos

$$V_{(G,h,h^p)}(S) =$$

$$comp \left\{ x_S \in I\!R^s \mid \begin{array}{cc} 0 \leq x_i \leq h^p(i) & \text{para todo } i \in S \\ \sum_{i \in S \cap C_j} x_i \leq h_j - h_j^p(N \backslash S) & \text{para todo } C_j,\ S \cap C_j \neq \emptyset \end{array} \right\}.$$

La función característica de una coalición S viene definida como el conjunto de repartos factibles para la coalición S donde para cada camino C_j que interseque a S, los jugadores de $S \cap C_j$ no se pueden garantizar más que el tiempo u holgura restante en el caso más desfavorable, es decir, que los jugadores de $(N \backslash S) \cap C_j$ hayan consumido el mayor tiempo posible.

Nota 2.2 La formulación anterior es equivalente a la que exponemos a continuación. Sea N el conjunto de jugadores, definimos la función característica de la gran coalición como

$$V_{(G,h,h^p)}(N) = comp(R(G, h, h^p))$$

siendo para todo $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$,

$$V_{(G,h,h^p)}(S) =$$

$$\left\{y_S \mid \text{para todo}\, x \in V_{(G,h,h^p)}(N),\, x \geq 0,\ (x_{N\backslash S}, y_S) \in V_{(G,h,h^p)}(N)\right\}.$$

En lo sucesivo usaremos V en lugar de $V_{(G,h,h^p)}$.

Es trivial comprobar que $V(N)$ coincide en ambas definiciones. Probemos que ambas definiciones coinciden en el resto de las coaliciones. Sea $S \subset N$ y sean

$$A = comp\left\{ x_S \in I\!R^s \mid \begin{array}{cc} 0 \leq x_i \leq h^p(i) & \forall\ i \in S \\ \sum\limits_{i \in S \cap C_j} x_i \leq h_j - h_j^p(N\backslash S) & \forall\ C_j\ /\ \ S \cap C_j \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

y

$$B = \left\{y_S \mid \text{para todo } x \in V(N),\, x \geq 0,\ (x_{N\backslash S}, y_S) \in V(N)\right\}.$$

En primer lugar probamos que $A \subset B$. Supongamos que $x \notin B$, entonces existe $y \in V(N)$, $y \geq 0$ tal que $(y_{N\backslash S}, x_S) \notin V(N)$. Por ello existe $C_j \in C$ tal que

$$\sum_{i \in (N\backslash S) \cap C_j} y_i + \sum_{i \in S \cap C_j} x_i > h_j$$

o lo que es igual, existe $C_j \in C$ tal que $\sum\limits_{i \in S \cap C_j} x_i > h_j - \sum\limits_{i \in (N\backslash S) \cap C_j} y_i$, teniéndose entonces que

$$\sum_{i \in S \cap C_j} x_i > h_j - \sum_{i \in (N\backslash S) \cap C_j} y_i \geq h_j - \max_{y \in R(G,h,h^p)} \sum_{i \in (N\backslash S) \cap C_j} y_i = h_j - h_j^p(N\backslash S)$$

es decir, $x \notin A$. Por tanto $A \subset B$.

Probemos a continuación que $B \subset A$. Es evidente que si $y_S \in B$ entonces $0 \leq y_i \leq h^p(i)$ para todo $i \in S$. Sea $y \in B$, $C_j \in C$ tal que $S \cap C_j \neq \emptyset$, y $x \in V(N) = R(G, h, h^p)$ tal que

$$\sum_{i \in (N\backslash S) \cap C_j} x_i = h_j^p(N\backslash S).$$

Como $y \in B$ se verifica que $(x_{N\backslash S}, y_S) \in V(N)$ y por tanto

$$\sum_{i \in (N\backslash S) \cap C_j} x_i + \sum_{i \in S \cap C_j} y_i \leq h_j.$$

Luego $y \in A$.

La siguiente proposición nos dice que el núcleo del juego NTU considerado contiene a todas las asignaciones factibles que son óptimas de Pareto. Además el núcleo contiene más puntos, como se puede comprobar en el ejemplo 2.1, dado que $(0, 0.5, 2) \in C(V)$ y $(0, 0.5, 2) \notin PB(V(N))$. Esto nos indica que los juegos que hemos considerado tienen núcleo no vacío y además el núcleo puede estar formado por gran cantidad de puntos.

Cuando el núcleo es grande, tratamos de acotarlo de alguna forma sin perder la noción de estabilidad que lo caracteriza. Por ello, calculamos el núcleo fuerte y encontramos que coincide exactamente con la frontera de Pareto.

Proposición 2.2

a) *El núcleo del juego* (N, V) *contiene a todas las asignaciones óptimas de Pareto.*

$$PB\,(V(N)) \subset C(V).$$

b) *El núcleo fuerte del juego* (N, V) *coincide con el conjunto de asignaciones óptimas de Pareto.*

$$PB\,(V(N)) = SC(V).$$

Demostración.

a) Sea $x \in PB\,(V(N))$ y supongamos que $x \notin C(V)$. Por tanto existe $S \subset N$ e $y_S \in V(S)$ tal que $y_i > x_i$ para todo $i \in S$. Consideremos entonces la asignación $x' = (x_{N \setminus S}, y_S)$; teniendo en cuenta la formulación planteada en la nota 2.2 tenemos que $x' \in V(N)$ y por tanto x no sería óptimo de Pareto ya que $x'_i = x_i$ para cada $i \in N \setminus S$ y $x'_i = y_i > x_i$ para cada $i \in S$.

b) De manera análoga se obtendría que $PB\,(V(N)) \subset SC(V)$; veamos entonces que se verifica exactamente la igualdad.

Sea $x \in V(N)$ tal que x no es óptimo de Pareto, entonces existe $i \in N$ y $\lambda > 0$ tal que $x' = x \setminus_i (x_i + \lambda) \in V(N)$. Por tanto $x \notin SC(V)$. ■

Proposición 2.3 *Los juegos PERT tienen núcleo no vacío, son monótonos y superaditivos.*

Demostración.

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos que los juegos PERT tienen núcleo no vacío.

Sean $S,T \in 2^N \backslash \emptyset$, $S \subset T$, $x \in V(S)$ y $C(S) = \{C_j \in C \mid S \cap C_j \neq \emptyset\}$. Se verifica que para cada $C_j \in C(S)$, $h_j^p(N \backslash T) \leq h_j^p(N \backslash S)$ y por tanto teniendo en cuenta la definición del juego (N, V) asociado al problema PERT (G, h, h^p) obtenemos que existe $y \in V(T)$ tal que $y_S \geq x_S$ y por tanto los juegos PERT son monótonos.

Sean $S,T \in 2^N \backslash \emptyset$ tal que $S \cap T = \emptyset$, $y_S \in V(S)$, y $z_T \in V(T)$. Se verifica utilizando la definición dada en la nota 2.2 que para cada $x \in V(N)$, $(x_{N \backslash S}, y_S) \in V(N)$, $(x_{N \backslash T}, z_T) \in V(N)$. En particular $(y_S, z_T, x_{N \backslash (S \cup T)}) \in V(N)$ y por tanto $V(S \cup T) \supset V(S) \times V(T)$, con lo que concluimos que el juego (N, V) es superaditivo. ■

2.5 El problema PERT generalizado

En los problemas PERT existen unas relaciones entre las holguras potenciales de los jugadores y las holguras existentes en los caminos. Aquí formulamos un problema más general que los anteriores en donde se elimina la anterior restricción.

El problema PERT surge de un problema real, el problema de la planificación de proyectos, y tal como hemos visto existen algunas restricciones iniciales, por ejemplo, todos los caminos han de partir de un único nodo inicio (comienzo del proyecto) y todos han de finalizar en un único nodo terminal (finalización del proyecto). Además las "demandas" de cada actividad (holguras potenciales) surgen de la naturaleza del grafo. Si relajamos estas hipótesis y consideramos que cada actividad i demanda una cantidad M_i, de tal forma que el estado total E está dividido en diferentes partes o subestados y que cada jugador tiene demandas sobre algunos subestados, podemos pensar en una generalización del problema PERT. En este sentido todos los demandantes de un mismo subestado formarían un camino.

Los problemas de bancarrota que han sido resumidos en la sección 2.2 podríamos verlos como un caso particular de estos problemas. El grafo G estaría formado por un único camino (el orden de las actividades sería en este caso irrelevante), la holgura del camino sería igual al estado E, y todos los acreedores demandarían unas cantidades fijas sobre este estado.

A continuación definimos formalmente el problema PERT generalizado.

Siguiendo la misma notación denotaremos un problema PERT generalizado como una terna (G, H, M) donde $G = (X, A)$ es el grafo, $H = (H_j)_{j \in C}$ denota el vector de todos los subestados u holguras de los caminos a repartir y $M = (M_i)_{i \in N}$ representa el vector de demandas de los jugadores.

Asumimos que cada actividad tendrá demandas sobre los subestados o caminos de los que forme parte y que estas holguras son finitas.

Supondremos además que las demandas de los jugadores están acotadas, *i.e.*, para cada $i \in N$, $M_i \in I\!R^+$. Además para cada $C_j \in C$,

$$\begin{array}{rcl} H_j & \geq & 0 \\ \sum_{i \in C_j} M_i & \geq & H_j \end{array}$$

$$\text{existe } i \in C_j \text{ con } M_i > 0.$$

La resolución del problema consiste en seleccionar un elemento del conjunto

$$R(G,H,M) = \left\{ x \in \; I\!R^n \;\; | \;\; \begin{array}{c} \sum\limits_{i \in C_j} x_i \leq H_j, \text{ para todo } \; C_j \in C \\ 0 \leq x_i \leq M_i, \text{ para todo } i \in N \end{array} \right\} \tag{2.2}$$

Denotaremos por PG al conjunto de problemas PERT generalizados.

Una solución será una aplicación $f : PG \longrightarrow I\!R^n$ tal que $f(G,H,M) \in R(G,H,M)$ para cada $(G,H,M) \in PG$. Para cada $i \in N$, $f_i(G,H,M)$ nos da la asignación que recibe el jugador i.

El derecho mínimo o mínima aspiración del jugador i en el problema PERT generalizado, que denotaremos mediante $r(i)$, se corresponde con lo máximo que se puede garantizar el jugador i, si el resto de jugadores, $N \backslash i$, obtiene lo máximo dentro del conjunto de asignaciones factibles. Es decir,

$$r(i) = \max \{ \lambda \in I\!R \;\; | \;\; \text{si } \; x \in R(G,H,M) \; \Rightarrow x \backslash_i \lambda \in R(G,H,M) \, \} \, .$$

Construimos a continuación el problema dual de un problema PERT generalizado (G,H,M) al que denotaremos $(G,H,M)^D$. Consideremos que a cada actividad i se le asigna su demanda M_i, de esta forma en cada camino C_j habrá un exceso $E_j = \sum\limits_{i \in C_j} M_i - H_j \geq 0$.

La resolución del problema PERT generalizado dual consistirá en seleccionar un elemento del conjunto

$$R(G,H,M)^D = \left\{ x \in \; I\!R^n \;\; | \;\; \begin{array}{c} \sum\limits_{i \in C_j} x_i \geq E_j, \text{ para todo } \; C_j \in C \\ 0 \leq x_i \leq M_i, \text{ para todo } i \in N \end{array} \right\} \tag{2.3}$$

Definimos a continuación el derecho mínimo o la mínima aspiración del jugador i en el problema dual, que denotamos mediante $r^D(i)$. Teniendo en cuenta que en el problema dual se reparten pérdidas, la mínima aspiración del jugador i es la mínima pérdida que se garantiza si el resto de jugadores minimizan también sus pérdidas, *i.e.*,

$$r^D(i) = \min\left\{\lambda \in I\!\!R \;\mid \text{ si } \; x \in R(G,H,M)^D \;\Rightarrow x\backslash_i\lambda \in R(G,H,M)^{\,D}\right\}.$$

Nota 2.3 De la misma forma que se hizo en la sección 2.3 se podría asociar a cada problema PERT generalizado (G,H,M) un juego NTU (N,V) donde la función característica de la gran coalición vendría definida como,

$$V_{(G,H,M)}(N) = comp(R(G,H,M))$$

siendo para todo $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$,

$$V_{(G,H,M)}(S) =$$

$$\left\{y_S \in I\!\!R^s \mid \text{para todo } x \in V_{(G,H,M)}(N),\ x \geq 0,\ (x_{N\backslash S}, y_S) \in V_{(G,H,M)}(N)\right\}.$$

Además si dado $(G,H,M) \in PG$ existe un único estado a repartir y (E,c) es el problema de bancarrota asociado, es fácil ver que el juego NTU asociado a (G,H,M), $(N,V_{(G,H,M)})$, es un juego TU y coincide con el juego TU $(N,v_{(E,c)})$ asociado a (E,c).

Nota 2.4 Sea $(G,H,M) \in PG$. Fácilmente se comprueba que para cada $i \in N$,

$$r(i) = V_{(G,H,M)}(i).$$

Nota 2.5 Podríamos pensar en una generalización de estos problemas si suponemos que cada jugador i tiene una demanda mínima $m_i \in I\!\!R$. Denotamos al problema como la terna $(G,H,[m,M])$, siendo para cada $C_j \in C$, $\sum\limits_{i\in C_j} m_i \leq H_j$, $\sum\limits_{i\in C_j} M_i \geq H_j$, y para cada $i \in N$, $m_i \leq M_i$. Una solución a este problema consistiría en seleccionar un elemento del conjunto

$$R(G,H,[m,M]) = \left\{ x \in \; I\!\!R^n \mid \begin{array}{l} \sum\limits_{i\in C_j} x_i \leq H_j, \text{ para todo } \; C_j \in C \\ m_i \leq x_i \leq M_i, \text{ para todo } i \in N \end{array} \right\}.$$

El problema anterior se puede ver como el equivalente a darle a cada jugador i, su mínima demanda m_i y repartir los estados restantes después de que cada jugador haya recibido m_i. Por tanto, una solución al problema $(G,H,[m,M])$ es de la forma $m+x$ donde $x \in R(G,H',M-m)$ siendo

$$H' = \left(H_j - \sum_{i \in C_j} m_i\right)_{j \in C}.$$

En este trabajo consideraremos sin pérdida de generalidad que $m_i = 0$ para cada $i \in N$.

Nota 2.6 Sea $(G,H,M) \in PG$,

$$R\left((G,H,M)^D\right)^D = R(G,H,M).$$

Encontrar una asignación en el problema dual consiste en seleccionar un elemento del conjunto $R(G,H,M)^D$ y encontrar una asignación en el problema dual del anterior consiste en seleccionar un elemento dentro del conjunto

$$R\left((G,H,M)^D\right)^D =$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ x \in I\!R^n \mid \begin{array}{c} \sum\limits_{i \in C_j} x_i \leq \sum\limits_{i \in C_j} M_i - E_j = H_j, \text{ para todo } C_j \in C \\ 0 \leq x_i \leq M_i, \text{ para todo } i \in N \end{array} \right\} \\ &= R\,(G,H,M)\,. \end{aligned}$$

A continuación damos la relación que existe entre el conjunto de soluciones factibles entre los problemas primal y dual, junto con la relación existente entre la mínima aspiración del jugador i en el problema PERT generalizado, $V(i)$, y la mínima aspiración del jugador i en el problema dual, $r^D(i)$.

Proposición 2.4 *Sea* $(G,H,M) \in PG$.
a) $x \in R(G,H,M) \iff M - x \in R(G,H,M)^D$.
b) *Sea* $f : PG \longrightarrow I\!R^n$.

$$f \in WPB(R\,(G,H,M)) \iff M - f = f^D \in LWPB(R\,(G,H,M)^D).$$

c) $r^D(i) = M_i - V(i),$ *para todo* $i \in N$.

Demostración.
a)

$$x \in R(G,H,M) \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{i\in C_j} x_i \le H_j & \Longleftrightarrow & \sum\limits_{i\in C_j} (M_i - x_i) \ge \sum\limits_{i\in C_j} M_i - H_j = E_j \\ 0 \le x_i \le M_i & & 0 \le M_i - x_i \le M_i \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x^D = M - x \in R(G,H,M)^{\,D}.$$

b) Sea $f \in WPB(R\,(A,H,M))$, tenemos que para cada $C_j \in C$

$$\sum_{i\in C_j} f_i(G,H,M) \le H_j$$

$$\text{y existe } \; C_{j_0} \in C, \; \sum_{i\in C_{j_0}} f_i(G,H,M) = H_{j_0}$$

Estas condiciones son equivalentes a

$$\sum_{i\in C_j} (M_i - f_i(G,H,M)) \ge \sum_{i\in C_j} M_i - H_j = E_j$$

$$\text{y existe } \; C_{j_0} \in C, \; \sum_{i\in C_{j_0}} (M_i - f_i(G,H,M)) = \sum_{i\in C_{j_0}} M_i - H_{j_0} = E_{j_0}$$

y por tanto $M - f = f^D \in LWPB(R(G,H,M)^D)$.
c) Sabemos que

$$V(i) = \max\{\lambda \in I\!R \;\mid \text{si } \; x \in R(G,H,M) \Rightarrow x\backslash_i\lambda \in R(G,H,M)\}$$

y

$$r^D(i) = \min\left\{\lambda \in I\!R \;\mid\; \text{si } \; x \in R(G,H,M)^D \Rightarrow x\backslash_i\lambda \in R(G,H,M)^{\,D}\right\}.$$

Aplicando el apartado a) obtenemos que

$$\text{si } x \in R(G,H,M)^D \Rightarrow M - x \in R(G,H,M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M-x)\backslash_i V(i) \in R(G,H,M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M - [(M-x)\backslash_i V(i)] = x\backslash_i (M_i - V(i)) \in R(G,H,M)^D$$

y por lo tanto $r^D(i) \leq M_i - V(i)$.
Supongamos que se diera la desigualdad estricta, es decir, $r^D(i) < M_i - V(i)$.

$$\text{Si } x \in R(G,H,M) \Rightarrow M - x \in R(G,H,M)^D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M-x)\backslash_i r^D(i) \in R(G,H,M)^D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M - \big((M-x)\backslash_i r^D(i)\big) = x\backslash_i (M_i - r^D(i)) \in R(G,H,M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(i) \geq M_i - r^D(i) > V(i).$$

Lo que nos llevaría a una contradicción que viene de suponer que $r^D(i) < M_i - V(i)$, y por lo tanto se verifica c). ■

2.5.1 Soluciones débilmente optimales de Pareto

En los problemas de bancarrota el problema reside en repartir un estado E entre un conjunto de acreedores de tal forma que el estado es mayor o igual que la suma de las demandas. Este problema ha sido estudiado en la literatura, como se ha descrito en la sección 2.2.2 y se han definido diferentes conceptos de solución, entre otros la solución de igual ganancia, la solución de igual pérdida, el reparto proporcional y el reparto proporcional ajustado.

A continuación se definen los anteriores conceptos de solución en los problemas PERT generalizados.

Solución de igual ganancia *(CEA)*

La solución de igual ganancia (CEA) consiste en asignarle a todos los jugadores la misma cantidad dentro del conjunto factible hasta alcanzar la frontera débil de Pareto. Por ello dado $(G,H,M) \in PG$ tendríamos,

$$CEA_i(G,H,M) = \min\{\alpha, M_i\} \text{ para todo } i \in N$$

donde α es el mayor número verificando que,

$$\sum_{i \in C_j} \min\{\alpha, M_i\} \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

La solución de igual ganancia para el problema dual sería igual a

$$CEA_i(G,H,M)^D = \min\{\alpha, M_i\} \text{ para todo } i \in N$$

donde α es el menor número verificando que,

$$\sum_{i \in C_j} \min\{\alpha, M_i\} \geq E_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Nota 2.7 Sea $(G,h,h^p) \in P$ de tal forma que $|C_j| \geq 2$ para cada $C_j \in C$, se verifica que

$$CEA_i(G,h,h^p) = \min_{j \in C}\left\{\frac{h_j}{|C_j|}\right\} \text{ para todo } i \in N.$$

Es fácil comprobarlo teniendo en cuenta que $M_i = h^p(i) = \min\limits_{j\,|i \in C_j} \{h_j\}$ y por tanto

$$CEA_i(G,h,h^p) = \min\{\alpha, h^p(i)\} = \alpha$$

donde α es el mayor número tal que para cada $C_j \in C$, $\sum\limits_{i \in C_j} \alpha \leq h_j$.

Además para cada $i \in N$,

$$CEA_i(G,h,h^p)^D = \max_{j \in C}\left\{\frac{e_j}{|C_j|}\right\}$$

siendo para cada $j \in C$, $e_j = \sum\limits_{i \in C_j} h^p(i) - h_j$.

Solución de igual pérdida (*CEL*)

La idea de la solución de igual pérdida (CEL) consiste en partir de una situación inicial en la que a cada jugador se le da su máxima aspiración (en el caso de ser un problema PERT coincidiría con su holgura potencial), y se trata de disminuir a todos los jugadores en la misma cantidad hasta obtener una solución. Por ello, dado $(G,H,M) \in PG$

$$CEL_i(G,H,M) = \max\{0, M_i - \beta\} \quad \text{para todo } i \in N$$

donde β es el menor número verificando,

$$\sum_{i\in C_j} \max\{0, M_i - \beta\} \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

La solución de igual pérdida para el problema dual sería igual a

$$CEL_i(G,H,M)^D = \max\{0, M_i - \beta\}$$

donde β es el mayor número verificando que,

$$\sum_{i\in C_j} \max\{0, M_i - \beta\} \geq E_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Nota 2.8 Sea $(G,h,h^p) \in P$ de tal forma que $|C_j| \geq 2$ para cada $C_j \in C$, se verifica que

$$CEL_i(G,h,h^p) = h^p(i) - \max_{j\in C}\left\{\frac{e_j}{|C_j|}\right\} \quad \text{para todo } i \in N.$$

Recordemos que para cada $i \in N$

$$CEL_i(G,h,h^p) = \max\{0, h^p(i) - \beta\} = h^p(i) - \beta$$

donde β es el menor número verificando,

$$\sum_{i\in C_j} \max\{0, h^p(i) - \beta\} \leq h_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Además para cada $i \in N$,

$$CEL_i(G,h,h^p)^D = h^p(i) - \min_{j\in C}\left\{\frac{h_j}{|C_j|}\right\}.$$

Solución proporcional ($\boldsymbol{PRO}$)

El reparto proporcional (PRO) consiste en dividir los estados de forma proporcional a las demandas de los jugadores de modo que se alcance la frontera débil de Pareto. Para un problema $(G, H, M) \in PG$, la solución proporcional para el jugador $i \in N$ sería

$$PRO_i(G, H, M) = M_i \min_{j \in C} \left\{ \frac{H_j}{\sum\limits_{k \in C_j} M_k} \right\} \quad \text{para todo } i \in N$$

y para su dual $(G, H, M)^D$

$$PRO_i(G, H, M)^D = M_i \max_{j \in C} \left\{ \frac{E_j}{\sum\limits_{k \in C_j} M_k} \right\} \quad \text{para todo } i \in N.$$

Nota 2.9 Sea $(G, h, h^p) \in P$, se verifica que para cada $i \in N$

$$\begin{aligned} PRO_i(G, h, h^p) &= h^p(i) \min_{j \in C} \left\{ \frac{h_j}{\sum\limits_{k \in C_j} h^p(k)} \right\} \\ PRO_i(G, h, h^p)^D &= h^p(i) \max_{j \in C} \left\{ \frac{e_j}{\sum\limits_{k \in C_j} h^p(k)} \right\}. \end{aligned}$$

Solución proporcional ajustada ($\boldsymbol{APRO}$)

El reparto proporcional ajustado (APRO) distribuye los estados en dos etapas. En la primera etapa cada jugador recibe lo que no es demandado por el resto de los jugadores. En la segunda etapa lo que queda por repartir se divide de forma proporcional a las demandas “relevantes” de los jugadores. Dado un problema $(G, H, M) \in PG$,

$$APRO_i(G,H,M) = V(i) + M_i^\alpha \min_{j\in C}\left\{\frac{H_j - \sum\limits_{k\in C_j} V(k)}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k^\alpha}\right\} \quad \text{para todo } i\in N$$

siendo $M_i^\alpha = \min\left\{M_i - V(i), \min\limits_{j|i\in C_j}\left\{H_j - \sum\limits_{k\in C_j} V(k)\right\}\right\}$.

M_i^α representa lo máximo que puede obtener i después de que cada jugador reciba la parte no demandada por el resto.
Para el problema dual $(G,H,M)^D$ la solución proporcional ajustada vendría dada por

$$APRO_i(G,H,M)^D = r^D(i) + M_i^E \max_{j\in C}\left\{\frac{E_j - \sum\limits_{k\in C_j} r^D(k)}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k^E}\right\} \text{ para todo } i\in N$$

donde $M_i^E = \min\left\{r^D(i), \min\limits_{j|i\in C_j}\left\{\sum\limits_{k\in C_j} r^D(k) - E_j\right\}\right\}$.

La anterior definición es equivalente a la que se expone a continuación:

$$APRO_i(G,H,M)^D = r^D(i) - M_i^E \min_{j\in C}\left\{\frac{\sum\limits_{k\in C_j} r^D(k) - E_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k^E}\right\} \quad \text{para todo } i\in N.$$

Nota 2.10 Sea $(G,h,h^p)\in P$ se verifica que para cada $i\in N$

$$APRO_i(G,h,h^p) = V(i) + (h^p(i) - V(i))\min_{j\in C}\left\{\frac{h_j - \sum\limits_{k\in C_j} V(k)}{\sum\limits_{k\in C_j}(h^p(k) - V(k))}\right\}.$$

La anterior igualdad es cierta teniendo en cuenta que $M_i^\alpha = h^p(i) - V(i)$ tal y como se prueba a continuación.

Sea $i\in N$ y consideremos $P(i) = \{C_j \in C \mid i\in C_j\}$. Sea $x\in V(C_j\setminus\{i\})$, entonces se verifica

$$\sum_{k\in C_j\setminus\{i\}} x_k \le h_j - h^p(i), \text{ para todo } C_j\in P(i).$$

Sea $C_j = \{i_1, ..., i_j\}$, teniendo en cuenta la superaditividad del juego asociado al problema PERT se verifica que $V(i_1) \times V(i_2) \times ... \times V(i_j) \subset V(C_j)$ con lo cual

$$\sum_{k \in C_j \setminus \{i\}} V(k) \leq h_j - h^p(i), \text{ para todo } C_j \in P(i)$$

y por tanto

$$h_j - \sum_{k \in C_j} V(k) \geq h^p(i) - V(i), \text{ para todo } C_j \in P(i)$$

verificándose entonces que

$$M_i^\alpha = \min\left\{h^p(i) - V(i), \min_{j \,|i \in C_j}\left\{h_j - \sum_{k \in C_j} V(k)\right\}\right\} = h^p(i) - V(i).$$

Nota 2.11 Las demandas "relevantes" en el problema PERT y en su dual coinciden, es decir, para cada $i \in N$

$$M_i^E = M_i^\alpha.$$

Téngase en cuenta que

$$\begin{aligned} M_i^E &= \min\left\{r^D(i), \min_{j|i \in C_j}\left\{\sum_{k \in C_j} r^D(k) - E_j\right\}\right\} \\ &= \min\left\{M_i - V(i), \min_{j|i \in C_j}\left\{H_j - \sum_{k \in C_j} V(k)\right\}\right\} \\ &= M_i^\alpha. \end{aligned}$$

En las proposiciones 2.5 y 2.6 se muestra que ciertas propiedades que son verificadas por las soluciones *CEA*, *CEL*, *PRO* y *APRO* en los problemas de bancarrota clásicos son también verificadas en este contexto más amplio. En concreto en la proposición 2.5 analizamos que el reparto proporcional ajustado (*APRO*) coincide con el valor de compromiso del juego NTU al que da lugar y en la proposición 2.6 se analiza la propiedad de dualidad.

Proposición 2.5 *El reparto proporcional ajustado (APRO) del problema PERT (G, h, h^p) coincide con el valor de compromiso del juego NTU al que da lugar.*

Demostración.

El reparto proporcional ajustado ($APRO$) se puede escribir para cada $i \in N$

$$APRO_i(G, h, h^p) =$$

$$\begin{aligned} &= V(i) + PRO_i\left(G, (h_j - \sum_{k\in C_j} V(k))_{j\in C}, (h^p(i) - V(i))_{i\in N}\right) \\ &= V(i) + (h^p(i) - V(i)) \min_{j\in C}\left\{\frac{h_j - \sum\limits_{k\in C_j} V(k)}{\sum\limits_{k\in C_j}(h^p(k) - V(k))}\right\}. \end{aligned}$$

Dado el juego NTU inducido por el problema PERT (G, h, h^p) es fácil comprobar que para cada $i \in N$,

$$\begin{aligned} K_i(V) &= h^p(i) \\ k_i(V) &= V(i). \end{aligned}$$

Además el juego NTU (N, V) es de compromiso admisible dado que $V(i) \leq h^p(i)$, $(V(i))_{i\in N} \in V(N)$ y $(h^p(i))_{i\in N} \notin dom(N)$.

El valor de compromiso se definiría como el único punto que está en el segmento que une $(V(i))_{i\in N}$ y $(h^p(i))_{i\in N}$, está en $V(N)$ y es el más cercano a $(h^p(i))_{i\in N}$, es decir,

$$\Upsilon_i(V) = V(i) + \alpha_V\left[h^p(i) - V(i)\right]$$

donde $\alpha_V = max\left\{\alpha \in [0, 1] \mid (V(i) + \alpha\,(h^p(i) - V(i)))_{i\in N} \in V(N)\right\}$, lo que claramente coincide con el reparto proporcional ajustado que hemos definido. ■

Proposición 2.6

a) CEA Y CEL *son soluciones duales. Es decir, para todo* $i \in N$

$$\begin{aligned} M_i - CEA_i(G,H,M) &= CEL_i(G,H,M)^D \\ M_i - CEL_i(G,H,M) &= CEA_i(G,H,M)^D. \end{aligned}$$

b) PRO *es dual de si mismo. Es decir, para todo* $i \in N$

$$M_i - PRO_i(G,H,M) = PRO_i(G,H,M)^D.$$

c) APRO *es dual de si mismo. Es decir, para todo* $i \in N$

$$M_i - APRO_i(G,H,M) = APRO_i(G,H,M)^D.$$

Demostración.
a) Utilizando la definición de CEA y de CEL tenemos que,

$$CEA_i(G,H,M) = \min\{\alpha, M_i\}$$

donde α es el mayor número verificando que,

$$\sum_{i \in C_j} \min\{\alpha, M_i\} \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C. \tag{2.4}$$

Además

$$CEL_i(G,H,M)^D = \max\{0, M_i - \beta\}$$

donde β es el mayor número verificando,

$$\sum_{i \in C_j} \max\{0, M_i - \beta\} \geq E_j \quad \text{para todo } C_j \in C. \tag{2.5}$$

Entonces

$$\begin{aligned} M_i - CEA_i(G,H,M) &= M_i - \min\{\alpha, M_i\} \\ &= \max\{M_i - \alpha, 0\} \end{aligned}$$

donde α es el mayor número verificando (2.4), lo que nos permite expresar para cada $C_j \in C$.

$$\sum_{i\in C_j}(M_i - CEA_i(G,H,M)) = \sum_{i\in C_j}(M_i - \min\{\alpha, M_i\}).$$

Como $E_j = \sum_{i\in C_j} M_i - H_j$ tenemos que

$$\sum_{i\in C_j} M_i - \sum_{i\in C_j}\min\{\alpha, M_i\} \geq E_j \Leftrightarrow \sum_{i\in C_j}\min\{\alpha, M_i\} \leq H_j.$$

Luego para cada $i \in N$, $M_i - CEA_i(G,H,M) = CEL_i(G,H,M)^D$.

Probamos a continuación la segunda igualdad.

$CEL_i(G,H,M) = \max\{0, M_i - \beta\}$ donde β es el menor número verificando que,

$$\sum_{i\in C_j}\max\{0, M_i - \beta\} \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C. \tag{2.6}$$

Además,

$$CEA_i(G,H,M)^D = \min\{\alpha, M_i\}$$

donde α es el menor número verificando que

$$\sum_{i\in C_j}\min\{\alpha, M_i\} \geq E_j\,, \text{ para todo } C_j \in C. \tag{2.7}$$

Entonces

$$\begin{aligned} M_i - CEL_i(G,H,M) &= M_i - \max\{0, M_i - \beta\} \\ &= \min\{M_i, \beta\} \end{aligned}$$

donde β es el menor número verificando (2.6), lo que nos permite expresar para cada $C_j \in C$

$$\sum_{i\in C_j}(M_i - CEL_i(G,H,M)) = \sum_{i\in C_j}(M_i - \max\{0, M_i - \beta\}).$$

Como

$$\sum_{i\in C_j} M_i - \sum_{i\in C_j} \max\{0, M_i-\beta\} \geq E_j \Leftrightarrow \sum_{i\in C_j} \max\{0, M_i-\beta\} \leq H_j$$

concluimos que $M_i - CEL_i(G,H,M) = CEA_i(G,H,M)^D$ para cada $i \in N$.

b) Aplicando la definición del reparto proporcional tenemos que para cada $i \in N$,

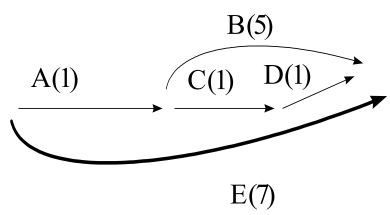
$$\begin{aligned}
M_i - PRO_i(G,H,M) &= M_i - M_i \min_{j\in C}\left\{\frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k}\right\}\\
&= M_i\left(1-\min_{j\in C}\left\{\frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k}\right\}\right)\\
&= M_i \max_{j\in C}\left\{1-\frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k}\right\}\\
&= M_i \max_{j\in C}\left\{\frac{E_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k}\right\}\\
&= PRO_i(G,H,M)^D.
\end{aligned}$$

c) Aplicando las definiciones obtenemos que

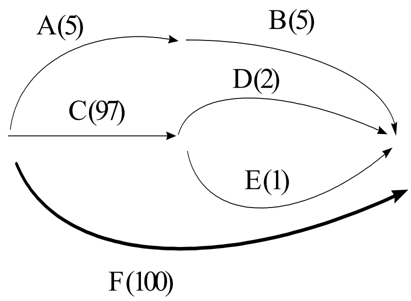
$$\begin{aligned}
M_i - APRO_i(G,H,M) &= M_i - V(i) - M_i^\alpha \min_{j\in C}\left\{\frac{H_j - \sum\limits_{k\in C_j} V(k)}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k^\alpha}\right\}\\
&= M_i - V(i) + M_i^\alpha \max_{j\in C}\left\{\frac{-H_j + \sum\limits_{k\in C_j} V(k)}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k^\alpha}\right\}\\
&= r^D(i) + M_i^E \max_{j\in C}\left\{\frac{E_j - \sum\limits_{k\in C_j} r^D(k)}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k^E}\right\}\\
&= APRO_i(G,H,M)^D. \blacksquare
\end{aligned}$$

Se presentan a continuación algunos ejemplos que se corresponden con problemas PERT en los que se calculan las soluciones propuestas. Dichos ejemplos serán utilizados posteriormente.

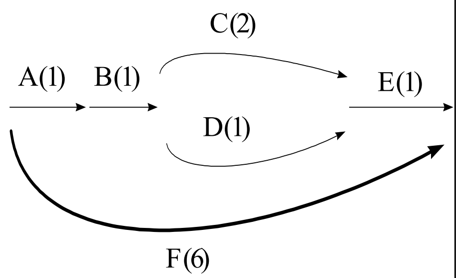
EJEMPLOS



Ejemplo 2.3



Ejemplo 2.4



Ejemplo 2.5

En las siguientes tablas se calculan las soluciones que hemos estudiado.

Ejemplo	CEA
2.1 (x_A, x_B, x_C)	$(0.5, 0.5, 0.5)$
2.2 (x_F, x_G, x_I)	$(0.5, 0.5, 0.5)$
2.3 (x_A, x_B, x_C, x_D)	$(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$
2.4 $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E)$	$(0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$
2.5 $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E)$	$(0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$

(Tabla 2.3)

Ejemplo	CEL
2.1	$(0.5, 0.5, 0.5)$
2.2	$(1, 0.5, 0.5)$
2.3	$(0, 0, 2, 2)$
2.4	$(45, 45, 0, 0, 0)$
2.5	$(0.25, 0.25, 0.25, 1.25, 0.25)$

(Tabla 2.4)

En los ejemplo 2.3 y 2.4 podemos comprobar que CEA trata mejor a los jugadores que tienen menos demandas mientras que CEL parece tratar mejor a los jugadores que tienen más demandas, tal y como ocurre en los problemas de bancarrota.

Ejemplo	PRO	$APRO$
2.1	$(0.5, 0.5, 1)$	$(0.5, 0.5, 1.5)$
2.2	$(0.5, 0.5, 0.5)$	$(1, 0.5, 0.5)$
2.3	$(0.44, 0.44, 1.78, 1.78)$	$(0.44, 0.44, 1.78, 1.78)$
2.4	$(45, 45, 0.5, 0.5, 1)$	$(45, 45, 0.5, 0.5, 1.5)$
2.5	$(0.25, 0.25, 0.25, 0.5, 0.25)$	$(0.25, 0.25, 0.25, 1.25, 0.25)$

(Tabla 2.5)

Se puede notar en el ejemplo 2.3 que dado que para cada $i \in N$, $V(i) = 0$, PRO y $APRO$ coinciden.

2.5.2 Caracterizaciones axiomáticas

A continuación presentamos algunas propiedades que nos servirán para dar posteriores caracterizaciones de las soluciones propuestas. Muchas de estas propiedades están inspiradas en propiedades ya existentes en la literatura de los problemas de bancarrota y de la teoría de juegos.

$$Sea \;\; f : PG \longrightarrow I\!R^n$$

- Diremos que f *es débilmente optimal de Pareto (WPO)* si para todo $(G, H, M) \in PG$, $f(G, H, M) \in WPB(R(G, H, M))$.

- Diremos que f *es optimal de Pareto (PO)* si para todo $(G, H, M) \in PG$ $f(G, H, M) \in PB(R(G, H, M))$.

- Diremos que f satisface *Independencia de Holguras Irrelevantes (IHI)* si

$$f_i(G, H, M) = f_i\left(G, H, M^H\right)$$

donde para cada $i \in N$, $M_i^H = \min\left\{M_i, \min_{C_j | i \in C_j} \{H_j\}\right\}$.

Esta propiedad nos dice que si un jugador i demanda más de lo máximo que puede obtener entre todos los repartos factibles, lo que se corresponde con $\min_{C_j | i \in C_j} \{H_j\}$, la solución no lo tiene en cuenta.

Debemos hacer notar que si consideramos un problema PERT esta propiedad no nos dice nada nuevo, ya que en este caso para cada $i \in N$, $M_i = h^p(i) = \min_{C_j | i \in C_j} \{H_j\}$.

- Diremos que f satisface *Independencia de Actividades Irrelevantes (IAI)* si para todo $(G, H, M) \in PG$,

$$f(G, H, M) = f\left(G, H, (M_{N^r}, x_{N \setminus N^r})\right)$$

donde $C^r = \{C_j \in C \mid H_j > 0\}$, $N^r = \{i \in N \mid \text{si } C_j \notin C^r,\ i \notin C_j\}$, y $0 \leq x_{N \setminus N^r} \in I\!R^{n-r}$ (siendo r el cardinal de N^r).

C^r representa el conjunto de caminos relevantes, es decir aquellos que tienen holgura positiva y N^r es el conjunto de actividades relevantes, es decir aquellas que no están en ningún camino que no sea relevante. Decimos que las actividades de $N \setminus N^r$ no son relevantes ya que dada $i \in N \setminus N^r$ y una solución cualquiera f se verifica que $f_i(G, H, M) = 0$ ya que $0 \leq f_k(G, H, M) \leq M_k$ para todo $k \in N$ y $\sum_{k \in C_{j_0}} f_k(G, H, M) = 0$ siendo C_{j_0} un camino tal que $i \in C_{j_0}$ y $H_{j_0} = 0$.

Una solución verifica IAI si no depende de las holguras de las actividades que no son relevantes.

- Diremos que f es *Simétrica (SIM)* si dado $(G, H, M) \in PG$ tal que $M_i = M_l$ se verifica que,

$$f_i(G, H, M) = f_l(G, H, M)\,.$$

Esta propiedad nos dice que si dos jugadores demandan la misma cantidad deben recibir la misma asignación.

- Diremos que f verifica *Composición (COM)* si dado $(G, H, M) \in PG$, $H^0 \in I\!R^c$ tal que $H^0 \leq H$ se verifica que

$$f_i(G, H, M) = f_i(G, H^0, M) + f_i\left(G, H^1, M - f(G, H^0, M)\right)$$

siendo $H^1 = \left(H_j - \sum_{k \in C_j} f_k(G, H^0, M)\right)_{j \in C}$.

Esta propiedad nos dice que podemos repartir H en dos etapas. Primero repartimos H^0 de acuerdo a las demandas iniciales M. Luego repartimos lo que queda en cada camino (H^1) de acuerdo a las nuevas demandas de los jugadores (lo que demandaban inicialmente menos lo que recibieron en la primera etapa).

- Diremos que f verifica *Composición Dual (COM^D)* si dados $(G, H, M) \in PG$ y $H' \in I\!R^c$ con $H_j \leq H'_j \leq \sum\limits_{i \in C_j} M_i$ para cada $C_j \in C$ se tiene que

$$f_i(G, H, M) = f_i\left(G, H, f(G, H^{'}, M)\right), \text{ para todo } i \in N.$$

Supongamos que repartimos H' entre los jugadores de acuerdo con las demandas M. Supongamos ahora que por alguna razón descubrimos que lo que había que repartir era H y no H'. En este momento podríamos proceder de dos formas distintas: repartir H entre los jugadores de acuerdo a las demandas iniciales M o bien repartir H de acuerdo a lo que han obtenido los jugadores después de repartir H' $(f(G, H', M))$. La propiedad de composición dual nos dice que ambas formas de repartir coinciden.

- Diremos que f satisface *Aditividad (ADD)* si dado $(G, H, M) \in PG$, $H^0 \in I\!R^c$ con $0 \leq H^0 \leq H$, $M^0 \in I\!R^n$ con $0 \leq M^0 \leq M$ se verifica que

$$f_i(G, H, M) = f_i(G, H^0, M^0) + f_i(G, H^1, M - M^0)$$

siendo $H^1 = \left(H_j - \sum\limits_{k \in C_j} f_k(G, H^0, M^0)\right)_{j \in C}$.

Supongamos que tenemos dos problemas en cada uno de los cuales hay unas cantidades a repartir y unas demandas a tener en cuenta. Podemos proceder de dos formas a la hora de repartir. En la primera repartimos la holgura de cada problema de acuerdo a las demandas en ese problema, de este modo cada jugador recibe en total la suma de lo que le corresponde en cada problema. En la segunda repartimos todo junto, es decir, la suma de las holguras de los dos problemas teniendo en cuenta que cada jugador demanda en total la suma de las demandas en cada problema. La propiedad de aditividad nos dice que ambas formas de repartir coinciden.

- Diremos que f es *a prueba de estrategias (SP)* si dado $(G,H,M) \in PG$,

$$f_k(G,H,M) = f_k(G',H,M') \text{ para todo } k \in N \backslash i$$

$$f_i(G,H,M) = \sum_{s=1}^{l} f_{i^s}(G',H,M')$$

siendo G' el grafo que se obtiene de G cuando dividimos la actividad i en l subactividades $\left\{i^1, i^2, ..., i^l\right\}$, $M' \in I\!R^{n-l+1}$ tal que $M'_k = M_k$ si $k \in N \backslash i$ y $0 \leq M'_{i^s} \leq M_i$ para todo $s = 1, 2, ..., l$ de tal forma que $\sum\limits_{s=1}^{l} M'_{i^s} = M_i$.

Una solución satisface SP si el hecho de que una actividad i se divida en diversas subactividades, $\left\{i^1, i^2, ..., i^l\right\}$, no afecta al resultado final.

- Diremos que f es *V-separable (VS)* si dado $(G,H,M) \in PG$, para cada $i \in N$,

$$f_i(G,H,M) = V(i) + f_i\left(G, (H_j - \sum_{k \in C_j} V(k))_{j \in C}, (M_i - V(i))_{i \in N}\right).$$

Una solución es V-separable si repartir H de acuerdo a M es equivalente a darle a cada jugador i lo que se puede garantizar por si mismo, $V(i)$, y luego repartir el resto de las holguras teniendo en cuenta que ahora los jugadores demandarán $M_i - V(i)$ para todo $i \in N$.

Nota 2.12 La mayor parte de estas propiedades han sido introducidas para caracterizar soluciones en los problemas de bancarrota. Young (1988) introdujo la propiedad de composición (COM), y Dagan (1996) la utilizó para caracterizar la solución de igual ganancia. Bergantiños y Méndez-Naya (1997) estudian la propiedad de aditividad (ADD) y caracterizan la solución de igual pérdida utilizando esta propiedad y la de composición dual. Similares resultados podemos encontrar con el reparto proporcional y el reparto proporcional ajustado.

Estas propiedades se podrían haber formulado también para el problema dual de modo análogo, pudiendo obtener ciertas relaciones entre las propiedades del problema PERT generalizado y las propiedades del problema dual. Aquí no las formulamos dado que nos proponemos caracterizar las soluciones propuestas en el problema PERT generalizado y no en su dual.

Lema 2.1 *La propiedad de simetría (SIM) es incompatible con la de aditividad (ADD) en PG.*

Demostración.

Supongamos un grafo PERT formado por dos caminos que no se intersecan, donde uno de ellos lo configuran dos actividades A y B de una unidad de duración y el otro es el camino crítico formado por una actividad C de tres unidades de duración.

Dada f verificando simetría,

$$f_A(G,1,(1,1)) = f_B(G,1,(1,1)) = 0.5.$$

Si f verificara la propiedad de aditividad, tendríamos que para cada $0 < \varepsilon < 0.25$

$$f_A(G,1,(1,1)) = f_A(G,0.25,(1-\varepsilon,0.25)) + f_A(G,0.75,(\varepsilon,0.75)).$$

Además sabemos que

$$\begin{aligned} f_A(G,0.25,(1-\varepsilon,0.25)) &\leq 0.25 \\ f_A(G,0.75,(\varepsilon,0.75)) &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Con lo que llegaríamos a una contradicción si f satisface ambas propiedades. ■

A continuación presentamos en una serie de proposiciones qué propiedades son satisfechas por *CEA, CEL, PRO* y *APRO* y cuáles no.

Proposición 2.7

a) CEA satisface en PG las propiedades WPO, IHI, IAI, SIM, COM y COM^D.

b) *CEA no satisface en PG las siguientes: PO, ADD, SP y VS.*

Demostración.

a) Sea $(G, H, M) \in PG$.

- Utilizando la definición es trivial comprobar que

$$CEA(G, H, M) \in WPB(R(G, H, M))$$

y por tanto CEA es débilmente optimal de Pareto.

- Comprobemos que CEA satisface *IHI.* Sabemos que,

$$CEA_i(G, H, M) = \min\{\alpha, M_i\}$$

donde α es el mayor número verificando que,

$$\sum_{i \in C_j} \min\{\alpha, M_i\} \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Sea $A = \left\{ k \in N \ \ | \ \ M_k > \min_{j | k \in C_j} \{H_j\} \right\}$, en este caso para cada $k \in A$,

$$CEA_k(G, H, M) = \alpha$$

siendo α el mayor número verificando que,

$$\sum_{i \in C_j \cap (N \setminus A)} \min\{\alpha, M_i\} + \alpha \, |A \cap C_j| \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Por otra parte tenemos que

$$CEA_i(G, H, M^H) = \min\left\{\alpha', M_i^H\right\}$$

donde α' es el mayor número verificando que,

$$\sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha', M_i^H\right\} \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Por ello para cada $k \in A$, $CEA_k(G,H,M^H) = \alpha'$, donde α' es el mayor número verificando que,

$$\sum_{i\in C_j\cap(N\backslash A)} \min\left\{\alpha', M_i^H\right\} + \alpha' \left|A\cap C_j\right| \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C$$

Si $k \in N\backslash A$ se verifica que $M_k^H = M_k$, y por tanto $\alpha = \alpha'$. Luego CEA satisface *IHI*.

- Es trivial comprobar que CEA satisface IAI.
- Es trivial comprobar utilizando la definición que CEA satisface SIM.
- CEA satisface COM.

Sea $(G,H,M) \in PG$, y sea $H^0 = \left(H_j^0\right)_{j\in C}$ de tal forma que para cada $C_j \in C$, $0 \leq H_j^0 \leq H_j$. Teniendo en cuenta la definición de CEA tenemos que,

$$CEA_i(G,H^0,M) = \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}$$

donde α^0 es el mayor número verificando que,

$$\sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha^0, M_i\right\} \leq H_j^0 \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Además para cada $i \in N$,

$$CEA_i\left(G, (H_j - \sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha^0, M_i\right\})_{j\in C}, \left(M_i - \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}\right)_{i\in N}\right) =$$

$$= \min\left\{\alpha^1, M_i - \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}\right\}$$

donde α^1 es el mayor número verificando que para todo $C_j \in C$

$$\sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha^1, M_i - \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}\right\} \leq H_j \ - \sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha^0, M_i\right\} \tag{2.8}$$

Sumando ambas expresiones obtenemos,

$$CEA_i(G, H^0, M)+$$

$$+CEA_i\left(G, (H_j - \sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha^0, M_i\right\})_{j\in C}, \left(M_i - \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}\right)_{i\in N}\right) =$$

$$\begin{aligned} &= \min\left\{\alpha^0, M_i\right\} + \min\left\{\alpha^1, M_i - \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}\right\} \\ &= \min\left\{\alpha^0, M_i\right\} + \min\left\{\alpha^1 + \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}, M_i\right\} - \min\left\{\alpha^0, M_i\right\} \\ &= \min\left\{\alpha^1 + \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}, M_i\right\} \end{aligned}$$

teniendo además que para cada $C_j \in C$,

$$\sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha^1 + \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}, M_i\right\}$$

$$= \sum_{i\in C_j} CEA_i(G, H^0, M)+$$

$$+\sum_{i\in C_j} CEA_i\left(G, (H_j - \sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha^0, M_i\right\})_{j\in C}, \left(M_i - \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}\right)_{i\in N}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha^0, M_i\right\} + H_j \ - \sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha^0, M_i\right\} = H_j.$$

Por otra parte tenemos que $CEA_i(G, H, M) = \min\{\alpha, M_i\}$ donde α es el mayor número verificando que para todo $C_j \in C$, $\sum\limits_{i\in C_j} \min\{\alpha, M_i\} \leq$

H_j. Por ello teniendo en cuenta la anterior relación se verifica que $\alpha^1 + \min\left\{\alpha^0, M_i\right\} \leq \alpha$.

Supongamos que $\alpha^1+\min\left\{\alpha^0, M_i\right\} < \alpha$. En este caso utilizando el hecho de que α^1 es el mayor número que verifica (2.8) tenemos que existe $C_{j_0} \in C$ tal que

$$\sum_{i\in C_{j_0}} \left(\min\left\{\alpha - \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}, M_i - \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}\right\}\right)$$

$$= \sum_{i\in C_{j_0}} \left(\min\left\{\alpha, M_i\right\} - \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}\right) > H_{j_0} - \sum_{i\in C_{j_0}} \min\left\{\alpha^0, M_i\right\}.$$

Por ello,

$$\sum_{i\in C_{j_0}} \min\left\{\alpha, M_i\right\} > H_{j_0}$$

lo que supone una contradicción. Por tanto tenemos que $\alpha^1+\min\left\{\alpha^0, M_i\right\} = \alpha$, con lo que concluimos que CEA satisface la propiedad de composición.

- CEA satisface COM^D.

Sea para cada $C_j \in C$, $H_j \leq H'_j \leq \sum_{i\in C_j} M_i$. Sabemos que

$$CEA_i(G, H, M) = \min\left\{\alpha, M_i\right\} \quad \text{para todo } i \in N \tag{2.9}$$

donde α es el mayor número verificando,

$$\sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha, M_i\right\} \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Por otra parte

$$CEA_i(G, H', M) = \min\left\{\alpha', M_i\right\} \quad \text{para todo } i \in N$$

donde α' es el mayor número verificando,

$$\sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha', M_i\right\} \leq H'_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Se deduce por tanto que $\alpha \leq \alpha'$, lo que nos permite escribir (2.9) como

$$CEA_i(G,H,M) = \min\{\alpha, M_i\} = \min\left\{\alpha, \alpha', M_i\right\} \quad \text{para todo } i \in N.$$

Además,

$$\begin{aligned} CEA_i(G,H,CEA(G,H',M)) &= CEA_i\left(G,H,\left(\min\left\{\alpha', M_i\right\}\right)_{i\in N}\right) \\ &= \min\left\{\alpha'', \min\left\{\alpha', M_i\right\}\right\} \\ &= \min\left\{\alpha'', \alpha', M_i\right\}. \end{aligned}$$

donde α'' es el mayor número tal que

$$\sum_{i\in C_j} \min\left\{\alpha'', \alpha', M_i\right\} \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Deducimos por tanto que $\alpha'' = \alpha$, y así CEA verifica COM^D.

b) Mostramos a través de contraejemplos que CEA no satisface las propiedades que se indican.

- CEA no satisface PO.

  En el ejemplo 2.1 observamos que

$$CEA(G,H,M) = (0.5, 0.5, 0.5) \notin PB(R(G,H,M)).$$

- CEA no satisface ADD.

Teniendo en cuenta el lema 2.1, y dado que CEA satisface SIM obtenemos que CEA no verifica ADD.

- CEA no satisface SP.

Consideremos en el ejemplo 2.3 que las actividades C y D son el resultado de la división en dos subactividades de una única actividad F con una demanda de 8 unidades ($8 = h^p(C) + h^p(D) = 4 + 4$) y el resto de las holguras permanecen iguales. Si denotamos por (G', H', M') al problema resultante obtenemos que

$$CEA_F(G',H',M') = 0.5 \neq CEA_C(G,H,M) + CEA_D(G,H,M) = 1.$$

- CEA no satisface VS.

Consideremos el ejemplo 2.1 en el que se verifica que $V(A) = V(B) = 0$, y $V(C) = 1$. Es inmediato comprobar que

$$CEA_C\left(G,(1,2),(1,1,2)\right) = 0.5$$

mientras que $V(C) + CEA_C\left(G,(1,1),(1,1,1)\right) = 1.5$. ∎

Proposición 2.8

a) CEL satisface en PG las propiedades de WPO, SIM, COM, COM^D.

b) CEL no satisface en PG las siguientes: PO, IHI, IAI, ADD, SP y VS.

Demostración.

a) Sea $(G,H,M) \in PG$.

- Utilizando la definición de CEL es inmediato comprobar que

$$CEL(G,H,M) \in WPB(R(G,H,M)).$$

- Es trivial comprobar que CEL satisface SIM utilizando la definición.
- CEL satisface COM.

Sea $(G,H,M) \in PG$, y sea $H^0 = \left(H_j^0\right)_{j\in C}$ de tal forma que para cada $C_j \in C$, $0 \leq H_j^0 \leq H_j$. Teniendo en cuenta la definición de CEL tenemos que,

$$CEL_i(G,H^0,M) = \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\} \tag{2.10}$$

donde β^0 es el menor número verificando que,

$$\sum_{i\in C_j} \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\} \leq H_j^0 \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Además para cada $i \in N$,

$$CEL_i\left(G, (H_j - \sum_{i\in C_j} \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\})_{j\in C}, \left(M_i - \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\}\right)_{i\in N}\right)$$

$$= \max\left\{0, M_i - \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\} - \beta^1\right\}$$

donde β^1 es el menor número verificando que para cada $C_j \in C$,

$$\sum_{i \in C_j} \max\left\{0, M_i - \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\} - \beta^1\right\} \leq H_j \ - \sum_{i \in C_j} \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\}. \tag{2.11}$$

Sumando ambas expresiones obtenemos,

$$CEL_i(G, H^0, M) +$$

$$+CEL_i\left(G, (H_j - \sum_{i \in C_j} \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\})_{j \in C}, \left(M_i - \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\}\right)_{i \in N}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\} + \max\left\{0, M_i - \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\} - \beta^1\right\} \\ &= \max\left\{\max\left\{0, M_i - \beta^0\right\}, M_i - \beta^1\right\} \\ &= \max\left\{0, M_i - \beta^0, M_i - \beta^1\right\}. \end{aligned}$$

Teniendo además que para cada $C_j \in C$,

$$\sum_{i \in C_j} \max\left\{0, M_i - \beta^0, M_i - \beta^1\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{i \in C_j} \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\} + H_j \ - \sum_{i \in C_j} \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\} = H_j. \tag{2.12}$$

Por otra parte tenemos que $CEL_i(G, H, M) = \max\{0, M_i - \beta\}$ donde β es el menor número verificando que para cada $C_j \in C$,

$$\sum_{i \in C_j} \max\{0, M_i - \beta\} \leq H_j.$$

Teniendo en cuenta (2.10) deducimos que $\beta^0 \geq \beta$, y por tanto

$$CEL_i(G,H,M) = \max\{0, M_i - \beta\} = \max\left\{0, M_i - \beta, M_i - \beta^0\right\}$$

siendo β el menor número verificando que para cada $C_j \in C$,

$$\sum_{i \in C_j} \max\left\{0, M_i - \beta, M_i - \beta^0\right\} \leq H_j.$$

Con lo que concluimos dado que se verifica (2.12) que $\beta \leq \beta^1$. Supongamos que $\beta < \beta^1$. En este caso utilizando el hecho de que β^1 es el menor número que verifica (2.11), tenemos que existe C_{j_0} tal que

$$\sum_{i \in C_{j_0}} \max\left\{0, M_i - \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\} - \beta\right\} > H_{j_0} - \sum_{i \in C_{j_0}} \max\left\{0, M_i - \beta^0\right\}$$

lo que es equivalente a decir que

$$\sum_{i \in C_{j_0}} \max\left\{0, M_i - \beta, M_i - \beta^0\right\} > H_{j_0}$$

y por tanto obtendríamos una contradicción. Luego CEL satisface la propiedad de composición.

- CEL satisface COM^D.

  Sea para cada $C_j \in C$, $H_j \leq H'_j \leq \sum_{i \in C_j} M_i$. Sabemos que

$$CEL_i(G,H,M) = \max\{0, M_i - \beta\} \quad \text{para todo } i \in N$$

donde β es el menor número verificando,

$$\sum_{i \in C_j} \max\{0, M_i - \beta\} \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Por otra parte

$$CEL_i(G,H',M) = \max\left\{0, M_i - \beta'\right\} \quad \text{para todo } i \in N$$

donde β' es el menor número verificando,

$$\sum_{i \in C_j} \max\left\{0, M_i - \beta'\right\} \leq H'_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Por ello

$$CEL_i(G, H, CEL(G, H', M)) = CEL_i\left(G, H, \left(\max\left\{0, M_i - \beta'\right\}\right)_{i \in N}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \max\left\{0, \max\left\{0, M_i - \beta'\right\} - \beta''\right\} \\
&= \max\left\{0, \max\left\{-\beta'', M_i - \beta' - \beta''\right\}\right\} \\
&= \max\left\{-\beta'', M_i - \beta' - \beta'', 0\right\} \\
&= \max\left\{M_i - \beta' - \beta'', 0\right\}
\end{aligned}$$

donde β'' es el menor número tal que

$$\sum_{i \in C_j} \max\left\{M_i - \beta' - \beta'', 0\right\} \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Debido a la definición de β tenemos que $\beta' + \beta'' = \beta$ y por lo tanto para cada $i \in N$

$$CEL_i(G, H, M) = CEL_i(G, H, CEL(G, H', M)).$$

b) Mostramos a través de contraejemplos que CEL no satisface las propiedades que se indican.

- CEL no satisface PO.

En el ejemplo 2.3 observamos que

$$CEL(G, H, M) = (0, 0, 2, 2) \notin PB(R(G, H, M)).$$

- CEL no satisface IHI.

Sea G el grafo del ejemplo 2.1, siendo $H = (2, 4)$ y $M = (2, 8, 10)$. En este caso $M^H = (2, 2, 4)$. Se verifica que

$$\begin{aligned}
CEL(G, H, M) &= (0, 2, 4) \\
CEL(G, H, M^H) &= (1, 1, 3).
\end{aligned}$$

- CEL no satisface IAI.

Sea G el grafo del ejemplo 2.1, siendo $H = (0, 2)$ y $M = (1, 1, 3)$. Entonces la actividad B no es relevante y sin embargo

$$\begin{array}{rcl} CEL_C(G, (0, 2), (1, 1, 3)) & = & 2 \\ CEL_C(G, (0, 2), (1, 2, 3)) & = & 1. \end{array}$$

- CEL no satisface ADD

Teniendo en cuenta el lema 2.1, y dado que CEL satisface SIM obtenemos que CEL no verifica ADD.

- CEL no satisface SP.

Sea G el grafo del ejemplo 2.1, si consideramos que la actividad C se divide en dos subactividades E y F con demandas iguales a 1 unidad, y denotamos por G' al grafo resultante, obtenemos que

$$CEL(G', (1, 2), (1, 1, 1, 1)) = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$$

mientras que

$$CEL(G, (1, 2), (1, 1, 2)) = (0.5, 0.5, 1.5)$$

y por tanto

$$CEL_C(G, (1, 2), (1, 1, 2)) \neq$$

$$CEL_E(G', (1, 2), (1, 1, 1, 1)) + CEL_F(G', (1, 2), (1, 1, 1, 1)).$$

- CEL no satisface VS.

Sea G el grafo del ejemplo 2.1, y el problema PERT $(G, (2, 4), (1, 4, 20))$, se verifica que

$$\begin{array}{rcl} CEL\,(G, (2, 4), (1, 4, 20)) & = & (0, 0, 4) \\ (V(i))_{i \in N} & = & (0, 1, 3). \end{array}$$

mientras que

$$(V(i))_{i \in N} + CEL\,(G, (1, 1), (1, 3, 17)) = (0, 1, 3) + (0, 0, 1) = (0, 1, 4).$$

Por lo tanto obtenemos que CEL no satisface VS. ■

Proposición 2.9

a) PRO satisface en PG las propiedades WPO, IAI, SIM, COM, COM^D *y SP.*

b) PRO no satisface en PG las siguientes: PO, IHI, ADD y VS.

Demostración.

a) Sea $(G, H, M) \in PG$.

- Utilizando la definición de PRO es inmediato comprobar que

$$PRO(G, H, M) \in WPB(R(G, H, M)).$$

- Es trivial comprobar que CEL satisface SIM utilizando la definición.
- Es inmediato comprobar que PRO satisface IAI.
- PRO satisface COM.

Sabemos que $PRO_i(G, H, M) = \lambda M_i$ donde λ es el mayor número que verifica $\sum\limits_{i \in C_j} \lambda M_i \leq H_j$ para cada $C_j \in C$, es decir,

$$PRO_i(G, H, M) = M_i \min_{j \in C} \left\{ \frac{H_j}{\sum\limits_{k \in C_j} M_k} \right\}.$$

Por otra parte para cada $i \in N$,

$$PRO_i(G, H^0, M) = \lambda_0 M_i \text{ donde } \lambda_0 = \min_{j \in C} \left\{ \frac{H_j^0}{\sum\limits_{k \in C_j} M_k} \right\}$$

siendo

$$PRO_i \left(G, \left(H_j - \sum_{k \in C_j} \lambda_0 M_k \right)_{j \in C}, M(1 - \lambda_0) \right) = \lambda_1 M_i (1 - \lambda_0)$$

donde $\lambda_1 = \min\limits_{j \in C} \left\{ \frac{H_j - \lambda_0 \sum\limits_{k \in C_j} M_k}{(1 - \lambda_0) \sum\limits_{k \in C_j} M_k} \right\}.$

Por tanto,

$$PRO_i(G,H^0,M)+PRO_i\left(G,\left(H_j-\lambda_0\sum_{k\in C_j}M_k\right)_{j\in C},M(1-\lambda_0)\right)$$

$$=\lambda_0 M_i+\lambda_1 M_i(1-\lambda_0)=M_i(\lambda_0+\lambda_1(1-\lambda_0)).$$

La anterior expresión nos indica que es proporcional a M_i al igual que $PRO_i(G,H,M)$. A continuación probamos que la constante de proporcionalidad coincide.

$$\sum_{i\in C_j}\left(PRO_i(G,H^0,M)+PRO_i\left(G,\left(H_j-\lambda_0\sum_{k\in C_j}M_k\right)_{j\in C},M(1-\lambda_0)\right)\right)$$

$$=\sum_{i\in C_j}(\lambda_0 M_i+\lambda_1 M_i(1-\lambda_0))\leq\sum_{i\in C_j}\lambda_0 M_i+H_j-\lambda_0\sum_{i\in C_j}M_i=H_j.$$

Teniendo en cuenta que $\lambda_1=\min_{j\in C}\left\{\dfrac{H_j-\sum_{k\in C_j}\lambda_0 M_k}{\sum_{k\in C_j}M_k(1-\lambda_0)}\right\}$, existirá $C_{j_0}\in C$ tal que

$$\sum_{i\in C_{j_0}}\lambda_1 M_i(1-\lambda_0)=H_{j_0}-\lambda_0\sum_{i\in C_{j_0}}M_i$$

por lo que la anterior desigualdad es en realidad una igualdad para el camino C_{j_0} y las constantes de proporcionalidad coinciden.

- PRO satisface COM^D.

Sea para cada $C_j\in C$, $H_j\leq H'_j\leq\sum_{i\in C_j}M_i$.

$$PRO_i(G,H,M)=M_i\min_{j\in C}\left\{\frac{H_j}{\sum_{k\in C_j}M_k}\right\}.$$

Debemos de probar que

$$PRO_i(G,H,M) = PRO_i(G,H,PRO(G,H',M)).$$

Sabemos que

$$PRO_i(G,H',M) = \lambda' M_i \text{ donde } \lambda' = \min_{j\in C}\left\{\frac{H'_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k}\right\}$$

$$PRO_i(G,H,PRO(G,H',M)) = PRO_i\left(G,H,\left(\lambda' M_i\right)_{i\in N}\right) = \lambda''\lambda' M_i$$

donde $\lambda'' = \min\limits_{j\in C}\left\{\frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j}\lambda' M_k}\right\} = \frac{1}{\lambda'}\min\limits_{j\in C}\left\{\frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k}\right\}$ y por tanto PRO satisface COM^D.

- PRO satisface SP.

Sea G' el grafo que se obtiene de G cuando dividimos la actividad i en l subactividades de tal forma que $M' \in I\!R^{n-l+1}$ tal que $M'_k = M_k$ si $k \in N\backslash i$ y $0 \leq M'_{i^s} \leq M_i$ para cada $s = 1, 2, ..., l$, verificándose que $\sum\limits_{s=1}^{l} M'_{i^s} = M_i$.
Es fácil ver que para todo $k \neq i$, $PRO_k(G',H,M') = PRO_k(G,H,M)$. Además

$$\left.\begin{array}{r} PRO_i(G,H,M) = M_i \min\limits_{j\in C}\left\{\frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k}\right\} \\ PRO_{i^s}(G',H,M') = M_{i^s} \min\limits_{j\in C}\left\{\frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\sum_{s=1}^{l} PRO_{i^s}(G',H,M') = PRO_i(G,H,M)$$

y por lo tanto hemos comprobado que PRO satisface SP.

b) Mostramos a través de contraejemplos que PRO no satisface las propiedades que se indican.

- PRO no satisface PO.

En el ejemplo 2.1 observamos que

$$PRO(G,H,M) = (0.5, 0.5, 1) \notin PB(R(G,H,M)).$$

- PRO no satisface IHI.

Sea G el grafo del ejemplo 2.1, siendo $H = (2,4)$ y $M = (2,8,10)$. En este caso $M^H = (2,2,4)$. Se verifica que

$$\begin{aligned} PRO(G,H,M) &= (0.4, 1.6, 2) \\ PRO(G,H,M^H) &= (1,1,2) \end{aligned}$$

Dado que $PRO(G,H,M) \neq PRO(G,H,M^H)$ obtenemos que PRO no satisface IHI.

- PRO no satisface ADD.

Teniendo en cuenta el lema 2.1, y dado que PRO satisface SIM obtenemos que PRO no verifica ADD.

- PRO no satisface VS.

En el ejemplo 2.1 es inmediato comprobar que

$$PRO(G,(1,2),(1,1,2)) = (0.5, 0.5, 1)$$

mientras que

$$(0,0,1) + PRO(G,(1,1),(1,1,1)) = (0.5, 0.5, 1.5). \quad \blacksquare$$

Proposición 2.10

a) APRO satisface en PG las propiedades WPO, IHI, IAI y VS *en PG.*

b) APRO no satisface en PG las siguientes: PO, SIM, COM, COM^D, ADD y SP.

Demostración.

a) Sea $(G,H,M) \in PG$.

- Utilizando la definición de APRO es inmediato comprobar que

$$APRO(G, H, M) \in WPB(R(G, H, M)).$$

- $APRO$ satisface IHI.

Dado que se verifica que $V_{(G,H,M)}(i) = V_{(G,H,M^H)}(i)$ para todo $i \in N$ y además $\left(M^H\right)^\alpha = M^\alpha$ es trivial comprobar que para cada $i \in N$,

$$APRO_i(G, H, M) = APRO_i(G, H, M^H)$$

y por tanto APRO satisface *IHI.*

- Es trivial comprobar que $APRO$ satisface IAI.

- $APRO$ satisface VS.

$$\begin{aligned} APRO_i(G, H, M) &= V(i) + PRO_i(G, (H_j - \sum_{k \in C_j} V(k))_{j \in C}, M^\alpha) \\ &= V(i) + APRO_i(G, (H_j - \sum_{k \in C_j} V(k))_{j \in C}, M^\alpha). \end{aligned}$$

b) Mostramos mediante contraejemplos que $APRO$ no satisface las propiedades que se indican.

- $APRO$ no satisface *PO.*

En el ejemplo 2.3 observamos que

$$APRO(G, H, M) = (0.44, 0.44, 1.78, 1.78) \notin PB(R(G, H, M)).$$

- $APRO$ no satisface *SIM.*

Sea G el grafo del ejemplo 2.1, siendo $H = (2, 4)$ y $M = (2, 8, 8)$. En este ejemplo las demandas de los jugadores B y C coinciden y sin embargo

$$\begin{aligned} APRO_B(G, H, M) &= PRO_B(G, (2, 2), (2, 2, 2)) \\ APRO_C(G, H, M) &= 2 + PRO_C(G, (2, 2), (2, 2, 2)). \end{aligned}$$

Dado que PRO satisface SIM hemos probado que $APRO$ no satisface SIM.

- $APRO$ no satisface *COM.*

Consideremos el problema PERT en el que hay un único camino con holgura de 2 unidades y dos actividades que demandan 1 y 3 unidades. Se verifica que

$$APRO(G,(2),(1,3)) = (0.5, 1.5)$$

mientras que

$$APRO(G,(1),(1,3)) + APRO(G,(1),(0.5,2.5)) = (0.5,0.5) + (0.25, 0.75)$$

y por tanto $APRO$ no satisface COM.

- $APRO$ no satisface COM^D.

Consideremos el problema anterior. Supongamos que repartimos inicialmente 3 unidades de holgura, entonces

$$APRO(G,(3),(1,3)) = (0.5, 2.5)$$

mientras que

$$APRO(G,(2),(0.5,2.5)) = (0.25, 1.75) \neq APRO(G,(2),(1,3))$$

y por tanto $APRO$ no satisface composición dual.

- $APRO$ no satisface ADD.

Usando el ejemplo del lema 2.1 tenemos que

$$APRO(G,(1),(1,1)) = (0.5, 0.5)$$

mientras que

$$APRO(G,(0.250),(0.833,0.250)) = (0.125, 0.125)$$

$$APRO(G,(0.750),(0.167,0.750)) = (0.083, 0.667).$$

- $APRO$ no satisface SP.

Sea G el grafo del ejemplo 2.1, si consideramos que la actividad C se divide en dos subactividades E y F con demandas iguales de 1 unidad, y denotamos por G' al grafo resultante, obtenemos que

$$APRO(G', (1,2), (1,1,1,1)) = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$$

mientras que

$$APRO(G, (1,2), (1,1,2)) = (0.5, 0.5, 1.5)$$

y por tanto

$$APRO_C(G, (1,2), (1,1,2)) \neq$$

$$APRO_E(G', (1,2), (1,1,1,1)) + APRO_F(G', (1,2), (1,1,1,1)). \quad \blacksquare$$

En el siguiente cuadro se esquematizan las propiedades que son satisfechas por cada una de las soluciones en PG.

	CEA	CEL	PRO	$APRO$
WPO	Si	Si	Si	Si
PO	No	No	No	No
IHI	Si	No	No	Si
IAI	Si	No	Si	Si
SIM	Si	Si	Si	No
COM	Si	Si	Si	No
COM^D	Si	Si	Si	No
ADD	No	No	No	No
SP	No	No	Si	No
VS	No	No	No	Si

(Tabla 2.6)

El siguiente lema proporciona una expresión simplificada de CEL cuando nos restringimos a aquellos problemas PERT generalizados en los que todos los jugadores demandan una cantidad superior o igual a los excesos medios que hay en los caminos. Además se prueba que CEL verifica aditividad en ese conjunto. Recordemos que atendiendo al lema 2.1 y dado que CEL verifica la propiedad de simetría (SIM), debemos restringir el conjunto de problemas en los que CEL es aditiva.

Sea $EP = \left\{ (G, H, M) \in PG \;\mid\; \min\limits_{i \in N} \{M_i\} \geq \frac{\sum_{i \in C_j} M_i - H_j}{|C_j|}, \text{ para todo } C_j \in C \right\}$.

Lema 2.2
a) *Sea* $(G, H, M) \in EP$, *se verifica que para cada* $i \in N$

$$CEL_i(G, H, M) = M_i - \beta$$

donde β *es el menor número que verifica*

$$\sum_{i \in C_j} (M_i - \beta) \leq H_j \ \ \textit{para todo}\, C_j \in C.$$

b) *CEL verifica aditividad (ADD) en EP.*

Demostración.
a) Sabemos que

$$CEL_i(G, H, M) = \max\{0, M_i - \beta\}$$

donde β es el menor número verificando,

$$\sum_{i \in C_j} \max\{0, M_i - \beta\} \leq H_j \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Además para cada $C_j \in C$

$$\sum_{i \in C_j} \left(M_i - \min_{i \in N} \{M_i\} \right) = \sum_{i \in C_j} M_i - |C_j| \min_{i \in N} \{M_i\} \leq$$

$$\leq \sum_{i \in C_j} M_i + |C_j| \frac{-\sum_{i \in C_j} M_i + H_j}{|C_j|} = H_j.$$

Por tanto obtendríamos que $\beta \leq \min_{i \in N} \{M_i\}$, es decir, para cada $i \in N$, $M_i \geq \beta$ y así

$$CEL_i(G, H, M) = M_i - \beta.$$

b) Debemos de probar que si los problemas PERT generalizados (G, H, M^0), (G, H^0, M) y $(G, H^1, M - M^0) \in EP$, donde $0 \leq H^0 \leq H$, $(H^0 \in I\!R^m)$, y $0 \leq M^0 \leq M, (M^0 \in I\!R^n)$, se tiene que,

$$CEL_i(G, H, M) = CEL_i(G, H^0, M^0) + CEL_i(G, H^1, M - M^0)$$

siendo $H^1 = \left(H_j - \sum\limits_{i \in C_j} CEL_i(G, H^0, M^0) \right)_{j \in C}$.

Por a) sabemos que

$$CEL_i(G, H^0, M^0) = M_i^0 - \beta'$$

donde β' es el menor número verificando,

$$\sum_{i \in C_j} \left(M_i^0 - \beta' \right) \leq H_j^0 \quad \text{para todo } C_j \in C$$

y

$$CEL_i(G, H^1, M - M^0) = M_i - M_i^0 - \beta''$$

donde β'' es el menor número verificando,

$$\sum_{i \in C_j} \left(M_i - M_i^0 - \beta'' \right) \leq H_j^1 \quad \text{para todo } C_j \in C.$$

Luego

$$\begin{aligned} CEL_i(G, H^0, M^0) + CEL_i(G, H^1, M - M^0) &= M_i^0 - \beta' + M_i - M_i^0 - \beta'' \\ &= M_i - \beta' - \beta''. \end{aligned}$$

Además sabemos que para cada $C_j \in C$

$$\sum_{i \in C_j} \left(CEL_i(G, H^0, M^0) + CEL_i(G, H^1, M - M^0) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{i \in C_j} CEL_i(G, H^0, M^0) + H_j^1 = H_j.$$

Teniendo en cuenta la definición de $CEL(G, H^1, M - M^0)$, la anterior desigualdad se convierte en una igualdad en al menos un camino C_{j_0} y por tanto $\beta' + \beta'' = \beta$ donde $CEL(G, H, M) = M_i - \beta$. Luego CEL verifica aditividad (ADD) dentro del conjunto EP. ■

A continuación utilizando las propiedades antes descritas, damos en una serie de teoremas caracterizaciones axiomáticas de la solución de igual ganancia (CEA), la solución de igual pérdida (CEL), la solución proporcional (PRO) y la solución proporcional ajustada $(APRO)$.

Teorema 2.1 *CEA es la única solución en PG verificando optimalidad débil de Pareto (WPO), independencia de holguras irrelevantes (IHI), independencia de actividades irrelevantes (IAI), simetría (SIM) y composición (COM).*

Demostración.

Ha sido probado en la proposición 2.7 que CEA satisface WPO, IHI, IAI, SIM y COM. A continuación demostramos la unicidad.

Sea f una solución verificando las propiedades de WPO, IHI, IAI, SIM y COM, y sea $(G, H, M) \in PG$ tal que $M_i > 0$ para cada $i \in N$ (si existiera $i \in N$ con $M_i = 0$ la demostración sería similar).

Asumimos también que $H_j > 0$ para todo $C_j \in C$. Si existiera $C_j \in C$ tal que $H_j = 0$ entonces $C \backslash C^r \neq \emptyset$ y $N \backslash N^r \neq \emptyset$. Por tanto si $i \notin N^r$ entonces $f_i(G, H, M) = 0$ tal como hemos visto en la definición de IAI. Si $i \in N^r$ tomemos $i_0 \notin N^r$ y $M' \in I\!R^n$ tal que $M'_{i_0} = M_i$ y $M'_k = M_k$ para todo $k \neq i_0$. Como f satisface IAI y SIM obtenemos que

$$\begin{aligned} f_i(G,H,M) &= f_i(G,H,M') \\ &= f_{i_0}(G,H,M') \\ &= f_{i_0}(G,H,M) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto $f_i(G, H, M) = 0 = CEA_i(G, H, M)$ para todo $i \in N$.

Supongamos que la estructura dada por el grafo G consta de m caminos, de forma que

$$|C_1| \leq |C_2| \leq ... \leq |C_m| \, .$$

Teniendo en cuenta que f satisface IHI tenemos que

$$f_i(G, H, M) = f_i(G, H, M^H).$$

Sea $L = M^H$ y supongamos sin pérdida de generalidad que

$$L_1 \leq L_2 \leq ... \leq L_n.$$

Aplicando COM e IHI tenemos que para cada $i \in N$

$$f_i(G, H, L) = f_i(G, L_1 1_C, L_1 1_N) +$$

$$+f_i\left(G,\left(H_j-\sum_{k\in C_j}f_k(G,L_11_C,L_11_N)\right)_{j\in C},L-f(G,L_11_C,L_11_N)\right).$$

Como f verifica SIM y WPO tenemos que para cada $i\in N$,

$$f_i(G,L_11_C,L_11_N)=\frac{L_1}{|C_m|}=CEA_i(G,L_11_C,L_11_N).$$

Por ello,

$$f_i(G,H,L)=$$

$$=CEA(G,L_11_C,L_11_N)+f_i\left(G,\left(H_j-\frac{|C_j|\,L_1}{|C_m|}\right)_{j\in C},\left(L_i-\frac{L_1}{|C_m|}\right)_{i\in N}\right).$$

Vemos en la expresión anterior que los jugadores han disminuido sus demandas en la misma cantidad manteniendo por tanto la misma relación entre ellas; i.e.,

$$L_1-\frac{L_1}{|C_m|}\leq L_2-\frac{L_1}{|C_m|}\leq ...\leq L_n-\frac{L_1}{|C_m|}.$$

Pueden suceder dos casos que a continuación analizamos:

i) Existe $C_{j_0}\in C$ tal que $H_{j_0}-\frac{|C_{j_0}|L_1}{|C_m|}=0$. En este caso $|C_{j_0}|=|C_m|$ y $L_1=H_{j_0}$ dado que $L_1\leq H_j$ y $|C_l|\leq|C_m|$ para todo $C_l\in C$.

Si consideramos el problema $(G,H^{'},M')$ donde $M'=L-\frac{L_1}{|C_m|}1_N$, $H'_j=H_j-\frac{|C_j|L_1}{|C_m|}$ para todo C_j, tenemos que $H'_{j_0}=0$ y por tanto $C\backslash C^r\neq\emptyset$ y $N\backslash N^r\neq\emptyset$.

Sea $i\in N\backslash N^r$ entonces $f_i(G,H',M')=0$ dado que $M'_k\geq 0$ para todo $k\in N$, y si $i\in C_j\in C\backslash C^r$, $\sum\limits_{i\in C_j}f_i(G,H',M')\leq H'_j=0$.

Sea $i\in N^r$, y tomemos $i_0\in N\backslash N^r$. Teniendo en cuenta que se verifica IAI, $f_i(G,H',M')=f_i(G,H',M'')$ siendo $M''_{i_0}=M'_i$ y $M''_{N\backslash i_0}=M'_{N\backslash i_0}$. Aplicando SIM obtenemos que $f_i(G,H',M'')=f_{i_0}(G,H',M'')$ y por tanto dado que hemos probado anteriormente que $f_{i_0}(G, H', M'') = 0$ se verifica que

$$\begin{aligned} f(G, H', M') &= 0 \\ &= CEA(G, H', M'). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que CEA verifica IHI y COM obtenemos que

$$f(G, H, M) = CEA(G, H, M).$$

ii) Para todo $j \in C$, $H_j - \frac{|C_j| L_1}{|C_m|} > 0$.

Sea $(G, H^1, M^1) = \left(G, \left(H_j - \frac{|C_j| L_1}{|C_m|}\right)_{j \in C}, \left(L_i - \frac{L_1}{|C_m|}\right)_{i \in N}\right)$. Procediendo para (G, H^1, M^1) de la misma manera que hicimos antes para (G, H, M) obtendríamos que para cada $i \in N$,

$$f_i(G, H^1, M^1) = f_i(G, H^1, L^1) =$$

$$= CEA\left(G, L_1^1 1_C, L_1^1 1_N\right) + f_i\left(G, \left(H_j^1 - \frac{|C_j|\, L_1^1}{|C_m|}\right)_{j \in C}, \left(L_i^1 - \frac{L_1^1}{|C_m|}\right)_{i \in N}\right)$$

verificándose que para cada $i \in N$,

$$L_i^1 \leq L_i - \frac{L_1}{|C_m|}$$

junto con las siguientes relaciones

$$L_1^1 - \frac{L_1^1}{|C_m|} \leq L_2^1 - \frac{L_1^1}{|C_m|} \leq ... \leq L_n^1 - \frac{L_1^1}{|C_m|}$$

$$L_1^1 - \frac{L_1^1}{|C_m|} = L_1^1 \left(1 - \frac{1}{|C_m|}\right) \leq L_1 \left(1 - \frac{1}{|C_m|}\right)^2.$$

De nuevo podríamos distinguir dos casos. Si existe $j \in C$ tal que $H_j^1 - \frac{|C_j| L_1^1}{|C_m|} = 0$, razonando igual que antes concluiríamos que $f = CEA$. Si $H_j^1 - \frac{|C_j| L_1^1}{|C_m|} > 0$ para todo $j \in C$ construiríamos el problema (G, H^2, M^2)

donde $H_j^2 = H_j^1 - \frac{|C_j|L_1^1}{|C_m|}$ para cada $j \in C$ y $M_i^2 = L_i^1 - \frac{L_1^1}{|C_m|}$ para cada $i \in N$.

La sucesión $\left\{(G, H^k, L^k)\right\}_{k\in N}$ verifica que

$$L_1^k \leq (1 - \frac{1}{|C_m|})L_1^{k-1} \leq ... \leq (1 - \frac{1}{|C_m|})^k L_1.$$

Luego $\lim\limits_{k\to\infty} L_1^k = 0$.

Por lo tanto podemos reducir el problema con n actividades a un problema con $n-1$ actividades si ningún elemento de la sucesión $\left\{(G, H^k, L^k)\right\}_{k\in N}$ verifica i), (si alguno verificara i) concluiríamos la unicidad de manera análoga a como se hizo para (G, H^1, L^1)). Ahora aplicando un razonamiento de inducción sobre el número de actividades y teniendo en cuenta que para $n = 1$ se verifica que $f = CEA = H_1$ concluimos que la unicidad es cierta en general. ■

Teorema 2.2 *CEL es la única solución en EP que verifica optimalidad débil de Pareto (WPO), simetría (SIM) y aditividad (ADD).*

Demostración.

Hemos visto previamente que CEL verifica las tres propiedades en EP. Sea $(G, H, M) \in EP$ y sea f verificando WPO, SIM y ADD. Sabemos que $CEL_i(G, H, M) = M_i - \beta \geq 0$. Además

$$\sum_{i\in C_j}(M_i - \beta) \leq H_j, \text{ para todo } C_j \in C$$

existiendo $C_{j_0} \in C$ tal que,

$$\sum_{i\in C_{j_0}}(M_i - \beta) = H_{j_0}.$$

Sean $(G, H^0, M - \beta 1_N)$, $(G, H^1, \beta 1_N)$ donde $H_j^0 = \sum\limits_{i\in C_j}(M_i - \beta)$ y $H_j^1 = H_j - \sum\limits_{i\in C_j}(M_i - \beta)$ para cada $j \in C$.

Como $\min\limits_{i\in N}\{M_i - \beta\} \geq 0 = \frac{\sum_{i\in C_j}(M_i-\beta)-H_j^0}{|C_j|}$ para cada $C_j \in C$ concluimos que $(G, H^0, M - \beta 1_N) \in EP$.

Dado que $\sum\limits_{i\in C_j}(M_i - \beta) \leq H_j$ se tiene que $\beta \geq \frac{\sum_{i\in C_j} M_i - H_j}{|C_j|} = \frac{\sum_{i\in C_j} \beta - H_j^1}{|C_j|}$, es decir, $(G, H^1, \beta 1_N) \in EP$.

Usando que f verifica aditividad en EP tenemos que para cada $i \in N$

$$f_i(G,H,M) = f_i\left(G,H^0,M-\beta 1_N\right) + f_i(G,H^1,\beta 1_N).$$

Como f verifica WPO y SIM, teniendo en cuenta que $H^1_{j_0} = H_{j_0} - \sum\limits_{i\in C_{j_0}} (M_i - \beta) = 0$ concluimos que $f_i(G,H^1,\beta 1_N) = 0$.

Sea i_0 tal que $M_{i_0} - \beta = \min\limits_{i\in N} \{M_i - \beta\}$. Entonces

$$f_i\left(G,H^0,M-\beta 1_N\right) = f_i\Big(G, \left(\left|C_j\right|\left(M_{i_0}-\beta\right)\right)_{j\in C}, \left(M_{i_0}-\beta\right)1_N\Big) +$$

$$+ f_i\Big(G, \left(H^0 - \left(\left|C_j\right|\left(M_{i_0}-\beta\right)\right)\right)_{j\in C}, \left(M_i - M_{i_0}\right)_{i\in N}\Big)$$

ya que f es aditiva en EP y los dos problemas PERT generalizados que se consideran están en EP.

Teniendo en cuenta que f verifica WPO y SIM concluimos que

$$f_i\Big(G, \left(\left|C_j\right|\left(M_{i_0}-\beta\right)\right)_{j\in C}, \left(M_{i_0}-\beta\right)1_N\Big) = M_{i_0} - \beta.$$

El problema $\Big(G, \left(H^0 - \left(\left|C_j\right|\left(M_{i_0}-\beta\right)\right)\right)_{j\in C}, \left(M_i - M_{i_0}\right)_{i\in N}\Big)$ consta de $(n-1)$ actividades con demanda positiva. Aplicando el método de inducción sobre el número de actividades con demanda positiva y teniendo en cuenta que si $n = 1$ se verofica que $f = CEL = H_1$ podemos concluir que f coincide con CEL en $\Big(G, \left(H^0 - \left(\left|C_j\right|\left(M_{i_0}-\beta\right)\right)\right)_{j\in C}, \left(M_i - M_{i_0}\right)_{i\in N}\Big)$. Teniendo en cuenta que CEL también verifica WPO, SIM y ADD concluimos que f coincide con CEL. Ahora podríamos considerar i_1 tal que $M_{i_1} - M_{i_0} = \min\limits_{i\in N\setminus i_0} \{M_i - M_{i_0}\}$ y proceder de manera análoga a como hicimos antes. Si repetimos este proceso un número suficiente de veces (n a lo sumo) obtendríamos que $f_i(G,H^0,M-\beta 1_N) = M_i - \beta$. Luego $f = CEL$. ■

Nota 2.13 Como consecuencia inmediata del teorema 2.2 obtenemos que CEA y PRO no verifican ADD en EP.

Teorema 2.3 *CEL es la única solución en PG que satisface optimalidad débil de Pareto (WPO), simetría (SIM), composición dual (COM^D)* y *aditividad en EP.*

Demostración.

Hemos comprobado en la proposición 2.8 y en el lema 2.2b) que CEL satisface las propiedades citadas.

Probamos pues la unicidad de una solución satisfaciendo las propiedades anteriores.

Si $(G, H, M) \in EP$ aplicando el teorema 2.2 tendríamos que CEL es la única solución que las satisface.

Si $(G, H, M) \notin EP$, entonces existe $C_j \in C$ y existe $i \in N$ tal que $M_i < \frac{\sum_{i \in C_j} M_i - H_j}{|C_j|}$.

Sea $i_0 \in N$ tal que $M_{i_0} = \min_{i \in N} \{M_i\}$ y para cada $C_j \in C$ sea

$$H'_j = \max \left\{ H_j, \sum_{i \in C_j} M_i - |C_j| \, M_{i_0} \right\}.$$

Utilizando el hecho de que f satisface composición dual tenemos que

$$f_i(G, H, M) = f_i(G, H, f(G, H', M)).$$

Teniendo en cuenta que para cada $C_j \in C$,

$$\sum_{i \in C_j} M_i - H'_j \leq \sum_{i \in C_j} M_i - \left(\sum_{i \in C_j} M_i - |C_j| \, M_{i_0} \right) = |C_j| \, M_{i_0}$$

podemos concluir que para cada $i \in N$

$$M_i \geq M_{i_0} \geq \frac{\sum_{i \in C_j} M_i - H'_j}{|C_j|},$$

es decir, $(G, H', M) \in EP$.

Haciendo uso del teorema 2.2 obtenemos

$$f_i(G, H', M) = CEL_i(G, H', M) = M_i - M_{i_0}.$$

Por tanto para cada $i \in N$,

$$f_i(G, H, M) = f_i(G, H, CEL(G, H', M)).$$

Utilizamos ahora un procedimiento de inducción en el número de jugadores que demandan una cantidad positiva. Si $|N| = 1$, $f = CEL$ ya que

$$f_1(G, H, M) = H = M_1 - (M_1 - H) = CEL(G, H, M).$$

Por hipótesis de inducción lo suponemos cierto para n, y lo probamos para $n + 1$. Hemos probado previamente que

$$f_i(G, H, M) = f_i(G, H, M - M_{i_0}).$$

El problema $(G, H, M - M_{i_0})$ involucra a n jugadores con demanda positiva si (G, H, M) involucra a $n+1$ jugadores dado que $M_{i_0} = \min_{i \in N} \{M_i\}$. Por ello aplicando la hipótesis de inducción tenemos que,

$$f_i(G, H, M - M_{i_0}) = CEL_i(G, H, M - M_{i_0}) = CEL_i(G, H, CEL(G, H', M)).$$

Y teniendo en cuenta que CEL verifica composición dual tenemos que

$$CEL(G, H, CEL(G, H', M)) = CEL(G, H, M).$$

Luego para cada $i \in N$,

$$f_i(G, H, M) = CEL_i(G, H, M). \blacksquare$$

Teorema 2.4 *PRO es la única solución en PG que satisface optimalidad débil de Pareto (WPO), simetría (SIM) y es a prueba de estrategias (SP).*

Demostración.

Ha sido probado en la proposición 2.9 que PRO satisface WPO, SIM y SP.

Veamos a continuación que es única. Sea f una solución verificando WPO, SIM y SP. Supongamos que $(G, H, M) \in PG$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $a(\varepsilon) > 0$, $\alpha(i, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in N$

$$0 \leq a(\varepsilon) \leq \varepsilon$$

$$0 \leq M_i - \alpha(i, \varepsilon) a(\varepsilon) \leq \varepsilon$$

$$\alpha(i, \varepsilon) a(\varepsilon) \left(\min_{j \in C} \left\{ \frac{H_j}{\sum\limits_{k \in C_j} \alpha(k, \varepsilon) a(\varepsilon)} \right\} - \min_{j \in C} \left\{ \frac{H_j}{\sum\limits_{k \in C_j} M_k} \right\} \right) \leq \varepsilon$$

Consideremos el problema $(G^{\varepsilon}, H, M^{\varepsilon})$ donde

$$M^{\varepsilon}_{i^s} = a(\varepsilon) \;\text{ para todo } i \in N, \text{ y } s = 1, ..., \alpha(i, \varepsilon)$$

$$M^{\varepsilon}_{i^{\alpha(i,\varepsilon)+1}} = M_i - \alpha(i, \varepsilon) a(\varepsilon).$$

Estamos por tanto substituyendo cada jugador i por $\alpha(i, \varepsilon) + 1$ jugadores donde los $\alpha(i, \varepsilon)$ primeros demandan $a(\varepsilon)$ y el último demanda el resto, es decir, $M_i - \alpha(i, \varepsilon) a(\varepsilon)$. Sea G^{ε} el grafo que modeliza esta situación. Dado que f satisface SIM obtenemos que para todos aquellos jugadores que demandan la misma cantidad la solución les asigna el mismo valor, es decir,

$$f_{i^s}(A^{\varepsilon}, H, M^{\varepsilon}) = c \quad \text{para todo } i \in N, \text{ y } s = 1, ..., \alpha(i, \varepsilon)$$

A continuación acotamos c de la siguiente forma. Sea

$$\lambda_{max} = \min_{j \in C} \left\{ \frac{H_j}{\sum\limits_{i \in C_j} \alpha(i, \varepsilon) a(\varepsilon)} \right\},$$

c será máximo si para todo $i \in N$, f asigna 0 al jugador $\alpha(i, \varepsilon) + 1$. En este caso $c = a(\varepsilon) \min\limits_{j \in C} \left\{ \frac{H_j}{\sum\limits_{i \in C_j} \alpha(i,\varepsilon) a(\varepsilon)} \right\}$.

Por otra parte sabemos que para cada $i \in N$,

$$PRO_i(G, H, M) = M_i \min_{j \in C} \left\{ \frac{H_j}{\sum\limits_{k \in C_j} M_k} \right\}.$$

Por lo tanto teniendo en cuenta que f satisface SP tenemos que para cada $i \in N$,

$$\begin{aligned}
f_i(G,H,M) &= \sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)+1} f_{i^s}(G^\varepsilon, H, M^\varepsilon) \\
&\leq \sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)} a(\varepsilon)\lambda_{max} + M_i - \alpha(i,\varepsilon)a(\varepsilon) \\
&= a(\varepsilon)\alpha(i,\varepsilon)\lambda_{max} + M_i - \alpha(i,\varepsilon)a(\varepsilon) \\
&= a(\varepsilon)\alpha(i,\varepsilon) \min_{j\in C}\left\{ \frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k} \right\} \\
&\quad +a(\varepsilon)\alpha(i,\varepsilon)\left(\min_{j\in C}\left\{ \frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j} a(\varepsilon)\alpha(k,\varepsilon)} \right\} - \min_{j\in C}\left\{ \frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k} \right\} \right) \\
&\quad +M_i - a(\varepsilon)\alpha(i,\varepsilon) \\
&\leq M_i \min_{j\in C}\left\{ \frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k} \right\} + \varepsilon + \varepsilon \\
&= PRO_i(G,H,M) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}
\lambda_{min} &= \min_{j\in C}\left\{ \frac{H_j - \sum\limits_{k\in C_j}(M_k - \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon))}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k - \sum\limits_{k\in C_j}(M_k - \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon))} \right\} \\
&= \min_{j\in C}\left\{ \frac{H_j - \sum\limits_{k\in C_j}(M_k - \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon))}{\sum\limits_{k\in C_j} \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon)} \right\}.
\end{aligned}$$

Supongamos que $C_{j_0} \in C$ es tal que

$$\lambda_{min} = \frac{H_{j_0} - \sum\limits_{k\in C_{j_0}}(M_k - \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon))}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon)}.$$

Además si ε es suficientemente pequeño, se puede suponer que en el camino C_{j_0}, también se alcanzará el mínimo correspondiente a la solución proporcional, es decir,

$$\min_{j\in C}\left\{\frac{H_j}{\sum\limits_{k\in C_j} M_k}\right\} = \frac{H_{j_0}}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} M_k}.$$

El valor más pequeño que puede tomar c corresponderá al caso en el que el jugador $\alpha(i,\varepsilon)+1$ recibe su demanda, es decir $f_{i^{\alpha(i,\varepsilon)+1}}(A^{\varepsilon}, H, M^{\varepsilon}) = M_i - \alpha(i,\varepsilon)a(\varepsilon)$. En este caso $c = \lambda_{min}a(\varepsilon)$, y por lo tanto teniendo en cuenta que f satisface SP tendríamos,

$$\begin{aligned}
f_i(G,H,M) &= \sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)+1} f_{i^s}(G^{\varepsilon}, H, M^{\varepsilon}) \\
&\geq \sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)} f_{i^s}(G^{\varepsilon}, H, M^{\varepsilon}) \\
&\geq \sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)} \lambda_{min}a(\varepsilon) \\
&= \sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)} \frac{H_{j_0} - \sum\limits_{k\in C_{j_0}} (M_k - \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon))}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon)} a(\varepsilon).
\end{aligned}$$

La anterior expresion es igual a la siguiente

$$\frac{H_{j_0}}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon)} \sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)} a(\varepsilon) - \frac{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} (M_k - \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon))}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon)} \sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)} a(\varepsilon)$$

$$\geq \frac{H_{j_0}}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} M_k} \sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)} a(\varepsilon) - \frac{|C_{j_0}|\,\varepsilon}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon)} \sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)} a(\varepsilon)$$

$$= \frac{H_{j_0}}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} M_k}\alpha(i,\varepsilon)a(\varepsilon) - \frac{|C_{j_0}|\,\varepsilon}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon)}\alpha(i,\varepsilon)a(\varepsilon)$$

$$= \frac{H_{j_0}}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} M_k}M_i - (M_i - \alpha(i,\varepsilon)a(\varepsilon))\,\frac{H_{j_0}}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} M_k} - \frac{|C_{j_0}|\,\alpha(i,\varepsilon)a(\varepsilon)}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} \alpha(k,\varepsilon)a(\varepsilon)}\varepsilon$$

$$\geq PRO_i(G,H,M) - \frac{H_{j_0}}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} M_k}\varepsilon - \frac{M_i\,|C_{j_0}|}{(\sum\limits_{k\in C_{j_0}} M_k)/2}\varepsilon$$

$$= PRO_i(G,H,M) - \varepsilon\left(\frac{H_{j_0} + 2M_i\,|C_{j_0}|}{\sum\limits_{k\in C_{j_0}} M_k}\right)$$

$$\geq PRO_i(G,H,M) - d\varepsilon \quad \text{donde } d > 0.$$

Por tanto hemos comprobado que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $i \in N$,

$$\begin{aligned} PRO_i(G,H,M) - d\varepsilon &\leq f_i(G,H,M) \\ &\leq PRO_i(G,H,M) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos la unicidad. ■

Sea $PG_0 = \left\{ (G,H,M) \in PG \mid \begin{array}{c} V_{(G,H,M)}(i) = 0 \text{ para todo } i \in N \\ M_i \leq H_j \text{ si } i \in C_j \end{array} \right\}$.

En PG$_0$ el reparto proporcional y el reparto proporcional ajustado coinciden.

Corolario 2.1 *La solución proporcional es la única solución en PG_0 verificando WPO, SIM y SP.*

Demostración.

Es suficiente probar, teniendo en cuenta la demostración del teorema, que si $(G,H,M) \in PG_0$ entonces $(G^\varepsilon, H, M^\varepsilon) \in PG_0$.

Dado $i \in N$ y $s \in \{1,2,...,\alpha(i,\varepsilon)\}$ tenemos que $M^\varepsilon_{i^s} = a(\varepsilon) \leq \varepsilon$, además $M^\varepsilon_{i^{\alpha(i,\varepsilon)+1}} = M_i - a(\varepsilon)\alpha(i,\varepsilon) \leq \varepsilon$. Luego $M^\varepsilon_{i^s} \leq \varepsilon \leq H_j$ para todo $i \in N$ y para todo $s = 1,...,\alpha(i,\varepsilon)+1$ si ε es suficientemente pequeño.

Ahora vamos a probar que si $V(i) = 0$ entonces $V^\varepsilon(i^s) = 0$, para cada $s = 1,..., \alpha(i,\varepsilon)+1$ donde V^ε se obtiene del problema $(G^\varepsilon, H, M^\varepsilon)$. Es decir, que al dividir un jugador que no puede alcanzar utilidad alguna por sí mismo en $\alpha(i,\varepsilon)+1$ subjugadores, éstos tampoco podrán obtener utilidad positiva por sí mismos.

Es fácil comprobar que si $x \in R(G^\varepsilon, H, M^\varepsilon)$ entonces

$$z = \left(\sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)+1} x_{i^s}\right)_{i\in N} \in R(G,H,M).$$

Supongamos que existe $s_0 \in \{1,...,\alpha(i,\varepsilon)+1\}$ tal que $V^\varepsilon(i^{s_0}) > 0$. Entonces dado $x \in V^\varepsilon(N)$ se verifica que $x\backslash_{i^{s_0}} V^\varepsilon(i^{s_0}) \in R(G^\varepsilon, H, M^\varepsilon)$, por lo que

$$x\backslash_i \left(\sum_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)+1} V^\varepsilon(i^s) \right) \in R(G,H,M)$$

y por tanto $V(i) \geq \sum\limits_{s=1}^{\alpha(i,\varepsilon)+1} V^\varepsilon(i^s) > 0$, lo que supondría una contradicción con la hipótesis inicial. ■

Teorema 2.5 *APRO es la única solución en PG que satisface optimalidad débil de Pareto (WPO), independencia de holguras irrelevantes (IHI), simetría (SIM) en* PG_0, *es a prueba de estrategias (SP) en* PG_0 *y es V-separable (VS).*

Demostración.

Ha sido probado en la proposición 2.10 que $APRO$ satisface WPO, IHI y VS. Además $APRO$ coincide con PRO en PG_0 y por tanto satisface SIM y SP en PG_0. Veamos que es la única solución que las satisface. Sea f una solución que verifica las anteriores propiedades. Aplicando que f satisface VS obtenemos que para cada $i \in N$,

$$f_i(G,H,M) = V(i) + f_i\left(A, H', (M_i - V(i))_{i\in N}\right)$$

siendo $H' = (H_j - \sum\limits_{k\in C_j} V(k))_{j\in C}$.

Teniendo en cuenta que f satisface IHI obtenemos

$$f_i\left(A, H', (M_i - V(i))_{i\in N}\right) = f_i\left(A, H', \left((M_i - V(i))_{i\in N}\right)^{H'}\right).$$

Aplicando el corolario 2.1 al problema $\left(A, H', \left((M_i - V(i))_{i\in N}\right)^{H'}\right)$ tenemos que para cada $i \in N$

$$f_i\left(A, H', \left((M_i - V(i))_{i\in N}\right)^{H'}\right) = PRO_i\left(A, H', \left((M_i - V(i))_{i\in N}\right)^{H'}\right)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} f_i(G,H,M) &= V(i) + PRO_i\left(A, H', \left((M_i - V(i))_{i\in N}\right)^{H'}\right) \\ &= APRO_i(G,H,M). \ ■ \end{aligned}$$

2.6 Soluciones en la frontera de Pareto

Los conceptos de solución descritos en la sección 2.5.1 están en la frontera débil de Pareto y en general no están en el núcleo del juego NTU, tal y como se muestra a continuación.

Consideremos el problema PERT (G, h, h^p) presentado en el ejemplo 2.3. La solución de igual ganancia (CEA) no está en el núcleo dado que

$$V(C, D) = \big\{(x_C, x_D) \in I\!R^2 \mid x_C + x_D \leq 3\big\}$$

siendo

$$CEA(G, h, h^p) = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5).$$

Consideremos el problema PERT (G, h, h^p) presentado en el ejemplo 2.4. La solución de igual pérdida (CEL) no está en el núcleo dado que

$$V(E) = \{x_E \in I\!R \mid x_E \leq 1\}$$

siendo

$$CEL(G, h, h^p) = (45, 45, 0, 0, 0).$$

Consideremos el problema PERT (G, h, h^p) presentado en el ejemplo 2.5. La solución proporcional (PRO) no está en el núcleo dado que

$$V(D) = \{x_D \in I\!R \mid x_D \leq 1\}$$

siendo

$$PRO(G, h, h^p) = (0.25, 0.25, 0.25, 0.5, 0.25).$$

Es conocido que el núcleo de un juego es un concepto de solución que proporciona asignaciones estables. Si la utilidad que consiguen los jugadores de la gran coalición N se divide de acuerdo a un elemento del núcleo, ninguna coalición tiene motivos para separarse de la gran coalición. A continuación procedemos a definir para los problemas PERT asignaciones en el núcleo del juego NTU basándonos en los principios de igual ganancia, igual pérdida y reparto proporcional.

2.6.1 Soluciones optimales de Pareto

En esta sección una solución al problema PERT generalizado (G, H, M) consistiría en seleccionar un elemento del conjunto $PB\,(R(G, H, M))$. Para el problema dual $(G, H, M)^D$ una solución consistiría en seleccionar un elemento del conjunto $LPB\left(R(G, H, M)^D\right)$.

Teniendo en cuenta el resultado de la proposición 2.1, para aquellos problemas PERT en los que no hay actividades ficticias, una solución consistiría en seleccionar un elemento del conjunto

$$PB\,(R(G, h, h^p)) = \left\{ x \in I\!R^n \mid \begin{array}{ll} \sum\limits_{i \in C_j} x_i = h_j & \text{para todo } C_j \in C \\ 0 \leq x_i \leq h^p(i) & \text{para todo } i \in N \end{array} \right\}$$

y para el problema dual $(G, h, h^p)^D$ consistiría en seleccionar un elemento del conjunto

$$LPB\left(R(G, h, h^p)^D\right) = \left\{ x \in I\!R^n \mid \begin{array}{ll} \sum\limits_{i \in C_j} x_i = e_j & \text{para todo } C_j \in C \\ 0 \leq x_i \leq h^p(i) & \text{para todo } i \in N \end{array} \right\}.$$

Planteamos ahora un procedimiento para extender las soluciones estudiadas previamente a la frontera de Pareto. Teniendo en cuenta la proposición 2.2 la frontera de Pareto está en el núcleo del juego NTU y por tanto seleccionando asignaciones en la frontera de Pareto seleccionamos asignaciones en el núcleo.

El procedimiento utilizado para extender la solución de igual ganancia, el reparto proporcional y el reparto proporcional ajustado es similar. En la primera fase se calcula una asignación dentro del conjunto factible utilizando el concepto de solución que se proponga, es decir, CEA, PRO o bien APRO. Si a cada jugador se le aumenta su duración en la asignación recibida en la primera fase se origina un nuevo problema PERT generalizado. El siguiente paso consiste en calcular una nueva asignación dentro del nuevo conjunto factible calculando CEA, PRO o bien APRO del nuevo problema. De esta forma en sucesivas etapas se originan nuevos problemas PERT generalizados. El proceso finaliza cuando ningún jugador puede incrementar más su pago.

Con la solución de igual pérdida el procedimiento es diferente. En sucesivas etapas se trata de decrecer a los jugadores en la misma cantidad. En la primera fase no se calcula CEL del problema original sino que se decrece a todos los jugadores en lo máximo posible para encontrar soluciones en la frontera de Pareto. De esta manera después de la primera etapa no nos encontramos con una asignación factible, sino con un vector de nuevas demandas que debe ser decrecido nuevamente. Algunos jugadores no podrán decrecer más sus demandas si queremos encontrar un punto en la frontera de Pareto, estos jugadores alcanzan la solución en esta etapa. El procedimiento prosigue con el resto de jugadores. Detallaremos a continuación el cálculo de estas soluciones.

Algunos conceptos previos necesitan ser introducidos. Por comodidad en la notación denotamos al problema PERT generalizado (G, H, M) en la fase 1 como (G, H^1, M^1), siendo $N = N^1$ el conjunto de jugadores activos[1] en la primera fase y $C^1 = \{C_j \in CA \mid H_j > 0\}$. Denotaremos mediante (G, H^l, M^l) al problema PERT generalizado resultante en la fase l.

Diremos que un *jugador* está *activo* en la fase l si pertenece al conjunto

$$N^l = \left\{ i \in N \ \mid \ M_i^l \neq 0, \, H_j^l \neq 0 \text{ si } i \in C_j \right\}$$

lo que supone que tiene una demanda positiva y que las holguras de los caminos a los que pertenece el jugador son positivas.

En lo sucesivo denotaremos por $C^l = \left\{ C_j \in CA \mid H_j^l > 0 \right\}$ al conjunto de caminos relevantes en la fase l.

Solución de igual ganancia extendida (ECEA).

La idea de la solución de igual ganancia extendida (ECEA) consiste en asignar a los jugadores la misma cantidad mientras sea posible, es decir, sin sobrepasar su demanda inicial dentro de la región factible hasta obtener una solución en la frontera de Pareto. En una primera fase asignamos a cada jugador una cantidad fija que coincide con CEA del problema original. La solución de igual ganancia extendida prosigue en una segunda fase donde le asigna, al resto de los jugadores con demanda positiva, la solución de igual ganancia del problema resultante. En este problema la demanda de cada jugador se ve reducida en lo que se le ha dado previamente y la holgura de cada camino ha decrecido en la suma de las asignaciones recibidas en la primera fase. Fácilmente se observa que el número de jugadores y los caminos a repartir disminuyen a medida que transcurren las fases. El proceso prosigue hasta que ningún jugador puede incrementar su pago, es decir hasta obtener optimalidad de Pareto, que se consigue en a lo sumo c etapas, siendo c el número de caminos no críticos involucrados en el problema.

[1]En los problemas PERT el conjunto de jugadores activos coincide con el conjunto de las actividades que no están en algún camino crítico y que no son ficticias.

Definimos formalmente el procedimiento por fases:
Si $i \notin N^1$ entonces $ECEA_i(G,H,M)=0$.
Sea $i \in N^1$.

- Fase 1

La primera fase consiste en calcular la solución de igual ganancia (CEA) del problema PERT generalizado (G,H^1,M^1).

$$CEA_i^1\left(G,H^1,M^1\right)=CEA_i\left(G,H^1,M^1\right) \quad \text{para todo } \; i\in N^1.$$

En la primera fase la solución de igual ganancia asigna a todos los jugadores la misma cantidad y al menos se reparte la holgura de un camino.

- Fase 2

Consideremos el nuevo problema PERT generalizado (G,H^2,M^2) definido como

$$H_j^2=H_j-\sum_{i\in C_j} CEA_i^1\left(G,H^1,M^1\right), \quad \text{para todo } \; C_j\in C=C^1$$

$$M_i^2=M_i^1-\,CEA_i^1\left(G,H^1,M^1\right), \quad \text{para todo } i\in N^1$$

donde el conjunto de jugadores activos en la fase 2 vendrá representado por

$$N^2=\left\{i\in N^1 \;\;|\;\; M_i^2\neq 0,\, H_j^2\neq 0 \text{ si } i\in C_j\right\},$$

asi definimos

$$CEA_i^2\left(G,H^2,M^2\right)=\begin{cases} CEA_i\left(G,H^2,M^2\right) & \text{si } i\in N^2 \\ 0 & \text{si } i\in N^1\backslash N^2 \end{cases}.$$

Supongamos que tenemos definidas $l-1$ fases.

- Fase l

Sea (G,H^l,M^l) donde

$$H_j^l=H_j-\sum_{i\in C_j}\sum_{k=1}^{l-1} CEA_i^k\left(G,H^k,M^k\right), \quad \text{para todo } \; C_j\in C^{l-1}$$

$$M_i^l = M_i - \sum_{k=1}^{l-1} CEA_i^k \left(G, H^k, M^k\right), \quad \text{para todo } i \in N^1$$

y el conjunto de jugadores activos en la fase l vendrá representado por

$$N^l = \left\{ i \in N^1 \ \mid \ M_i^l \neq 0,\, H_j^l \neq 0 \text{ si } i \in C_j \right\}.$$

Se define

$$CEA_i^l(\, G, H^l, M^l) = \begin{cases} CEA_i(G, H^l, M^l) & \text{si } i \in N^l \\ 0 & \text{si } i \in N^1 \backslash N^l \end{cases}.$$

Este proceso termina cuando $N^l = \emptyset$ para algún l. Teniendo en cuenta que para cada l

$$\left| \left\{ j \in C \ \mid \ H_j^l = 0 \right\} \right| \geq \left| \left\{ j \in C \ \mid \ H_j^{l-1} = 0 \right\} \right| + 1$$

concluimos que el proceso anterior termina en un número finito de etapas.

Si el proceso termina en la etapa l entonces definimos

$$ECEA_i(G, H, M) = \sum_{k=1}^{l} CEA_i^k \left(G, H^k, M^k\right).$$

Además se verifica que

$$ECEA(G, H, M) \in PB(R(G, H, M)).$$

Luego la solución de igual ganancia extendida (ECEA) satisface optimalidad de Pareto (PO) y teniendo en cuenta la proposición 2.2 concluimos que

$$ECEA(G, H, M) \in SC(N, V_{(G,H,M)}) \subset C(N, V_{(G,H,M)}).$$

Solución de igual pérdida extendida (ECEL).

La idea de la solución de igual pérdida consiste en partir de una situación inicial en la que a cada jugador se le da su demanda. Esto nos proporciona un candidato a solución pero en problemas no triviales la asignación proporcionada a cada jugador es excesiva. Sabemos que la solución de igual pérdida (CEL) disminuye a todos los jugadores en la misma cantidad hasta obtener una solución. Aquí planteamos un procedimiento en el que en una primera etapa todos los jugadores pierden la misma cantidad, pero esta cantidad no coincide con CEL; ahora todos los jugadores pierden lo máximo que pueden, entendiendo por ello que si se decreciera a los jugadores en una cantidad superior no sería factible encontrar una solución en la frontera de Pareto. Aquellos jugadores que están en estas circunstancias alcanzan la solución en esta etapa y los jugadores activos en la segunda etapa serán aquellos que pueden continuar decreciendo su demanda. Nótese que ahora no se consigue una asignación factible después de la primera etapa tal y como pasaba en la solución de igual ganancia extendida (ECEA). La solución de igual pérdida extendida (ECEL) prosigue disminuyendo los excesos en diferentes etapas hasta conseguir una solución en la frontera de Pareto.

Definimos formalmente el proceso por fases:
Si $i \notin N^1$ entonces $ECEL_i(G,H,M) = 0$.
Sea $i \in N^1$.

- Fase 1

Dado el problema PERT generalizado (G, H^1, M^1), sea r^1 el mayor número real verificando que

$$\sum_{i \in C_j} \left(M_i^1 - r^1\right) \geq H_j^1 \text{ para todo } C_j \in C^1.$$

Por tanto existe $C_j \in C^1$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i \in C_j} \left(M_i^1 - r^1 - \varepsilon\right) < H_j^1$$

- Fase 2

Sean $M_i^2 = M_i^1 - r^1$ para todo $i \in N^1$ y

$$N^2 = \left\{ i \in N^1 \;\mid \text{existe } \varepsilon > 0 \quad PB\left(R\left(G, H^1, M^2 - \varepsilon 1_{\{i\}}\right)\right) \neq \emptyset \right\}.$$

N^2 representa el conjunto de jugadores a los que se puede seguir decreciendo para encontrar una asignación en la frontera de Pareto de $R(G,H,M)$.
Si $i \in N^1 \backslash N^2$ entonces

$$\begin{aligned} ECEL_i(G,H,M) &= M_i^2 \\ &= M_i - r^1. \end{aligned}$$

En la primera fase todos los jugadores activos decrecen su demanda en la misma cantidad. El conjunto de jugadores activos en la fase 2 coincide con N^2, es decir, son aquellos jugadores que pueden continuar decreciendo su demanda.

Sea $H_j^2 = H_j^1 - \sum_{i \in C_j \cap (N^1 \backslash N^2)} M_i^2$ para todo $C_j \in C^1$.

Dado el problema PERT generalizado (G, H^2, M^2) sea r^2 el mayor número real verificando

$$\sum_{i \in C_j \cap N^2} \left(M_i^2 - r^2\right) \geq H_j^2 \text{ para todo } C_j \in C^2.$$

Por tanto existe $C_j \in C^2$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i \in C_j \cap N^2} \left(M_i^2 - r^2 - \varepsilon\right) < H_j^2.$$

- Fase 3

Sean $M_i^3 = M_i^2 - r^2$ para todo $i \in N^2$, y

$$N^3 = \left\{ i \in N^2 \quad | \text{ existe } \varepsilon > 0 \quad PB\left(R\left(G, H^2, M_{N^2}^3 - \varepsilon 1_{\{i\}}\right)\right) \neq \emptyset \right\}.$$

Si $i \in N^2 \backslash N^3$ entonces

$$\begin{aligned} ECEL_i(G,H,M) &= M_i^3 \\ &= M_i^2 - r^2 \\ &= M_i - r^1 - r^2. \end{aligned}$$

Sean $H_j^3 = H_j^2 - \sum_{i \in C_j \cap (N^2 \backslash N^3)} M_i^3$ para todo $C_j \in C^2$.

Dado el problema PERT generalizado (G, H^3, M^3) sea r^3 el mayor número real verificando

$$\sum_{i \in C_j \cap N^3} \left(M_i^3 - r^3\right) \geq H_j^3 \text{ para todo } C_j \in C^3.$$

Por tanto existe $C_j \in C^3$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i \in C_j \cap N^3} \left(M_i^3 - r^3 - \varepsilon\right) < H_j^3.$$

Supongamos que tenemos definidas $l - 1$ fases.

- Fase l

Sean $M_i^l = M_i^{l-1} - r^{l-1}$ para todo $i \in N^{l-1}$, y

$$N^l = \left\{ i \in N^{l-1} \ \mid \text{existe } \varepsilon > 0 \quad PB\left(R\left(G, H^{l-1}, M_{N^{l-1}}^l - \varepsilon 1_{\{i\}}\right)\right) \neq \emptyset \right\}.$$

Si $i \in N^{l-1} \backslash N^l$ entonces

$$\begin{aligned} ECEL_i(G,H,M) &= M_i^l \\ &= M_i - \sum_{k=1}^{l-1} r^k. \end{aligned}$$

Sea $H_j^l = H_j^{l-1} - \sum_{i \in C_j \cap (N^{l-1} \backslash N^l)} M_i^l$ para todo $C_j \in C^{l-1}$.

Dado el problema PERT generalizado (G, H^l, M^l) sea r^l el mayor número real verificando

$$\sum_{i \in C_j \cap N^l} \left(M_i^l - r^l\right) \geq H_j^l \text{ para todo } C_j \in C^l.$$

Por tanto existe $C_j \in C^l$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i \in C_j \cap N^l} \left(M_i^l - r^l - \varepsilon\right) < H_j^l.$$

Este proceso termina cuando $N^l = \emptyset$ para algún l.

Como $\left|N^{l+1}\right| \leq \left|N^l\right| - 1$ para todo l deducimos que el proceso termina en un número finito de etapas.

Luego la solución de igual pérdida extendida (ECEL) satisface optimalidad de Pareto (PO) ya que se verifica que para cada $C_j \in C$

$$ECEL(G,H,M) \in PB(R(G,H,M)).$$

Usando la proposición 2.2 concluimos que

$$ECEL(G,H,M) \in SC(N, V_{(G,H,M)}) \subset C(N, V_{(G,H,M)}).$$

Solución proporcional y proporcional ajustada extendidas (EPRO, EAPRO).

Basándonos en las mismas ideas que en la extensión de la solución de igual ganancia, se trataría en este caso de aplicar el reparto proporcional o bien el reparto proporcional ajustado reiteradamente hasta alcanzar optimalidad de Pareto. Exponemos a continuación el procedimiento detallado para la solución proporcional. El procedimiento para el reparto proporcional ajustado sería análogo y se formularía sustituyendo PRO por APRO.

Si $i \notin N^1$ entonces $EPRO_i(G, H, M) = 0$.
Sea $i \in N^1$.

- Fase 1

La primera fase consiste en calcular el reparto proporcional (PRO) del problema inicial.

$$PRO_i^1\left(G, H^1, M^1\right) = PRO_i\left(G, H^1, M^1\right) \quad \text{para todo } \; i \in N^1.$$

En la primera fase el reparto proporcional divide las holguras de modo proporcional a sus demandas y al menos se completa la holgura de un camino.

- Fase 2

Consideremos el nuevo problema PERT generalizado (G, H^2, M^2) definido como

$$H_j^2 = H_j - \sum_{i \in C_j} PRO_i^1\left(G, H^1, M^1\right), \quad \text{para todo } \; C_j \in C$$

$$M_i^2 = M_i^1 - \; PRO_i\left(G, H^1, M^1\right), \quad \text{para todo } i \in N^1$$

donde el conjunto de jugadores activos en la fase 2 vendrá representado por

$$N^2 = \left\{ i \in N^1 \quad | \quad M_i^2 \neq 0, \; H_j^2 \neq 0 \text{ si } i \in C_j \right\}.$$

Definimos,

$$PRO_i^2\left(G, H^2, M^2\right) = \begin{cases} PRO_i\left(G, H^2, M^2\right) & \text{si } i \in N^2 \\ 0 & \text{si } i \in N^1 \backslash N^2 \end{cases}.$$

Supongamos que tenemos definidas $l-1$ fases.

- Fase l

Sea (G, H^l, M^l) donde,

$$H_j^l = H_j - \sum_{i \in C_j} \sum_{k=1}^{l-1} PRO_i^k \left(G, H^k, M^k \right), \quad \text{para todo } C_j \in C$$

$$M_i^l = M_i - \sum_{k=1}^{l-1} PRO_i^k \left(G, H^k, M^k \right), \quad \text{para todo } i \in N^1$$

y el conjunto de jugadores activos en la fase l vendrá representado por

$$N^l = \left\{ i \in N^1 \quad | \quad M_i^l \neq 0,\ H_j^l \neq 0 \text{ si } i \in C_j \right\}.$$

Sea

$$PRO_i^l(G, H^l, M^l) = \begin{cases} PRO_i(G, H^l, M^l) & \text{si } i \in N^l \\ 0 & \text{si } i \in N^1 \backslash N^l \end{cases}.$$

Este proceso termina cuando $N^l = \emptyset$ para algún l.

Como $\left| N^{l+1} \right| \leq \left| N^l \right| - 1$ para todo l, obtenemos que este proceso termina en un número finito de etapas. Supongamos que l es la última etapa. Entonces definimos

$$EPRO_i(G, H, M) = \sum_{k=1}^{l} PRO_i^k \left(G, H^k, M^k \right).$$

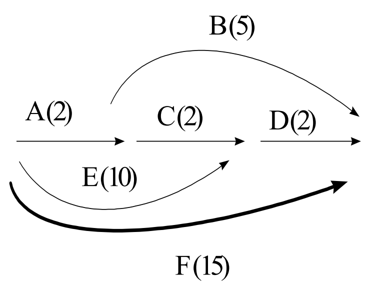
Además se verifica que

$$EPRO(G, H, M) \in PB(R(G, H, M)) \in SC(N, V_{(G,H,M)}) \subset C(N, V_{(G,H,M)}).$$

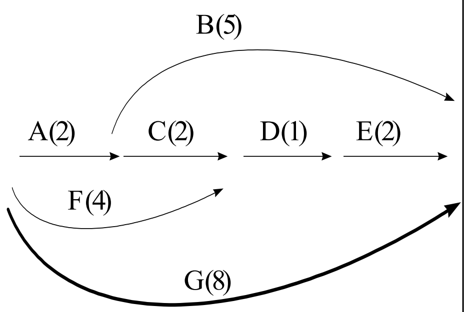
Mostramos a continuación como serían estas soluciones en algunos problemas PERT.

EJEMPLOS

Es fácil comprobar que en el ejemplo 2.1 todas las soluciones asignan el mismo reparto, $(0.5, 0.5, 1.5)$, lo que en general no ocurre como se puede observar en los ejemplos 2.6 y 2.7.



Ejemplo 2.6



Ejemplo 2.7

	Ejemplo 2.6	Ejemplo 2.7
ECEA	$(3.75, 4.25, 3.75, 1.5, 1.5)$	$(0.25, 0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)$
ECEL	$(4, 4, 3.5, 1.5, 1.5)$	$(0.5, 0.5, 0, 0.25, 0.25, 0.5)$
EPRO	$(3.6, 4.4, 4.05, 1.35, 1.65)$	$(0.25, 0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)$
EAPRO	$(3.6, 4.4, 4.05, 1.35, 1.65)$	$(0.25, 0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)$

(Tabla 2.7)

En general $EPRO$ y $EAPRO$ son distintas, a pesar de que en estos ejemplos coinciden.

En el ejemplo 2.7 podemos observar que la holgura a repartir es la misma en todos los caminos. En este ejemplo particular $ECEA, EPRO$ y $EAPRO$ coinciden y sin embargo $ECEL$ difiere. Estudiamos con detalle el cálculo de esta solución en sus distintas fases.

En el problema PERT intervienen los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} N^1 &= \{A, B, C, D, E, F\} \\ C_1 &= \{A, B\} \\ C_2 &= \{A, C, D, E\} \\ C_3 &= \{D, E, F\} \\ C_4 &= \{G\}\,. \end{aligned}$$

El conjunto de caminos no críticos inicialmente se corresponde con $C^1 = \{C_1, C_2, C_3\}$.

Inicialmente $M_i^1 = 1$ para cada actividad $i \in N^1$. En la primera fase lo máximo que podemos decrecer a todos los jugadores es $r^1 = 0.5$ y por tanto todas las actividades reducen su demanda en 0.5 unidades, asi $M_i^2 = 0.5$ para cada $i \in N^1$. Dado que las actividades A y B no pueden reducir más su demanda sin sobrepasar la frontera de Pareto obtenemos que $ECEL_i(G, H, M) = 0.5$ si $i = A, B$. Además si la actividad F reduce su demanda tampoco podríamos encontrar una asignación en la frontera de Pareto dado que $x_A + x_C = x_F$ y sabemos que $x_A = 0.5$. Por tanto $ECEL_i(G, H, M) = 0.5$ si $i = F$.

En la siguiente fase el conjunto de jugadores activos en la segunda fase será $N^2 = \{C, D, E\}$ y el conjunto de caminos no críticos se corresponde con $C^2 = \{C_2, C_3\}$. Además $H^2 = (0.5, 0.5)$. Fácilmente se calcula que $r^2 = 0.25$, con lo cual $M_i^3 = 0.25$ si $i \in N^2$. Además $N^3 = \{C\}$ siendo $C^3 = \{\emptyset\}$ con lo que la actividad C ha de reducir su demanda en su totalidad. La solución obtenida es $ECEL(G, H, M) = (0.5, 0.5, 0, 0.25, 0.25, 0.5)$.

2.7 Aplicaciones prácticas

Se presenta en este apartado una aplicación de los problemas PERT bajo dos enfoques diferentes.

Supongamos que tenemos que realizar un proyecto consistente en una serie de actividades diversas. Concretamente pensemos que el proyecto consiste en la creación de un edificio y las distintas actividades a realizar son todas aquellas necesarias para levantar el edificio y que esté en pleno funcionamiento (planos del edificio, labores de construcción, fontanería, luz, gas, ...). Habitualmente existe un promotor de la obra y diversas empresas contratadas por este promotor. Cada empresa estima el tiempo que necesita para desarrollar su actividad y con estos datos y la relación de precedencia de las diversas actividades se planifica el desarrollo del edificio y se estima su fecha de finalización. Generalmente la mayor parte de los pisos se venden antes de que la obra esté finalizada y se les asegura a los compradores una fecha en la que el piso estará listo para hacer uso de él. Si el proyecto se retrasa existen unos costes asociados producidos por la demora. A continuación proponemos un método para repartir los costes entre las distintas empresas contratadas que tiene en cuenta los retrasos originados por cada empresa.

Sea N el conjunto de actividades o empresas contratadas, (G, h, h^p) el problema PERT asociado, $f_i(G,h,h^p)$ el tiempo extra asignado a la empresa $i \in N$, r_i el retraso originado por la empresa i y c el coste total ocasionado por el retraso. Definimos el conjunto de empresas que se retrasan como $R = \{i \in N \ \mid r_i > f_i(G,h,h^p)\}$, es decir consideramos que una empresa se retrasa si sobrepasa el tiempo extra que se le asigna (además de su duración).

Para cada $i \in N$ definimos la participación de la empresa $i \in N$ en el coste c como

$$p_i(c) = \begin{cases} max\left\{0, c\dfrac{r_i - f_i(G,h,h^p)}{\sum\limits_{i\in R}(r_i - f_i(G,h,h^p))}\right\} & \text{si } i \in R \\ 0 & \text{si } i \in N\backslash R \end{cases}$$

Obviamente se verifica que el conjunto de empresas que se retrasan cubren el coste total, *i.e.*, $\sum\limits_{i\in R} p_i(c) = c$.

Otra posible aplicación de los problemas PERT consiste en diseñar tarifas para repartir los costes ocasionados por los retrasos en una línea ferroviaria integrada por diversas compañías. Supongamos que hay una serie de trenes pertenecientes a diversas compañías que realizan diferentes trayectos desde una ciudad origen hasta una ciudad destino. Si alguno de los trenes de los que se compone el itinerario se retrasa por algún motivo puede tener consecuencias negativas para los pasajeros, quienes podrían no llegar a tiempo para enlazar con otro tren u otro medio de transporte, perder alguna cita importante, etc. Lo que se pretende aquí es dar modos de reparto de los costes monetarios causados por los retrasos.

Dos factores cualitativamente distintos pueden causar retrasos, uno es el debido a los retrasos en los trayectos entre estaciones y otro es debido a los retrasos en las estaciones motivados por causas tales como la no disponibilidad de vías, necesidades de repostar combustible, labores de mantenimiento, ... Aquí expondremos algunas ideas para abordar este problema utilizando los juegos PERT.

Consideremos el problema que involucra a tres trenes y a tres estaciones cuyo grafo se correspondería con el que se ha presentado en el ejemplo 2.1.

Supongamos que tenemos tres trenes (A, B y C) y tres estaciones (E1, E2 y E3) de tal forma que la estación de partida del tren A es E1 siendo la estación de destino E2 y la duración del trayecto de E1 hasta E2 es de 3 unidades de tiempo, mientras que para viajar desde E2 hasta E3 existen dos posibilidades: tomar el tren B que hace escala en alguna estación intermedia, o tomar el tren C que es directo (con duraciones de 6 y 5 unidades de tiempo respectivamente). Por tanto desde E1 hasta E3 hay dos caminos, $C_1 = \{A, B\}$ y $C_2 = \{A, C\}$. Además se permite como mucho que el tiempo destinado para ir desde E1 hasta E3 sea de 10 unidades (tiempo pert).

Supongamos para simplificar el problema que no se originan retrasos en las estaciones y que las duraciones de los trayectos en un viaje en particular son de 3.5 desde E1 hasta E2, 6.75 desde E2 hasta E3 para el tren B y 5.5 para el tren C, lo que supone un retraso de 0.25 unidades de tiempo en el camino C_1 sobre las previsiones iniciales. En este caso existirá un coste c provocado por el retraso.

Para repartir el coste entre los trenes que han provocado el retraso proponemos primeramente repartir las unidades de holgura utilizando las diferentes soluciones propuestas en este trabajo (ECEA, ECEL, EPRO, EAPRO) y una vez tengamos estas asignaciones, los costes se repartirían proporcionalmente a los excesos con respecto a las asignaciones propuestas.

Sea N el conjunto de trenes involucrados en el problema, (G, h, h^p) el problema PERT asociado, $f_i(G, h, h^p)$ el tiempo extra asignado al tren i, r_i el retraso originado por el tren $i \in N$ y c_j el coste ocasionado en el camino C_j.

Sea $R(C_j) = \{i \in C_j \mid r_i > f_i(G, h, h^p)\}$ el conjunto de trenes que se retrasan en el camino C_j, teniendo en cuenta que un tren se retrasa si sobrepasa el tiempo extra que se le asigna (además de la duración de su trayecto).

Dado $i \in C_j$, la participación en el coste c_j para el tren i denotado como $p_i(C_j)$ se correspondería con

$$p_i(C_j) = max \left\{ 0, c_j \frac{r_i - f_i(G, h, h^p)}{\sum\limits_{i \in R(C_j)} (r_i - f_i(G, h, h^p))} \right\}$$

siendo $p_i = \sum\limits_{j \in C | i \in C_j} p_i(C_j)$ la participación de la actividad i en el coste total $c = \sum\limits_{j \in C} c_j$.

Obviamente se verifica que para todo $C_j \in C$

$$\sum_{i \in R(C_j)} p_i(C_j) = c_j$$

$$\sum_{C_j \in C} \sum_{i \in R(C_j)} p_i(C_j) = c.$$

En el ejemplo 2.1 que hemos analizado previamente todas las soluciones consideradas asignan el mismo reparto de las holguras, $(0.5, 0.5, 1.5)$. En la situación planteada anteriormente con retrasos $(0.75, 0.5, 0.5)$, el tren B debe asumir la totalidad del coste c.

Supongamos que las duraciones de los trayectos en otro viaje fueron de 3.75 desde E1 hasta E2, 6.5 desde E2 hasta E3 para el tren B y 6.75 para el tren C, lo que supone un retraso de 0.25 unidades de tiempo en el camino C_1 junto con un retraso de 0.5 unidades en el camino C_2 sobre las previsiones iniciales. En este caso existirá un coste $c = c_1 + c_2$ provocado por los retrasos en ambos caminos que se distribuiría de la siguiente forma

$$\begin{aligned} p_A &= p_A(C_1) + p_A(C_2) = c_1 + c_2 \frac{0.75 - 0.5}{(0.75 - 0.5) + (1.75 - 1.5)} \\ p_B &= 0 \\ p_C &= c_2 \frac{1.75 - 1.5}{(0.75 - 0.5) + (1.75 - 1.5)}. \end{aligned}$$

2.8 Comentarios finales

En este trabajo hemos introducido los problemas PERT y los problemas PERT generalizados.

El enfoque principal ha sido desarrollar conceptos de solución basándose en los ya dados para los problemas de bancarrota. Aquí han sido estudiadas la solución de igual ganancia (CEA), la solución de igual pérdida (CEL), el reparto proporcional (PRO), y el reparto proporcional ajustado (APRO). En el capítulo se encuentran caracterizaciones axiomáticas de estos conceptos de solución que se encuentran en la frontera débil de Pareto.

Existen otras posibilidades de definir soluciones en la frontera débil. Por ejemplo, hemos visto que la solución de igual ganancia (CEA) asigna a cada jugador una misma cantidad que se corresponde con lo máximo que se le puede asignar a los jugadores de forma igualitaria para alcanzar la frontera débil de Pareto. Además esta cantidad es independiente de los caminos a los que pertenecen los jugadores (es decir, de los estados sobre los que demandan). Otra posibilidad consistiría en definir un nuevo reparto que siga la misma línea pero que considere que la asignación que recibe cada jugador debe tener en cuenta únicamente los estados que demanda. Se procedería de la siguiente manera: primeramente se dividen los estados $(H_j)_{j \in C}$ entre los jugadores de cada camino, y si un jugador demanda varios estados se le asigna el mínimo de estas cantidades si su demanda no es inferior a este mínimo; en otro caso, recibe su demanda. Escribimos brevemente en que consistiría este reparto al que denotamos por R .

Sea el problema PERT generalizado $(G, H, M) \in PG$,

$$R_i(G,H,M) = \min \left\{ \min_{j\,|i \in C_j} \left\{ \frac{H_j}{|C_j|} \right\},\, M_i \right\}, \text{ para todo } i \in N.$$

De la misma manera podríamos pensar en hacer lo mismo para la solución de igual pérdida, teniendo en cuenta que a los jugadores se les restaría de su demanda una cantidad que dependería únicamente de los estados que demandase. Una conjetura que tenemos es que ambas soluciones así construidas son duales al igual que ocurría con CEA y CEL.

Otro punto de interés es sin duda el motivado en la sección 2.6 en donde mediante sucesivas aproximaciones extendemos las soluciones desde la frontera débil a la frontera fuerte. En el futuro intentaremos encontrar caracterizaciones axiomáticas para estos conceptos de solución.

Otro punto importante consiste en estudiar conceptos de solución del juego NTU al que da lugar cada problema PERT generalizado. Desde que Aumann y Peleg en 1960 introducen los juegos NTU, muchos conceptos de solución que estaban dados en la clase de juegos TU y en la clase de juegos de regateo han sido extendidos a la clase de juegos NTU. Aquí hemos estudiado conceptos de solución como son el núcleo, el núcleo fuerte y el valor de compromiso (Borm *et al.* (1992)) que a diferencia de los anteriores asigna a cada juego NTU un único punto como solución. Como es sabido existen otros conceptos de solución para juegos NTU, entre ellos los valores de Shapley NTU (Shapley (1969)) que asignan a cada juego un conjunto de valores mediante el mecanismo de las λ transferencias y que generalizan el valor de Shapley en juegos TU y la solución de Nash en los juegos de regateo. Otra alternativa para extender el valor de Shapley a los juegos NTU fue desarrollada por Maschler y Owen (1989, 1992) quienes extienden primero el valor de Shapley a los juegos de hiperplano (aquellos en los que la frontera de Pareto es lineal) y después definen un valor llamado valor consistente de Shapley para juegos NTU asociando un hiperplano a cada juego. También ha sido definido (Otten *et al.* (1998)) el MC valor que es un concepto de solución para juegos NTU monótonos y que generaliza el valor de Shapley para juegos TU, el valor consistente de Shapley para los juegos de hiperplano y la solución de Kalai-Smorodinsky para juegos de regateo. Podrían también ser estudiados para este tipo de juegos los valores NTU de Harsanyi (Harsanyi (1963)).

Otro enfoque diferente sería considerar un problema PERT como un problema de regateo en el que únicamente la gran coalición juega un papel importante. En este sentido $V(N)$ sería el conjunto sobre el que regatean los jugadores y podríamos considerar el punto de desacuerdo como $(V(i))_{i \in N}$.

Otro factor a tener en cuenta son las duraciones de las actividades. Dado un problema PERT podemos considerar que a la hora de dar un reparto de la holgura disponible por las distintas actividades se ha de tener en cuenta la duración de cada actividad, de tal forma que si dos actividades en cierto sentido son “simétricas”, reciba un mayor reparto aquélla que tiene mayor duración. A lo largo de todo este capítulo no hemos tenido en cuenta este hecho que sin duda puede ser de interés. Cabe añadir que en los conceptos de solución aquí desarrollados sería fácil de introducir este factor.

Capítulo 3

Juegos de secuenciación con fechas límite

Una situación de secuenciación consiste en un número de trabajos o tareas que tienen que ser procesadas en un determinado número de máquinas. Además se supone que el número de tareas a realizar es mayor que el número de máquinas disponibles y de esta forma las tareas son procesadas de manera secuencial. Procesar cada tarea lleva asociada una función de coste que puede depender de diversos factores, tales como la máquina en la que se procesa, el tiempo de ejecución, el tiempo que transcurre hasta que es atendida, etc. Encontrar un orden óptimo de las tareas a ser procesadas consiste en obtener el orden que minimiza el coste total. Hay diversos algoritmos que proporcionan cómo alcanzar los órdenes óptimos dependiendo de los elementos que intervengan en el problema. Para un estudio más detallado se puede consultar Lawler *et al.* (1993). Uno de los elementos que interviene en algunos problemas de secuenciación son las fechas límite. Estas fechas nos indican que si una tarea se retrasa, respecto de una prevision inicial, se genera un coste. En este capítulo estudiaremos situaciones de secuenciación en una única máquina en las que las tareas tienen asociadas fechas límite.

La teoría de juegos cooperativos con utilidad transferible permite distribuir entre los agentes involucrados los beneficios generados en la ordenación óptima. Con este tipo de análisis, Curiel *et al.* (1989) asociaron a cada situación de secuenciación un juego cooperativo y estudiaron sus propiedades. De la misma forma asociaremos a cada situación de secuenciación con fechas límite un juego cooperativo con utilidad transferible y estudiaremos algunas propiedades de los juegos asociados. En concreto la mayor parte del estudio se centra en la propiedad de convexidad. Las propiedades de los juegos convexos son bien conocidas; Shapley (1971) y Ichiischi (1981) probaron que los puntos extremos del núcleo son los vectores de contribuciones marginales si y sólo si el juego es convexo, y por tanto, los juegos convexos tienen núcleo no vacío. Con respecto al comportamiento de algunos conceptos de solución para juegos TU, que proporcionan un único punto como distribución de la utilidad que pueden conseguir los miembros de la gran coalición, los juegos convexos también tienen buenas propiedades: el valor de Shapley (Shapley (1953b)) que se define como la media de todas las contribuciones marginales es el baricentro del núcleo, y además otros valores como el $\tau-$valor (Tijs (1981)) se pueden calcular fácilmente.

El capítulo se ha estructurado de la siguiente forma: en la sección 3.1 se describen las situaciones de secuenciación y los juegos asociados. De manera resumida se exponen las principales propiedades de estos juegos introducidos por Curiel *et al.* (1989). En la sección 3.2 se introducen las situaciones de secuenciación con fechas límite y se detallan dos funciones de coste que se analizarán posteriormente con detalle: la función de penalización ponderada y la función de penalización ponderada por el retraso. Para cada una de estas funciones de coste se analizan diferentes algoritmos que proporcionan ordenaciones óptimas. En la sección 3.3 se estudian los juegos de secuenciación asociados y se obtiene una condición necesaria y suficiente para comprobar la convexidad. En la sección 3.4 se comprueba que los juegos de secuenciación con fechas límites en general no son convexos salvo en determinados casos particulares que se analizan. En estos casos los algoritmos descritos en la sección 3.2 y la condición necesaria y suficiente facilitan el trabajo. En el siguiente apartado se describe la regla β (Curiel *et al.* (1989)) y el valor de Shapley para los juegos σ_0-aditivos en componentes. El capítulo concluye con un resumen de los resultados obtenidos junto con los principales problemas todavía no resueltos.

3.1 Situaciones y juegos de secuenciación

Estos problemas fueron introducidos por Curiel *et al.* (1989). Nos centraremos a lo largo de todo este capítulo en situaciones de secuenciación en una única máquina.

Una *situación de secuenciación* viene dada por la tupla (N, σ_0, p, c) donde

- N es el conjunto de trabajos o tareas que tiene que procesar una máquina,

- σ_0 es una permutación de N indicando el orden inicial de las tareas ($\sigma_0(i) = j$ significa que la tarea i será la j-ésima tarea procesada en la máquina),
- $p = (p_i)_{i\in N}$ es un vector que especifica los tiempo de proceso de las diferentes tareas, siendo $p_i > 0$ para cada $i \in N$,
- $c = (c_i)_{i\in N}$ es la función de coste donde $c_i : [0, \infty) \to I\!R$. $c_i(t)$ nos indica el coste de terminar la tarea i en el instante t.

Nos referiremos en esta sección al criterio de costes lineal en el tiempo, *i.e.*,

$$c_i(t) = \alpha_i t + \beta_i \text{ siendo } \alpha_i > 0 \text{ y } \beta_i \in I\!R.$$

El orden que tienen inicialmente asignado las tareas refleja el derecho que tiene cada una de ellas de procesarse en un determinado intervalo de tiempo. Ahora bien, cada grupo de agentes o coalición puede reducir los costes si se reordenan adecuadamente entre ellos. Para precisar esta idea necesitamos definir algunos conceptos previos.

Si el orden de las tareas que van a ser procesadas en una máquina viene dado por $\sigma \in \Pi(N)$, sea $t_{\sigma,i}$ el tiempo de inicio de la tarea i, teniendo en cuenta que las tareas que le preceden según σ han finalizado,

$$t_{\sigma,i} = \sum_{\sigma(j)<\sigma(i)} p_j$$

y sea $t(\sigma, S)$ el tiempo de finalización de las tareas que están en S si el orden viene dado por σ,

$$t(\sigma, S) = \sum_{k|\sigma(k)\leq\sigma(u)} p_k$$

donde u es el último jugador en S siguiendo el orden dado por σ, *i.e.*, $\sigma(u) \geq \sigma(k)$ para todo $k \in S$.

Sea $c_\sigma(S)$ el coste total de las tareas de S en el orden dado por σ,

$$c_\sigma(S) = \sum_{i\in S} c_i(t(\sigma, i)).$$

$c_\sigma(S)$ se corresponde con la suma de todos los costes de las tareas que están en S. Con el criterio de costes lineal en el tiempo de finalización obtendremos que el coste asociado al orden $\sigma \in \Pi(N)$ se corresponde con

$$c_\sigma(N) = \sum_{i \in N} (\alpha_i t(\sigma, i) + \beta_i) \,.$$

Dos problemas pueden ser analizados en esta situación, el primero consiste en encontrar el orden que maximiza las ganancias y el segundo en distribuir las ganancias entre los agentes involucrados.

Smith (1956) resolvió el problema de maximizar las ganancias a través de los índices de urgencia definidos como $u_i = \frac{\alpha_i}{p_i}$ para cada $i \in N$. Describimos formalmente el resultado.

Sea (N, σ_0, p, c) una situación de secuenciación. Entonces

$$\sum_{i \in N} \alpha_i (t(\sigma_0, i) - t(\hat{\sigma}, i)) = \max_{\sigma \in \Pi(N)} \left\{ \sum_{i \in N} \alpha_i (t(\sigma_0, i) - t(\sigma, i)) \right\}$$

si y sólo si

$$u_{\hat{\sigma}^{-1}(1)} \geq u_{\hat{\sigma}^{-1}(2)} \geq \dots \geq u_{\hat{\sigma}^{-1}(n)}.$$

De esta forma para obtener el orden óptimo $\hat{\sigma}$ debemos ordenar las tareas en orden no creciente de sus índices de urgencia. El índice de urgencia de la tarea i, $u_i = \frac{\alpha_i}{p_i}$, mide el coste por unidad de tiempo de proceso para la tarea $i \in N$. Dado que el criterio de costes es lineal en el tiempo parece razonable ordenar las tareas del modo que se indica.

Dos jugadores i y $j \in N$ son contiguos en el orden σ si $\sigma(i) = \sigma(j) + 1$ o bien $\sigma(i) = \sigma(j) - 1$.

Curiel *et al.* (1989) introducen la *solución de igual ganancia entre jugadores contiguos* (EGS). Considerando los intercambios de jugadores que proporciona la regla de Smith, la ganancia de intercambiar dos jugadores contiguos $i, j \in N$ tal que i precede a j se corresponde con

$$g_{ij} = max \left\{ \alpha_j p_i - \alpha_i p_j, 0 \right\}.$$

En función de estos coeficientes, si $\hat{\sigma}$ es un orden óptimo de la situación de secuenciación (N, σ_0, p, c) se obtiene que

$$c_{\sigma_0}(N) - c_{\hat{\sigma}}(N) = \sum_{i,j \in N | \sigma_0(i) < \sigma_0(j)} g_{ij}.$$

La solución de igual ganancia entre jugadores contiguos, EGS, es una aplicación que asigna a cada situación de secuenciación (N, σ_0, p, c) un vector de $\mathbb{R}^n$, definido de la siguiente forma:

$$EGS_i(N, \sigma_0, p, \alpha) = \frac{1}{2} \sum_{j \in F(\sigma_0, i)} g_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k \in P(\sigma_0, i)} g_{ki}$$

para todo $i \in N$.

Esta regla de asignación es independiente del orden óptimo elegido y asigna a cada jugador la mitad de las ganancias que se obtienen en todos los intercambios en los que interviene el jugador para la obtención del orden óptimo a partir del orden inicial.

Curiel *et al.* (1989) definen el juego de secuenciación y para ello introducen los órdenes admisibles. Un *orden* $\sigma \in \Pi(N)$ es *admisible* para S si satisface las siguientes condiciones:

- $t_{\sigma_0, i} = t_{\sigma, i}$ para todo $i \in N \backslash S$.
- $P(\sigma_0, i) \cap (N \backslash S) = P(\sigma, i) \cap (N \backslash S)$ para todo $i \in S$.

La primera condición indica que el tiempo de inicio de cada tarea que no está en la coalición S es el mismo que en el orden inicial, mientras que la segunda condición no permite a los jugadores de S saltar sobre jugadores que no estén en S. Con ello se asegura que los agentes de $N \backslash S$ no salgan perjudicados cuando los de S se reordenan entre ellos. Al conjunto de órdenes admisibles de la coalición S lo denotaremos por $\sum_S$.

La utilidad que puede conseguir una coalición se define como la máxima ganancia que pueden obtener los miembros de la coalición por medio de órdenes admisibles. Formalmente, a cada situación de secuenciación (N, σ_0, p, c) se le puede asociar el correspondiente juego TU de secuenciación (N, v) donde para cada $S \in 2^N$,

$$v(S) = \max_{\sigma \in \sum_S} \left\{ \sum_{i \in S} \alpha_i \left(t(\sigma_0, i) - t(\sigma, i) \right) \right\}. \tag{3.1}$$

La expresión (3.1) puede ser reescrita en términos de los coeficientes g_{ij}. Para ello definimos el concepto de coalición conexa. Una *coalición* S es *conexa* con respecto a σ_0 si para todo $i, j \in S$ y $k \in N$ tal que $\sigma_0(i) < \sigma_0(k) < \sigma_0(j)$ se verifica que $k \in S$. Una coalición conexa $S \subset T$ es una *componente* de T si $S \cup \{i\}$ no es una coalición conexa para cada $i \in T \backslash S$.

Las componentes de T forman una partición de T, denotada por T/σ_0. De esta forma, para cada coalición S conexa con respecto a σ_0

$$v(S) = \sum_{i,j \in S | \sigma_0(i) < \sigma_0(j)} g_{ij}$$

y para cada coalición T no conexa con respecto a σ_0

$$v(T) = \sum_{S \in T/\sigma_0} v(S).$$

Curiel *et al.* (1989) probaron que los juegos de secuenciación son juegos convexos, y por tanto estos juegos son equilibrados, es decir, el núcleo es no vacío. Además Curiel *et al.* (1994) probaron que si (N, σ_0, p, c) es una situación de secuenciación donde la función de coste es aditiva y monótona no decreciente en el tiempo de finalización, la regla de asignación EGS se encuentra en el núcleo del juego de secuenciación asociado.

3.2 Situaciones de secuenciación con fechas límite

Una *situación de secuenciación con fechas límite* viene dada por la tupla (N, σ_0, p, d, c) donde

- N es el conjunto de trabajos o tareas que tiene que procesar una máquina,
- σ_0 es una permutación de N indicando el orden inicial de las tareas ($\sigma_0(i) = j$ significa que la tarea i será la j-ésima tarea procesada en la máquina),
- $p = (p_i)_{i \in N}$ es un vector que especifica el tiempo de proceso, siendo $p_i > 0$ para cada trabajo $i \in N$,
- $d = (d_i)_{i \in N}$ es un vector que especifica la fecha límite de proceso para cada trabajo $i \in N$, $d_i > 0$. Supondremos que en el orden inicial σ_0 todas las tareas están ordenadas de forma no decreciente de sus fechas límite, *i.e.*, $d_{\sigma_0^{-1}(1)} \leq ... \leq d_{\sigma_0^{-1}(n)}$.
- $c = (c_i)_{i \in N}$, nos indica que si un trabajo o tarea i es procesado después de su fecha límite incurre en un coste que viene dado por $c_i : [0, \infty) \rightarrow I\!R$, $c_i(t)$ indica el coste derivado de terminar el trabajo i en el instante t.

Consideraremos dos tipos de funciones de coste. La primera la denominaremos *función de penalización ponderada* y viene dada por

$$c_i^1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq d_i \\ \alpha_i & \text{si } t > d_i \end{cases} .$$

La función de coste anterior nos indica que si la tarea i termina después de su fecha límite entonces incurre en un coste fijo $\alpha_i > 0$.

La segunda función de coste que analizaremos la denominaremos *función de penalización ponderada por el retraso* y se corresponde con

$$c_i^2(t) = \alpha_i(t - d_i)_+ = \alpha_i \max\{t - d_i, 0\}.$$

Por tanto, la tarea i no incurrirá en ningún coste si es terminada antes de su fecha límite, en otro caso deberá asumir un coste proporcional a su retraso.

Abreviadamente designaremos a las situaciones de secuenciación con fechas límite cuyas funciones de costes son c^1 y c^2 mediante C1 y C2 respectivamente.

De manera análoga a las situaciones de secuenciación descritas en la sección 3.1 dos problemas pueden ser analizados en estas situaciones, el primero consiste en encontrar los órdenes óptimos que maximizan las ganancias y el segundo en distribuir las ganancias entre los agentes involucrados.

Adoptaremos la siguiente notación. Si σ_0 es el orden inicial de los tareas e, i y j son tareas tal que i precede a j, *i.e.* $\sigma_0(i) < \sigma_0(j)$, entonces definimos

$$\begin{aligned} (i,j]_{\sigma_0} &= \{k \in N \mid \sigma_0(i) < \sigma_0(k) \leq \sigma_0(j)\} \\ [i,j)_{\sigma_0} &= \{k \in N \mid \sigma_0(i) \leq \sigma_0(k) < \sigma_0(j)\} \\ (i,j)_{\sigma_0} &= \{k \in N \mid \sigma_0(i) < \sigma_0(k) < \sigma_0(j)\} \\ [i,j]_{\sigma_0} &= \{k \in N \mid \sigma_0(i) \leq \sigma_0(k) \leq \sigma_0(j)\}. \end{aligned}$$

En las anteriores expresiones, el subíndice será omitido cuando σ_0 sea la permutación identidad ($\sigma_0(i) = i$ para todo $i \in N$).

Diremos que un conjunto de tareas S pueden ser finalizadas a tiempo en el orden σ si $t(\sigma, i) \leq d_i$ para todo $i \in S$. En este caso se dirá que S es un *conjunto factible en tiempo.* Sean $m, j \in N$ tales que $\sigma_0(m) < \sigma_0(j)$, $S \subset [m, j]_{\sigma_0}$ y $\sigma \in \Pi(N)$. (S, σ) es un *conjunto* $[m, j]_{\sigma_0}$ *− factible en tiempo* si $t(\sigma, i) \leq d_i$ para todo $i \in S$ y $\sigma(i) = \sigma_0(i)$ si $\sigma_0(i) < \sigma_0(m)$ ó si $\sigma_0(i) > \sigma_0(j)$.

Un conjunto S factible en tiempo se dice que es un *conjunto* $[m, j]_{\sigma_0}-$ *óptimo* si existe una permutación $\sigma \in \Pi(N)$ tal que (S, σ) es un conjunto $[m, j]_{\sigma_0}$ −factible y $c_\sigma(S) \leq c_\tau(R)$ para cada (R, τ), $R \subset [m, j]_{\sigma_0}$ que es un conjunto $[m, j]_{\sigma_0}-$ factible en tiempo. En general no tiene porque existir un único conjunto $[m, j]_{\sigma_0}-$ óptimo pero de existir más de uno obviamente el coste asociado es el mismo.

Una *solución* al problema de secuenciación consiste en obtener un conjunto $[1, n]_{\sigma_0}$ −óptimo.

A continuación analizamos algunos algoritmos que nos permiten la obtención de los conjuntos $[m, j]-$óptimos utilizando las dos funciones de coste consideradas. Observaremos que los algoritmos se complican cuando se consideran funciones de coste no lineales, incluso en determinadas ocasiones deben asumirse inicialmente algunas hipótesis si el propósito es obtener algoritmos en tiempo polinomial (tiempo de cálculos computacionales "razonable"). En algunos casos concretos obtendremos índices de urgencia en el mismo sentido que hemos definido previamente.

3.2.1 Situación de secuenciación C1: obtención de los órdenes óptimos

Dada una situación de secuenciación con fechas límites (N, σ_0, p, d, c^1), se presenta a continuación para algunos casos específicos una variante del algoritmo dado por Lawler (1976) que nos permite obtener el orden óptimo a partir de un orden inicial σ_0 de las tareas. Alguna notación necesita ser incluída para clarificar el algoritmo.

Denotaremos por $V_{[m,j]_{\sigma_0}}$ al conjunto $[m, j]_{\sigma_0}$ − óptimo, y por $a_{[m,j]_{\sigma_0}}$ a las ganancias resultado de reordenar a los jugadores de $[m, j]_{\sigma_0}$ a partir de un orden óptimo de $[m, j)_{\sigma_0}$. Al conjunto de tareas de $[m, j]_{\sigma_0}$que no pueden ser finalizadas antes de su fechas límite lo denotaremos mediante $G_{[m,j]_{\sigma_0}}$. De esta forma $G_{[m,j]_{\sigma_0}} = [m, j]_{\sigma_0} \setminus V_{[m,j]_{\sigma_0}}$ (nos referiremos a este conjunto como caja móvil en lo sucesivo).

Cuando el orden inicial no desempeñe un papel importante obviaremos el subíndice σ_0, en cuyo caso se supondrá que σ_0 es la permutación identidad. En este caso, denotaremos un conjunto $[1, j]_{\sigma_0}-$ factible en tiempo como un conjunto $j-$ factible en tiempo, un conjunto $[1, j]_{\sigma_0}-$ óptimo como un conjunto $j-$ óptimo, $V_{[1,j]_{\sigma_0}} = V_j$, $G_{[1,j]_{\sigma_0}} = G_j$ y $a_{[1,j]_{\sigma_0}} = a_j$.

Bajo la hipótesis adicional siguiente:

h1) Para todo $i, j \in N$ si $p_i < p_j$ entonces $\alpha_i \geq \alpha_j$, Lawler (1976) dio un algoritmo para encontrar un conjunto $n-$óptimo siendo la función de coste la función de penalización ponderada. La obtención de un conjunto $j-$óptimo se establece de forma recursiva como se muestra a continuación. Sea inicialmente σ^0 la permutación identidad y $V_0 = \emptyset$. Se define

$$V_j = \begin{cases} V_{j-1} \cup \{j\} & \text{si } t(\sigma^{j-1}, V_{j-1}) + p_j \leq d_j \\ (V_{j-1} \cup \{j\}) \setminus \{l\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $V_j = V_{j-1} \cup \{j\}$ entonces $\sigma^j = \sigma^{j-1}$ y si $V_j = (V_{j-1} \cup \{j\}) \setminus \{l\}$, entonces σ^j se obtiene de σ^{j-1} pasando la tarea l al lugar que tenía la tarea j y adelantando una posición a todos las tareas que están entre l y j. La tarea l es el menor elemento con respecto a la relación de orden "ser menos preferido" que se establece a continuación en $V_{j-1} \cup \{j\}$.

$$i \prec k \text{ si y sólo si } \begin{cases} p_i > p_k \\ p_i = p_k \text{ y } \alpha_i < \alpha_k \\ p_i = p_k, \ \alpha_i = \alpha_k \text{ y } \sigma^{j-1}(i) < \sigma^{j-1}(k) \end{cases} \tag{3.2}$$

El algoritmo de la caja móvil de Lawler

Bajo la hipótesis h1) considerada previamente, proponemos en esta sección una variante del algoritmo de Lawler que nos permitirá calcular los conjuntos $j-$óptimos.

Consideremos la situación inicial de partida dada por $V_0 = \emptyset$, siendo σ^0 la permutación identidad.

Primer paso:

Consideremos la primera tarea. Si puede finalizarse antes de su fecha límite etiquetarla dentro de V_1 y continuar con el algoritmo en el segundo paso. En otro caso, etiquetarla en la caja móvil G_1 e ir al segundo paso. Es decir,

- Si $p_1 \leq d_1$, $V_1 = \{1\}$ y $\sigma^1 = \sigma_0$.
- Si $p_1 > d_1$, $V_1 = \emptyset$, $G_1 = \{1\}$ y $\sigma^1 = \sigma_0$.

En ambos casos no hay ganancias ($a_1 = 0$).

j-ésimo paso:

- Si no existe caja móvil ($G_{j-1} = \emptyset$), considérese la tarea j que en el orden inicial estará justamente después de la tarea $j-1$.

– Si j es finalizada antes de su fecha límite, nuevamente no existe caja móvil y se pasa al siguiente paso. Esto significa que $V_j = V_{j-1} \cup \{j\}$, $G_j = \{\emptyset\}$ y para cada $s \in N$, $\sigma^j(s) = \sigma^{j-1}(s)$ (véase gráfico 3.1).

Gráfico 3.1

En este caso no hay ganancias ($a_j = 0$).

– Si la tarea j no es finalizada antes de su fecha límite, la tarea menos preferida según la definición introducida por Lawler se mueve a la caja móvil y se coloca la caja móvil justo detrás de las tareas que son finalizadas a tiempo.

Entonces $V_j = (V_{j-1} \cup \{j\}) \setminus \{l\}$ donde l viene determinado por (3.2). Uno de los siguientes casos debe suceder:

∗ Si $l = j$, $V_j = V_{j-1}$, y para cada $s \in N$, $\sigma^j(s) = \sigma^{j-1}(s)$ y $G_j = \{j\}$. Nuevamente no hay ganancias ($a_j = 0$) (véase gráfico 3.2).

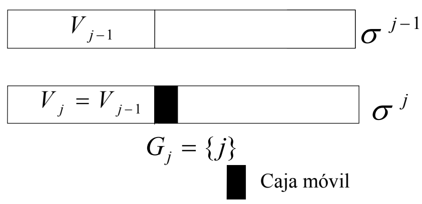


Gráfico 3.2

∗ Si $l \neq j$, $V_j = (V_{j-1} \cup \{j\}) \setminus \{l\}$, $G_j = \{l\}$ y

$$\sigma^j(s) = \begin{cases} \sigma^{j-1}(s) & \text{si } s \in V_{j-1}\setminus\{l\} \text{ y } \sigma^{j-1}(s) < \sigma^{j-1}(l) \\ \sigma^{j-1}(j) & \text{si } s = l \\ \sigma^{j-1}(s) - 1 & \text{si } s \in V_{j-1}\setminus\{l\} \text{ y } \sigma^{j-1}(s) > \sigma^{j-1}(l) \\ \sigma^{j-1}(j) - 1 & \text{si } s = j \\ \sigma^{j-1}(s) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

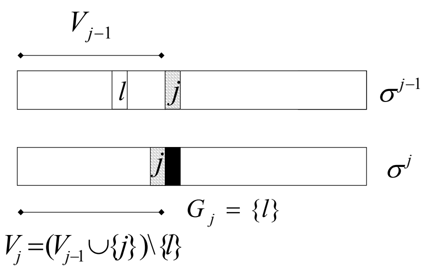


Gráfico 3.3

En este caso hay una ganancia estrictamente positiva ($a_j = \alpha_j - \alpha_l > 0$).

- Si existen tareas en la caja móvil ($G_{j-1} \neq \emptyset$), sitúese la tarea j justo delante de la caja móvil.

  – Si ahora la tarea j puede ser finalizada a tiempo, puede ser debido a dos causas:

    ∗ Si la tarea j ya era finalizada a tiempo en su posición original, ahora obviamente seguirá finalizándose a tiempo. Por tanto el desplazamiento de la tarea j no ha causado alguna ganancia ($a_j = 0$), ya que los trabajos de la caja móvil nunca son finalizados antes de sus fechas límite.

    ∗ Si la tarea j no estaba inicialmente en tiempo, moverla justo delante de la caja móvil proporciona una ganancia estrictamente positiva ($a_j = \alpha_j$).

  En ambos casos: $V_j = V_{j-1} \cup \{j\}$, $G_j = G_{j-1}$, y

$$\sigma^j(s) = \begin{cases} \sigma^{j-1}(s) & \text{si } s \in V_{j-1} \\ \sigma^{j-1}(s) + 1 & \text{si } s \in G_{j-1} \\ \sigma^{j-1}(u) + 1 & \text{si } s = j \\ \sigma^{j-1}(s) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde u es el último trabajo procesado en V_{j-1}, *i.e.*, $\sigma^{j-1}(u) \geq \sigma^{j-1}(s)$ para cada $s \in V_{j-1}$.

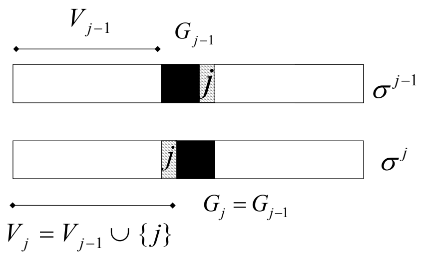


Gráfico 3.4

– Si la tarea j no es finalizada a tiempo, significa que ciertamente no era finalizada a tiempo en su posición inicial, por tanto moverla justo delante de la caja móvil no proporciona ganancia alguna. Ahora elijamos la tarea que debe ir a la caja móvil siguiendo el algoritmo de Lawler y póngase esta tarea en la caja móvil justo detrás de la última tarea de la caja móvil del paso previo. Fácilmente se comprueba que todas las tareas de la caja móvil del paso anterior permanecerán en la misma posición. De nuevo nos encontramos con dos posibilidades:

  ∗ La tarea j fue la tarea que se unió a la caja móvil. En este caso no hay ganancias ($a_j = 0$). Además, $V_j = V_{j-1}$, $G_j = G_{j-1} \cup \{j\}$ y $\sigma^j(s) = \sigma^{j-1}(s)$ para cada $s \in N$ (véase gráfico 3.5).

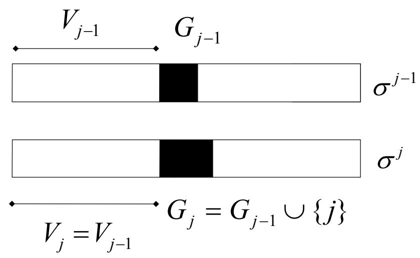


Gráfico 3.5

  ∗ La tarea j no fue la tarea que se unió a la caja móvil. Siguiendo el algoritmo de Lawler (1976), vemos que la tarea

j debe ahora ser finalizada a tiempo y se ha producido una ganancia estrictamente positiva ($a_j = \alpha_j - \alpha_l$). En este caso $V_j = (V_{j-1} \cup \{j\}) \setminus \{l\}$, $G_j = G_{j-1} \cup \{l\}$, y

$$\sigma^j(s) = \begin{cases} \sigma^{j-1}(s) & \text{si } s \in V_{j-1} \setminus \{l\} \text{ y } \sigma^{j-1}(s) < \sigma^{j-1}(l) \\ \sigma^{j-1}(j) & \text{si } s = l \\ \sigma^{j-1}(s) - 1 & \text{si } s \in V_{j-1} \setminus \{l\} \text{ y } \sigma^{j-1}(s) > \sigma^{j-1}(l) \\ \sigma^{j-1}(s) & \text{si } s \in G_{j-1} \\ \sigma^{j-1}(u) & \text{si } s = j \\ \sigma^{j-1}(s) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde u es el último trabajo procesado en V_{j-1}, *i.e.*, $\sigma^{j-1}(u) \geq \sigma^{j-1}(s)$ para cada $s \in V_{j-1}$.

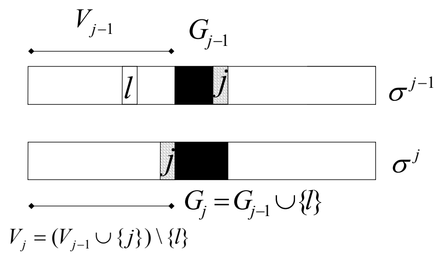


Gráfico 3.6

Si todavía hay tareas para ser realizadas en posiciones posteriores a las tareas que están en la caja móvil, ir al próximo paso. En otro caso el orden óptimo viene dado por σ^j.

Este algoritmo termina en n etapas. Además es fácil ver que las tareas que están en posiciones previas a la caja móvil son exactamente las tareas que definió Lawler en su algoritmo, mientras que en la caja móvil se encuentran aquellas tareas que no son procesadas a tiempo. Por tanto, la solución final es una solución óptima de acuerdo al teorema 3 de Lawler (1976). También se comprueba que el óptimo ha sido alcanzado mediante sucesivos intercambios entre jugadores o bien entre un jugador y la caja móvil, que proporcionan ganancias mayores o iguales a 0 ($a_j \geq 0$).

3.2.2 Situación de secuenciación C2: obtención de los órdenes óptimos

Sea (N, σ_0, p, d, c^2) una situación de secuenciación C2. Con esta función de coste no existe en el caso general ningún algoritmo en tiempo polinomial que nos permita obtener el orden óptimo. Por ello nos restringimos a casos particulares.

Sabemos que $\hat{\sigma} \in \Sigma_S$ es óptimo si

$$c_{\sigma_0}(S) - c_{\hat{\sigma}}(S) = \max_{\sigma \in \Sigma_S} \{c_{\sigma_0}(S) - c_{\sigma}(S)\}.$$

A continuación procedemos a describir de forma resumida la ordenación óptima en determinados casos particulares. La demostración de dichos resultados se hará posteriormente.

- Iguales penalizaciones y tiempos de proceso ($\alpha_i = \alpha$ y $p_i = p$ para todo $i \in N$).

  Para cada coalición S conexa, un orden óptimo de la coalición S, $\hat{\sigma}(S)$, se determina ordenando las tareas en orden no decreciente de sus fechas límite, es decir,

  $$d_{\hat{\sigma}^{-1}(1)} \leq d_{\hat{\sigma}^{-1}(2)} \leq ... \leq d_{\hat{\sigma}^{-1}(n)}.$$

- Iguales penalizaciones y fechas límite ($\alpha_i = \alpha$ y $d_i = d$ para todo $i \in N$).

  Para cada coalición S conexa, un orden óptimo de la coalición S, $\hat{\sigma}(S)$, se determina ordenando las tareas de S en orden no decreciente de sus tiempos de proceso, es decir,

  $$p_{\hat{\sigma}^{-1}(1)} \leq p_{\hat{\sigma}^{-1}(2)} \leq ... \leq p_{\hat{\sigma}^{-1}(n)}.$$

- Iguales tiempos de proceso y fechas límite ($p_i = p$ y $d_i = d$ para todo $i \in N$).

  Para cada coalición S conexa, un orden óptimo de la coalición S, $\hat{\sigma}(S)$, se determina ordenando las tareas de S en orden no creciente de sus penalizaciones, es decir,

  $$\alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(1)} \geq \alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(2)} \geq ... \geq \alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(n)}.$$

A continuación demostramos los anteriores resultados.

Nota 3.1 En una situación de secuenciación C2 con iguales penalizaciones y tiempos de proceso el orden inicial σ_0 es óptimo teniendo en cuenta que inicialmente los trabajos están ordenados de forma no decreciente de sus fechas límite, *i.e.*, $d_{\sigma_0^{-1}(1)} \leq d_{\sigma_0^{-1}(2)} \leq ... \leq d_{\sigma_0^{-1}(n)}$.

Lema 3.1 *Sea* (N, σ_0, p, d, c^2) *una situación de secuenciación C2 y* $\sigma \in \Pi(N)$. *Si* $\alpha_i = \alpha$ *y* $d_i = d$ *para todo* $i \in N$, *la ganancia de intercambiar* i *con* j *si* $p_i > p_j$ *y* $\sigma(j) = \sigma(i) + 1$ *en el orden* σ *se corresponde con*

$$g_{ij}^{\sigma} = \min \left\{ \left[\alpha \left(t(\sigma, i) - d\right)\right]_+, \alpha \left(p_i - p_j\right) \right\}.$$

Demostración.
Uno de los siguientes casos ha de ocurrir:

A) $d \geq t(\sigma, i)$ y $d \geq t(\sigma, j)$. En este caso los jugadores i y j están en tiempo en el orden σ, y por tanto continúan en tiempo al intercambiar sus posiciones, con lo que las ganancias son de 0 unidades.

B) $d \geq t(\sigma, i)$ y $d < t(\sigma, j)$. En este caso el jugador i está en tiempo en el orden σ, mientras que el jugador j no lo está. Resulta trivial comprobar que $g_{ij}^{\sigma} = 0$ teniendo en cuenta que $\alpha_i = \alpha_j = \alpha$.

C) $d < t(\sigma, i)$. En este caso el jugador i no está en tiempo en el orden σ y por tanto tampoco lo está el jugador j. Distinguimos dos subcasos:

C1) $t(\sigma, i) - p_i + p_j \leq d$. En este caso al intercambiar las posiciones entre el jugador i y el jugador j, el jugador j pasa a estar en tiempo y las ganancias de intercambiar posiciones se corresponden con

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\sigma} &= \alpha \left(\sum_{k \in P(\sigma, i)} p_k + p_i - d \right) + \alpha \left(\sum_{k \in P(\sigma, i)} p_k + p_i + p_j - d \right) \\ &\quad - \alpha \left(\sum_{k \in P(\sigma, i)} p_k + p_j + p_i - d \right) \\ &= \alpha \left(\sum_{k \in P(\sigma, i)} p_k + p_i - d \right) \\ &= \alpha \left(t(\sigma, i) - d \right). \end{aligned}$$

C2) $t(\sigma,i) - p_i + p_j > d$. En este caso al intercambiar las posiciones entre el jugador i y el jugador j, el jugador j se mantiene fuera de tiempo y las ganancias de intercambiar posiciones se corresponden con

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\sigma} &= \alpha\left(\sum_{k\in P(\sigma,i)} p_k + p_i - d\right) + \alpha\left(\sum_{k\in P(\sigma,i)} p_k + p_i + p_j - d\right) \\ &\quad -\alpha\left(\sum_{k\in P(\sigma,i)} p_k + p_j - d\right) - \alpha\left(\sum_{k\in P(\sigma,i)} p_k + p_j + p_i - d\right) \\ &= \alpha\left(p_i - p_j\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las anteriores expresiones podemos escribir conjuntamente

$$g_{ij}^{\sigma} = \min\left\{\left[\alpha\left(t(\sigma,i) - d\right)\right]_+, \alpha\left(p_i - p_j\right)\right\}. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.1 *Sea* (N,σ_0,p,d,c^2) *una situación de secuenciación C2 siendo* $\alpha_i = \alpha$ y $d_i = d$ *para todo* $i \in N$. $\hat{\sigma}$ *es óptimo si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

$$p_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} \leq p_{\hat{\sigma}^{-1}(k+1)} \leq \ldots \leq p_{\hat{\sigma}^{-1}(n)} \tag{3.3}$$

$$p_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} \geq p_i \;\; \textit{para todo } i \in N \setminus \left\{\hat{\sigma}^{-1}(k), \hat{\sigma}^{-1}(k+1), \ldots, \hat{\sigma}^{-1}(n)\right\} \tag{3.4}$$

siendo $t(\hat{\sigma},\hat{\sigma}^{-1}(k-1)) \leq d < t(\hat{\sigma},\hat{\sigma}^{-1}(k))$.

Demostración.

Observamos que $\hat{\sigma}^{-1}(k)$ es la primera tarea que se realiza después de su fecha límite.

Primeramente mostramos que es necesario que las tareas estén ordenadas de forma no decreciente de sus tiempos de proceso.

Supongamos que $\hat{\sigma}$ no satisface (3.3). Entonces existen $i,j \in N$ tales que $\hat{\sigma}(j) = \hat{\sigma}(i) + 1$ siendo $p_i > p_j$ y $d < t(\hat{\sigma},\hat{\sigma}^{-1}(i))$ Consideremos el orden τ definido como $\tau(m) = \hat{\sigma}(m)$ para todo $m \in N\setminus\{i,j\}$, $\tau(i) = \hat{\sigma}(j)$ y $\tau(j) = \hat{\sigma}(i)$. Entonces del lema 3.1 se obtiene que

$$c_{\hat{\sigma}}^2(N) - c_{\tau}^2(N) = \min\left\{\left[\alpha\left(t(\hat{\sigma},i) - d\right)\right]_+, \alpha\left(p_i - p_j\right)\right\} > 0$$

lo que contradice la optimalidad de $\hat{\sigma}$.

Supongamos que $\hat{\sigma}$ no satisface (3.4), entonces podemos concluir que existe una tarea $i \in N \backslash \left\{\hat{\sigma}^{-1}(k), \hat{\sigma}^{-1}(k+1), ..., \hat{\sigma}^{-1}(n)\right\}$ tal que $p_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} < p_i$. Consideremos el orden τ definido como $\tau(m) = \hat{\sigma}(m)$ para todo $m \in N \backslash \left\{i, \hat{\sigma}^{-1}(k)\right\}$, $\tau(i) = k$ y $\tau(\hat{\sigma}^{-1}(k)) = \hat{\sigma}(i)$. Entonces del lema 3.1 obtenemos que

$$c^2_{\hat{\sigma}}(N) - c^2_{\tau}(N) = \min\left\{[\alpha\left(t(\hat{\sigma}, i) - d\right)]_+ , \alpha\left(p_i - p_{\hat{\sigma}^{-1}(k)}\right)\right\} > 0$$

lo que contradice la optimalidad de $\hat{\sigma}$.

A continuación probamos que es suficiente que las tareas se ordenen según (3.3) y (3.4). Primeramente consideremos que dadas σ_1 y $\sigma_2 \in \Pi(N)$ verificando (3.3) y (3.4) si se verifica que $t(\sigma_1, \sigma_1^{-1}(k-1)) \leq d < t(\sigma_1, \sigma_1^{-1}(k))$ entonces $t(\sigma_2, \sigma_2^{-1}(k-1)) \leq d < t(\sigma_2, \sigma_2^{-1}(k))$.

Sea $\hat{\sigma} \in \Pi(N)$ verificando (3.3) y (3.4), y sea τ un orden óptimo. Por tanto $\hat{\sigma}$ verifica que

$$p_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} \leq p_{\hat{\sigma}^{-1}(k+1)} \leq ... \leq p_{\hat{\sigma}^{-1}(n)}$$

y además $p_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} \geq p_i$ para todo $i \in N \backslash \left\{\hat{\sigma}^{-1}(k), \hat{\sigma}^{-1}(k+1), ..., \hat{\sigma}^{-1}(n)\right\}$ siendo $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $t(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^{-1}(k-1)) \leq d < t(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^{-1}(k))$. Además como τ es un orden óptimo sabemos que intercambiando jugadores contiguos i, j que satisfacen $p_i = p_j$ con $i, j \in \left\{\tau^{-1}(k), \tau^{-1}(k+1), ..., \tau^{-1}(n)\right\}$, o intercambiando tareas en $N \backslash \left\{\tau^{-1}(k), \tau^{-1}(k+1), ..., \tau^{-1}(n)\right\}$, podemos obtener $\hat{\sigma}$ a partir de τ, y dichos intercambios no incrementan el coste asociado con lo que deducimos que $\hat{\sigma}$ es optimal. ■

Lema 3.2 *Sea* (N, σ_0, p, d, c^2) *una situación de secuenciación* C2 y $\sigma \in \Pi(N)$. *Si* $p_i = p$ *y* $d_i = d$ *para todo* $i \in N$, *la ganancia de intercambiar* i *con* j *si* $\alpha_j > \alpha_i$ y $\sigma(j) = \sigma(i) + 1$ *en el orden* σ *se corresponde con*

$$g^{\sigma}_{ij} = \min\left\{[(\alpha_j - \alpha_i)\left((|P(\sigma, i)| + 2)p - d\right)]_+ , p(\alpha_j - \alpha_i)\right\}. \tag{3.5}$$

Demostración.

Uno de los siguientes casos ha de ocurrir:

A) $d \geq t(\sigma, i)$ y $d \geq t(\sigma, j)$. En este caso los jugadores i y j están en tiempo en el orden σ, y por tanto al intercambiar sus posiciones continuan en tiempo y las ganancias son de 0 unidades.

B) $d \geq t(\sigma, i)$ y $d < t(\sigma, j)$. En este caso el jugador i está en tiempo en el orden σ, mientras que el jugador j no lo está. Las ganancias de intercambiar posiciones se corresponden con

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\sigma} &= \alpha_j\left((|P(\sigma,i)|+2)p-d\right)-\alpha_i\left((|P(\sigma,i)|+2)p-d\right) \\ &= (\alpha_j-\alpha_i)\left((|P(\sigma,i)|+2)p-d\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} t(\sigma,i) &= (|P(\sigma,i)|+1)p \\ t(\sigma,j) &= (|P(\sigma,i)|+2)p \end{aligned}$$

tenemos que en la situación descrita

$$(|P(\sigma,i)|+1)p \leq d \leq (|P(\sigma,i)|+2)p$$

lo que implica que $(|P(\sigma,i)|+2)p-d \leq p$ con lo que en este caso las ganancias de intercambiar los jugadores se corresponden con la fórmula (3.5).

C) $d < t(\sigma, i)$. En este caso ambos jugadores no están en tiempo en el orden σ, y por tanto tampoco lo están si intercambian sus posiciones

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\sigma} &= (\alpha_i((|P(\sigma,i)|+1)p)-d)+(\alpha_j((|P(\sigma,i)|+2)p)-d) \\ &\quad -(\alpha_j((|P(\sigma,i)|+1)p)-d)-(\alpha_i((|P(\sigma,i)|+2)p)-d) \\ &= (\alpha_j-\alpha_i)p. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $(|P(\sigma,i)|+1))\,p > d$ obtenemos fácilmente que las ganancias de intercambiar los jugadores i y j se corresponden con la fórmula (3.5).

Es fácil ver que en A) también se verifica (3.5). ■

Nota 3.2 En los lemas 3.1 y 3.2 podemos observar que las ganancias de intercambiar jugadores dependen de la ordenación σ, es decir de la posición que ocupan las tareas en el orden σ, lo que difiere del caso estudiado en Curiel *et al.* (1989).

Teorema 3.2 *Sea (N, σ_0, p, d, c^2) una situación de secuenciación C2 siendo $p_i = p$ y $d_i = d$ para todo $i \in N$. Entonces $\hat{\sigma}$ es óptimo si y sólo se satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} \geq \alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(k+1)} \geq ... \geq \alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(n)} \tag{3.6}$$

$$\alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} \leq \alpha_i \textit{ para todo } i \in N \backslash \left\{ \hat{\sigma}^{-1}(k), \hat{\sigma}^{-1}(k+1), ..., \hat{\sigma}^{-1}(n) \right\} \qquad (3.7)$$

siendo $t(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^{-1}(k-1)) \leq d < t(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^{-1}(k))$.

Demostración.

Primeramente mostramos que es necesario que las tareas estén ordenadas de forma no creciente de sus penalizaciones. Supongamos que $\hat{\sigma}$ no satisface (3.6). Entonces existen $i, j \in N$ tales que $\hat{\sigma}(j) = \hat{\sigma}(i) + 1$, $\alpha_i < \alpha_j$ siendo $d < t(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^{-1}(i))$. Consideremos el orden τ definido como $\tau(m) = \hat{\sigma}(m)$ para todo $m \in N \backslash \{i, j\}$, $\tau(i) = \hat{\sigma}(j)$ y $\tau(j) = \hat{\sigma}(i)$. Entonces del lema 3.2 se obtiene que

$$c^2_{\hat{\sigma}}(N) - c^2_{\tau}(N) =$$

$$= \min \left\{ \left[(\alpha_j - \alpha_i) \left((|P(\sigma, i)| + 2)p - d \right) \right]_+, p(\alpha_j - \alpha_i) \right\} > 0$$

lo que contradice la optimalidad de $\hat{\sigma}$.

Supongamos que $\hat{\sigma}$ no satisface (3.7). Entonces podemos concluir que existe una tarea $i \in N \backslash \left\{ \hat{\sigma}^{-1}(k), \hat{\sigma}^{-1}(k+1), ..., \hat{\sigma}^{-1}(n) \right\}$ tal que $\alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} > \alpha_i$. Consideremos el orden τ definido como $\tau(m) = \hat{\sigma}(m)$ para todo $m \in N \backslash \left\{ i, \hat{\sigma}^{-1}(k) \right\}$, $\tau(i) = k$ y $\tau(\hat{\sigma}^{-1}(k)) = \hat{\sigma}(i)$. Entonces del lema 3.2 obtenemos que

$$c^2_{\hat{\sigma}}(N) - c^2_{\tau}(N) =$$

$$= \min \left\{ \left[(\alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} - \alpha_i) \left((|P(\sigma, i)| + 2)p - d \right) \right]_+, p(\alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} - \alpha_i) \right\} > 0$$

lo que contradice la optimalidad de $\hat{\sigma}$.

A continuación probamos que es suficiente que las tareas se ordenen según (3.6) y (3.7). Consideremos primeramente que en este caso dado que $p_i = p$ para todo $i \in N$ tenemos que dado $\sigma^{-1}(k) \in N$, $t(\sigma, \sigma^{-1}(k)) = pk$ para cualquier $\sigma \in \Pi(N)$. Sea $\hat{\sigma} \in \Pi(N)$ verificando (3.6) y (3.7) y sea τ un orden óptimo. Por tanto sabemos que

$$\alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} \geq \alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(k+1)} \geq ... \geq \alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(n)}$$

y además $\alpha_{\hat{\sigma}^{-1}(k)} \leq \alpha_i$ para todo $i \in N \backslash \left\{ \hat{\sigma}^{-1}(k), \hat{\sigma}^{-1}(k+1), ..., \hat{\sigma}^{-1}(n) \right\}$ siendo $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $t(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^{-1}(k-1)) \leq d < t(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^{-1}(k))$. Además como τ es un orden óptimo sabemos que intercambiando jugadores contiguos i, j que satisfacen $\alpha_i = \alpha_j$ con $i, j \in \left\{ \tau^{-1}(k), \tau^{-1}(k+1), ..., \tau^{-1}(n) \right\}$, o intercambiando tareas en $N \backslash \left\{\tau^{-1}(k), \tau^{-1}(k+1), ..., \tau^{-1}(n)\right\}$, podemos obtener $\hat{\sigma}$ a partir de τ, y dichos intercambios no incrementan el coste asociado con lo que deducimos que $\hat{\sigma}$ es optimal. ■

Nota 3.3 En las dos situaciones de secuenciación descritas previamente podemos observar que un orden óptimo se puede alcanzar por intercambio de jugadores contiguos en los que no se producen pérdidas, y de esta forma se pueden definir unos índices de urgencia como en el caso lineal. Dada una situación de secuenciación C2 (N, σ, p, d, c^2), si $d_i = d$ para todo $i \in N$ los índices de urgencia serían

$$u_i = \begin{cases} \frac{1}{p_i} & \text{si } \alpha_i = \alpha \text{ para todo } i \in N \\ \alpha_i & \text{si } p_i = p \text{ para todo } i \in N \end{cases}.$$

De esta forma las tareas deben ser ordenadas de manera no creciente de sus índices de urgencia.

3.3 Juegos de secuenciación con fechas límite

Una vez descritos los algoritmos que nos permiten la obtención de los órdenes óptimos, surge el problema de cómo distribuir entre los agentes involucrados los beneficios generados al reordenar las tareas. La definición del juego cooperativo que consideramos es exactamente la misma que la dada en Curiel *et al.* (1989) tal y como se ha descrito en la sección 3.1, teniendo en cuenta ahora las funciones de coste que estamos considerando. De esta forma la función característica v del juego de secuenciación (N, v) asociado a la situación de secuenciación (N, σ_0, d, p, c) se define como:

$$v(S) = \max_{\sigma \in \Sigma_S} \{c_{\sigma_0}(S) - c_\sigma(S)\}. \tag{3.8}$$

Otra forma de interpretar un orden $\sigma_0 \in \Pi(N)$ es a través de la teoría de grafos. Podríamos considerar σ_0 como un grafo lineal $(\sigma_0(1) - \sigma_0(2) - ... - \sigma_0(n))$ y de esta forma los jugadores se podrían comunicar a través del grafo. Diversos autores han tratado problemas en los que existen dificultades de comunicación entre los jugadores y por tanto de cooperación entre ellos. Myerson (1977), Owen (1986) y Van den Nouweland (1993) estudian situaciones en las que los jugadores no se pueden comunicar libremente y describen la restricción en la comunicación mediante un grafo no orientado. En la sección 1.6.2 de la presente monografía se presentan los principales resultados de Myerson (1977) junto con otros problemas que modelizan restricciones en la comunicación.

Es conocida la descomposición de un juego en forma característica (N, v) en función de los juegos de unanimidad,

$$v = \sum_{S \subset N} \triangle_v(S) u_S$$

siendo $\triangle_v(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T)$. A estos números se les conoce como dividendos de Harsanyi, y verifican que $v(S) = \sum_{T \subset S} \triangle_v(T)$.

A continuación definimos una clase de juegos que contiene a los juegos de secuenciación como un subconjunto propio. Se trata de la clase de juegos 0-normalizados, superaditivos y equilibrados en los que la utilidad que consigue cada coalición S se obtiene como suma de las utilidades de todas las componentes maximales conexas de la coalición S. Formalmente:

Dado $\sigma_0 \in \Pi(N)$, un juego cooperativo (N, v) se dice que es un *juego* σ_0-*aditivo en componentes* si se verifican las siguientes tres condiciones:

- $v(\{i\}) = 0$ para cada $i \in N$,
- v es superaditivo,
- $v(S) = \sum_{T \in S/\sigma_0} v(T)$.

Teniendo en cuenta la definición de una ordenación admisible, es fácil comprobar que los juegos de secuenciación son juegos σ_0-aditivos en componentes.

Owen (1986) probó que en los juegos σ_0-aditivos en componentes si S no es una coalición conexa entonces $\triangle_v(S) = 0$, y por tanto sólo es necesario considerar en la descomposición de v los juegos de unanimidad de las coaliciones conexas. La siguiente proposición especifica el valor de los dividendos de Harsanyi que acompañan a cada juego de unanimidad de cada coalición conexa en la clase de juegos σ_0-aditivos en componentes.

Proposición 3.1 *Sea (N, v) un juego σ_0-aditivo en componentes. El juego (N, v) puede ser expresado en función de los juegos de unanimidad $u_{[i,j]\sigma_0}$ de la siguiente forma:*

$$v = \sum_{[k,l]_{\sigma_0} \subset N} g_{[k,l]\sigma_0} u_{[k,l]\sigma_0}$$

donde coeficientes $g_{[k,l]_{\sigma_0}}$ *vienen dados por la siguiente expresión:*

$$g_{[k,l]_{\sigma_0}} = v([k,l]_{\sigma_0}) - v([k,l)_{\sigma_0}) - v((k,l]_{\sigma_0}) + v((k,l)_{\sigma_0}).$$

Demostración.

Sin pérdida de generalidad consideraremos $\sigma_0 = id$. Definimos

$$w = \sum_{[k,l]\subset N} g_{[k,l]} u_{[k,l]}.$$

Sea $T = [i,j] \subset N$ una coalición conexa. Entonces

$$\begin{aligned}
w(T) &= \sum_{[k,l]\subset[i,j]} g_{[k,l]} \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \sum_{l=k+1}^{j} g_{[k,l]} \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \sum_{l=k+1}^{j} [v([k,l]) - v([k,l)) - v((k,l]) + v((k,l))] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \sum_{l=k+1}^{j} [v([k,l]) - v([k,l))] - \sum_{k=i}^{j-1} \sum_{l=k+1}^{j} [v((k,l]) - v((k,l))] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} [v([k,j]) - v(\{k\})] - \sum_{k=i}^{j-1} v((k,j]) \\
&= v([i,j]) \\
&= v(T).
\end{aligned}$$

Sea $T \subset N$ una coalición cualquiera. Teniendo en cuenta que el juego (N,v) es σ_0-aditivo en componentes y el anterior resultado tenemos que

$$v(T) = \sum_{S\in T\setminus\sigma_0} v(S) = \sum_{S\in T\setminus\sigma_0} w(S). \tag{3.9}$$

Como además los juegos de unanimidad $u_{[k,l]_{\sigma_0}}$ son σ_0-aditivos en componentes obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{S\in T\backslash\sigma_0} w(S) &= \sum_{S\in T\backslash\sigma_0}\left(\sum_{[k,l]\subset N} g_{[k,l]}u_{[k,l]}(S)\right) \\ &= \sum_{[k,l]\subset N} g_{[k,l]}\left(\sum_{S\in T\backslash\sigma_0} u_{[k,l]}(S)\right) \\ &= \sum_{[k,l]\subset N} g_{[k,l]}u_{[k,l]}(T) \\ &= w(T).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Combinando (3.9) y (3.10), se verifica que $w(T) = v(T)$. ■

Teorema 3.3 *Dado (N, v) un juego σ_0-aditivo en componentes, (N, v) es convexo si y sólo si todos los coeficientes $g_{[k,l]_{\sigma_0}}$ son no negativos.*

Demostración.

Primeramente mostramos que los juegos de unanimidad son convexos. Para cada $T \subset N$, $T \neq \emptyset$ se deduce que para todo $i \in N$ y todo $S \subset N\backslash i$

$$u_T(S\cup i) - u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } i\in T,\ T\backslash i\subset S \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Consecuentemente para todo $i \in N$ y todo $S_1, S_2 \subset N$ tal que $S_1 \subset S_2 \subset N\backslash i$

$$u_T(S_1\cup i) - u_T(S_1) \leq u_T(S_2\cup i) - u_T(S_2)$$

y por tanto los juegos de unanimidad son convexos. Teniendo en cuenta la descomposición dada en la proposición 3.1 de un juego (N, v) en juegos de unanimidad es sencillo comprobar que si todos los coeficientes $g_{[k,l]}$ son no negativos, el juego (N, v) es convexo.

Recíprocamente si existiera $[k, l] \subset N$ tal que $g_{[k,l]} < 0$ entonces

$$v([k,l]_{\sigma_0}) - v([k,l)_{\sigma_0}) - v((k,l]_{\sigma_0}) + v((k,l)_{\sigma_0}) < 0$$

lo que contradice la definición de juego convexo. ■

Nota 3.4 Como los juegos de secuenciación son juegos σ_0-aditivos en componentes, el comprobar si todos los coeficientes $g_{[k,l]_{\sigma_0}}$ son no negativos nos permite concluir si el juego de secuenciación es o no convexo.

Curiel *et al.* (1993) definen la clase de juegos en los que todos los coeficientes $g_{[k,l]_{\sigma_0}}$ son no negativos y los denominan juegos σ_0-*pairing.*

Nota 3.5 Los coeficientes $g_{[k,l]_{\sigma_0}}$ se pueden escribir de dos formas:

$$\begin{aligned} g_{[k,l]} &= [v([k,l]) - v([k,l))] - [v((k,l]) - v((k,l))] \\ &= [v([k,l]) - v((k,l])] - [v([k,l)) - v((k,l))] \, . \end{aligned}$$

La primera igualdad se puede interpretar de la siguiente manera: $[v([k,l]) - v([k,l))]$ mide la contribución del jugador l (el último jugador de la coalición $[k,l]$) si se une al final de la coalición ordenada $[k,l)$. De la misma forma, $[v((k,l]) - v((k,l))]$ mide la contribución del jugador l si se une al final de la coalición ordenada (k,l). Por lo tanto, la diferencia nos indica cuanto contribuye el jugador k a la contribución del jugador l.

La segunda igualdad se puede interpretar de manera análoga, en este caso describe la contribución del jugador l a la contribución del jugador k.

3.4 Propiedades de los juegos de secuenciación con fechas límite

En la anterior sección hemos visto que los juegos de secuenciación con fechas límite son juegos σ_0-aditivos en componentes, y por tanto son 0-normalizados y superaditivos.

Además Tijs *et al.* (1984) probaron que los juegos de permutaciones son totalmente equilibrados. Es sencillo comprobar que los juegos de secuenciación con fechas límite son un caso particular de estos juegos y por tanto su núcleo es no vacío.

En esta sección estudiaremos con detalle la propiedad de convexidad. Hemos de tener en cuenta que debido al teorema 3.3 el comprobar la no negatividad de los coeficientes $g_{[k,l]_{\sigma_0}}$ implica una reducción significativa en el número de condiciones que necesitan ser verificadas para la convexidad. Además para aquellas coaliciones $[k,l]_{\sigma_0}$ tales que $\sigma_0(l) = \sigma_0(k) + 1$, el coeficiente $g_{[k,l]_{\sigma_0}}$ es siempre no negativo. Por tanto si el número de jugadores es mayor o igual a 3 deberemos comprobar $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ condiciones. Esto mejora considerablemente el número de condiciones calculadas en Zumsteg (1995) que se corresponde con $\sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m}\binom{m}{2}$.Veamos algunos ejemplos que utilizaremos más adelante.

Ejemplo 3.1 Supongamos que una máquina tiene que realizar cuatro tareas siendo el orden inicial la identidad ($\sigma_0 = id$), el vector de tiempos de proceso $p = (300, 201, 201, 100)$, $d_i = d = 500$ y $\alpha_i = \alpha = 1$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

En este caso es suficiente calcular los coeficientes $g_{[1,4]}, g_{[1,3]}$ y $g_{[2,4]}$. Se puede comprobar que utilizando como función de coste el criterio de penalización ponderada:

$$g_{[1,4]} = v[1,4] - v(1,4] - v[1,4) + v(1,4) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0$$

y, por tanto, el juego no es convexo.

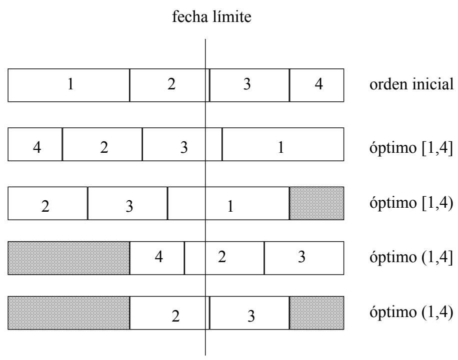


Gráfico 3.7

Ejemplo 3.2 Supongamos que una máquina tiene que realizar tres tareas siendo el orden inicial la identidad, el vector de tiempos de proceso $p = (2, 3, 1)$, el vector de penalizaciones $\alpha = (4, 5, 8)$, y todas tienen la misma fecha límite $d_i = d = 3$.

A continuación se calcula de forma detallada los costes asociados a cada orden utilizando como función de coste el criterio de penalización ponderada por el retraso.

σ	$c^2_\sigma(N)$
123	34
132	15
213	32
231	20
312	15
321	17

(Tabla 3.1)

Por tanto

$$v[1,3] - v(1,3] - v[1,3) - v(1,3) =$$

$$\begin{aligned} &= (34-15)-(34-15)-(34-32)-0 \\ &= -2<0 \end{aligned}$$

con lo que concluimos que el juego no es convexo.

Ejemplo 3.3 Supongamos que una máquina tiene que realizar cinco tareas siendo el orden inicial la identidad, el vector de tiempos de proceso $p = (19, 17, 16, 9, 9)$, $d = (20, 22, 28, 35, 40)$, $\alpha_i = \alpha = 1$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, y la función de coste es el criterio de penalización ponderada por el retraso.

Este ejemplo pone de manifiesto la dificultar de calcular el orden óptimo cuando $n = 5$. El hecho de que no exista un algoritmo en tiempo polinomial hace que cuando el número de jugadores se incrementa los cálculos computacionales también lo hacen.

Para comprobar la convexidad deberíamos de calcular los coeficientes

$$g_{[1,5]}, g_{[1,4]}, g_{[1,3]}, g_{[2,5]}, g_{[2,4]} \text{ y } g_{[3,5]}.$$

Después de laboriosos cálculos se puede comprobar que

$$g_{[1,5]} = v[1,5] - v(1,5] - v[1,5) + v(1,5) = 21 - 21 - 11 + 9 = -2 < 0$$

y, por tanto, el juego no es convexo.

3.4.1 Estudio de la convexidad en los juegos asociados a la situación de secuenciación C1

En esta sección estudiamos la propiedad de convexidad de los juegos asociados a situaciones de secuenciación C1.

En la sección 3.1 ha sido descrito un algoritmo que nos permite obtener un orden óptimo si las tareas están inicialmente ordenadas de forma no decreciente de sus fechas límite. Además, los coeficientes $g_{[k,l]_{\sigma_0}}$ para cada coalición conexa $[k,l]_{\sigma_0}$ se pueden obtener aplicando el algoritmo de la caja móvil de Lawler. La expresión $v([k,l]_{\sigma_0}) - v([k,l)_{\sigma_0})$ se puede calcular fácilmente una vez obtenido el orden óptimo de $[k,l)_{\sigma_0}$ y determinando a partir de éste el orden óptimo de $[k,l]_{\sigma_0}$. Similarmente, la expresión $v((k,l]_{\sigma_0}) - v((k,l)_{\sigma_0})$ se puede calcular una vez obtenido el orden óptimo de $(k,l)_{\sigma_0}$ y determinando a partir de éste el orden óptimo de $(k,l]_{\sigma_0}$

Estas ganancias se pueden escribir como

$$\begin{aligned} a_{[k,l]_{\sigma_0}} &= v([k,l]_{\sigma_0}) - v([k,l)_{\sigma_0}) \\ a_{(k,l]_{\sigma_0}} &= v((k,l]_{\sigma_0}) - v((k,l)_{\sigma_0}) \end{aligned}$$

siendo $g_{[k,l]_{\sigma_0}} = a_{[k,l]_{\sigma_0}} - a_{(k,l]_{\sigma_0}}$.

El siguiente lema nos dice que dada una situación de secuenciación C1, en la que los tiempos de proceso son iguales ($p_i = p$ para todo $i \in N$), puede establecerse una relación entre el conjunto $[k,l]-$óptimo, $V_{[k,l]}$, y el conjunto $(k,l]-$óptimo, $V_{(k,l]}$. Además, la diferencia de los cardinales de las cajas móviles es 0 ó 1. Esto implica que o bien $\sum\limits_{i \in G_{[k,l]}} p_i - \sum\limits_{i \in G_{(k,l]}} p_i = 0$ (si ambas cajas móviles tienen el mismo cardinal), o bien $\sum\limits_{i \in G_{[k,l]}} p_i - \sum\limits_{i \in G_{(k,l]}} p_i = p$ (si la diferencia de los cardinales es 1).

Lema 3.3 *Sea (N, σ_0, p, d, c^1) una situación de secuenciación C1 donde $p_i = p$ para todo $i \in N$.*

Se verifica que para todo $k, l \in N$ tal que $k < l$,

$$V_{(k,l]} \subset V_{[k,l]} \tag{3.11}$$

$$0 \leq \left|G_{[k,l]}\right| - \left|G_{(k,l]}\right| \leq 1 \tag{3.12}$$

$$a_{[k,l]} - a_{(k,l]} \geq 0 \tag{3.13}$$

Demostración.

Probaremos el resultado por inducción en el tamaño de la coalición $[k,l]$. Sin pérdida de generalidad asumiremos que $p = 1$. Téngase en cuenta que en este caso la posición de cada trabajo en cada orden se corresponde con su tiempo de finalización.

Supongamos que $l = k+1$. Distinguimos dos casos:

- $k > d_k$ (el trabajo k no está en tiempo inicialmente).

  Es trivial comprobar que

$$\begin{aligned} V_{[k,k+1]} &= \emptyset, G_{[k,k+1]} = \{k, k+1\} \text{ y } a_{[k,k+1]} = 0, \text{ ó} \\ V_{[k,k+1]} &= \{k+1\}, G_{[k,k+1]} = \{k\} \text{ y } a_{[k,k+1]} = \alpha_{k+1} \text{ ó} \\ V_{[k,k+1]} &= \{k+1\}, G_{[k,k+1]} = \{k\} \text{ y } a_{[k,k+1]} = 0. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} V_{(k,k+1]} &= \emptyset,\, G_{(k,k+1]} = \{k+1\} \text{ y } a_{(k,k+1]} = 0, \text{ ó} \\ V_{(k,k+1]} &= \{k+1\}\,, G_{(k,k+1]} = \emptyset \text{ y } a_{(k,k+1]} = 0. \end{aligned}$$

- $k \leq d_k$ (el trabajo k está en tiempo inicialmente).

  En esta situación si $V_{(k,k+1]} = \emptyset$ tenemos que $G_{(k,k+1]} = \{k+1\})$ y $a_{(k,k+1]} = 0$. Además

  $$\begin{aligned} V_{[k,k+1]} &= \{k\}\,, G_{[k,k+1]} = \{k+1\} \text{ y } a_{[k,k+1]} = 0 \text{ ó} \\ V_{[k,k+1]} &= \{k+1\}\,,\ G_{[k,k+1]} = \{k\} \text{ y } a_{[k,k+1]} = \alpha_{k+1} - \alpha_k > 0, \end{aligned}$$

  teniendo en cuenta que todas las tareas tienen el mismo tiempo de proceso y $d_k \leq d_{k+1}$.

  Cuando $V_{(k,k+1]} = \{k+1\}$ tenemos que $G_{(k,k+1]} = \emptyset$ y $a_{(k,k+1]} = 0$. En este caso,

  $$V_{[k,k+1]} = \{k, k+1\}\,, G_{(k,k+1]} = \emptyset \text{ y } a_{[k,k+1]} = 0.$$

Es fácil comprobar en ambos casos que,

$$V_{(k,k+1]} \subset V_{[k,k+1]},$$

$$0 \leq \left|G_{[k,k+1]}\right| - \left|G_{(k,k+1]}\right| \leq 1 \text{ y}$$

$$a_{[k,k+1]} - a_{(k,k+1]} \geq 0.$$

Supongamos que $V_{(k,r]} \subset V_{[k,r]}$, $0 \leq \left|G_{[k,r]}\right| - \left|G_{(k,r]}\right| \leq 1$ y $a_{[k,r]} - a_{(k,r]} \geq 0$ para todo r tal que $k \leq r < l$, y probémoslo cuando $r = l$.

Por la hipótesis de inducción sabemos que

$$V_{(k,l)} \subset V_{[k,l)}$$

$$0 \leq \left|G_{[k,l)}\right| - \left|G_{(k,l)}\right| \leq 1$$

$$a_{[k,l)} - a_{(k,l)} \geq 0.$$

Podemos encontrarnos con dos situaciones:

$$\left|G_{[k,l)}\right| = \left|G_{(k,l)}\right| \text{ ó } \left|G_{[k,l)}\right| = \left|G_{(k,l)}\right| + 1$$

Consideremos primeramente que $\left|G_{[k,l)}\right| = \left|G_{(k,l)}\right|$. Por tanto,

$$\sum_{i \in G_{[k,l)}} p_i = \sum_{i \in G_{(k,l)}} p_i.$$

Tres casos pueden ocurrir cuando aplicamos el algoritmo de la caja móvil de Lawler en el paso en el que el trabajo l se añade a $[k,l)$ para obtener un conjunto $[k,l]$ −óptimo.

- Si $V_{[k,l]} = V_{[k,l)}$, se verifica que $G_{[k,l]} = G_{[k,l)} \cup \{l\}$. Teniendo en cuenta que $\left|G_{[k,l)}\right| = \left|G_{(k,l)}\right|$, $V_{(k,l)} \subset V_{[k,l)}$ y el algoritmo de Lawler, el añadir el jugador l afectará en igual medida al conjunto $(k,l]$−optimal y al conjunto $[k,l]$−optimal. Entonces,

  $$V_{(k,l]} = V_{(k,l)}, G_{(k,l]} = G_{(k,l)} \cup \{l\}, \text{ y } a_{[k,l]} = a_{(k,l]} = 0.$$

  Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que

  $$V_{(k,l]} = V_{(k,l)} \subset V_{[k,l)} = V_{[k,l]}$$

  $$\left|G_{[k,l]}\right| - \left|G_{(k,l]}\right| = \left|G_{[k,l)}\right| + 1 - \left|G_{(k,l)}\right| - 1 = \left|G_{[k,l)}\right| - \left|G_{(k,l)}\right|.$$

  Además

  $$a_{[k,l]} - a_{(k,l]} = 0.$$

De esta manera (3.11), (3.12) y (3.13) se verifican.

- Si $V_{[k,l]} = V_{[k,l)} \cup \{l\}$, se verifica que $G_{[k,l)} = G_{[k,l]}$ y $a_{[k,l]} = 0$ si la tarea l estaba inicialmente en tiempo o bien $a_{[k,l]} = \alpha_l$ si la tarea l no estaba inicialmente en tiempo. Dado que $\left|G_{[k,l)}\right| = \left|G_{(k,l)}\right|$,

  $$V_{(k,l]} = V_{(k,l)} \cup \{l\}, G_{(k,l)} = G_{(k,l]} \text{ y } a_{(k,l]} = a_{[k,l]}.$$

  Por la hipótesis de inducción (3.11), (3.12) y (3.13) se verifican.

- Si $V_{[k,l]} = (V_{[k,l)} \cup \{l\}) \backslash \{m\}$, donde $m \in V_{[k,l)}$ y $\alpha_m = \min\left\{\alpha_i \mid i \in V_{[k,l)}\right\}$. Entonces $G_{[k,l]} = G_{[k,l)} \cup \{m\}$ y $a_{[k,l]} = \alpha_l - \alpha_m$. Ahora, dos casos han de ser tenidos en cuenta,

  - Si $m \in V_{(k,l)}$, entonces $V_{(k,l]} = (V_{(k,l)} \cup \{l\}) \backslash \{m\}$, $G_{(k,l]} = G_{(k,l)} \cup \{m\}$ y $a_{(k,l]} = \alpha_l - \alpha_m = a_{[k,l]}$.

– Si $m \notin V_{(k,l)}$, entonces $V_{(k,l]} = (V_{(k,l)} \cup \{l\}) \backslash \{p\}$ donde $p \in V_{(k,l)} \cup \{l\} \subset V_{[k,l)} \cup \{l\}$ tal que $\alpha_m \leq \alpha_p = \min\left\{\alpha_i \mid i \in V_{(k,l)} \cup \{l\}\right\}$. Entonces $G_{(k,l]} = G_{(k,l)} \cup \{p\}$ y $a_{(k,l]} = \alpha_l - \alpha_p \leq a_{[k,l]}$.

Entonces, por la hipótesis de inducción (3.11), (3.12) y (3.13) se verifican.

El caso en el que $\left|G_{[k,l)}\right| - \left|G_{(k,l)}\right| = 1$, se prueba utilizando argumentos similares y por ello se omite la demostración. ■

Nota 3.6 El anterior lema nos dice que si un jugador l que no está en tiempo inicialmente y lo está si intercambia con los jugadores de $G_{[k,l)}$, tiene menos posibilidades de estar en tiempo si intercambia con $G_{(k,l)}$. Cuando en el algoritmo es necesario que una tarea que está en tiempo se una a las tareas de $G_{[k,l)}$ para alcanzar un conjunto $[k,l]$-óptimo, el hecho de que $V_{(k,l]} \subset V_{[k,l]}$ y la selección de la tarea permiten concluir que $a_{[k,l]} - a_{(k,l]} \geq 0$.

El anterior resultado no es cierto si los tiempos de proceso no son iguales. Consideremos el siguiente contraejemplo: $N = \{1,2,3,4\}$, $\sigma_0 = id.$, $p = (2,2,3,3)$, $d = (2,2,5,7)$ y $\alpha = (5,5,5,3)$. Entonces, $V_{[2,4]} = \{3\}$ y $V_{(2,4]} = \{4\}$. Además $a_{[2,4]} - a_{(2,4]} = 0 - 3 < 0$.

Teorema 3.4 *Sea (N, σ_0, p, d, c^1) una situación de secuenciación C1 donde $p_i = p$ para todo $i \in N$. El correspondiente juego de secuenciación (N, v) es convexo.*

Demostración.

Teniendo en cuenta el teorema 3.3 es suficiente probar que $g_{[k,l]_{\sigma_0}} \geq 0$ para todo $k, l \in N$ tales que $\sigma_0(k) < \sigma_0(l)$.

Como una consecuencia directa del lema 3.3 sabemos que, $g_{[k,l]_{\sigma_0}} = a_{[k,l]_{\sigma_0}} - a_{(k,l]_{\sigma_0}} \geq 0$. ■

Nota 3.7 El ejemplo 3.1 muestra que en el caso de que los tiempos de proceso no sean iguales, el juego de secuenciación asociado puede no ser convexo.

3.4.2 Estudio de la convexidad en los juegos asociados a la situación de secuenciación C2

Teniendo en cuenta la obtención de los órdenes óptimos, analizaremos los diferentes casos.

Nota 3.8 Dada una situación de secuenciación con iguales penalizaciones y tiempos de proceso ($\alpha_i = \alpha$ y $p_i = p$ para todo $i \in N$), el juego asociado a esta situación de secuenciación es el juego nulo ($v(S) = 0$ para todo $S \subset N$). Es trivial comprobarlo teniendo en cuenta que el orden óptimo se alcanza ordenando las tareas en orden no decreciente de sus fechas límite, y por tanto el orden de partida σ_0 es óptimo ya que ésta era una restricción de la que se partía inicialmente.

Nota 3.9 El ejemplo 3.2 muestra que si todas las tareas tienen una misma fecha límite ($d_i = d$ para todo $i \in N$), y los demás elementos que definen la situación de secuenciación son arbitrarios, el juego asociado puede no ser convexo.

Nota 3.10 El ejemplo 3.3 muestra que si todas las tareas tienen la misma penalización ($\alpha_i = \alpha$ para todo $i \in N$), y los demás elementos que definen la situación de secuenciación son arbitrarios, el juego asociado puede no ser convexo.

Procedemos a continuación a demostrar dos casos en los que los juegos de secuenciación asociados son convexos.

Teorema 3.5 *Sea (N, σ_0, p, d, c^2) una situación de secuenciación C2 donde para todo $i \in N$ $\alpha_i = \alpha$* y *$d_i = d$ para todo $i \in N$. El correspondiente juego de secuenciación (N, v) es convexo.*

Demostración.

Teniendo en cuenta el teorema 3.3 es suficiente probar que $v[i,j] - v(i,j] \geq v[i,j) - v(i,j)$ para todo coalición conexa $[i,j] \subset N$.

Sin pérdida de generalidad supondremos que $[i,j] = [1,n] = N, \sigma_0$ es la identidad y que $\hat{\sigma}(i_k) = k$ (el jugador i_k ocupa la posición k en el orden óptimo $\hat{\sigma}$). Además por el teorema 3.1 podemos suponer que existe un orden óptimo $\hat{\sigma}$ tal que $p_{i_1} \leq p_{i_2} \leq ... \leq p_{i_n}$ y por el lema 3.1 las ganancias de intercambiar dos jugadores contiguos se pueden escribir como

$$g_{ij}^{\sigma} = \left[\min\left\{[\alpha\left(t(\sigma,i) - d\right)]_+ , \alpha\left(p_i - p_j\right)\right\}\right]_+ .$$

Sea $\hat{\sigma}(1) = s$ y $\hat{\sigma}(n) = t$ siendo $s, t \in \{1, 2, ..., n\}$ y $s \neq t$. Distinguimos dos casos:

Si $t > s$ (el jugador n ocupa en el orden óptimo una posición posterior a la que ocupa el jugador 1).

$$v[1,n] - v(1,n] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\min\left\{[\alpha\left(t(\sigma_0,1)-d\right)]_+,\alpha\left(p_1-p_{i_1}\right)\right\}\right]_+ \\
&\quad + \left[\min\left\{[\alpha\left(t(\sigma_0,1)+p_{i_1}-d\right)]_+,\alpha\left(p_1-p_{i_2}\right)\right\}\right]_+ \\
&\quad + \left[\min\left\{[\alpha\left(t(\sigma_0,1)+p_{i_1}+p_{i_2}-d\right)]_+,\alpha\left(p_1-p_{i_3}\right)\right\}\right]_+ \\
&\quad +\ldots \\
&\quad + \left[\min\left\{\left[\alpha\left(t(\sigma_0,1)+\sum_{l=1}^{s-2}p_{i_l}-d\right)\right]_+,\alpha\left(p_1-p_{i_{s-1}}\right)\right\}\right]_+ \\
&= \left[\min\left\{[\alpha\left(t(\sigma_0,1)-d\right)]_+,\alpha\left(p_1-p_{i_1}\right)\right\}\right]_+ \\
&\quad +\sum_{k=3}^{s}\left[\min\left\{\left[\alpha\left(C(\sigma_0,1)+\sum_{l=1}^{k-2}p_{i_l}-d\right)\right]_+,\alpha\left(p_1-p_{i_{k-1}}\right)\right\}\right]_+
\end{aligned}$$

$$= v[1,n)-v(1,n).$$

En el cálculo de la anterior expresión se intercambia el jugador i con el resto de los jugadores hasta que alcanza la posición s que es la que ocupa en el óptimo. El hecho de que $t > s$ hace que la última igualdad sea cierta.

Si $t < s$ (el jugador n ocupa en el orden óptimo una posición anterior a la que ocupa el jugador 1).

$$v[1,n]-v(1,n] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\min\left\{[\alpha\left(t(\sigma_0,1)-d\right)]_+,\alpha\left(p_1-p_{i_1}\right)\right\}\right]_+ \\
&\quad +\sum_{k=3}^{t}\left[\min\left\{\left[\alpha\left(t(\sigma_0,1)+\sum_{l=1}^{k-2}p_{i_l}-d\right)\right]_+,\alpha\left(p_1-p_{i_{k-1}}\right)\right\}\right]_+ \\
&\quad + \left[\min\left\{\left[\alpha\left(t(\sigma_0,1)+\sum_{l=1}^{t-1}p_{i_l}-d\right)\right]_+,\alpha\left(p_1-p_{i_t}\right)\right\}\right]_+ \\
&\quad +\sum_{k=t+2}^{s}\left[\min\left\{\left[\alpha\left(t(\sigma_0,1)+\sum_{l=1}^{k-2}p_{i_l}-d\right)\right]_+,\alpha\left(p_1-p_{i_{k-1}}\right)\right\}\right]_+ .
\end{aligned}$$

Mientras que

$$v[1,n)-v(1,n) =$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left[\min\left\{[\alpha\left(t(\sigma_0,1)-d\right)]_+, \alpha\left(p_1-p_{i_1}\right)\right\}\right]_+ \\
& + \sum_{k=3}^{t}\left[\min\left\{\left[\alpha\left(t(\sigma_0,1)+\sum_{l=1}^{k-2}p_{i_l}-d\right)\right]_+, \alpha\left(p_1-p_{i_{k-1}}\right)\right\}\right]_+ \\
& + \sum_{k=t+2}^{s}\left[\min\left\{\left[\alpha\left(t(\sigma_0,1)+\sum_{l=1}^{k-2}p_{i_l}-p_{i_t}-d\right)\right]_+, \alpha\left(p_1-p_{i_{k-1}}\right)\right\}\right]_+ .
\end{aligned}
$$

Fácilmente se comprueba que los primeros $t-1$ sumandos coinciden, el sumando t de la primera expresión es siempre no negativo, y el sumando $t+l$ de la primera expresión es mayor o igual que el sumando $t+l-1$ de la segunda expresión para todo $l=1,...,s-t-1$. De esto se deduce que el juego asociado es convexo. ■

Teorema 3.6 *Sea* (N,σ_0,p,d,c^2) *una situación de secuenciación C2 donde* $p_i=p$ *y* $d_i=d$ *para todo* $i\in N$. *El correspondiente juego de secuenciación* (N,v) *es convexo.*

Demostración.

La demostración procede de manera similar a la dada en el teorema 3.5.

Sin pérdida de generalidad supondremos que $[i,j]=[1,n]=N$ y que $\hat{\sigma}(i_k)=k$. Además por el teorema 3.2 podemos suponer que existe un orden óptimo $\hat{\sigma}$ tal que $\alpha_{i_1}\geq\alpha_{i_2}\geq...\geq\alpha_{i_n}$ y por el lema 3.2 las ganancias de intercambiar dos jugadores contiguos en el orden σ se corresponden con

$$g_{ij}^{\sigma}=\left[\min\left\{[(\alpha_j-\alpha_i)\left((|P(\sigma,i)|+2)p-d\right)]_+, p(\alpha_j-\alpha_i)\right\}\right]_+ .$$

Supongamos que los jugadores 1 y n ocupan las posiciones s y t en el orden óptimo respectivamente, *i.e.*, $\hat{\sigma}(1)=s$ y $\hat{\sigma}(n)=t$ siendo $s,t\in\{1,2,...,n\}$ y $s\neq t$.

Distinguimos dos casos:

Si $t>s$ (el jugador n ocupa en el orden óptimo una posición posterior a la que ocupa el jugador 1).

$$v[1,n]-v(1,n)=$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left[\min\left\{[(\alpha_{i_1}-\alpha_1)\left((|Pre_{\sigma_0}(1)|+2)p-d\right)]_+, p(\alpha_{i_1}-\alpha_1)\right\}\right]_+ \\
& + \sum_{k=3}^{s}\left[\min\left\{\left[(\alpha_{i_{k-1}}-\alpha_1)\left((|Pre_{\sigma_0}(1)|+k)p-d\right)\right]_+, p(\alpha_{i_{k-1}}-\alpha_1)\right\}\right]_+
\end{aligned}
$$

$$=v[1,n)-v(1,n).$$

En el cálculo de la anterior expresión se intercambia el jugador 1 con el resto de los jugadores hasta que alcanza la posición i_s que es la que ocupa en el óptimo. El hecho de que $t > s$ hace que la última igualdad sea cierta.

Sea $t < s$ (el jugador n ocupa en el orden óptimo una posición anterior a la que ocupa el jugador 1).

$$v[1,n] - v(1,n] =$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \left[\min\left\{[(\alpha_{i_1} - \alpha_1)((|Pre_{\sigma_0}(1)| + 2)p - d)]_+, p(\alpha_{i_1} - \alpha_1)\right\}\right]_+ \\
& + \sum_{k=3}^{t} \left[\min\left\{\left[(\alpha_{i_{k-1}} - \alpha_1)((|Pre_{\sigma_0}(1)| + k)p - d)\right]_+, p(\alpha_{i_{k-1}} - \alpha_1)\right\}\right]_+ \\
& + \left[\min\left\{[(\alpha_{i_t} - \alpha_1)((|Pre_{\sigma_0}(1)| + t + 1)p - d)]_+, p(\alpha_{i_t} - \alpha_1)\right\}\right]_+ \\
& + \sum_{k=t+2}^{s} \left[\min\left\{\left[(\alpha_{i_{k-1}} - \alpha_1)((|Pre_{\sigma_0}(1)| + k)p - d)\right]_+, p(\alpha_{i_{k-1}} - \alpha_1)\right\}\right]_+ .
\end{aligned}$$

Mientras que

$$v[1,n) - v(1,n) =$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \left[\min\left\{[(\alpha_{i_1} - \alpha_1)((|Pre_{\sigma_0}(1)| + 2)p - d)]_+, p(\alpha_{i_1} - \alpha_1)\right\}\right]_+ \\
& + \sum_{k=3}^{t} \left[\min\left\{\left[(\alpha_{i_{k-1}} - \alpha_1)((|Pre_{\sigma_0}(1)| + k)p - d)\right]_+, p(\alpha_{i_{k-1}} - \alpha_1)\right\}\right]_+ \\
& + \sum_{k=t+2}^{s} \left[\min\left\{\left[(\alpha_{i_{k-1}} - \alpha_1)((|Pre_{\sigma_0}(1)| + k - 1)p - d)\right]_+, p(\alpha_{i_{k-1}} - \alpha_1)\right\}\right]_+ .
\end{aligned}$$

Fácilmente se comprueba que los primeros $t-1$ sumandos coinciden, el sumando t de la primera expresión es siempre no negativo, y el sumando $t+l$ de la primera expresión es mayor o igual que el sumando $t+l-1$ de la segunda expresión para todo $l = 1, ..., s-t-1$. De esto se deduce que el juego asociado es convexo. ■

Nota 3.11 El problema de obtener el orden óptimo requiere a menudo cálculos laboriosos y resulta en ocasiones computacionalmente "intratable". En el caso de que todos los tiempos de proceso coincidan ($p_i = p$ para todo $i \in N$) se puede encontrar en la tesina de licenciatura de Slikker (1993) un algoritmo de laborioso cálculo que permite la obtención del orden óptimo. En dicho trabajo se comprueba utilizando el citado algoritmo que para $n \leq 4$ el juego asociado es convexo, sin embargo dicho algoritmo no proporciona ventaja alguna para calcular en el caso general los coeficientes $g_{[k,l]}$.

3.5 Valores para juegos de secuenciación

El hecho de que el juego asociado a la situación de secuenciación sea convexo nos asegura que el núcleo del juego es no vacío. Seleccionar dentro del núcleo alguna asignación en base a ciertos criterios proporciona un reparto de la ganancia total que pueden alcanzar los jugadores involucrados si cooperan, lo que supone en este caso reordenarse según un orden óptimo. En esta sección estudiamos algunos conceptos de solución para los juegos de secuenciación asociados. En juegos σ_0-aditivos en donde inicialmente se parte de un orden σ_0, y particularmente en juegos de secuenciación, ha sido definido un concepto de solución (la regla β) introducido por Curiel *et al.* (1994) que tiene en cuenta para cada jugador únicamente dos contribuciones marginales, la de los predecesores y la de los seguidores. Además, en el caso de los juegos de secuenciación asociados al criterio de costes lineal en el tiempo, esta regla de asignación coincide con la solución de igual ganancia entre jugadores contiguos (EGS), y por tanto está en el núcleo del juego (N, v). Definimos formalmente la regla β del juego σ_0- aditivo (N, v) como:

$$\beta_i(N,v) = \frac{1}{2}\left(v(P(\sigma_0,i) - v(P(\sigma_0,i))\right) + \frac{1}{2}\left(v(F(\sigma_0,i),i) - v(F(\sigma_0,i))\right).$$

La siguiente proposición expresa la regla de asignación β y el valor de Shapley en función de los coeficientes $g_{[k,l]}$.

Proposición 3.2 *Sea (N, v) un juego σ_0-aditivo en componentes. Entonces para cada $i \in N$*

- *La regla de asignación β se puede escribir en función de los coeficientes $g_{[k,l]_{\sigma_0}}$ de la siguiente forma*

$$\beta_i(N,v) = \frac{1}{2}\left[\sum_{[m,i]_{\sigma_0} \subset \left[\sigma_0^{-1}(1),i\right]_{\sigma_0}} g_{[m,i]_{\sigma_0}} + \sum_{[i,s]_{\sigma_0} \subset \left[i,\sigma_0^{-1}(n)\right]_{\sigma_0}} g_{[i,s]_{\sigma_0}}\right]$$

- *El valor de Shapley se puede escribir en función de los coeficientes $g_{[k,l]_{\sigma_0}}$ de la siguiente forma*

$$Sh_i(N,v) = \sum_{i \in [k,l]_{\sigma_0} \subset N} g_{[k,l]_{\sigma_0}}\left(\left|[k,l]_{\sigma_0}\right|\right)^{-1}.$$

Demostración.
Para cada $k, l \in N$ tal que $\sigma_0(k) \leq \sigma_0(l)$

$$\begin{aligned}
v([k,l]_{\sigma_0}) - v([k,l)_{\sigma_0}) &= \sum_{[m,s]_{\sigma_0} \subset [k,l]_{\sigma_0}} g_{[m,s]_{\sigma_0}} - \sum_{[m,s]_{\sigma_0} \subset [k,l)_{\sigma_0}} g_{[m,s]_{\sigma_0}} \\
&= \sum_{[m,l]_{\sigma_0} \subset [k,l]_{\sigma_0}} g_{[m,l]_{\sigma_0}} \\
v([k,l]_{\sigma_0}) - v((k,l]_{\sigma_0}) &= \sum_{[m,s]_{\sigma_0} \subset [k,l]_{\sigma_0}} g_{[m,s]_{\sigma_0}} - \sum_{[m,s]_{\sigma_0} \subset (k,l]_{\sigma_0}} g_{[m,s]_{\sigma_0}} \\
&= \sum_{[k,s]_{\sigma_0} \subset [k,l]_{\sigma_0}} g_{[k,s]_{\sigma_0}}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera expresión $k = \sigma_0^{-1}(1)$ y $l = i$ y en la segunda expresión $k = i$ y $l = \sigma_0^{-1}(n)$ podemos reescribir la regla de asignación β tal y como se enuncia en la proposición.

Utilizando el hecho de que el valor de Shapley es lineal y satisface las propiedades de simetría y jugador nulo obtenemos que

$$Sh_i(v) = \sum_{i \in [k,l]_{\sigma_0} \subset N} g_{[k,l]_{\sigma_0}} Sh_i(u_{[k.l]_{\sigma_0}}) = \sum_{i \in [k,l]_{\sigma_0} \subset N} g_{[k,l]_{\sigma_0}} (\left|[k,l]_{\sigma_0}\right|)^{-1}. \blacksquare$$

3.6 Conclusiones

Los juegos de secuenciación con fechas límite son otro ejemplo más en los que el orden es un elemento inherente al problema que no se puede desvincular del mismo. En este capítulo han sido estudiadas algunas propiedades de estos juegos. Hemos visto que son juegos superaditivos, equilibrados y que en general no son convexos. Cuando la función de coste es lineal en el tiempo es fácil comprobar que los juegos asociados son convexos. Sin embargo al considerar funciones de coste no lineales en el tiempo la propiedad de convexidad se pierde en el caso general y por ello estudiamos con detalle diferentes casos en los que esta propiedad se conserva. Una de las principales aportaciones es la importante reducción en el número de condiciones que necesitan ser verificadas para la convexidad.

A continuación presentamos una tabla que resume los resultados obtenidos al estudiar la convexidad en los juegos asociados a las situaciones de secuenciación con fechas límite utilizando c^1 (función de coste de penalización ponderada) y c^2 (función de coste de penalización ponderada por el retraso).

(N,v)	c^1	c^2
$\alpha_i = \alpha$, $p_i = p$, $d_i = d$	convexo	convexo
$\alpha_i = \alpha$, $p_i = p$	convexo	convexo
$\alpha_i = \alpha$, $d_i = d$	no convexo	convexo
$p_i = p$, $d_i = d$	convexo	convexo
$p_i = p$	convexo	$n \leq 4$ convexo $n > 4$ ¿?
$d_i = d$	no convexo	no convexo
$\alpha_i = \alpha$	no convexo	no convexo

(Tabla 3.2)

Más investigaciones han de ser realizadas para probar la no convexidad con el criterio c^2 si los tiempos de proceso de todas las tareas son iguales y hay más de cuatro tareas a realizar; hasta el momento todos los ejemplos considerados nos inducen a pensar que el juego asociado es convexo pero no ha sido posible encontrar una demostración de este hecho.

En la última parte se indican dos conceptos de solución para estos juegos, la regla de asignación β y el valor de Shapley. La solución de igual ganancia para jugadores contiguos (EGS) que coincide con la regla de asignación β en los juegos de secuenciación asociados a situaciones de secuenciación con función de costes lineal ha sido caracterizada axiomáticamente; sin embargo la regla β no ha sido hasta el momento caracterizada para los juegos σ_0-aditivos ni para las situaciones de secuenciación que aquí presentamos. Encontrar pues propiedades que la caractericen será una labor a desempeñar en el futuro junto con caracterizar al valor de Shapley en este conjunto de juegos.

Otros propósitos futuros se centran en extender los resultados para los juegos $\Gamma-$aditivos en componentes. En Potters y Reijnierse (1995) se puede encontrar una amplia descripción de estos juegos que contiene a la clase de juegos σ_0-aditivos como subconjunto propio.

Bibliografía

Aumann, R.J. y Peleg, B. (1960). "Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments". Bulletin of the American Mathematical Society, 66, 173-179.

Aumann, R.J. (1961). "The core of a cooperative game without side payments". *Trans. Amer. Math. Soc.,* 98, 539-552.

Aumann, R.J. y Maschler, M. (1985). "Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud". *Journal Economy Theory*, 36, 195-213.

Bergantiños, G. y Mendez-Naya, L. (1997). "New properties in bankruptcy problems". Manuscrito.

Borm, P., Keiding, H., McLean, R.P., Oortwijn, S., y Tijs, S.H. (1992a). "The compromise value for NTU-games". *International Journal of Game Theory*, 21, 175-189.

Borm, P., Owen, G. y Tijs, S. (1992b). "On the position value for communication situations". *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5, 305-320.

Calvo, E., Lasaga J. y Winter E. (1996). "The principle of balanced contributions and hierarchies of cooperation". *Mathematical Social Sciences*, 31, 171-182.

Curiel, I., Maschler, M. y Tijs, S.H. (1987). "Bankruptcy games". *Zeitschrift für Operations Research*, 31, A143-A159.

Curiel, I., Pederzoli G. y Tijs, S.H. (1989). "Sequencing games". *European Journal of Operational Research*, 40, 344-351.

Curiel I.J., Potters J.A.M., Rajendra Prasad V., Tijs S. y Veltman B. (1993). "Cooperation in one-machine scheduling". *Zeitschrift für Operations Research*, 38, 113-129.

Curiel I.J., Potters J.A.M., Rajendra Prasad V., Tijs S. y Veltman B. (1994). "Sequencing and cooperation". *Operations Research*, 42, 566-568.

Dagan, N. (1996). "New characterizations of old bankruptcy rules". *Social Choice and Welfare*, 13, 51-59.

Gillies B. (1953). Some theorems on $n-$person games. Ph.D. Dissertation, Princeton University Press, Princeton, USA.

Harsanyi, J.C. (1963). "A simplified bargaining model for the $n-$person cooperative game". *International Economic Review,* 4, 194-220.

Hart, S. y Mas-Colell, A. (1989). "Potential, value, and consistency". *Econometrica,* 57, 589-614.

Ichiishi, T. (1981). "Super-modularity: applications to convex games and the greedy algorithm for LP". *Journal of Economic Theory*, 25, 283-286.

Kalai, E. y Samet, D. (1987). "On weighted Shapley values". *International Journal of Game Theory,* Vol. 16, Issue 3, 205-222.

Laan, G. van der, Talman D. y Yang Z. (1994). "Modelling cooperative games in permutacional structure". Discussion paper, Tinbergen Institute. The Netherlands.

Lawler E.L. (1976). "Sequencing to minimize the weighted number of tardy jobs". *Revue française d'automatique, informatique, recherche operationelle*, 10.5 suppl., 27-33.

Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A. y Shmoys D. (1993). Sequencing and sheduling: algorithms and complexity. In: Logistics of Prod-uction and Inventory (Eds. Graves S., Rinnooy Kan A., Zipkin P.). North Holland, 445-522.

Maschler, M. y Owen, G. (1989). "The consistent Shapley value for hyperplane games". *International Journal of Game Theory*, 18, 389-407.

Maschler, M. y Owen, G. (1992). "The consistent Shapley value for games without side payments". *Rational Interaction* (Ed. R. Selten). Springer-Verlag, 5-12.

Moder, J.J. y Phillips, C.A. (1970). Project management with CPM and PERT, Van Nostrand.

Myerson, R.B. (1977). "Graphs and cooperation in games". *Mathematics of Operation Research* 2, 225-229.

Myerson, R.B. (1980). "Conference structures and fair allocation rules". *International Journal of Game Theory*, Vol. 9, 169-182.

Nash, J.F. (1950). "The bargaining problem". *Econometrica*, 18, 155-162.

Nash, J.F. (1951). "Non-cooperative games". *Annals of Mathematics,* 54, 286-295.

Neumann, J.von y Morgenstern, O. (1944). Theory of games and economic behaviour. Princeton University Press, Princeton.

Nouweland, A. van den (1993). Games and graphs in economic situations. Ph.D. Dissertation. University of Tilburg. The Netherlands.

Nowak, A.S. y Radzik, T. (1994). "The Shapley value for n-Person games in generalized characteristic function form". *Games and Economic Behaviour,* 6, 150-161.

O'Neill, B. (1982). "A problem of rights arbitration from the Talmud". *Mathematical Social Sciences*, 2, 345-371.

Otten, G., Borm, P., Peleg, B. y Tijs, S.H. (1998). "The MC-value for monotonic NTU-games". *International Journal of Game Theory,* 27, 37-47.

Owen, G. (1968). "A note on the Shapley value". *Management Science*, Vol. 14, 11, 731-732.

Owen, G. (1972). "Multilinear extensions of games". *Management Science*, Vol. 18, 5, 64-79.

Owen, G. (1977). " Values of games with a priori unions". *Essays in Mathematical Economics and Game Theory.* Hann and O. Moeschlin (Eds.) Berlin-Heidelberg: New York, 76-88.

Owen, G. (1986). "Values of graph-restricted games". *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, 7, 210-220.

Potters J. y Reijnierse H. (1995). "$\Gamma-$component additive games". *International Journal of Game Theory*, 24, 49-56.

Sánchez, E. y Bergantiños, G. (1997). "On values for generalized characteristic functions". *OR Spektrum,* 19, 229-234.

Sánchez, E. y Bergantiños, G. (1999). "Coalitional values and generalized characteristic functions". *Mathematical Methods of Operations Research*, pendiente de imprenta, aparecerá en vol. 49, Issue 3.

Selten, R. (1975). "Reexamination of the perfectness concepts for equilibrium points in extensive games". *International Journal of Game Theory,* 4, 25-55.

Shapley, L.S. (1953a). "Additive and non-additive set functions", Ph.D. Thesis, Department of Mathematics. Princeton University.

Shapley, L.S. (1953b). "A value for n-persons games " in Contributions to the Theory of Games II. Annals of Mathematics Studies 28 (H.W. Kuhn and A. W. Tuker, Eds.), 307- 317. Princeton, NJ. Princeton Univ. Press.

Shapley, L.S. (1969). "Utility comparison and the theory of games", en *La Decision, Aggregation et Dynamique des Ordres de Preference*, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, París, 251-263.

Shapley, L.S. (1971). "Cores of convex games". *International Journal of Game Theory*, 1, 11-26.

Slikker M. (1993). "On games arising from sequencing situations with due dates".Term Paper (en Holandes). Universidad de Tilburg.

Smith W. (1956). "Various optimizers for single-stage production". *Naval Research Logistics Quarterly*, 3, 59-66.

Tijs, S.H. (1981). "Bounds for the core and the $\tau - value$". Game Theory and Mathematical Economics (Eds. O. Moeschin and D. Pallaschke), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, The Netherlands, 123-132.

Tijs, S.H., Parthasarathy T., Potters J. y Rajendra Prasad V. (1984). "Permutation games: another class of totally balanced games". *OR Spektrum*, 6, 119-123.

Winter, E. (1992). "The consistency and potencial for values of games with coalition structure". *Games and Economic Behavior,* 4, 132-144.

Young, H.P. (1985). "Monotonic solutions of cooperatives games". *International Journal of Game Theory,* 14, 65-72.

Young, H.P. (1988). "Distributive justice in taxation". *Journal Economic Theory,* 44, 321-335.

Zumsteg S.M. (1995). Non-Cooperative Aspects of Cooperative Game Theory and Related Computational Problems. Ph.D. Dissertation. Zürich.

Índice de Materias